

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Mécanique et d'Electromécanique



N° Ref :.....

Projet de fin d'étude préparé en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

en Génie Mécanique

Spécialité : ÉNERGÉTIQUE

Analyse du transfert de chaleur par convection naturelle contenant un matériau à changement de phase nano-encapsulé dans une cavité carrée confiné soumise à l'effet d'un champ magnétique

Réalisé par :

BOUKESSIRA Rayane

Soutenu devant le jury :

M. BENDJAGHLOULI Ali	M.C.A	Président
M. TOUAHRIA Abdeldjaouad	M.C.B	Examineur
M. BERRAHIL Farid	M.C.A	Encadreur
M. SAOULI Salah	Prof.	Co-encadreur

Année universitaire : 2024/2025

Dédicace

Je voudrais dédier ce modeste travail à tous ceux qui sont chers à mon cœur :

À mes parents, Nadja et Samir, Aucun mot ne saurait exprimer pleinement l'amour que je vous porte, ni la profonde reconnaissance que je ressens pour tous les efforts et les sacrifices que vous avez inlassablement consentis pour mon éducation et mon bien-être. Ce travail est aussi le fruit de votre soutien indéfectible, et j'espère, de tout cœur, avoir été à la hauteur des espoirs que vous avez placés en moi.

À mes chers frères «Ahmed et Moustapha » et mes chères sœurs «Salsabil, Nouralhouda et Aridge » sachez que je vous aime et serai toujours là pour vous épauler.

À toute la famille «BOUKESSIRA et FREDJE».

À mes meilleures amies « Roukia , Samah, Fairouse ,Ines, Ikram,Wafa,Dounia Abir Narimane,bassma,fatima ,mariem et saloua ».

À tous mes enseignants, du primaire jusqu'à l'université, Je vous adresse mes sincères remerciements pour l'ensemble des connaissances transmises, votre patience, votre dévouement et votre rôle fondamental dans la construction de mon parcours académique. Chacun de vous a, à sa manière, contribué à faire de moi la personne que je suis aujourd'hui.

À tous mes collègues de la promotion 2021-2025, Pour votre amitié sincère, votre soutien indéfectible et les souvenirs inoubliables que nous avons partagés tout au long de notre parcours. Merci pour votre présence, votre entraide et ces instants de complicité qui ont marqué ces années d'études. Votre amitié a été un véritable moteur tout au long de cette aventure. Et enfin à tous ceux qui m'ont Souhaité le succès et la réussite.

À toutes mes collègues de l'EPSP de Chelghoum Laïd et de l'EPSP d'Aïn Beïda Heriche,Je vous remercie sincèrement pour votre aide, votre soutien et votre collaboration bienveillante tout au long de cette expérience.

Remerciement

Ce mémoire représente l'aboutissement de cinq années d'efforts, de découvertes et de passion pour les sciences énergétiques.

Je tiens tout d'abord à remercier «ALLAH » le Tout-Puissant, qui m'a illuminé le chemin du savoir, m'a ouvert les portes de la connaissance, et m'a accordé le courage, la force, la santé, la volonté, la patience ainsi que les moyens nécessaires pour mener à bien ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier toute personne ayant eu la bonté et la patience de satisfaire mon curiosité et de m'aider dans mon travail par leurs précieux conseils.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes encadrants, Monsieur Pr. Saouli Salah et Monsieur Dr. Berrahil Farid, pour leur accompagnement constant, leurs conseils avisés, leur rigueur scientifique et leur disponibilité tout au long de ce travail. Leur encadrement a été d'une grande richesse, tant sur le plan technique que méthodologique, et a grandement contribué à la qualité de ce mémoire.

J'aimerais exprimer ma reconnaissance la plus profonde à Monsieur Métatla Noureddine, une personne que je ne pourrai jamais assez remercier tant son implication et son dévouement ont été précieux tout au long de ce travail. Il a toujours su se montrer disponible. Son soutien a été déterminant, en particulier lors du lancement des calculs, étape essentielle dans l'avancement de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude aux membres du jury : Monsieur Dr Ben djaghlouli Ali, président du jury, Monsieur Dr Touahria Abdeldjaouade, examinateur, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer ce travail. Leurs remarques pertinentes, leurs conseils avisés et leur regard critique ont apporté une réelle valeur ajoutée à ce mémoire.

Je remercie l'ensemble de mes enseignants pour la qualité de leur enseignement, leur disponibilité et leur accompagnement tout au long de ma formation. Grâce à eux, j'ai pu acquérir les connaissances et les compétences nécessaires à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mes enseignantes du département de sciences et technologies, en particulier celles du domaine de l'énergétique, pour la qualité de leur en

Résumé

Cette étude numérique explore la convection naturelle d'un NEPCM dans une enceinte, soumise à l'influence d'un champ magnétique externe horizontal. Les particules de NEPCM possèdent une structure noyau-enveloppe, avec un matériau à changement de phase (PCM) en tant que noyau. Le noyau des particules de NEPCM est constitué de n-octadécane, tandis que la coquille est en PMMA (polyméthacrylate de méthyle). Les nanoparticules sont dispersées dans de l'eau servant de fluide de base (L'eau). L'enceinte considérée est une cavité carrée, avec les parois horizontales (supérieure et inférieure) isolées thermiquement. Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie thermique pour la suspension de NEPCM sont présentées sous forme d'équations aux dérivées partielles. Ces équations sont ensuite rendues adimensionnelles et résolues par la méthode des volumes finis via un programme Fortran. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour le couplage vitesse-pression. L'impact des paramètres comme les nombres de Rayleigh et de Stefan, la température de fusion des nanoparticules et le champ magnétique est analysé. Les résultats montrent que l'augmentation de Ra et la température de fusion stimule l'écoulement, favorisant la convection et améliorant significativement le transfert de chaleur grâce aux nanoparticules. À l'inverse, l'augmentation du nombre de Hartmann (Ha) réduit le transfert de chaleur en freinant le mouvement du fluide sous l'effet de la force de Lorentz. Par ailleurs, l'augmentation du nombre de Stefan traduit une diminution de la chaleur latente des noyaux de PCM, ce qui entraîne une réduction du transfert thermique.

Mots clés :

Convection naturelle, NEPCM, Champ magnétique, cavité carrée.

ملخص

تتناول هذه الدراسة العددية ظاهرة الحمل الحراري الطبيعي لمواد تغيير الطور النانوية المغلفة (NEPCM) داخل تجويف تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي أفقي. تمتلك جسيمات NEPCM بنية ذات نواة وقشرة، حيث تمثل مادة تغيير الطور (PCM) النواة. وتتكون نواة الجسيمات من مادة *n-octadecane*، في حين أن القشرة مصنوعة من مادة (PMMA) بولي ميثاكريلات الميثيل. (تنتشر الجسيمات النانوية في الماء المستخدم كسائل أساسي. الحجرة المدروسة عبارة عن تجويف مربع، حيث أن الجدران الأفقية (العلوية والسفلية) معزولة حراريًا. تم تقديم معادلات حفظ الكتلة، وكمية الحركة، والطاقة الحرارية لمعلق NEPCM على شكل معادلات تفاضلية جزئية. ثم تم تحويل هذه المعادلات إلى الشكل اللاغدي، وتم حلها باستخدام طريقة الحجم المحدودة عبر برنامج مكتوب بلغة Fortran استخدم خوارزمية SIMPLER لربط السرعة بالضغط. تم تحليل تأثير معاملات مثل عددي Stefan و Rayleigh، ودرجة انصهار الجسيمات النانوية، والمجال المغناطيسي. أظهرت النتائج أن زيادة عدد Rayleigh ودرجة حرارة الانصهار تعزز التدفق، مما يساهم في تحسين الحمل الحراري وزيادة فعالية نقل الحرارة بفضل الجسيمات النانوية. على العكس، فإن زيادة عدد Hartmann تقلل من انتقال الحرارة عن طريق إبطاء حركة السائل بفعل قوة Lorentz كما أن زيادة عدد Stefan تدل على انخفاض الحرارة الكامنة لنوى PCM، وبالتالي انخفاض كفاءة انتقال الحرارة.

الكلمات المفتاحية:

الحمل الحراري الطبيعي، NEPCM، المجال المغناطيسي، تجويف مربع.

Abstract

This numerical study examines the natural convection of a NEPCM within an enclosure influenced by a horizontal external magnetic field. The NEPCM particles have a core-shell structure, with a phase change material (PCM) as the core. The core of the NEPCM particles is composed of noctadecane, while the shell is made of PMMA (polymethyl methacrylate). The nanoparticles are dispersed in water, which serves as the base fluid. The considered enclosure is a square cavity with thermally insulated horizontal walls (top and bottom). The conservation equations of mass, momentum, and thermal energy for the NEPCM suspension are formulated as partial differential equations. These equations are then made dimensionless and solved using the finite volume method via a Fortran program. The SIMPLER algorithm is employed for velocity-pressure coupling. The impact of parameters such as the Rayleigh and Stefan numbers, the melting temperature of the nanoparticles, and the magnetic field are analyzed. The results show that increasing Ra and the melting temperature enhance flow, promote convection, and significantly improve heat transfer due to the presence of nanoparticles. Conversely, Ha reduces heat transfer by slowing down fluid motion through the Lorentz force effect. An increase in the Stefan number indicates a decrease in the latent heat of the PCM cores, thereby reducing heat transfer.

Keywords:

Natural convection, NEPCM, Magnetic field, Square cavity.

Table des matières

NOMENCLATURE	VIII
LETTRES GRECS	IX
TABLE DES FIGURES	ERREUR ! SIGNET NON DÉFINI.
LISTE DES TABLEAUX	XIII
INTRODUCTION GÉNÉRALE	ERREUR ! SIGNET NON DÉFINI.
CHAPITRE I	ERREUR ! SIGNET NON DÉFINI.
RECHERCHES BIBLIOGRAPHIQUES	ERREUR ! SIGNET NON DÉFINI.
CHAPITRE II	ERREUR ! SIGNET NON DÉFINI.
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE	ERREUR ! SIGNET NON DÉFINI.
II.1 Introduction :	14
II.2 Hypothèses simplificatrices :	14
II.3 Equations de base :	17
II.4 Géométrie du problème :	18
II.5 MODÉLISATION MATHÉMATIQUE :	19
CHAPITRE III	ERREUR ! SIGNET NON DÉFINI.
MÉTHODE NUMÉRIQUE	26
III.1 Introduction :	26
III.2 Formulation générale de l'équation de transport :	26
III.3 Maillage :	27
III.4. Discrétisation des équations mathématiques :	29
III.4.1. Discrétisation de l'équation générale de transport :	29
III.4.2. Equation de continuité :	31
III.4.3. Equation de quantité du mouvement suivant x :	31
III.4.4. Equation de quantité du mouvement suivant y :	33
III.4.5 Équation d'énergie :	36
III.5. Méthode de résolution :	37

III.5.1. Equation de pression :	37
III.5.2. Technique de balayage et l’algorithme de Thomas :	40
III.5.3 Algorithme de calcul SIMPLER :	43
III.5.4 Critère de convergence :	44
CHAPITRE IV	45
RÉSULTATS ET DISCUSSION	45
IV.1 Introduction :	45
IV.2 Effet du maillage :	45
IV.3 Validation du code :	46
IV.4 Résultats et discussion :	48
CONCLUSION GÉNÉRALE	59
RÉFÉRENCES	61

Nomenclature

Lettre latins

A	Rapport d'aspect
$A(P)$	Fonction d'un schéma numérique en fonction du nombre de Péclet
A_P, A_E, A_W, A_N, A_S	Coefficients de l'équation algébrique de transport discrétisée
B	Champ magnétique, [T]
c_p	Chaleur spécifique à pression constante, [$J \cdot Kg^{-1} \cdot K^{-1}$]
c_r	Rapport des capacités calorifiques
f	Fonction de fusion adimensionnelle définie par l'équation
F_e, F_w, F_n, F_s	Flux convectifs aux interfaces e, w, n, s des équations discrétisées
D_e, D_w, D_n, D_s	Flux diffusifs aux interfaces e, w, n, s des équations discrétisées
Da	Nombre de Darcy
g	Accélération de la pesanteur, [$m \cdot s^{-2}$]
Ha	Nombre de Hartmann
h	Coefficient de transfert de chaleur local, [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]
k	Conductivité thermique du fluide, [$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$]
H	Hauteur de la cavité, [m]
T	Température, [K]
Nu	Nombre de Nusselt local
\overline{Nu}	Nombre de Nusselt moyen
N_c	Paramètre de conductivité
N_v	Paramètre de viscosité

p	Pression, [$N \cdot m^{-2}$]
P	Pression adimensionnelle
P_e, P_w, P_n, P_s	Nombre de Péclet aux interfaces e, w, n, s
Pr	Nombre de Prandtl
Ra	Nombre de Rayleigh
Ha	Nombre de Hartmann
St	Nombre de Stefan
T	Température ($^{\circ}C$)
T	Temps dimensionnel, []
T_{Mr}	Intervalle de température de changement de phase $T_{Mr} = T_2 - T_1$
x, y	Coordonnées dimensionnelles, [m]
X, Y	Coordonnées adimensionnelles
u, v	Vitesses dimensionnelles suivant les directions x, y, [$m \cdot s^{-1}$]
U, V	Vitesses adimensionnelles

Lettres grecs

α	Diffusivité thermique, [$m^2 \cdot s^{-1}$]
γ	Angle d'orientation du champ magnétique
β	Coefficient d'expansion thermique. [K^{-1}]
δ	Paramètre adimensionnel de l'intervalle de fusion
θ_f	Température de fusion adimensionnelle
λ	Rapport de la capacité calorifique des nanoparticules NEPCM à celle du fluide de base
ζ	Rapport masse noyau/enveloppe
σ	la conductivité électrique.

μ	Viscosité dynamique
ρ	Masse volumique, [$kg \cdot m^{-3}$]
φ	Fraction volumique des nanoparticules NEPCM
τ	Temps adimensionnel, [s]
ψ	Fonction de courant adimensionnelle
Γ	Coefficient de diffusion.
ϕ	Fraction volumique des nanoparticules.
\emptyset	Variable générale.
$\Delta\tau$	Pas du temps adimensionnel.

Indices et exposants

b	Propriétés globales de la suspension
c	Froid
f	Fluide de base / Propriétés de fusion
h	Chaud
e, w, n, s	Faces du volume de contrôle est, ouest, nord, sud
E, W, N, S	Nœuds des volumes de contrôle adjacents est, ouest, nord, sud
l	Phase liquide des noyaux NEPCM
max	Maximum
p	Point au centre du volume de contrôle considéré
p	Particule
s	Solide
u	Maillage décalé suivant la direction x
v	Maillage décalé suivant la direction y

Table des figures

Figure (I.1) :	Structures typiques d'un matériau à changement de phase encapsulé.....	4
Figure (I.2) :	Schéma d'un dissipateur thermique à microcanaux et à microtubes avec impact tangentiel.....	5
Figure (I.3) :	(a) Photographies MEB de nano-capsules (b) Distribution des particules nano-capsules.....	6
Figure (I.4) :	Modèle physique et système de coordonnées.....	6
Figure (I.5) :	Configuration du problème physique.....	7
Figure (I.6) :	la cavité en forme de L inclinée.....	8
Figure (I.7) :	Configuration du problème.....	8
Figure (I.8) :	Géométrie de l'étude.....	9
Figure (I.9) :	Configuration du problème étudié.....	10
Figure (I.10) :	Modèle physique appliqué.....	11
Figure (I.11) :	Modèle initial d'un anneau entre des cylindres ondulés.....	11
Figure (I.12) :	Géométrie étudiée avec les conditions aux limites.....	12
Figure (I.13) :	Schéma du problème.....	13
Figure (II.2) :	Géométrie du problème avec les conditions aux limites.....	19
Figure (III.1) :	Volume de contrôle typique dans le plan (x-y).	28
Figure (III.2) :	Volume de contrôle décalé.	28
Figure (IV.1) :	Comparaison des lignes de courant et des isothermes.(Nos résultats (a) et les résultats de Ghalambaz et al. (b).....	47
Figure (IV.2) :	Figure (IV.2) : Effet du nombre de Rayleigh (Ra) sur les lignes de courant, les isothermes et les lignes de rapport de capacité thermique (Cr) pour $\theta_f = 0.5$, $Ste = 0.5$, $N_v = 3$, $N_c = 3$ et $Ha = 0$	49
Figure (IV.3) :	Figure (IV.3) : Effet de la température de fusion θ_f sur les lignes de courant, les isothermes et les lignes de rapport de capacité thermique (Cr) pour $Ra = 10^6$, $Ste = 0.8$, $N_v = 3$, $N_c = 3$ et $Ha = 0$	51
Figure (IV.4) :	Figure (IV.4) : Effet du nombre de Stefan Ste sur les lignes de courant, les isothermes et les lignes de rapport de capacité thermique (Cr) pour	

$Ra = 10^6, \theta_f = 0.3, N_v = 3, N_c = 3$ et $Ha = 0$53

Figure (IV.5) : Effet du nombre de Hartmann Ha sur les lignes de courant, les isothermes et les lignes de rapport de capacité thermique (Cr) pour $Ra = 10^6, = 0.4, \theta_f = 0.6, N_v = 6$ et $N_c = 6$54

Figure (IV.6) : Effet de la température de fusion sur \bar{Nu} pour $Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6, = 3 N_c = 3$ et $Ha = 0$54

Figure (IV.7) : l'effet nombre de Stéfán sur \bar{Nu} pour $Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6, = 3 N_c = 3$ et $Ha = 0$55

Figure (IV.8) : Effet nombre de Hartmann sur \bar{Nu} pour $tRa = 10^6, = 3 N_c = 3$ et $ste = 0.5$56

Liste des tableaux

Tableau (II.1) : Propriétés thermo-physiques de l'eau et de NEPCM [10].	17
Tableau (III.1) : Différents termes de l'équation de transport	277
Tableau (III.2) : Fonction A(P) pour différents schémas numériques	31
dTableau (IV.1) : Caractéristiques de l'écoulement et du transfert thermique pour différentes grilles : $Ra = 10^5, ste = 0.3, Ha = 50, \theta = 0.3$ et $\varphi = 0.05$.	42
Tableau (IV.2) : Comparaison des résultats présents avec ceux de Ghalambaz et al pour $Ra = 10^5$.	46
Tableau (IV.3) : Effet du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour les paramètres	57
Tableau (IV.4) : Effet de la viscosité sur le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour $Ra = 10^6$. suivants : $Ra = 10^4, Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6$.	57

Introduction générale

La gestion thermique avancée est devenue un enjeu crucial dans l'optimisation des performances des systèmes énergétiques modernes, des dispositifs électroniques jusqu'aux applications de stockage thermique. Ces recherches trouvent des applications dans l'aérospatial, l'électronique et les énergies renouvelables. Pour répondre aux exigences croissantes en matière d'efficacité thermique, les matériaux à changement de phase nano-encapsulés (NEPCM) se sont révélés particulièrement prometteurs. Leur capacité à stocker et restituer une grande quantité d'énergie sous forme de chaleur latente, tout en améliorant les propriétés de transport thermique du fluide porteur, en fait une solution innovante et efficace.

Les NEPCM sont constitués de particules de matériaux à changement de phase encapsulées à l'échelle nanométrique, ce qui permet une meilleure dispersion, une réponse thermique plus rapide et une surface d'échange accrue. Lorsqu'ils sont suspendus dans un fluide de base, ils forment un nanofluide à changement de phase, capable d'absorber ou de libérer de la chaleur tout en s'écoulant. Cette combinaison rend ces nanofluides particulièrement attractifs pour les applications passives ou semi-passives de refroidissement.

Dans ce contexte, la convection naturelle constitue l'un des mécanismes de transfert de chaleur les plus courants dans les systèmes fermés ou peu énergivores. Lorsque le fluide contenant des NEPCM est soumis à un champ de gravité, les différences de température induisent un mouvement naturel du fluide, favorisant ainsi l'échange thermique. Cependant, dans de nombreuses applications industrielles ou technologiques, les champs magnétiques sont également présents, que ce soit intentionnellement pour le contrôle de l'écoulement, ou comme effet secondaire (par exemple dans les systèmes électroniques ou les dispositifs à induction).

L'étude de la convection naturelle en présence d'un champ magnétique (MHD) implique l'action des forces de Lorentz sur le fluide conducteur. L'introduction de NEPCM complexifie le phénomène par l'ajout d'effets thermophysiques liés au changement de phase. Ce système combine le transfert thermique, l'hydrodynamique, le magnétisme et les matériaux à changement de phase. La modélisation de ces interactions est essentielle pour optimiser les performances de systèmes énergétiques et en particulier ceux dédiés au stockage thermique.

Cette étude vise à explorer les mécanismes de transfert de chaleur par convection naturelle MHD dans des cavités remplies de fluide contenant des NEPCM, en mettant l'accent sur l'influence des paramètres physiques tels que la concentration des particules, la température de fusion, ou encore les propriétés thermophysiques du matériau encapsulé. Une meilleure compréhension de ces phénomènes permettrait de concevoir des systèmes thermiques plus efficaces, compacts et adaptés aux besoins croissants en énergie durable et en gestion thermique intelligente.

Afin d'atteindre l'objectif fixé dans cette étude, le travail a été structuré en quatre chapitres principaux.

Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique, présentant un aperçu des travaux théoriques, expérimentaux et numériques relatifs à la convection naturelle en cavité confinée, pour différentes configurations et conditions aux limites.

Le deuxième chapitre porte sur la modélisation mathématique du problème étudié. Nous décrivons la configuration physique du système, puis nous formulons les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, accompagnées des conditions aux limites correspondantes.

Le troisième chapitre est dédié à la méthodologie numérique. Nous détaillons la méthode des volumes finis utilisée pour la résolution du système d'équations différentielles, en précisant le schéma de discrétisation, le maillage utilisé ainsi que l'algorithme SIMPLER adopté pour le couplage vitesse-pression.

Le quatrième chapitre, qui représente la partie essentielle de ce travail, est dédié à la présentation de la simulation numérique effectuée à l'aide d'un code développé en langage Fortran. Nous validons notre code par comparaison avec des résultats de la littérature, puis nous analysons et discutons les résultats obtenus.

Finalement, nous terminons notre travail avec une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus de cette étude.

Chapitre I

Recherches bibliographiques

I.1 Introduction :

Les systèmes énergétiques jouent un rôle clé dans la collecte, la conversion et la distribution de l'énergie provenant de diverses sources, pour répondre aux besoins de nombreux secteurs tels que les services publics, l'industrie, le bâtiment et les transports. Les sources conventionnelles, comme les combustibles fossiles, présentent l'avantage d'être facilement stockables, permettant une production d'énergie à la demande. En revanche, les sources renouvelables telles que l'énergie solaire ou éolienne sont intermittentes et nécessitent une captation immédiate, suivie d'un stockage efficace pour une utilisation ultérieure.

Dans ce contexte, le stockage d'énergie devient une composante essentielle des systèmes énergétiques modernes. Il permet non seulement d'augmenter la part des énergies renouvelables dans le mix énergétique, mais aussi d'améliorer les performances économiques et la stabilité des réseaux électriques. Parmi ses nombreux avantages figurent : l'égalisation de la charge, la réduction des pics de demande, la régulation de la fréquence, l'atténuation des oscillations de puissance et l'amélioration de la qualité et de la fiabilité de l'alimentation électrique.

Parmi les différentes technologies de stockage, les matériaux à changement de phase (PCM, Phase Change Materials) se distinguent par leur capacité à stocker de grandes quantités d'énergie thermique, grâce à leur chaleur latente de fusion. Lors du passage de l'état solide à l'état liquide (ou inversement), ces matériaux absorbent ou libèrent une quantité considérable d'énergie sans variation notable de température. Le processus de fusion est endothermique, tandis que la solidification est exothermique, ce qui les rend particulièrement adaptés aux applications de gestion thermique.

Les PCM sont aujourd'hui utilisés dans de nombreuses applications : systèmes de chauffage et de climatisation, batteries au lithium, installations solaires thermiques, refroidissement de composants électroniques, textiles techniques, réfrigération, pompes à chaleur et confort thermique des bâtiments.

Cependant, leur faible conductivité thermique, la ségrégation des phases et certains effets de sur-refroidissement limitent encore leur efficacité dans certaines situations. Pour pallier ces limitations, de nombreux chercheurs ont proposé l'intégration de nanoparticules aux PCM, créant ainsi des matériaux à changement de phase nano-améliorés (nano-PCM). Cette méthode

permet d'améliorer la conductivité thermique des matériaux, mais elle peut également modifier d'autres propriétés thermophysiques telles que la viscosité, la chaleur latente et le point de fusion. Il devient donc essentiel d'évaluer avec rigueur l'impact des nanoparticules sur les performances globales des PCM, en tenant compte de leur stabilité, de leur comportement thermique, ainsi que de leur compatibilité avec les systèmes dans lesquels ils sont intégrés.

I.2 Etude bibliographique :

Rao et al. [1] ont étudié numériquement les propriétés thermiques des matériaux à changement de phase (MCP) nano-encapsulés dans le cadre du stockage d'énergie thermique. En utilisant des simulations de dynamique moléculaire, ils ont analysé le comportement de fusion du n-octadécane encapsulé dans une coque de silice (SiO_2). Les résultats montrent que la contrainte mécanique exercée par la coque limite la mobilité des molécules du cœur, réduisant leur coefficient d'autodiffusion et, par conséquent, la capacité de transfert thermique. En revanche, une coque plus souple favorise la fluidité moléculaire, améliorant ainsi les performances thermiques. L'étude démontre l'importance de la conception de la nano-encapsulation dans l'efficacité thermique des MCP. Elle met aussi en évidence l'utilité des simulations à l'échelle nanométrique pour optimiser les propriétés de stockage thermique.

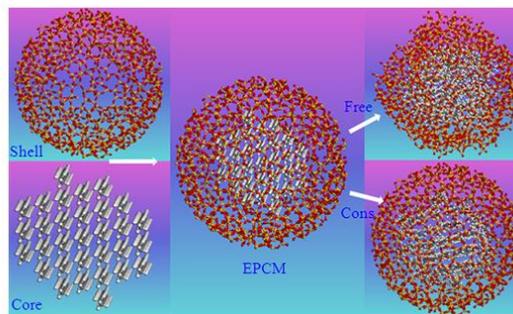


Figure (I.1) : Structures typiques d'un matériau à changement de phase encapsulé.

Reza et al. [2] ont mené une étude numérique sur le transfert de chaleur dans un dissipateur thermique à microtubes, en utilisant un fluide de refroidissement à base de NEPCM soumis à un impact tangentiel. Le modèle tridimensionnel résout les équations d'un écoulement laminaire incompressible via la méthode des volumes finis. L'analyse porte sur les effets de la concentration massique, de la plage de fusion et du nombre de Reynolds sur plusieurs indicateurs thermiques. Les résultats montrent une amélioration notable de l'uniformité thermique, de la performance globale et du nombre de Nusselt. En parallèle, la résistance thermique diminue.

Cependant, l'augmentation de la concentration massique et du nombre de Reynolds provoque une hausse de la chute de pression. L'élargissement de la plage de fusion améliore également les performances thermiques. Enfin, la génération totale d'entropie tend à diminuer lorsque ces paramètres augmentent.

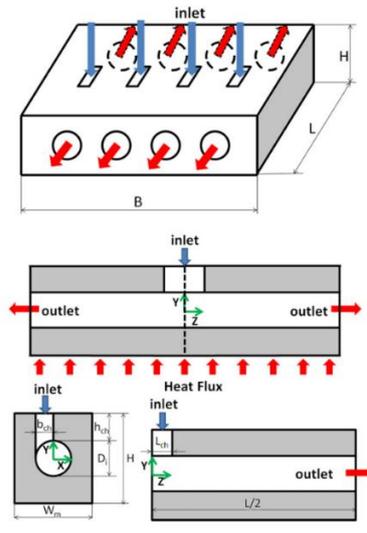


Figure (I.2) : Schéma d'un dissipateur thermique à microcanaux et à microtubes avec impact tangentiel.

Barlak et al. [3] ont réalisé une étude à la fois expérimentale et numérique sur les propriétés thermo-physiques de nanofluides contenant des matériaux à changement de phase nano-encapsulés (NEPCM), en se concentrant sur la conductivité thermique et la viscosité. Les nano-capsules de NEPCM ont été synthétisées et dispersées dans deux fluides de base : l'eau et l'éthylène glycol. L'objectif principal était d'analyser l'impact de la température et de la concentration en particules solides. Les résultats ont montré que la viscosité diminue avec l'élévation de la température, mais augmente avec la concentration en NEPCM. En parallèle, la conductivité thermique augmente avec ces deux paramètres. Cette étude met en évidence le potentiel des nanofluides à base de NEPCM pour améliorer les transferts thermiques. Les auteurs suggèrent d'optimiser les concentrations et les conditions d'utilisation pour adapter ces fluides aux exigences des applications industrielles.

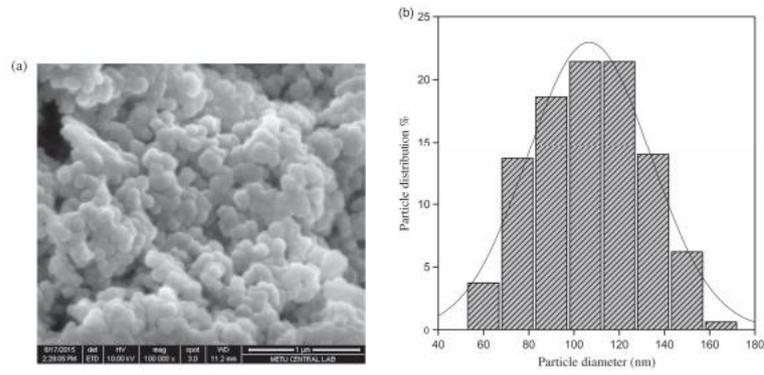


Figure (I.3) : (a) Photographies MEB de nano-capsules (b) Distribution des particules nano-capsules.

Ghalambaz et al. [4] ont réalisé une étude numérique approfondie sur l'écoulement en convection naturelle et le transfert de chaleur dans une cavité contenant une suspension de matériaux à changement de phase nano-encapsulés (NEPCM). L'objectif principal était d'évaluer l'impact de ces particules sur l'amélioration des performances thermiques. L'étude s'est appuyée sur la méthode des éléments finis pour simuler le comportement du fluide et les transferts thermiques. Les auteurs ont exploré l'influence de plusieurs paramètres clés : température de fusion des NEPCM, concentration en particules, nombre de Stefan, et autres nombres adimensionnels. Les résultats obtenus montrent que l'ajout de NEPCM renforce significativement le transfert de chaleur. En particulier, la température de fusion des NEPCM joue un rôle déterminant dans l'optimisation de l'efficacité thermique. Grâce à la possibilité d'ajuster cette température, ces matériaux peuvent être adaptés à des applications ciblées. L'étude met également en évidence l'importance de l'uniformité thermique le long des parois et du contrôle des flux thermiques dans la cavité. Ce travail confirme l'intérêt croissant des NEPCM dans les systèmes de gestion thermique avancée.

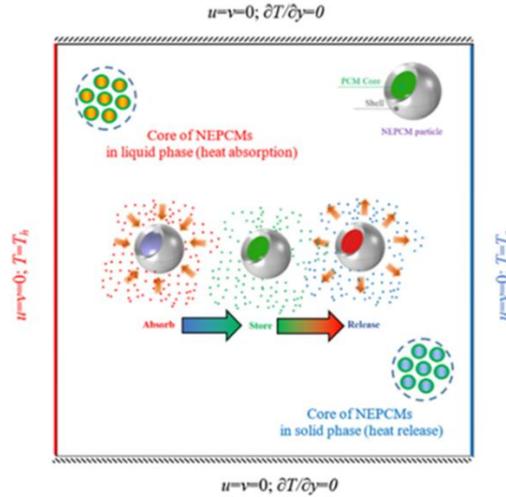


Figure (I.4) : *Modèle physique et système de coordonnées.*

Mehryan et al. [5] ont réalisé une étude numérique sur la convection naturelle d'une suspension de matériaux à changement de phase (PCM) non encapsulés dans un anneau excentré, dans le but d'optimiser le stockage de l'énergie thermique. L'analyse a porté sur l'effet du nombre de Stefan, de la fraction volumique de PCM et de l'excentricité géométrique. Les résultats montrent qu'une concentration optimale de 5 % en PCM améliore nettement le transfert thermique. Une réduction du nombre de Stefan intensifie également l'apport thermique des PCM. Par ailleurs, l'efficacité du transfert de chaleur augmente lorsque la température de fusion diffère de celle des parois. En revanche, un déplacement vertical du cylindre intérieur (excentricité accrue) inhibe le transfert thermique. L'étude révèle que la configuration géométrique influence fortement la performance thermique du système. Ces observations soulignent l'intérêt d'approfondir les recherches expérimentales pour mieux caractériser les comportements des PCM non encapsulés. Une telle compréhension permettrait d'optimiser leur utilisation dans des systèmes de stockage d'énergie thermique à haut rendement.

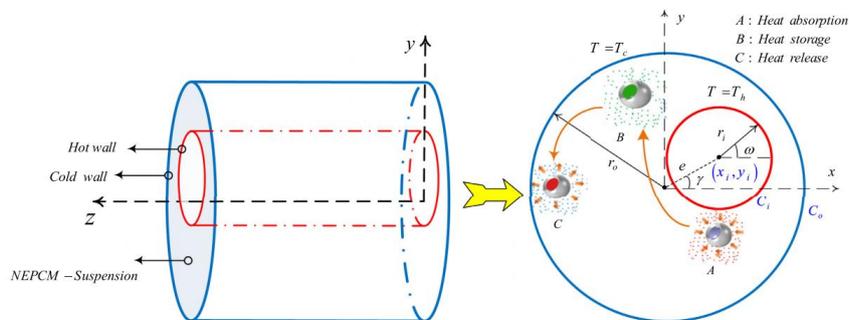


Figure (I.5) : *Configuration du problème physique.*

Sadeghi et al. [6] ont réalisé une étude numérique du comportement hydrothermique de NEPCM dans un fluide micropolaire confiné dans une cavité inclinée en forme de L. En utilisant la méthode des éléments finis, ils ont analysé la convection naturelle et la génération d'entropie. Plusieurs paramètres ont été étudiés : le nombre de Rayleigh, la microrotation, la concentration en nanoparticules, le nombre de Stefan et la température de fusion adimensionnelle. Les résultats montrent que la microrotation, le nombre de Stefan et une température de fusion élevée réduisent le transfert thermique. A l'inverse, une concentration plus importante en nanoparticules améliore ce transfert. L'originalité de l'étude réside dans l'intégration de NEPCM dans un fluide micropolaire au sein d'une géométrie non conventionnelle.

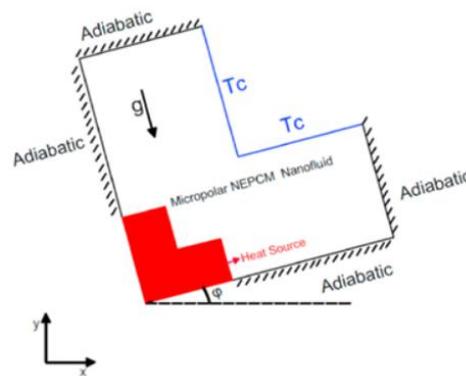


Figure (I.6) : *Cavité en forme de L inclinée.*

Rawa et al. [7] ont mené une étude numérique sur le transfert thermique d'un nanofluide contenant des NEPCM dans une cavité circulaire comportant un cylindre rotatif refroidi et un élément chauffant fixe. L'étude explore les effets combinés de la convection naturelle et mixte sur l'efficacité thermique du système. Les équations d'écoulement et de transfert de chaleur ont été résolues à l'aide de la méthode des volumes finis, avec l'algorithme SIMPLE pour le couplage pression-vitesse. Les simulations ont été réalisées sous OpenFOAM, via des codes développés en C++. L'analyse a porté sur la distribution thermique, la zone de fusion des NEPCM et l'évolution du nombre de Nusselt. Les résultats révèlent que l'ajout de NEPCM dans le fluide améliore significativement le transfert de chaleur. L'optimisation du régime d'écoulement permet d'accroître l'efficacité énergétique du système. Le mouvement du cylindre, combiné aux effets convectifs, influence fortement les performances thermiques.

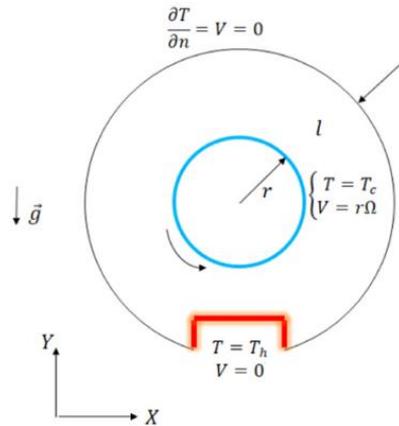


Figure (I.7) : Configuration du problème.

Abderrahmane et al. [8] ont réalisé une simulation numérique du transfert de chaleur dans une cavité 2D remplie d'un nanofluide à changement de phase nano-encapsulé (NEPCM). La géométrie inclut une source de chaleur centrale en forme de flamme, une paroi intérieure ondulée et des parois verticales mobiles, le tout soumis à un champ magnétique. L'étude examine l'effet de plusieurs paramètres : la vitesse et la direction du mouvement des parois, l'intensité du champ magnétique, et la porosité du milieu. Le modèle mathématique est résolu par la méthode des éléments finis de Galerkin. Les résultats montrent que l'augmentation de la vitesse des parois et de la porosité améliore le transfert thermique. A l'inverse, un champ magnétique intense et un mouvement opposé des parois latérales réduisent l'efficacité thermique. L'étude met en évidence les interactions complexes entre hydrodynamique, magnétisme et stockage thermique à changement de phase.

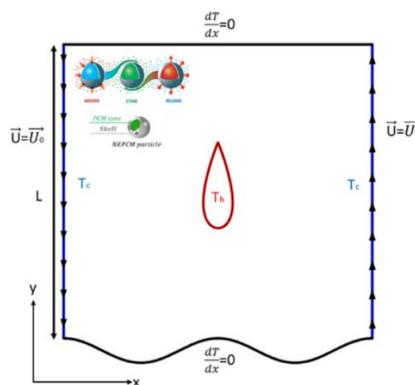


Figure (I.8) : Géométrie de l'étude.

Tayebi et Oztop [9] ont réalisé une étude numérique sur la convection naturelle magnéto-assistée dans un anneau elliptique poreux saturé de matériaux à changement de phase nano-encapsulés

(NEPCM), en considérant un modèle de non-équilibre thermique local (LTNE). Le modèle utilisé est basé sur les équations de Darcy–Brinkman–Forchheimer et résolu à l’aide de la méthode des volumes finis. L’étude se concentre sur l’influence des paramètres du LTNE, notamment le coefficient de transfert thermique interstitiel (H) et le rapport de conductivité thermique entre les phases (γ), sur le transfert de chaleur et l’écoulement. Les résultats montrent que le LTNE améliore significativement les performances thermiques du système. Le champ magnétique contribue également à contrôler le comportement de l’écoulement et la distribution thermique. Cependant, certaines conditions extrêmes étudiées posent des questions sur leur réalisme physique. Cette recherche souligne l’importance d’une modélisation précise pour optimiser les systèmes de stockage thermique à base de NEPCM en milieux poreux.

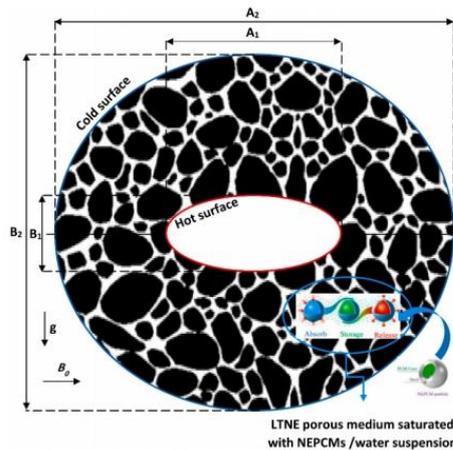


Figure (I.9) : Configuration du problème étudié.

Wang et al. [10] ont développé un système intégré de gestion thermique pour les batteries lithium-ion, combinant des matériaux à changement de phase nano-renforcés, des champs magnétiques et des films électrothermiques. Ce système vise à maintenir la batterie dans sa plage de température optimale pour améliorer sa sécurité et sa longévité. Les NEPCM, soumis à un champ magnétique axial, améliorent l’uniformité thermique et la dissipation de chaleur, surpassant les performances des PCM classiques. Les films électrothermiques assurent un préchauffage efficace à basse température, notamment lorsqu’ils sont placés sur les faces supérieure et inférieure de la batterie. Bien que le chauffage soit légèrement plus lent que celui par circulation, il offre une meilleure homogénéité thermique. Les simulations montrent que ce système réduit significativement la température maximale atteinte durant le fonctionnement. L’approche intégrée s’adapte efficacement aux fluctuations de température. Elle représente une

solution innovante pour la gestion thermique des batteries dans des environnements contraignants.

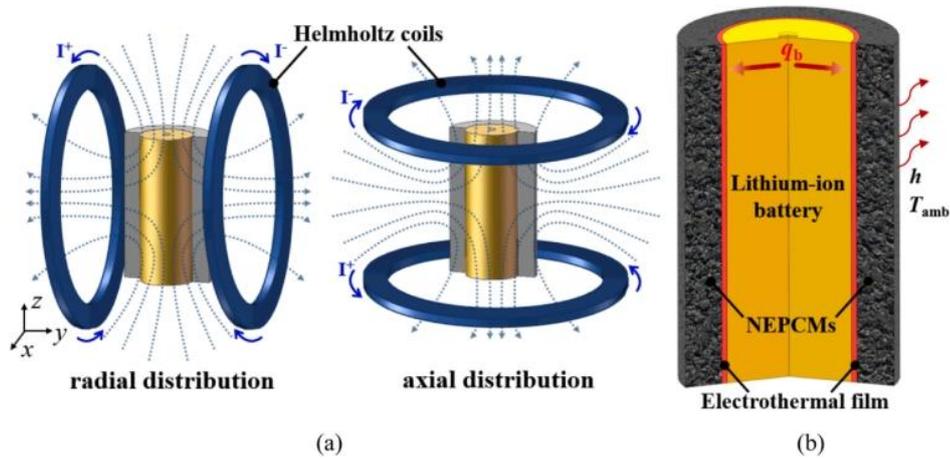


Figure (I.10) : *Modèle physique appliqué.*

Aly et Alotaibi [11] ont développé une approche de simulation basée sur la méthode ISPH (Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics) couplée à l'intelligence artificielle pour analyser les transferts de chaleur et de masse dans des NEPCM contenus dans un anneau poreux à cylindres ondulés. L'intégration de réseaux de neurones artificiels (ANN) et de XGBoost permet d'améliorer la précision et la rapidité des simulations. Les résultats montrent que la diminution du nombre de Darcy (de 10^{-2} à 10^{-5}) réduit les vitesses de flux de 70 %, indiquant une forte influence de la perméabilité. L'augmentation du nombre de Hartmann diminue les vitesses du fluide de 50 %, tandis qu'un nombre de Rayleigh plus élevé améliore le transfert thermique et massique de 60 %. Ces résultats sont prometteurs pour les applications dans les systèmes de stockage thermique, notamment dans les centrales solaires et les dispositifs électroniques.

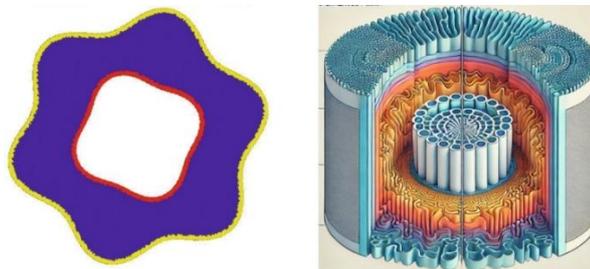


Figure (I.11) : *Modèle initial d'un anneau entre des cylindres ondulés.*

Abed et al. [12] ont mené une étude numérique visant à améliorer les performances de la convection double-diffusive d'un matériau à changement de phase nano-encapsulé (NEPCM),

confiné dans un anneau situé entre un cylindre intérieur en forme de flocon de Koch et un contour extérieur hexagonal. L'analyse a été réalisée à l'aide de la méthode des éléments finis de Galerkin pour résoudre les équations de conservation. Les résultats montrent que l'augmentation des nombres de Rayleigh et de Darcy (de 10^{-5} à 10^{-2}), ainsi que l'adoption d'un corps intérieur de forme triangulaire, renforcent significativement le transfert thermique. En revanche, le nombre de Lewis exerce un effet plus modéré, entraînant une diminution du transfert de chaleur d'environ 22%.

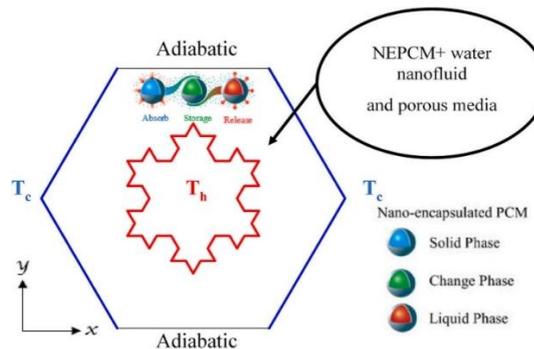


Figure (I.12) : Géométrie étudiée avec les conditions aux limites.

Reddy et al. [13] ont réalisé une analyse numérique du transport thermique et des phénomènes de bioconvection dans une cavité perméable remplie de micro-organismes et de matériaux à changement de phase nano-encapsulés, en présence d'un champ magnétique et de rayonnement thermique. Les équations du modèle ont été résolues à l'aide de la méthode des éléments finis. L'étude explore l'influence de plusieurs paramètres, tels que les nombres de Rayleigh et de bioconvection, la perméabilité, la température de fusion réduite, le nombre de Stefan, la concentration volumique en NEPCM, ainsi que les effets du champ magnétique et du rayonnement. Les résultats montrent que l'augmentation de la température de fusion accélère la phase de fusion. Le champ magnétique et la bioconvection modifient fortement les structures d'écoulement. La porosité réduit la vitesse du fluide, tandis que le rayonnement thermique améliore le transfert de chaleur entre les parois.

Kouki et al. [14] ont étudié numériquement une suspension thermosoluble de matériaux à changement de phase nano-encapsulés (NEPCM) dans une cavité poreuse ondulée en forme de H, équipée de deux déflecteurs. L'analyse, basée sur la méthode des éléments finis, explore l'effet de divers paramètres géométriques (longueur des déflecteurs, angle d'inclinaison, ondulation des parois) sur le transfert de chaleur, de masse et la génération d'entropie. L'étude montre que les variations géométriques influencent fortement les profils thermiques et hydrodynamiques. Un réseau de neurones multicouche (MLP) est intégré pour prédire la température et la concentration

avec une grande précision. Les résultats confirment l'efficacité du modèle d'intelligence artificielle pour anticiper le comportement thermo-solutal du système. Par ailleurs, l'introduction d'un champ magnétique périodique améliore le contrôle du refroidissement.

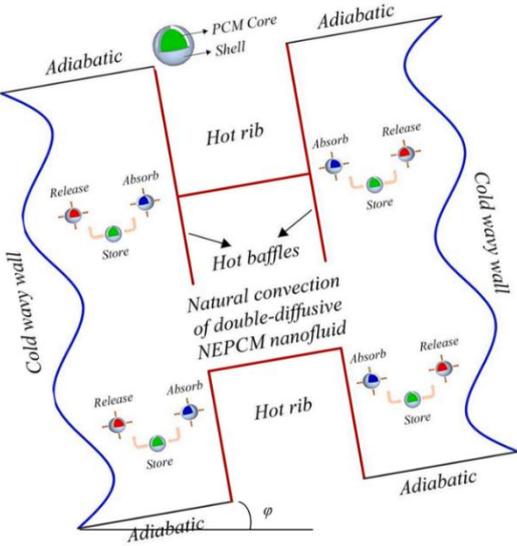


Figure (I.13) : Schéma du problème.

Chapitre II

Géométrie et modélisation mathématique

II.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous exposons le modèle physique adopté, en précisant les hypothèses de simplification utilisées, ainsi que les conditions initiales et aux limites définies pour le problème étudié. Les équations régissant le phénomène seront établies à partir des principes fondamentaux de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, enrichies par l'intégration des équations propres à la magnétohydrodynamique (MHD).

II.2 Hypothèses simplificatrices :

Pour simplifier la formulation mathématique du problème, les hypothèses suivantes sont considérées :

- Le NEPCM est en équilibre thermique et se caractérise par son homogénéité, son comportement newtonien et son incompressibilité, tandis que l'écoulement est défini comme laminaire.
- Le rayonnement et le champ magnétique induit (le nombre de Reynolds magnétique, $Re_m < 1$) sont négligeables, de même que l'effet Joule et la dissipation visqueuse.
- Les propriétés thermo-physiques du NEPCM sont considérées comme constantes et évaluées à la température de référence selon :

$$\rho_b = (1 - \varphi)\rho_f + \varphi\rho_p \quad (\text{II.1})$$

$$(\rho\beta)_b = (1 - \varphi)(\rho\beta)_f + \varphi(\rho\beta)_p \quad (\text{II.2})$$

$$(\rho c_p)_b = (1 - \varphi)(\rho c_p)_f + \varphi(\rho c_p)_p \quad (\text{II.3})$$

$$\alpha_b = k_b / (\rho c_p)_b \quad (\text{II.4})$$

- Conductivité thermique et viscosité dynamique du mélange :

En revanche, pour les NEPCMs, les études de Buongiorno [20] et Venerus et al. [21] ont montré que la conductivité thermique et la viscosité dynamique des NEPCM suivent une relation linéaire avec la fraction volumique des nanoparticules :

$$\frac{k_b}{k_f} = 1 + N_c \varphi \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\mu_b}{\mu_f} = 1 + N_v \varphi$$

Où : N_c et N_v sont respectivement les coefficients de conductivité thermique et de viscosité dynamique. Ils dépendent de plusieurs paramètres, tels que :

- ✓ La taille des nanoparticules,
- ✓ Leur forme,
- ✓ Le type de nanoparticules et du fluide de base,
- ✓ La température et les additifs,
- ✓ Le temps d'ultrasonication.
- La conductivité électrique effective se formule comme suit :

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_f} = 1 + N_s \varphi \quad (\text{II.6})$$

L'expansion thermique volumique du mélange de nanoparticules et de fluide de base peut être modélisée comme la superposition des expansions thermiques respectives du fluide et des nanoparticules. elle est donnée par :

$$\beta_b = (1 - \varphi)\beta_f + \varphi\beta_p \quad (\text{II.7})$$

Où : φ représente la fraction volumique des particules NEPCM, et β indique le facteur d'expansion thermique. Les indices p et f désignent respectivement les nanoparticules NEPCM et le fluide de base.

Etant donné que les particules à changement de phase nano-encapsulées sont synthétisées sous forme d'un noyau c et d'une coque s , la masse volumique effective de ces particules peut être évaluée comme suit :

$$\rho_p = \frac{(1 + \zeta)\rho_c\rho_s}{\rho_s + \zeta\rho_c} \quad (\text{II.8})$$

Où : ζ est le rapport de masse noyau/coque

Pour déterminer la capacité thermique spécifique du mélange, la relation suivante est utilisée :

$$c_{p_b} = \frac{(1 - \varphi)\rho_f c_{p_f} + \varphi\rho_p c_{p_p}}{\rho_b} \quad (\text{II.9})$$

La capacité thermique spécifique globale d'une nanoparticule encapsulée, composée d'un noyau et d'une coque sans changement de phase, peut être évaluée comme suit :

$$c_{p_p} = \frac{(c_{p_{c,l}} + \zeta c_{p_s})\rho_c\rho_s}{(\rho_s + \zeta\rho_c)\rho_p} \quad (\text{II.10})$$

Dans cette étude, le noyau du PCM subit un changement de phase, et ainsi la chaleur latente est intégrée dans la capacité thermique spécifique des particules NEPCM. Pour modéliser la chaleur latente du changement de phase, différentes formes de profils (rectangulaire, triangulaire ou sinusoïdal) peuvent être utilisées.

$$c_{p_c} = c_{p_{c,l}} + \frac{h_{sf}}{T_{Mr}}$$

$$c_{p_c} = c_{p_{c,l}} + \left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{h_{sf}}{T_{Mr}} - c_{p_{c,l}} \right) \sin \left(\frac{\pi(T - T_1)}{T_{Mr}} \right) \right] \quad (\text{II.11})$$

$$c_{p_c} = c_{p_{c,l}} + 2 \left(\frac{h_{sf}}{T_{Mr}^2} - \frac{c_{p_{c,l}}}{T_{Mr}} \right) (T - T_1)$$

En réalité, au lieu de considérer une température de fusion fixe T_f , ce qui induirait une discontinuité dans l'équation de la chaleur, on suppose que la transition de phase a lieu dans un petit intervalle de température T_{Mr} centré autour de T_f . Ainsi, on évite toute discontinuité dans les calculs. Lorsque T_{Mr} tend vers zéro, on retrouve exactement la température de fusion T_f .

- Si : $T < T_f - T_{Mr}/2$, le noyau est solide.
- Si : $T > T_f + T_{Mr}/2$, le noyau est liquide.
- Si : $T_f - T_{Mr}/2 < T < T_f + T_{Mr}/2$, le noyau est partiellement fondu, et sa capacité thermique spécifique, incluant la chaleur latente, est donnée par l'une des équations ci-dessus.

En tenant en compte la chaleur sensible et la chaleur latente, la capacité thermique totale du noyau de PCM peut être exprimée comme :

$$c_{p_c} = c_{p_{c,l}} + \left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{h_{sf}}{T_{Mr}} - c_{p_{c,l}} \right) \sin \left(\frac{\pi(T - T_1)}{T_{Mr}} \right) \right] \begin{cases} 0, & T < T_f - T_{Mr}/2 \\ 1, & T_f - T_{Mr}/2 < T < T_f + T_{Mr}/2 \\ 0, & T > T_f + T_{Mr}/2 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Les caractéristiques thermo-physiques du NEPCM sont résumées dans le tableau (II.1) :

	ρ (kg/m ³)	c_p (J/kgK)	k (W/mK)
Eau	997.1	4179	0.613
n-octadécane	850 (solide) 780 (liquide)	2000	0.18
PMMA	1.190	1.470	0.21
NEPCM	867.2	1.899	0.1643
5% suspension	989.6	4.065	0.571

Tableau (II.1) : Propriétés thermo-physiques de NEPCM.

II.3 Equations de base :

L'écoulement d'un nanofluide à matériau à changement de phase nano-encapsulé (NEPCM) est modélisé à l'aide du modèle suivant, formulé sous forme vectorielle :

- **Conservation de la masse :**

Elle est déduite du principe de conservation de la masse et s'exprime mathématiquement sous forme suivante :

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_b \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{II.13})$$

Où : \mathbf{V} est le vecteur de vitesse.

- **Conservation de la quantité de mouvement :**

Les équations de Navier–Stokes, exprimées sous forme vectorielle, pour un fluide incompressible et newtonien, sont données par :

$$\rho_b \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mu_b \nabla^2 \mathbf{V} + f \quad (\text{II.14})$$

Où : μ_b étant la viscosité dynamique de NEPCM.

p est la pression, T est la température et f est le terme de la force extérieure que peut-être dans notre étude la force de flottabilité où en plus la force électromagnétique

- **Conservation d'énergie :**

L'équation d'énergie est établie à partir du premier principe de la thermodynamique. Un équilibre thermique local est supposé entre le fluide et les particules encapsulées ($T_b = T$). Dans ces conditions, l'équation d'énergie s'écrit comme suit :

$$(\rho c_p)_b \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_b \mathbf{V} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k_b \nabla T) \quad (\text{II.15})$$

Où : $(\rho c_p)_b$ est k_b sont la capacité thermique du NEPCM et sa conductivité thermique.

II.4 Géométrie du problème :

La géométrie considérée est une cavité carrée de dimension H entièrement remplie d'une suspension de nanoparticules à changement de phase nano-encapsulées (NEPCM), uniformément dispersées dans un fluide de base. Dans cette configuration, chaque particule NEPCM est composée d'un noyau de n-octadécane, qui agit comme matériau à changement de phase (PCM), encapsulé dans une coquille de polyméthacrylate de méthyle (PMMA). La suspension est formée en dispersant ces particules dans un fluide de base constitué d'eau. Les parois verticales de la cavité sont isothermes et maintenues à des températures différentes : la paroi gauche est fixée à une température chaude T_h , tandis que la paroi droite est maintenue à une température froide T_c . Les parois horizontales supérieure et inférieure sont considérées adiabatiques. Le gradient de température entre les parois verticales génère un écoulement de convection naturelle dans la cavité. De plus, cet écoulement est soumis à l'influence d'un champ magnétique constant, ce qui affecte le comportement dynamique du fluide ainsi que les mécanismes de transfert thermique à l'intérieur du système.

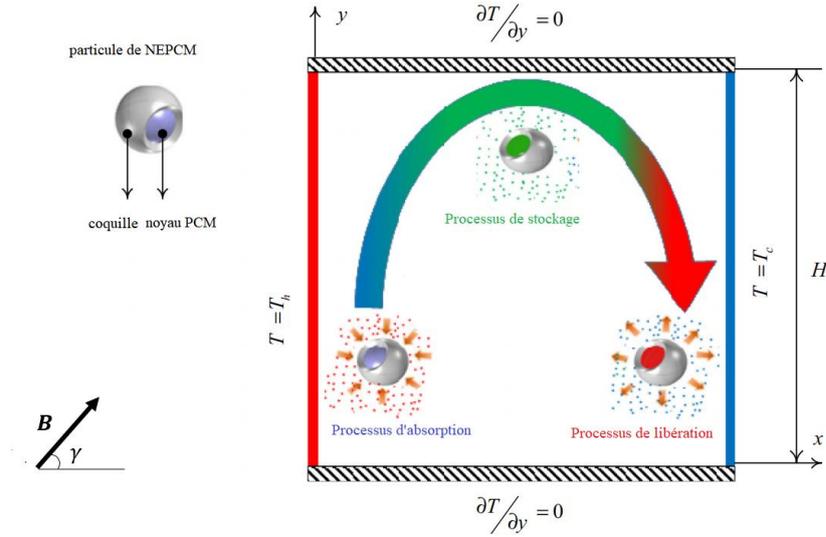


Figure (II.1) : Configuration du problème avec les conditions aux limites.

II.5 Modélisation mathématique :

Avant d'aborder la modélisation mathématique de notre problème, nous définissons la magnétohydrodynamique (MHD). La magnétohydrodynamique étudie l'interaction du champ magnétique \mathbf{B} avec l'écoulement. Dans notre situation, le champ magnétique induit \mathbf{b} est négligé, ce qui établit une égalité entre le champ magnétique total ($\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$) et le champ appliqué \mathbf{B}_0 .

L'application du champ magnétique à un NEPCM conducteur d'électricité en mouvement induit un courant électrique \mathbf{j} , qui interagit avec le champ magnétique pour produire une force de volume \mathbf{f}_{EM} agissant dans le sens inverse du mouvement du NEPCM. L'équation du courant électrique \mathbf{j} est obtenue dans notre cas en appliquant la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j} = \sigma_b [-\nabla\Phi + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] \quad (\text{II.16})$$

Où : Φ est le potentiel électrique.

La densité de courant électrique \mathbf{j} est une grandeur conservative ce qui permet d'écrire :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{II.17})$$

La force de Lorentz \mathbf{f}_{EM} est déduite de l'équation suivante :

$$\mathbf{f}_{EM} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (\text{II.18})$$

De plus, les frontières sont électriquement isolantes, ce qui signifie que le potentiel électrique Φ est constant. Cela permet en fin de compte d'exprimer les expressions de \mathbf{j} et \mathbf{f}_{EM} comme suit [12] :

$$\mathbf{j} = \sigma_b [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \quad (\text{II.19})$$

$$\mathbf{f}_{EM} = \sigma_b [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} \quad (\text{II.20})$$

II.5.1 Equations sous forme adimensionnelle :

En considérant toutes les hypothèses énoncées, le système d'équations locales aux dérivées partielles décrivant le mouvement du fluide avec le transfert de chaleur.

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.21})$$

- **Equations de quantité de mouvement :**

Suivant x :

$$\rho_b \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + B_0^2 \sigma_b (u \sin^2 \gamma - v \sin \gamma \cos \gamma) \quad (\text{II.22})$$

Suivant y :

$$\begin{aligned} \rho_b \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_b \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\rho \beta)_b g (T - T_0) \\ + B_0^2 \sigma_b (v \cos^2 \gamma - u \cos \gamma \sin \gamma) \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

- **Equation d'énergie :**

$$(\rho C_p)_b \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_b \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.24})$$

Le système d'équations est résolu avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

Pour $t = 0$: $u = v = T = 0$.

Pour $t > 0$:

$$\text{à } x = 0, \quad 0 \leq y \leq H: \quad u = v = 0, \quad T = T_h$$

$$\text{à } x = H, \quad 0 \leq y \leq H: \quad u = v = 0, \quad T = T_c$$

(II.25)

$$\text{à } y = 0, \quad 0 \leq x \leq H: \quad u = v = 0, \quad \partial T / \partial y = 0$$

$$\text{à } y = H, \quad 0 \leq x \leq H: \quad u = v = 0, \quad \partial T / \partial y = 0$$

II.5.2 Equations sous forme adimensionnelles :

En introduisant les paramètres adimensionnels appropriés (II.26), les équations gouvernantes (II.21) à (II.24), ainsi que les conditions initiales et aux limites associées (II.25), peuvent être réécrites sous une forme adimensionnelle :

$$X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = u \frac{H}{\alpha_f}, \quad V = v \frac{H}{\alpha_f}, \quad P = p \frac{H^2}{\rho_f \alpha_f^2}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c} \quad (\text{II.26})$$

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.27})$$

- **Equations de quantité de mouvement :**

Suivant X :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \\ = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \left(\frac{\mu_b}{\mu_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_b} \right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \\ - \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_b} \right) \text{Pr} Ha^2 (U \sin^2 \gamma - V \sin \gamma \cos \gamma) \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Suivant Y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \\ = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left(\frac{\mu_b}{\mu_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_b} \right) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{(\rho \beta)_b}{(\rho \beta)_f} \left(\frac{\rho_f}{\rho_b} \right) Ra \text{Pr} \theta \\ - \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_b} \right) \text{Pr} Ha^2 (V \cos^2 \gamma - U \sin \gamma \cos \gamma) \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

- **Equation d'énergie**

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_b} \left(\frac{k_b}{k_f} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.30})$$

Le terme $\frac{(\rho C_p)_b}{(\rho C_p)_f}$ représente le rapport de capacité thermique (Cr). Le paramètre Cr représente la capacité thermique du mélange (la chaleur sensible et latente du changement de phase) par rapport à la capacité thermique sensible du fluide de base.

En conséquence, les paramètres adimensionnels introduits à savoir le nombre de Rayleigh, le nombre de Prandtl et le nombre de Hartmann sont définis comme suit :

$$Ra = \frac{g\rho_f\beta_f(T_h - T_c)H^3}{\alpha_f\mu_f} \quad ; \quad Pr = \frac{\mu_f}{\rho_f\alpha_f} \quad ; \quad Ha = B_0H\sqrt{\frac{\sigma_f}{\mu_f}} \quad (\text{II.31})$$

Les équations adimensionnelles du système sont résolues en utilisant les conditions initiales et aux limites adimensionnelles suivantes :

Pour $\tau = 0$: $U = V = \theta = 0$.

Pour $\tau > 0$:

$$\begin{aligned} \text{à } x = 0, \quad 0 \leq y \leq H: \quad u = v = 0, \quad T = T_h \text{ (paroi gauche chaude)} \\ \text{à } x = L, \quad 0 \leq y \leq H: \quad u = v = 0, \quad T = T_c \text{ (paroi droite froide)} \\ \text{à } y = 0, \quad 0 \leq x \leq L: \quad u = v = 0, \quad \partial T / \partial y = 0 \text{ (paroi inférieure adiabatique)} \\ \text{à } y = H, \quad 0 \leq x \leq L: \quad u = v = 0, \quad \partial T / \partial y = 0 \text{ (paroi supérieure adiabatique)} \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

En substituant les modèles de propriétés thermo-physiques des équations (II.1) à (II.7), les équations gouvernantes adimensionnelles (II.27) à (II.30) peuvent être simplifiées et réécrites comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.33})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \\ = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Pr}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} (1 + N_v \varphi) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \\ + \frac{Pr}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f} \right) Ha^2 (V \cdot \cos \gamma \sin \gamma - U \cdot \sin^2 \gamma) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\text{Pr}}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} (1 + N_v \varphi) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \\
&+ \frac{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\beta_p}{\beta_f}\right)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} Ra Pr \theta \\
&+ \frac{\text{Pr}}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f} \right) Ha^2 (U \cos \gamma \sin \gamma - V \cos^2 \gamma)
\end{aligned} \tag{II.35}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{(1 + N_c \varphi)}{Cr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \tag{II.36}$$

Où est la température de fusion adimensionnelle, Cr est le rapport de capacité thermique sensible, et δ est l'intervalle de fusion adimensionnel. Ces paramètres adimensionnels sont définis comme suit :

$$\theta_f = \frac{T_f - T_c}{T_h - T_c} \quad , \quad \delta = \frac{T_{Mr}}{T_h - T_c} \quad , \quad k = \frac{(c_{p_{c,l}} + \zeta c_{p_s}) \rho_c \rho_s}{(\rho c_p)_f (\rho_s + \zeta \rho_c)} \tag{II.37}$$

En utilisant les équations (II .9) à (II .11), le terme du rapport de capacité thermique, Cr , peut être écrit comme :

$$\begin{aligned}
\frac{c_{p_b} \rho_b}{c_{p_f} \rho_f} &= (1 - \varphi) + \varphi \frac{(c_{p_{c,l}} + \zeta c_{p_s}) \rho_c \rho_s}{C_{p_f} (\rho_s + \zeta \rho_c) \rho_f} \\
&+ \varphi \frac{(T_h - T_c)}{T_{Mr}} \left[\frac{\pi \rho_c \rho_s}{2 C_{p_f} (\rho_s + \zeta \rho_c) \rho_f} \left(\frac{h_{sf} - c_{p_{c,l}} T_{Mr}}{T_h - T_c} \right) \right] f
\end{aligned} \tag{II.38}$$

où f est la fonction de fusion adimensionnelle définie comme :

$$f = \frac{\pi}{2} \sin \left[\frac{\pi}{\delta} \left(\theta - \theta_f + \frac{\delta}{2} \right) \right] \times \begin{cases} 0 & \text{si : } \theta < \theta_f - \frac{\delta}{2} \\ 1 & \text{si : } \theta_f - \frac{\delta}{2} < \theta < \theta_f + \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{si : } \theta > \theta_f + \frac{\delta}{2} \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Dans l'équation (II.38), le terme $\frac{\rho_c \rho_s (h_{sf} - c_{p,c,l} T_{Mr})}{(T_h - T_c) c_{p,f} (\rho_s + \zeta \rho_c) \rho_f}$ représente la combinaison de la chaleur latente et de la chaleur sensible. T_{Mr} indique l'intervalle de température du changement de phase, qui est un intervalle très petit. De plus, il convient de noter que la chaleur sensible $c_{p,c,l}$ est très petite par rapport à la chaleur latente. Par conséquent, le terme $(c_{p,c,l} T_{Mr})$ peut être négligé, et ainsi, le nombre de Stefan peut être introduit de la manière suivante :

$$Ste = \frac{(\rho c_p)_f (T_h - T_c) (\rho_s + \zeta \rho_c)}{h_{sf} \rho_c \rho_s} \quad (\text{II.40})$$

Par conséquent, Cr peut être introduit sous la forme de paramètres adimensionnels comme :

$$Cr = \frac{c_{p,b} \rho_b}{c_{p,f} \rho_f} = (1 - \varphi) + \varphi \lambda + \frac{\varphi}{\delta \cdot Ste} f \quad (\text{II.41})$$

En utilisant l'équation (II .30), l'équation (II .41) peut être réécrite comme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{(1 + N_c \varphi)}{\left[(1 - \varphi) + \varphi \lambda + \frac{\varphi}{\delta \cdot Ste} f \right]} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.42})$$

Le paramètre caractéristique du transfert de chaleur dans cette étude est le nombre de Nusselt. Ce paramètre indique le taux de transfert de chaleur dans la cavité. L'équilibre entre la conduction thermique et la convection à la paroi chaude et froide de la cavité est écrit comme suit :

$$-k_b \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{x=0,1} = h(T_h - T_c) \quad (\text{II.43})$$

En utilisant les variables adimensionnelles de l'équation (II.26), l'équation (II.31) et l'équation (II.43) est réécrite comme :

- Paroi chaude :

$$Nu_y = - \left(\frac{k_b}{k_f} \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0} \quad (\text{II.44})$$

- Paroi froide :

$$Nu_y = - \left(\frac{k_b}{k_f} \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=1}$$

Où : $Nu_y = \frac{h_y H}{k}$. En substituant le rapport de conductivité thermique de l'équation (II.5), le nombre de Nusselt local est obtenu comme :

- Paroi chaude :

$$Nu_y = - (1 + N_c \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0} \quad (\text{II.45})$$

- Paroi froide :

$$Nu_y = - (1 + N_c \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=1}$$

Enfin, les nombres de Nusselt moyens aux parois chaude et froide sont définis comme suit :

- Paroi chaude :

$$\overline{Nu}_1 = - (1 + N_c \varphi) \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0} dY \quad (\text{II.46})$$

- Paroi froide :

$$\overline{Nu}_2 = - (1 + N_c \varphi) \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=1} dY$$

Il est important de noter qu'à l'état permanent, les régimes d'écoulement et de transfert de chaleur se stabilisent avec le temps. Dans ce cas, les nombres de Nusselt moyens aux parois chaude et froide deviennent pratiquement identiques. Par conséquent, le nombre de Nusselt moyen retenu correspond à la moyenne arithmétique des deux valeurs obtenues aux parois opposées.

$$\overline{Nu} = (\overline{Nu}_1 + \overline{Nu}_2) / 2 \quad (\text{II.47})$$

Chapitre III

Méthode numérique

III.1 Introduction :

Les équations décrivant l'écoulement de la convection naturelle en présence d'un champ magnétique (MHD) et le transfert de chaleur impliquant des matériaux à changement de phase nano-encapsulés (NEPCM) dans une cavité sont des équations aux dérivées partielles (EDP) fortement non linéaires. En raison du couplage entre la vitesse et la pression dans les équations de la quantité de mouvement, ainsi que de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu, une résolution analytique de ces équations s'avère inapplicable dans la plupart des cas. Il devient donc nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour traiter ce type de problème. Parmi les techniques de discrétisation couramment utilisées figurent la méthode des volumes finis, la méthode des différences finies, et la méthode des éléments finis.

Dans le cadre de cette étude, nous avons adopté la méthode des volumes finis, qui s'appuie sur l'intégration des équations de conservation sur chaque volume de contrôle. Cette méthode présente plusieurs avantages, notamment sa capacité à être appliquée à des géométries complexes à l'aide de maillages arbitraires, ainsi que le respect strict des bilans de masse et d'énergie sur l'ensemble du domaine. Ces caractéristiques confèrent à la méthode des volumes finis une robustesse et une précision qui en font une approche particulièrement adaptée à la modélisation des écoulements thermoconvectifs impliquant des matériaux à changement de phase.

III.2 Formulation générale de l'équation de transport :

Les équations aux dérivées partielles adimensionnelles (II.16) à (II.17) présentées dans le chapitre II peuvent être réécrites sous une forme générale d'équation de transport (III.1). Les grandeurs physiques correspondant à chaque équation (II.16) à (II.17) sont détaillées dans le tableau (III.1).

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \tau}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial(U\phi)}{\partial X} + \frac{\partial(V\phi)}{\partial Y}}_{(2)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)}_{(3)} + \underbrace{S_\phi}_{(4)} \quad (\text{III.1})$$

(1) : désigne le terme transitoire.

(2) : représente le terme de transport convectif.

(3) : correspond au terme de diffusion.

(4) : fait référence au terme source.

Equation	ϕ	Γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant x	U	$\frac{\text{Pr}(1 + N_v\phi)}{\left(1 - \phi + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)}$	$-\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\text{Pr}}{\left(1 - \phi + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f}\right) Ha^2 (V \cdot \cos \gamma \sin \gamma - U \cdot \sin^2 \gamma)$
Quantité de mouvement suivant y	V	$\frac{\text{Pr}(1 + N_v\phi)}{\left(1 - \phi + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)}$	$-\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\left(1 - \phi + \phi \frac{\beta_p}{\beta_f}\right)}{\left(1 - \phi + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} Ra Pr \theta + \frac{\text{Pr}}{\left(1 - \phi + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f}\right) Ha^2 (U \cdot \cos \gamma \sin \gamma - V \cdot \cos^2 \gamma)$
Energie	θ	$\frac{(1 + N_c\phi)}{Cr}$	0

Tableau (III.1) : Différents termes de l'équation de transport.

III.3 Maillage :

Les équations différentielles ponctuelles qui régissent notre phénomène sont formulées pour chaque point du domaine physique. Pour les appliquer à l'ensemble du domaine, nous utilisons une grille subdivisée en plusieurs volumes fins, avec des points considérés au milieu de chaque volume. Les faces d'un volume de contrôle typique sont situées aux points e, w, n et s (voir Figure III.1). P représente le centre du volume de contrôle étudié, tandis que E, W, N et S sont les centres des volumes de contrôle adjacents respectivement à l'est, à l'ouest, au nord et au sud de celui contenant P. Pour exprimer les grandeurs vectorielles, nous utilisons un volume de contrôle décalé (voir Figure III.2).

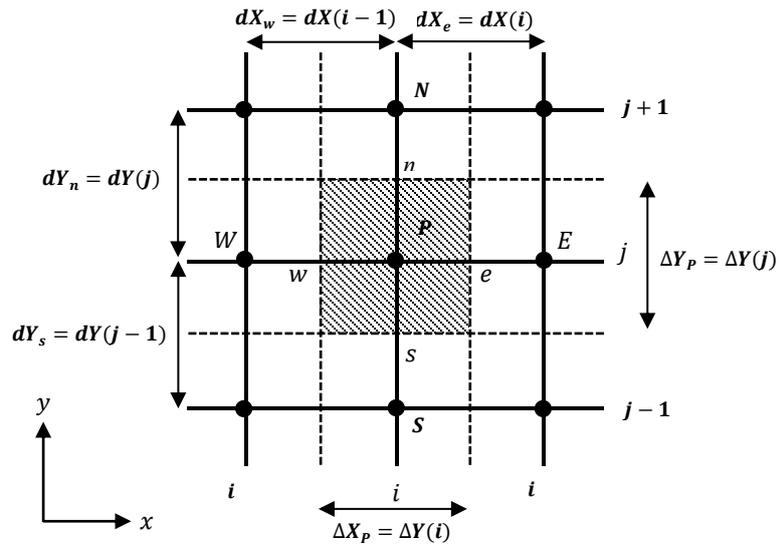


Figure (III.1) : Volume de contrôle typique dans le plan (x-y).

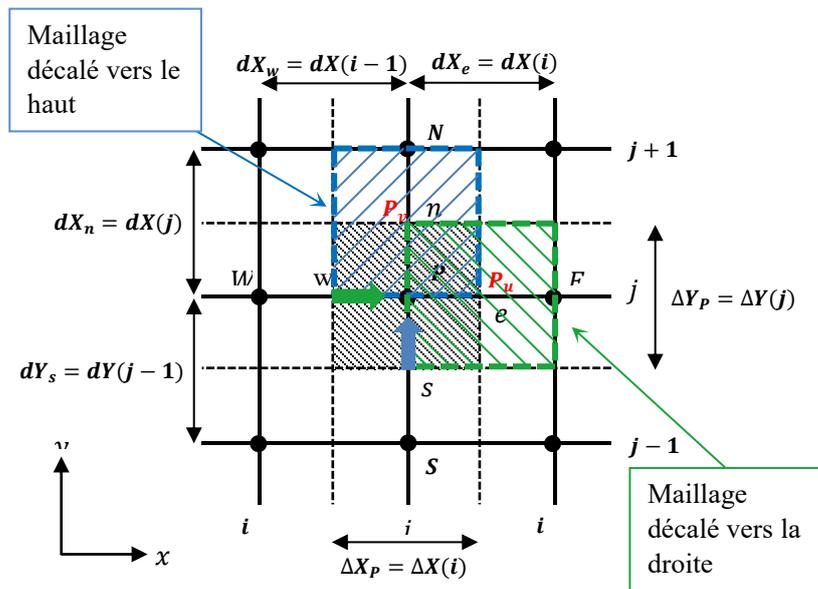


Figure (III.2) : Volume de contrôle décalé.

III.4. Discrétisation des équations mathématiques :

III.4.1. Discrétisation de l'équation générale de transport :

La discrétisation de l'équation générale de transport (III.1) sur un volume de contrôle typique s'effectue comme illustré à la Figure (III.1) :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial\phi}{\partial\tau} dXdYdt + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial(U\phi)}{\partial X} dXdYdt + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial(V\phi)}{\partial Y} dXdYdt \\
 &= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) \right] dXdYdt + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial(U\phi)}{\partial X} dXdYdt \\
 &+ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e S_{\phi} dXdY dt
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

L'intégration des différents termes se déroule de la manière suivante :

Terme transitoire :

Un schéma d'Euler implicite de premier ordre est utilisé pour la discrétisation temporelle.

La division par $\Delta\tau$, nous donne :

$$\int_s^e \int_w^e \frac{(\phi_P^{\tau+\Delta\tau} - \phi_P^{\tau})}{\Delta\tau} dXdY = \frac{(\phi_P^{\tau+\Delta\tau} - \phi_P^{\tau})}{\Delta\tau} \Delta X_p \Delta Y_p \tag{III.3}$$

Terme de transport convectif :

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial(U\phi)}{\partial X} dXdY = [(U\phi)_e - (U\phi)_w] \Delta Y_p \tag{III.4}$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial(V\phi)}{\partial Y} dXdY = [(V\phi)_n - (V\phi)_s] \Delta X_p \tag{III.5}$$

Terme de transport diffusif :

$$\int_s^e \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right) \right] dXdY = \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right)_w \right] \Delta Y_p \tag{III.6}$$

$$\int_s^e \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right) \right] dXdY = \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right)_s \right] \Delta X_p \tag{III.7}$$

Terme source :

$$\int_s^e \int_w^e S_{\phi} dXdY = \bar{S}_{\phi} \Delta X_p \Delta Y_p \tag{III.8}$$

Après l'intégration, l'équation générale de transport se transforme en :

$$\begin{aligned}
& \frac{(\phi_P^{\tau+\Delta\tau} - \phi_P^{\Delta\tau})}{\Delta\tau} \Delta X_p \Delta Y_p + [(U\phi)_e - (U\phi)_w] \Delta Y_p + [(V\phi)_n - (V\phi)_s] \Delta X_p \\
& = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_w \right] \Delta Y_p + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_s \right] \Delta X_p \\
& + \bar{S}_\phi \Delta X_p \Delta Y_p
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Les résultats des intégrales sont réorganisés pour obtenir la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P \phi_P^{\tau+\Delta\tau} = A_E \phi_E^{\tau+\Delta\tau} + A_W \phi_W^{\tau+\Delta\tau} + A_N \phi_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S \phi_S^{\tau+\Delta\tau} + b \tag{III.10}$$

Avec :

$$A_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)$$

$$A_W = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0)$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0 \tag{III.12}$$

$$b = \left(\bar{S}_\phi + \frac{\phi_P^0}{\Delta\tau} \right) \Delta X \Delta Y \tag{III.13}$$

Où : les flux convectifs.

$$F_e = U_e \Delta Y_p$$

$$F_w = U_w \Delta Y_p$$

$$F_n = V_n \Delta X_p$$

$$F_s = V_s \Delta X_p$$

(III.14)

Où : les flux diffusifs.

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{dX_e} \Delta Y_p$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{dX_w} \Delta Y_p$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{dY_n} \Delta X_p$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{dY_s} \Delta X_p$$

(III.15)

Où : les nombre de Péclet aux interfaces : e, w, n, s.

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad , \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad , \quad P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad , \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} \tag{III.16}$$

A_E , A_W , A_N , A_S et A_P : sont les coefficients correspondants, respectivement, aux nœuds est, ouest, nord, sud et centre du volume.

b : est un terme de source supposé être constant dans le volume de contrôle.

F_e, F_w, F_n, F_s et D_e, D_w, D_n, D_s sont respectivement les termes convectifs et diffusifs aux faces est, ouest, nord, sud.

P_e, P_w, P_n et P_s sont les nombres du Péclet, qui désignent les rapports des flux convectifs aux flux diffusifs aux différentes faces du volume de contrôle.

En arrivant à ce stade, il faudra exprimer les termes des flux convectifs et diffusifs aux interfaces des volumes de contrôle. Afin de surmonter à ce problème, on fait appel aux schémas numérique de discrétisation (différences centrées, exponentiel, loi de puissance, hybrid,...). Ces schémas se différencient par la façon avec laquelle on prend en compte les termes de convection et de diffusion.

Le tableau ci-dessous donne les expressions de la fonction $A(P)$ pour différents schémas numériques.

Schéma	Formule de la fonction $A(P)$
Différences centrées	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybrid	$[0, 1 - 0.5 P]$
Loi de puissance	$[0, (1 - 0.5 P)^5]$
Exponentiel	$ P / [\exp(P) - 1]$

Tableau (III.2) : Fonction $A(|P|)$ pour différents schémas numériques.

III.4.2. Equation de continuité :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial U}{\partial X} dXdY = [U_e - U_w] \Delta Y_p \quad (III.17)$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial V}{\partial Y} dXdY = [V_n - V_s] \Delta X_p \quad (III.18)$$

L'équation de continuité discrétisée s'exprime de la manière suivante :

$$[U_e - U_w] \Delta Y_p + [V_n - V_s] \Delta X_p = 0 \quad (III.19)$$

III.4.3. Equation de quantité du mouvement suivant x :

Tous les termes de l'équation de la quantité de mouvement suivant x sont multipliés par $dX dY$ et double intégrés entre les limites du volume de contrôle décalé (vers la droite).

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \left(\frac{U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} - U_{P_u}^{\tau}}{\Delta\tau} \right) dXdY = \left(\frac{U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} - U_{P_u}^{\tau}}{\Delta\tau} \right) dX_e \Delta Y_p \quad (III.20)$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial(UU)}{\partial X} dXdY = [(U_{e_u}^2 - U_{w_u}^2)] \Delta Y_p \quad (\text{III.21})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial(UV)}{\partial Y} dXdY = [(UV)_{n_u} - (UV)_{s_u}] dX_e \quad (\text{III.22})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} -\frac{\partial P}{\partial X} dXdY = [P_P - P_E] \Delta Y_p \quad (\text{III.23})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right) dXdY = \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{e_u} - \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{w_u} \right] \Delta Y_p \quad (\text{III.24})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right) dXdY = \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{n_u} - \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)_{s_u} \right] \Delta X_p \quad (\text{III.25})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\text{Pr}}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f}\right) Ha^2 (V \cdot \cos \gamma \sin \gamma - U \cdot \sin^2 \gamma) dXdY \\ = \frac{\text{Pr}}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f}\right) Ha^2 [V_{p_u} \cos \gamma \sin \gamma - U_{p_u} \sin^2 \gamma] dX_e \Delta Y_p \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Les résultats des intégrales sont réorganisés pour prendre la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P U_{P_u} = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + S_U \quad (\text{III.29})$$

Où les coefficients et le terme source de l'équation algébrique sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Où :

$$F_e = \frac{(U_P + U_E)}{2} \Delta Y_p \quad (\text{III.31})$$

$$F_w = \frac{(U_P + U_W)}{2} \Delta Y_p$$

$$F_n = \frac{(V_P + V_E)}{2} dX_e$$

$$F_s = \frac{(V_S + V_{ES})}{2} dX_e$$

et :

$$D_e = \frac{\text{Pr}(1 + N_v \phi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{\Delta Y_p}{\Delta X_E}$$

$$D_w = \frac{\text{Pr}(1 + N_v \phi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{\Delta Y_p}{\Delta X_P}$$

$$D_n = \frac{\text{Pr}(1 + N_v \phi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{dX_e}{dY_n}$$

$$D_s = \frac{\text{Pr}(1 + N_v \phi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{dX_e}{dY_s}$$

(III.32)

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{dX_e \Delta Y_p}{\Delta \tau} + \frac{\text{Pr}(1 + N_v \phi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} dX_e \Delta Y_p$$

$$+ \frac{\text{Pr}}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f}\right) Ha^2 (\sin^2 \gamma) dX_e \Delta Y_p$$

(III.33)

$$S_U = (P_P - P_E) \Delta Y_p + \frac{\text{Pr}}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f}\right) Ha^2 (V_P \cdot \cos \gamma \sin \gamma) dX_e \Delta Y_p$$

$$+ \frac{U_{P_u}^0 dX_e \Delta Y_p}{\Delta \tau}$$

(III.34)

III.4.4. Equation de quantité du mouvement suivant y :

Tous les termes de l'équation de la quantité de mouvement suivant y sont multipliés par $dX dY$ et double intégrés entre les limites du volume de contrôle décalé (vers le haut).

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \left(\frac{V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} - V_{P_v}^{\tau}}{\Delta\tau} \right) dX dY = \left(\frac{V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} - V_{P_v}^{\tau}}{\Delta\tau} \right) \Delta X_P dY_n$$

(III.35)

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial(UV)}{\partial X} dXdY = [(UV)_{e_v} - (UV)_{w_v}] dY_n \quad (\text{III.36})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\partial(VV)}{\partial Y} dXdY = [(V^2)_{n_v} - (V^2)_{s_v}] \Delta X_p \quad (\text{III.37})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} -\frac{\partial P}{\partial Y} dXdY = [P_p - P_N] \Delta X_p \quad (\text{III.38})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right) dXdY \\ = \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left[\left(\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right)_{e_v} - \left(\mu \frac{\partial V}{\partial X} \right)_{w_v} \right] dY_n \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right) dXdY \\ = \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left[\left(\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right)_{n_v} - \left(\mu \frac{\partial V}{\partial Y} \right)_{s_v} \right] \Delta X_p \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

$$(\text{III.41})$$

$$(\text{III.42})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} Ra Pr \frac{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\beta_p}{\beta_f}\right)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \theta dXdY = Ra Pr \frac{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\beta_p}{\beta_f}\right)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\theta_P + \theta_N}{2} \right) \Delta X_p dY_n \quad (\text{II.43})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f} \right) \left(\frac{\rho_f}{\rho_b} \right) Ha^2 (U \cos \gamma \sin \gamma - V \cos^2 \gamma) \\ = \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f} \right) Ha^2 [U_{p_v} \cos \gamma \sin \gamma - V_{p_v} \cos^2 \gamma] \Delta X_p dY_n \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P V_{P_v} = A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + S_V \quad (\text{III.45})$$

Où les coefficients et le terme source de l'équation algébrique sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\
A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\
A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\
A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)
\end{aligned} \tag{III.46}$$

Où :

$$\begin{aligned}
F_e &= \frac{(U_P + U_N)}{2} dY_n \\
F_w &= \frac{(U_{WN} + U_W)}{2} dY_n \\
F_n &= \frac{(V_P + V_N)}{2} \Delta X_p \\
F_s &= \frac{(V_P + V_S)}{2} \Delta X_p
\end{aligned} \tag{III.47}$$

et

$$\begin{aligned}
D_e &= \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{dY_n}{dX_e} \\
D_w &= \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{dY_n}{dX_w} \\
D_n &= \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{\Delta X_p}{\Delta Y_N} \\
D_s &= \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \frac{\Delta X_p}{\Delta Y_P}
\end{aligned} \tag{III.48}$$

$$\begin{aligned}
A_P &= A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{\Delta X_p dY_n}{\Delta \tau} + \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \Delta X_p dY_n \\
&\quad + \frac{\text{Pr}(1 + N_v \varphi)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_f}\right) Ha^2 (\cos^2 \gamma) \Delta X_p dY_n
\end{aligned} \tag{III.49}$$

$$\begin{aligned}
S_v = (P_p - P_N)\Delta X_p + Ra Pr \frac{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\beta_p}{\beta_f}\right)}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\theta_p + \theta_N}{2}\right) \Delta X_p dY_n \\
+ \frac{Pr}{\left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}\right)} \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f}\right) Ha^2 (U_p \cos \gamma \sin \gamma) \Delta X_p dY_n + \frac{V_{P_u}^0 \Delta X_p dY_n}{\Delta \tau}
\end{aligned} \quad (III.50)$$

III.4.5 Équation d'énergie :

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} \left(\frac{\theta_p^{\tau+\Delta\tau} - \theta_p^\tau}{\Delta\tau}\right) dXdY = \left(\frac{\theta_p^{\tau+\Delta\tau} - \theta_p^\tau}{\Delta\tau}\right) \Delta X_p \Delta Y_p \quad (III.51)$$

$$\int_w^e \int_s^n \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X}\right) dXdY = [U_e \theta_e - U_w \theta_w] \Delta Y_p \quad (III.52)$$

$$\int_w^e \int_s^n \left(V \frac{\partial \theta}{\partial Y}\right) dXdY = [V_n \theta_n - V_s \theta_s] \Delta X_p \quad (III.53)$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{(1 + N_c \varphi)}{Cr} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)\right] dXdY = \frac{(1 + N_c \varphi)}{Cr} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)_e + \left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)_w\right] \Delta Y_p \quad (III.54)$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{(1 + N_c \varphi)}{Cr} \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)\right] dXdY = \frac{(1 + N_c \varphi)}{Cr} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)_n + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)_s\right] \Delta X_p \quad (III.55)$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_p \theta_p = A_E \theta_E + A_W \theta_W + A_N \theta_N + A_S \theta_S + S_\theta \quad (III.56)$$

Où les coefficients et le terme source de l'équation algébrique sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\
A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\
A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\
A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)
\end{aligned} \quad (III.57)$$

Où :

$$\begin{aligned}
F_e &= U_e \Delta Y_p \\
F_w &= U_w \Delta Y_p \\
F_n &= V_n \Delta X_p \\
F_s &= V_s \Delta X_p
\end{aligned} \quad (III.58)$$

et :

$$\begin{aligned}
D_e &= \frac{(1 + N_c \varphi) \Delta Y_p}{Cr} \frac{\Delta Y_p}{dX_e} \\
D_w &= \frac{(1 + N_c \varphi) \Delta Y_p}{Cr} \frac{\Delta Y_p}{dX_w} \\
D_n &= \frac{(1 + N_c \varphi) \Delta X_p}{Cr} \frac{\Delta X_p}{dY_n} \\
D_s &= \frac{(1 + N_c \varphi) \Delta X_p}{Cr} \frac{\Delta X_p}{dY_s}
\end{aligned} \tag{III.59}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{\Delta X_p \Delta Y_p}{\Delta \tau} \tag{III.60}$$

$$S_\theta = \theta_P^0 \Delta X_p \Delta Y_p \tag{III.61}$$

III.5. Méthode de résolution :

III.5.1. Equation de pression :

Pour résoudre le système d'équations de discrétisation pour U_{p_u} et V_{p_v} , il est essentiel de déterminer la pression qui intervient dans les termes sources de ces équations. Ainsi, nous avons besoin d'une équation de discrétisation de la pression pour chaque point interne du maillage typique. Cette équation peut être obtenue en utilisant les équations de discrétisation des vitesses et de continuité.

L'équation de discrétisation (III.36) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$A_P U_{P_u} = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U + (P_P - P_E) \Delta Y_p \tag{III.62}$$

Avec :

$$S_U = b_U + (P_P - P_E) \Delta Y_p \tag{III.63}$$

On remarque que la position P_u du maillage décalé est confondue avec la position e du maillage typique. Donc, l'équation de discrétisation de U_{P_u} ($U_{P_u} = U_e$) devient :

$$A_P U_e = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U + (P_P - P_E) \Delta Y_p \tag{III.64}$$

Cette équation est réécrite comme suit :

$$U_e = [A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U + (P_P - P_E) \Delta Y_p] / A_P \tag{III.65}$$

$$U_e = \hat{U}_e + d_e (P_P - P_E) \tag{III.66}$$

Avec :

$$U_e = [A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U] / A_P \tag{III.67}$$

Cette variable est appelée le pseudo vitesse suivant la direction x .

$$d_e = \Delta Y_p / A_P \tag{III.68}$$

Au point w , on peut obtenir une équation similaire :

$$U_w = \widehat{U}_w + d_w(P_W - P_P) \quad (\text{III.69})$$

Ou les pseudo-vitesses sont données par les expressions suivantes :

$$\widehat{U}_e = [A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U] / A_P \quad (\text{III.70})$$

Nous avons aussi obtenu l'équation de discrétisation de V_{P_v} :

$$A_P V_{P_v} = A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + b_V + (P_P - P_N) \Delta X_P \quad (\text{III.71})$$

Avec :

$$S_V = b_V + (P_P - P_N) \Delta X_P \quad (\text{III.72})$$

Aussi, on remarque que la position P_v du maillage décalé vers le haut est confondue avec la position n du maillage typique. Donc, l'équation de discrétisation de V_{P_v} ($V_{P_v} = V_n$) devient :

$$A_P V_n = A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + b_V + (P_P - P_N) \Delta X_P \quad (\text{III.73})$$

Cette équation est réécrite comme suit :

$$V_n = [A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + b_V + (P_P - P_N) \Delta X_P] / A_P \quad (\text{III.74})$$

$$V_n = \widehat{V}_n + d_n (P_P - P_N) \quad (\text{III.75})$$

Avec :

$$\widehat{V}_n = [A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + b_V] / A_P \quad (\text{III.76})$$

$$d_n = \Delta X_P / A_P \quad (\text{III.77})$$

Au point s , on peut obtenir une équation similaire :

$$V_s = \widehat{V}_s + d_s (P_S - P_P) \quad (\text{III.78})$$

Maintenant, nous allons remplacer les quatre équations :

$$U_e = \widehat{U}_e + d_e (P_P - P_E) \quad , \quad U_w = \widehat{U}_w + d_w (P_W - P_P) \quad (\text{III.79})$$

$$V_n = \widehat{V}_n + d_n (P_P - P_N) \quad , \quad V_s = \widehat{V}_s + d_s (P_S - P_P)$$

Dans l'équation de discrétisation de continuité :

$$(U_e - U_w) \Delta Y_P + (V_n - V_s) \Delta X_P = 0 \quad (\text{III.80})$$

Et on obtient alors l'équation de discrétisation de pression sous la forme :

$$A_P P_P = A_E P_E + A_W P + A_N P_N + A_S P_S + S_P \quad (\text{III.81})$$

Avec :

$$A_E = d_e \Delta Y_P, \quad A_W = d_w \Delta Y_P, \quad A_N = d_n \Delta X_P, \quad A_S = d_s \Delta X_P \quad (\text{III.82})$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \quad (\text{III.83})$$

$$S_P = [(\widehat{U}_w - \widehat{U}_e) \Delta Z_P + (\widehat{V}_s - \widehat{V}_n) \Delta X_P] \quad (\text{III.84})$$

Les équations de discrétisation du champ de vitesse et du champ de pression obtenues sont intimement liées, engendrant un couplage significatif. Résoudre ce couplage requiert une

approche simultanée et itérative des équations. La solution démarre avec des estimations qui sont ensuite corrigées successivement.

On définit les variables correctes comme des sommes des variables estimées plus des corrections :

$$\begin{aligned} U &= U^* + U' \\ V &= V^* + V' \\ P &= P^* + P' \end{aligned} \quad (\text{III.85})$$

Où :

U^*, V^*, P^* Sont les estimations et U', V', P' sont les corrections.

En substituant ces définitions dans les équations de discrétisation des vitesses, nous obtenons les équations de discrétisation des estimations :

$$A_P U_{P_u}^* = A_E U_{E_u}^* + A_W U_{W_u}^* + A_N U_{N_u}^* + A_S U_{S_u}^* + b_U + (P_P^* - P_E^*) \Delta Y_P \quad (\text{III.86})$$

$$A_P V_{P_v}^* = A_E V_{E_v}^* + A_W V_{W_v}^* + A_N V_{N_v}^* + A_S V_{S_v}^* + b_V + (P_P^* - P_N^*) \Delta X_P \quad (\text{III.87})$$

Ces équations démontrent qu'avec une estimation de la pression, on ne peut obtenir qu'une estimation des vitesses.

Les équations de discrétisation des corrections sont :

$$A_P U_{P_u}' = A_E U_{E_u}' + A_W U_{W_u}' + A_N U_{N_u}' + A_S U_{S_u}' + (P_P' - P_E') \Delta Y_P \quad (\text{III.88})$$

$$A_P V_{P_v}' = A_E V_{E_v}' + A_W V_{W_v}' + A_N V_{N_v}' + A_S V_{S_v}' + (P_P' - P_N') \Delta X_P \quad (\text{III.89})$$

Comme approximation, nous pouvons éliminer les corrections des vitesses aux points voisins et redéfinir les corrections des vitesses uniquement en fonction de la correction de la pression :

$$U_{P_u}' = d_e (P_P' - P_E') \quad (\text{III.90})$$

$$V_{P_v}' = d_n (P_P' - P_N')$$

Donc le champ de vitesses s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} U_e &= U_e^* + d_e (P_P' - P_E') \\ U_w &= U_w^* + d_w (P_P' - P_P') \\ V_n &= V_n^* + d_n (P_P' - P_N') \\ V_s &= V_s^* + d_s (P_P' - P_P') \end{aligned} \quad (\text{III.91})$$

Pour la détermination de la correction de pression, on utilise les définitions (III.90) dans l'équation de discrétisation de continuité (III.19) et on obtient :

$$\begin{aligned} [U_e^* + d_e (P_P' - P_E')] \Delta Y_P - [U_w^* + d_w (P_P' - P_P')] \Delta Y_P + [V_n^* + d_n (P_P' - P_N')] \Delta X_P \\ - [V_s^* + d_s (P_P' - P_P')] \Delta X_P = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.92})$$

Cette équation est réécrite sous la forme d'une équation de discrétisation de correction de pression :

$$A_P P'_P = A_E P'_E + A_W P'_W + A_N P'_N + A_S P'_S + S_P \quad (\text{III.93})$$

Avec :

Les coefficients $A_E, A_W, A_N, A_S, A_F, A_B$ et A_P sont les mêmes que ceux de l'équation de pression:

Et :

$$S_P = [U_w^* - U_e^*] \Delta Y_P + [V_s^* - V_n^*] \Delta X_P = 0 \quad (\text{III.94})$$

III.5.2. Technique de balayage et l'algorithme de Thomas :

La résolution directe du système d'équations algébriques est complexe, d'où l'utilisation de la technique de balayage, une méthode semi-itérative. Elle implique de déterminer les valeurs de la variable \emptyset sur chaque ligne du domaine d'étude indépendamment des autres lignes, transformant ainsi le système d'équations algébriques multidimensionnelles en un système unidimensionnel. On ajoute à la source de la dimension choisie des termes provenant des autres dimensions. Le système d'équations obtenu est représenté par une matrice tri-diagonale et peut être résolu efficacement à l'aide de l'algorithme de Thomas.

L'équation algébrique s'écrit pour le nœud P du maillage comme suit :

$$A_P \emptyset_P = A_E \emptyset_E + A_W \emptyset_W + A_N \emptyset_N + A_S \emptyset_S + S \quad (\text{III.95})$$

Le système d'équations obtenu peut se mettre sous la forme suivante :

$$[A] \cdot [\emptyset] = [S_\emptyset] \quad (\text{III.96})$$

$[A]$: est une matrice de $(IL - 2) \times (JL - 2)$ éléments.

$[\emptyset]$: Vecteur des inconnues

$i = 2 ; IL - 1$ et $j = 2 ; JL - 1$

Pour déterminer les valeurs de \emptyset sur une colonne « i » on suppose que les valeurs de cette dernière sont connues sur les colonnes « i » et « $i + 1$ ». L'équation algébrique (III.94) écrite pour chaque nœud de la colonne « i » est alors réduite à une équation qui contient seulement trois inconnues ($\emptyset_P, \emptyset_N, \emptyset_S$).

Dans sa forme générale indicielle, l'équation discrétisée s'écrit comme suit :

$$A_P(i, j) \emptyset_{i, j} = A_E(i, j) \emptyset_{i+1, j} + A_W(i, j) \emptyset_{i-1, j} + A_N(i, j) \emptyset_{i, j+1} + A_S(i, j) \emptyset_{i, j-1} + S(i, j) \quad (\text{III.97})$$

Pour le nœud (i, j) du maillage, l'équation (III.96) peut être exprimée sous forme d'une équation unidimensionnelle :

$$a_j \emptyset_j = b_j \emptyset_{j+1} + c_j \emptyset_{j-1} + d_j \quad (\text{III.98})$$

Où :

$$\left. \begin{aligned} a_j &= A_P(i, j) \\ b_j &= A_N(i, j) \\ c_j &= A_S(i, j) \\ d_j &= A_E(i, j)\phi_{i+1, j} + A_W(i, j)\phi_{i-1, j} + S(i, j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.99})$$

Donc, nous obtenons l'équation sous la forme suivante :

$$-c_j\phi_{j-1} + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} = d_j \quad (\text{III.100})$$

Avec : $c_1 = 0$ et $b_{JL} = 0$

Pour tous les nœuds ($j = 2, JL - 1$) de la colonne i , l'équation donne un système de la forme :

$$-c_2\phi_1 + a_2\phi_2 - b_j\phi_1 = d_2$$

.....

$$-c_j\phi_{j-1} + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} = d_j \quad (\text{III.101})$$

.....

$$-c_{JL}\phi_{JL-1} + a_{JL}\phi_{JL} - b_{JL}\phi_{JL+1} = d_{JL}$$

Les valeurs de ϕ_1 et ϕ_{JL} sont connues (conditions aux limites).

La matrice liée au système est tri-diagonale. On applique l'algorithme TDMA (Thomas) en réorganisant toutes les équations du système (III.101) comme suit :

$$\phi_j = \frac{c_j}{a_j}\phi_{j-1} + \frac{b_j}{a_j}\phi_{j+1} + \frac{d_j}{a_j} \quad (\text{III.102})$$

On obtient :

$$\phi_2 = \frac{c_2}{a_2}\phi_1 + \frac{b_2}{a_2}\phi_3 + \frac{d_2}{a_2} \quad (\text{III.103})$$

$$\phi_3 = \frac{c_3}{a_3}\phi_2 + \frac{b_3}{a_3}\phi_4 + \frac{d_3}{a_3} \quad (\text{III.104})$$

$$\phi_{JL} = \frac{c_{JL}}{a_{JL}}\phi_{JL-1} + \frac{b_{JL}}{a_{JL}}\phi_{JL+1} + \frac{d_{JL}}{a_{JL}} \quad (\text{III.105})$$

Et puisque ϕ_1 est connue, on élimine ϕ_2 de (III.103) et ϕ_3 de (III.104) et ainsi de suite ; on obtient une relation de récurrence pour ϕ_j telle que :

$$\phi_j = P_j\phi_{j+1} + Q_j \quad (\text{III.106})$$

Détermination de P_j et Q_j , Pour le nœud $(i, j - 1)$, on a :

$$\phi_{j-1} = P_{j-1}\phi_j + Q_{j-1} \quad (\text{III.107})$$

En remplaçant (III.106) dans (III.99), on trouve :

$$-c_j(P_{j-1}\phi_j + Q_{j-1}) + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} = d_j \quad (\text{III.108})$$

On a :

$$(a_j - c_j P_{j-1})\phi_j = d_j + c_j Q_{j-1} + b_j \phi_{j+1} \quad (\text{III.109})$$

$$\phi_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \phi_{j+1} + \frac{d_j - c_j Q_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.110})$$

De (III.106) et (III.110), on a :

$$P_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.111})$$

$$Q_j = \frac{d_j - c_j Q_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.112})$$

Remarquons que pour : $j = 1$ on a : $c_j = 0$; l'équation (III.110) pour $j = 1$ se réduit à :

$$c = \frac{b_1}{a_1} \phi_2 + \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III.113})$$

Ce qui correspond à la forme de l'équation (III.102)

On a :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad , \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III.114})$$

Aussi, pour $j = JL$ On a : $b_{JL} = 0$, donc $P_{JL} = 0$

Et de l'équation (III.107) on a :

$$P_{JL} = Q_{JL} \quad (\text{III.115})$$

Algorithme de THOMAS se résume comme suit :

- Trianguler la matrice (la matrice tri-diagonale devient bi-diagonale)
1. Calculer les quantités P_1 et Q_1 de (III.102) par $P_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$.
 2. Calculer à partir de (III.111) et (III.112) les coefficients P_j et Q_j pour $j = 1, 2, \dots, JL$.
 - Résoudre le système à matrice bi-diagonale :
 3. On pose : $\phi_{JL} = Q_{JL}$

On utilise l'équation (III.106) pour $j = JL - 1, j = JL - 2, \dots, 1$ pour obtenir les valeurs $\phi_{JL-1}, \phi_{JL-2}, \dots, \phi_2, \phi_1$.

III.5.3 Algorithme de calcul SIMPLER :

La solution séquentielle de l'ensemble des systèmes d'équations de discrétisation des vitesses, de la pression, de la température et du potentiel électrique, est assurée par l'algorithme SIMPLER (Semi-Implicit-Pressure-Equation-Revised) [27]. Les étapes de cet algorithme sont :

1. Nous commençons par initialiser le champ des vitesses.
2. Avec le champ de vitesse initial, nous calculons les pseudos : \hat{U} et \hat{V} .
3. Avec les pseudo-vitesses, nous pouvons résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations de discrétisation de la pression et obtenir une estimation de celle-ci : P^*
4. L'estimation de la pression est ensuite utilisée dans les équations de discrétisation des vitesses. En conséquence, les systèmes d'équations de discrétisation des vitesses sont résolus (par la méthode itérative de balayage), fournissant ainsi les estimations des vitesses : U^* et V^* .
5. Avec les estimations des vitesses, nous pouvons résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations de discrétisation de la correction de pression, aboutissant ainsi à une estimation de celle-ci : P' .
6. En utilisant la correction de la pression, nous calculons les corrections des vitesses pour ensuite corriger le champ de vitesse.
7. Nous résolvons ensuite le système d'équations de discrétisation de la vitesse azimutale (par la méthode itérative de balayage), nous obtenons ainsi sa distribution.
8. Nous résolvons ensuite le système d'équations de discrétisation de la température (par la méthode itérative de balayage), nous obtenons ainsi le champ de température.
9. Nous résolvons ensuite le système d'équations de discrétisation du potentiel électrique (par la méthode itérative de balayage), aboutissant ainsi au champ du potentiel électrique.
10. Nous vérifions ensuite la convergence des calculs : si le régime stationnaire est atteint, nous arrêtons le calcul. Sinon, nous augmentons le temps d'un pas et avec le champ de vitesse corrigé comme nouvelle initialisation, nous retournons à l'étape 2.

III.5.4 Critère de convergence :

La convergence est établie lorsque le bilan de conservation de masse et d'énergie est satisfait, en vérifiant que l'évolution des valeurs des variables de l'écoulement (U, V, θ) entre deux itérations consécutives est négligeable.

$$(\phi^{n+1} - \phi^n) / \phi^n \leq \varepsilon = 10^{-4} \quad \text{(III.116)}$$

Où : \emptyset est la variable dépendante qui représente U, V ou θ .
 n est le nombre d'itération.

Chapitre IV

Résultats et discussion

IV.1 Introduction :

Dans cette section, nous présentons les résultats des simulations numériques portant sur la convection naturelle bidimensionnelle dans une cavité carrée remplie d'un NEPCM, soumise à un champ magnétique externe horizontal ($\gamma = 0$).

L'étude vise à analyser l'effet du champ magnétique, en variant le nombre de Hartmann ($0 \leq Ha \leq 100$), sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur dans la cavité, pour différents nombres de Rayleigh ($10^4 \leq Ra \leq 10^6$).

Par ailleurs, les effets du nombre de Stefan ($0.2 \leq Ste \leq 0.8$) et de la température de fusion réduite ($0.2 \leq \theta_f \leq 0.8$) sont examinés pour une valeur fixe de la fraction volumique du NEPCM $\varphi = 0.05$, afin d'évaluer leur impact sur le comportement thermo-hydrodynamique de l'écoulement.

L'analyse est menée à travers une visualisation graphique des résultats sous forme adimensionnelle, comprenant les lignes de courant, les isothermes et les contours du rapport de capacité thermique, permettant ainsi une interprétation détaillée des mécanismes de transfert thermique et des structures d'écoulement induites.

IV.2 Effet du maillage :

Le choix du maillage repose sur deux critères fondamentaux : la précision des résultats et le temps de calcul. Afin d'évaluer l'influence du maillage sur la qualité des solutions numériques, plusieurs grilles uniformes ont été testées, à savoir : 82×82 , 122×122 , 162×162 et 202×202 nœuds. En augmentant la résolution de la grille de 162×162 à 202×202 nœuds, une variation inférieure à 1 % a été observée sur les résultats calculés (voir tableau IV.1), ce qui confirme l'indépendance de la solution par rapport au maillage. Ainsi, la grille 162×162 a été retenue pour l'ensemble des simulations. Elle constitue un compromis optimal entre la précision recherchée et le coût numérique associé au temps de calcul.

Grille	U_{max}	V_{max}	$ \psi_{max} $	\bar{Nu}
82×82	15.9501	15.9907	3.11493	2.41768
122×122	16.0104	16.0358	3.11230	2.39222
162×162	15.9977	16.0482	3.10916	2.39244

Tableau (IV.1) : Caractéristiques de l'écoulement et du transfert thermique pour différentes grilles : $Ra = 10^5$, $ste = 0.3$, $Ha = 50$, $\theta = 0.3$ et $\varphi = 0.05$.

IV.3 Validation du code :

La validation de notre code de calcul a été réalisée par des comparaisons quantitatives et qualitatives avec des résultats de référence disponibles dans la littérature. Le tableau (IV.2) et la figure (IV.1) présentent ces comparaisons avec les travaux de Ghalambaz et al. [8], portant sur l'écoulement laminaire en convection naturelle d'un NEPCM dans une cavité carrée confinée. Les comparaisons ont été effectuées pour une valeur fixe du nombre de Rayleigh $Ra = 10^5$. D'après tableau (IV.2) et la figure (IV.1), on constate un accord quasi parfait entre nos résultats numériques et ceux rapportés dans la littérature, ce qui confirme la fiabilité et la précision de notre approche numérique.

Ste	θ_f	N_c	N_v	\overline{Nu} (Ghalambaz et al. [8])	\overline{Nu} (Nos résultats)
0.313	0.3	3	3	5.1932	5.22060
			6	5.0030	5.03307
		6	3	5.6533	5.68727
			6	5.4477	5.46567
0.2		3	3	5.3541	5.35717

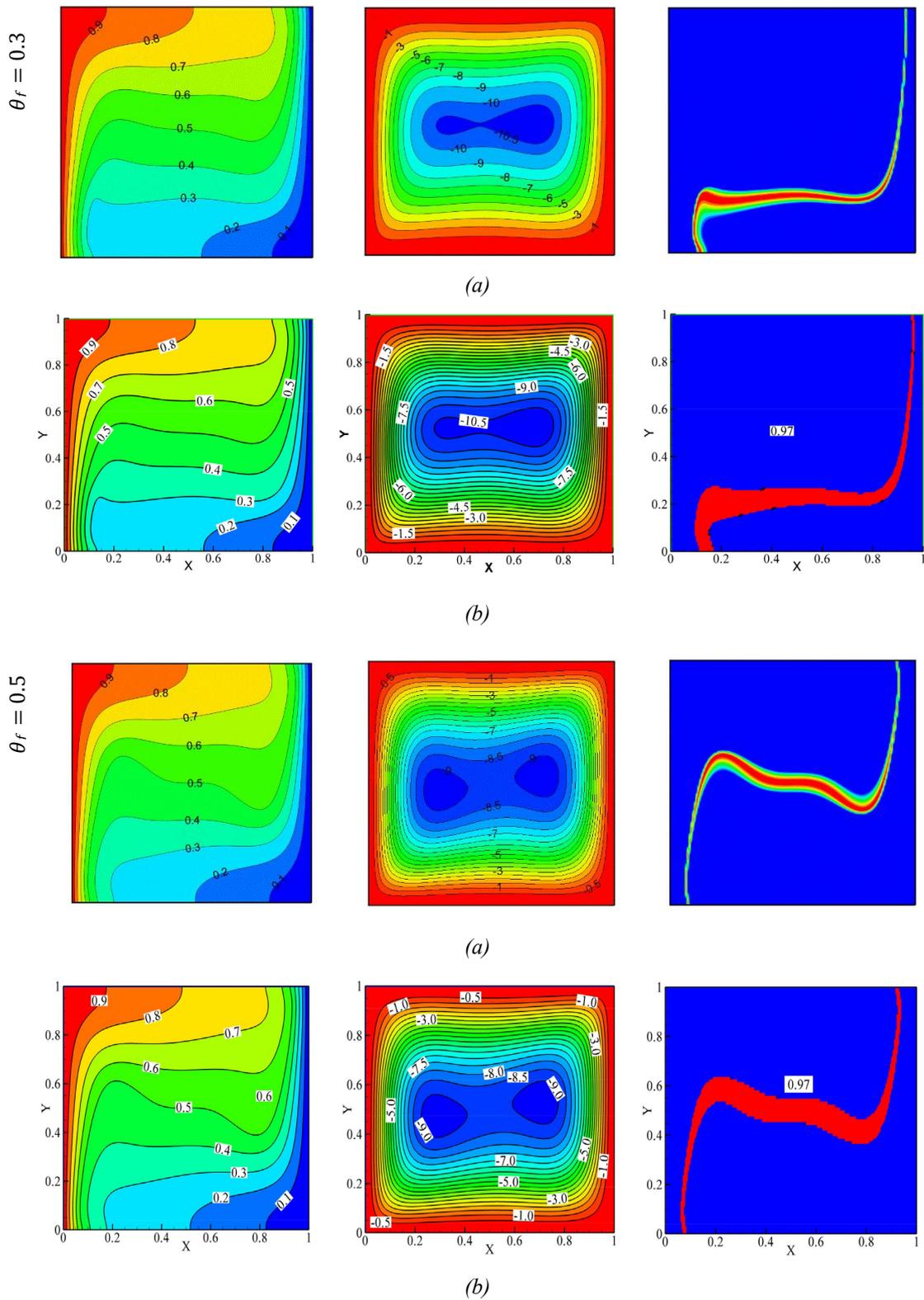
Tableau (IV.2) : Comparaison des résultats présents avec ceux de Ghalambaz et al. [8] pour $Ra = 10^5$.

s

θ

ψ

Cr



*Figure (IV.1) : Comparaison des lignes de courant et des isothermes.
(Nos résultats (a) et les résultats de Ghalambaz et al. (b))*

IV.4 Résultats et discussion :

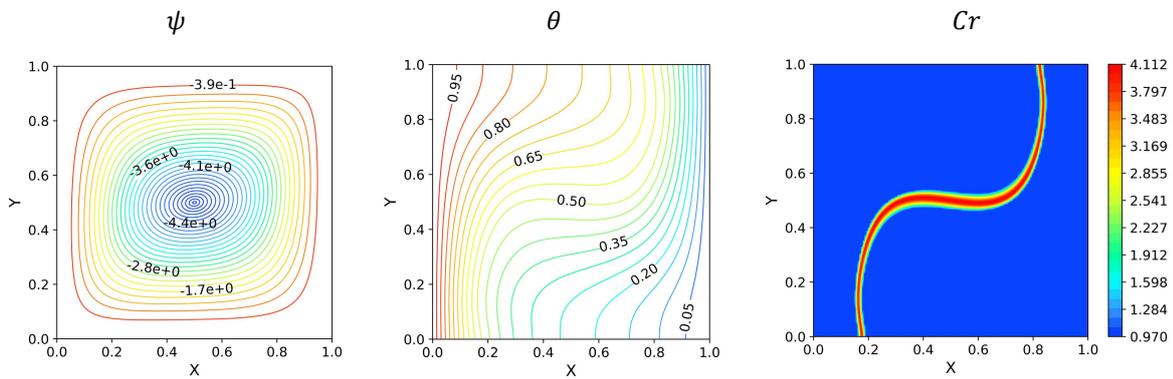
IV.4.1 Effet du nombre de Rayleigh :

La figure (IV.2) illustre l'influence du nombre de Rayleigh ($Ra = 10^4, 10^5$ et 10^6) pour $\theta_f = 0.5$, $Ste = 0.5$, $N_v = 3$, $N_c = 3$ et $Ha = 0$, sur les lignes de courant, les isothermes, ainsi que sur la distribution du rapport de capacité thermique dans une cavité remplie de matériau à changement de phase nano-encapsulé (NEPCM). Pour $Ra = 10^4$, la structure d'écoulement est caractérisée par des lignes concentriques, révélant une convection naturelle de faible intensité. À mesure que Ra augmente, l'intensité de la convection s'accroît sous l'effet croissant de la force de flottabilité. Pour $Ra = 10^5$, les lignes de courant commencent à se déformer, laissant apparaître des cellules secondaires à l'intérieur de la cellule principale, ce qui renforce la circulation du fluide. Cette tendance se confirme à $Ra = 10^6$, où l'écoulement devient plus intense, avec deux structures tourbillonnaires nettement marquées, témoignant d'un mouvement convectif dominant. Il est à noter que la structure de l'écoulement est centro-symétrique pour toutes les valeurs du nombre de Rayleigh considérées pour $\theta_f = 0.5$.

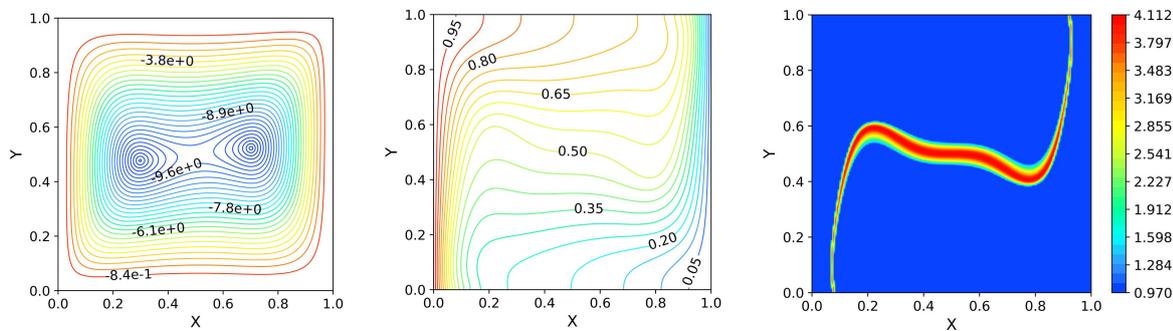
Concernant la distribution des isothermes, pour $Ra = 10^4$, celles-ci sont faiblement incurvées, ce qui confirme un régime faiblement convectif. À $Ra = 10^5$, une distorsion progressive apparaît, notamment à proximité des parois verticales, indiquant un régime convectif important. Pour $Ra = 10^6$, les isothermes deviennent fortement courbées et se resserrent près des parois verticales, convergeant vers le centre de la cavité. Cette configuration traduit un gradient thermique important et une convection très intense.

De manière générale, les particules de NEPCM circulent dans la cavité en suivant le mouvement du fluide liquide. Ainsi, elles traversent successivement des zones chaudes et froides. Lorsqu'elles pénètrent dans une région dont la température est supérieure à leur température de fusion, elles subissent un changement de phase vers l'état liquide, en absorbant la chaleur latente. Inversement, lorsqu'elles se déplacent vers une zone plus froide que leur température de fusion, elles restituent la chaleur latente en repassant à l'état solide. Par conséquent, bien que le régime stationnaire de l'écoulement soit établi, la circulation dynamique des particules engendre l'existence de zones locales de changement de phase. L'analyse du rapport de capacité thermique met en évidence deux régions distinctes. Une zone étroite à forte capacité thermique (en couleur) apparaît dans la cavité ; elle correspond à la plage de température active où se produit la transition de phase, grâce à l'absorption ou la libération de chaleur latente. Cette région constitue le cœur fonctionnel du stockage thermique. Autour de cette bande, la capacité thermique reste faible et constante (zone bleue), avec une valeur proche de 0.97, caractéristique du fluide porteur seul, non impliqué dans

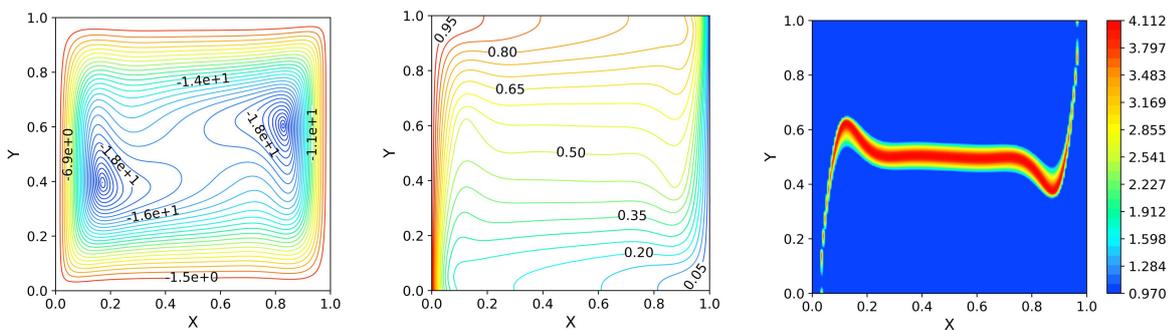
le changement de phase. Ces zones dominent spatialement la cavité, ce qui indique que le phénomène de changement de phase reste localisé et confiné. L'évolution de cette zone de transition avec le nombre de Rayleigh (Ra) est également significative : pour $Ra = 10^4$, la zone de fusion est fine, horizontale et centrée autour de $y = 0.5$, traduisant un transfert de chaleur convectif faible. A $Ra = 10^5$, cette zone s'élargit et adopte une forme courbée, tout en maintenant une symétrie, ce qui reflète une convection plus développée. A $Ra = 10^6$, la zone devient plus étendue et toujours symétrique, mais tend à s'horizontaliser davantage au centre, ce qui témoigne d'un transfert thermique intensifié par convection dans toute la cavité.



(a) $Ra = 10^4$



(b) $Ra = 10^5$



(c) $Ra = 10^6$

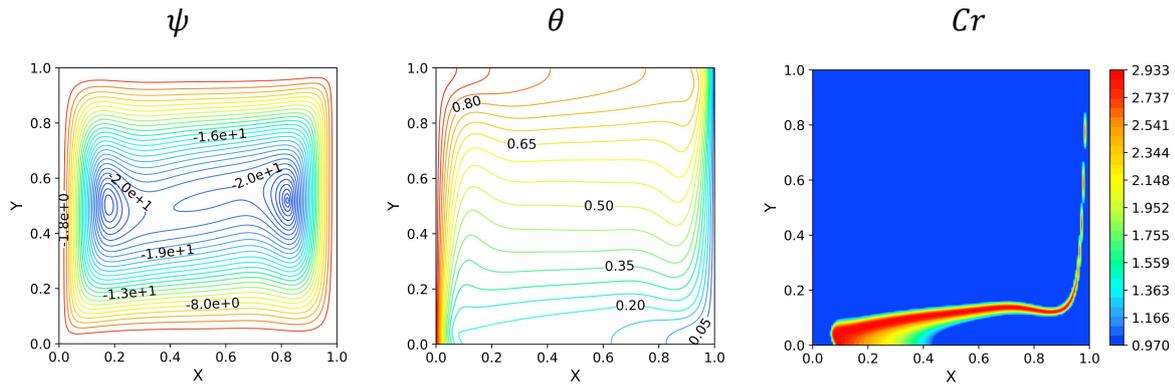
Figure (IV.2) : Effet du nombre de Rayleigh (Ra) sur les lignes de courant, les isothermes et les lignes de rapport de capacité thermique (Cr) pour $\theta_f = 0.5$, $Ste = 0.5$, $N_v = 3$, $N_c = 3$ et $Ha = 0$.

IV.4.2 Effet de la température de fusion :

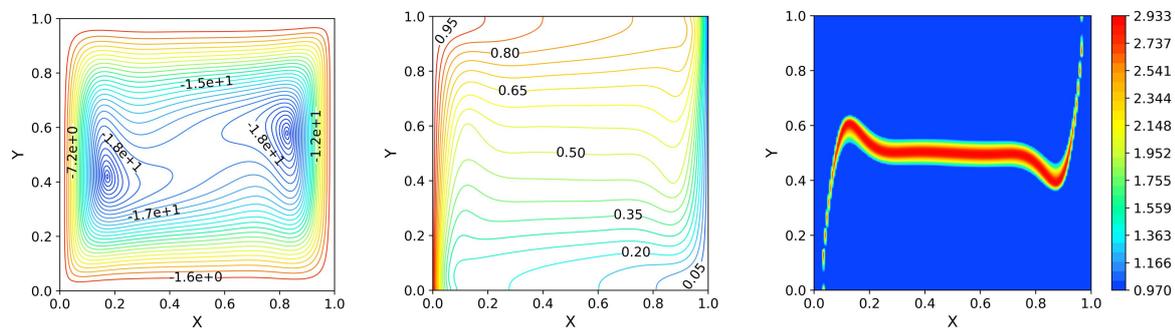
La figure (IV.3) montre l'effet de la température de fusion sur le champ d'écoulement, le champ thermique et le rapport de capacité thermique (Cr), pour les paramètres suivants : $Ra = 10^6$, $Ste = 0.8$, $N_v = 3$, $N_c = 3$ et $Ha = 0$. Il ressort clairement que la variation de la température de fusion influence la structure de l'écoulement à l'intérieur de la cavité. Pour $\theta_f = 0.5$, le champ d'écoulement présente une configuration centro-symétrique, caractérisée par deux cellules secondaires de même taille situées de part et d'autre à l'intérieur de la cellule principale. Ce comportement est cohérent avec la symétrie des conditions aux limites imposées. En revanche, pour $\theta_f = 0.2$, la cellule secondaire droite devient dominante, occupant une plus grande portion au détriment de celle de gauche. A l'inverse, pour $\theta_f = 0.8$, c'est la cellule secondaire gauche qui prédomine, traduisant une rupture de symétrie induite par le décalage de la zone de changement de phase vers les régions plus chaudes ou plus froides selon la valeur de θ_f .

Concernant les isothermes, celles-ci sont fortement déformées et resserrées près des parois, en raison du régime convectif lié à une valeur élevée du nombre de Rayleigh. A partir de $\theta_f = 0.2$, elles prennent une forme concentrée dans la partie inférieure gauche de la cavité, indiquant que le changement de phase débute dans cette zone, caractérisée par de forts gradients thermiques. Pour $\theta_f = 0.5$, les isothermes présentent une répartition centrosymétrique, suggérant que la zone de changement de phase se situe au centre de la cavité. En revanche, à $\theta_f = 0.8$, les isothermes deviennent plus resserrées dans la partie supérieure droite, adoptant une forme concentrée, ce qui indique un déplacement du front de fusion vers cette zone. Ces résultats montrent que l'augmentation de la température de fusion déplace la zone de transition vers la région froide de la cavité.

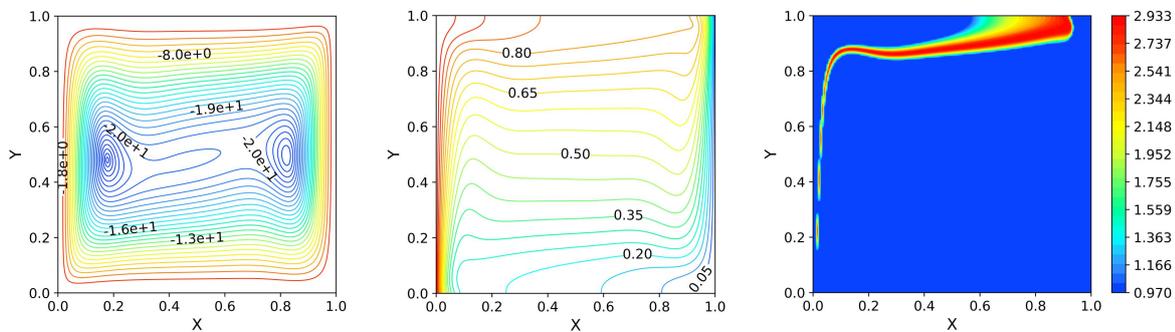
Comme cela a été discuté précédemment, les contours de la capacité thermique mettent en évidence deux régions distinctes. Pour $\theta_f = 0.2$, une zone de forte capacité thermique, colorée et prenant la forme d'un large ruban, apparaît dans la partie inférieure de la cavité, près de la paroi chaude. En revanche, lorsque la température de fusion atteint $\theta_f = 0.8$, ce ruban se déplace vers la partie supérieure de la cavité, près de la paroi froide.



(a) $\theta_f = 0.2$



(b) $\theta_f = 0.5$



(c) $\theta_f = 0.8$

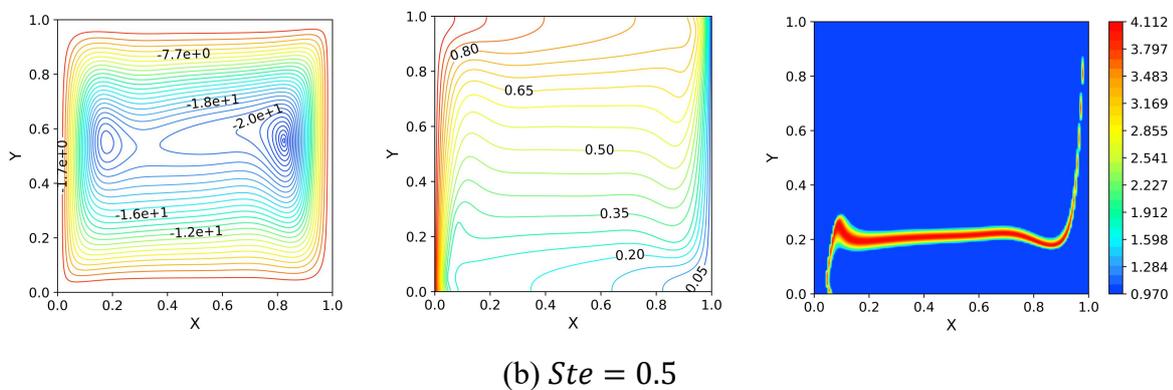
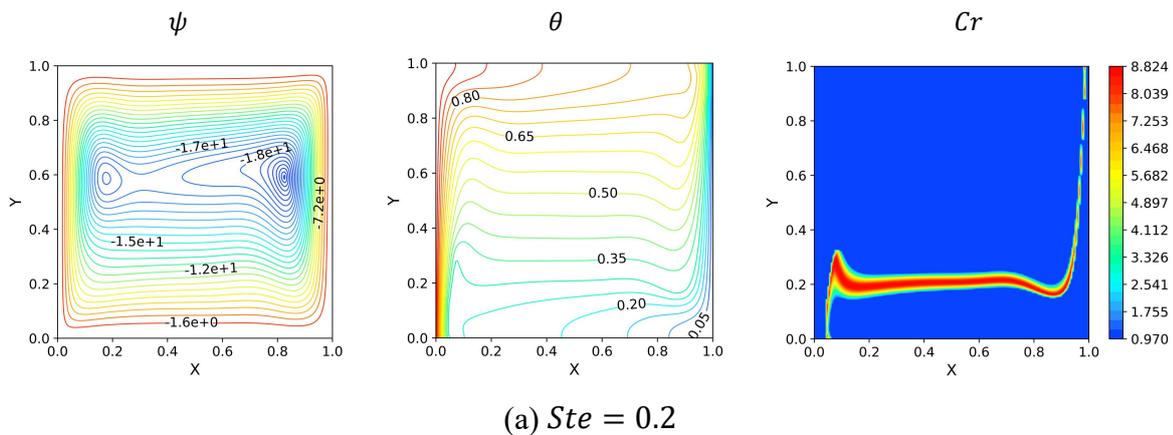
Figure (IV.3) : Effet de la température de fusion θ_f sur les lignes de courant, les isothermes et les lignes de rapport de capacité thermique (Cr) pour $Ra = 10^6$, $Ste = 0.8$, $N_v = 3$, $N_c = 3$ et $Ha = 0$.

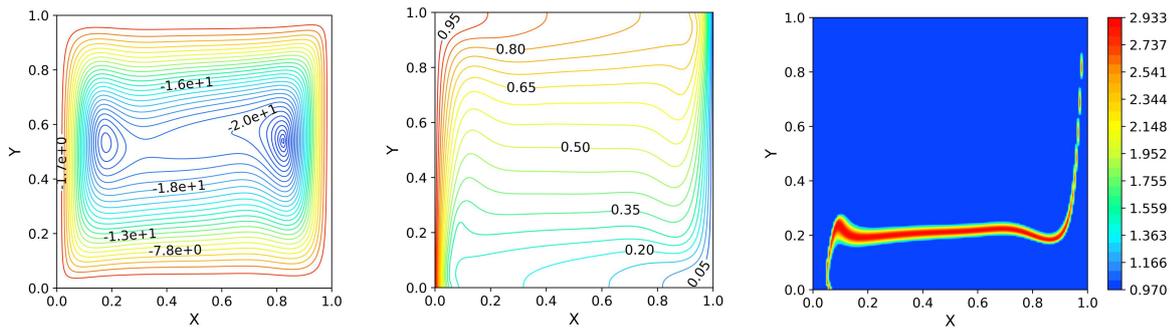
IV.4.3 Effet du nombre de Stefan :

La figure (IV.4) présentée illustre l'effet du nombre de Stefan (Ste) sur les lignes de courant, les isothermes et la distribution de la capacité thermique relative (Cr), pour les conditions suivantes : $Ra = 10^6$, $\theta_f = 0.3$, $N_v = 3$, $N_c = 3$ et $Ha = 0$. L'influence du nombre de Stefan sur les lignes de courant, les isothermes et la distribution de Cr s'avère négligeable. La variation de Ste a un effet limité sur le comportement global de l'écoulement : les lignes de courant conservent une structure stable avec des cellules de convection similaires pour tous les cas étudiés.

Concernant les isothermes, aucune modification notable n'est observée en termes de structure. De même, les contours de Cr conservent une configuration identique, bien qu'une augmentation de Ste entraîne une élévation des valeurs maximales de Cr .

Cette faible sensibilité au nombre de Stefan s'explique par la prédominance de la chaleur sensible dans les régimes à fort nombre de Rayleigh, où le transfert thermique est principalement gouverné par la convection. Par conséquent, la variation du nombre de Stefan n'induit pas de changement de régime significatif dans les conditions considérées.





(c) $Ste = 0.8$

Figure (IV.4) : Effet du nombre de Stefan Ste sur les lignes de courant, les isothermes et les lignes de rapport de capacité thermique (Cr) pour $Ra = 10^6$, $\theta_f = 0.3$, $N_v = 3$, $N_c = 3$ et $Ha = 0$.

IV.4.4 Effet du nombre de Hartmann :

La figure (IV.5) met en évidence l'effet du nombre de Hartmann (Ha) sur les lignes de courant, les isothermes et les contours du rapport de capacité thermique (Cr) pour les conditions suivantes : $Ra = 10^6$, $Ste = 0.4$, $\theta_f = 0.6$, $N_v = 6$ et $N_c = 6$, en considérant plusieurs valeurs de Ha .

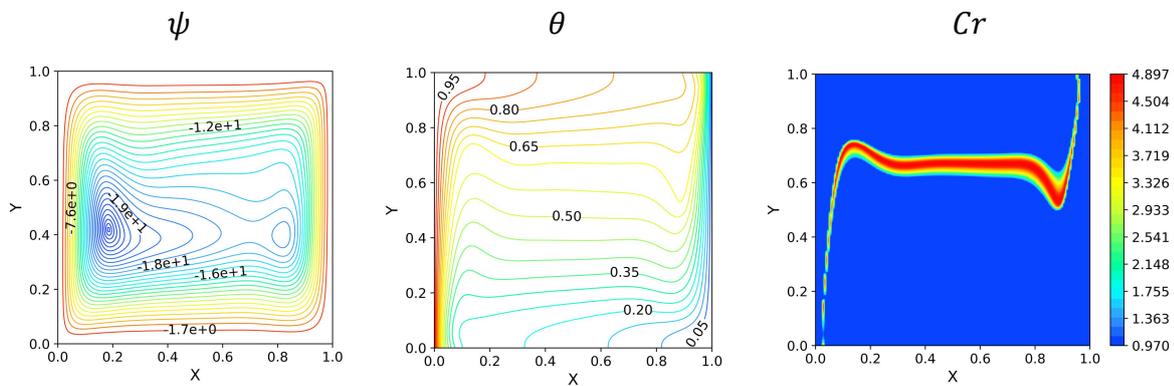
L'introduction d'un champ magnétique dans un écoulement de convection naturelle modifie significativement le champ de l'écoulement et le transfert thermique. Ce champ induit une force de Lorentz, orientée verticalement (du fait de l'orientation horizontale du champ magnétique), qui agit comme une force de freinage sur le fluide. Cette force s'oppose aux mouvements de convection, entraînant une diminution de la vitesse de l'écoulement et une atténuation de l'intensité convective, ce qui se traduit par une réorganisation progressive des isothermes vers une distribution plus uniforme.

Lorsque la valeur de Ha augmente significativement, le transfert de chaleur devient principalement dominé par la conduction, tandis que la convection voit son influence diminuer et devient moins prépondérante. En l'absence de champ magnétique, l'écoulement présente une cellule principale déformée, accompagnée de cellules secondaires en son sein. A mesure que l'intensité du champ magnétique augmente, la structure de l'écoulement se réorganise en cellules principales plus symétriques et confinées dans la partie inférieure de la cavité, sous l'effet stabilisateur de la force de Lorentz.

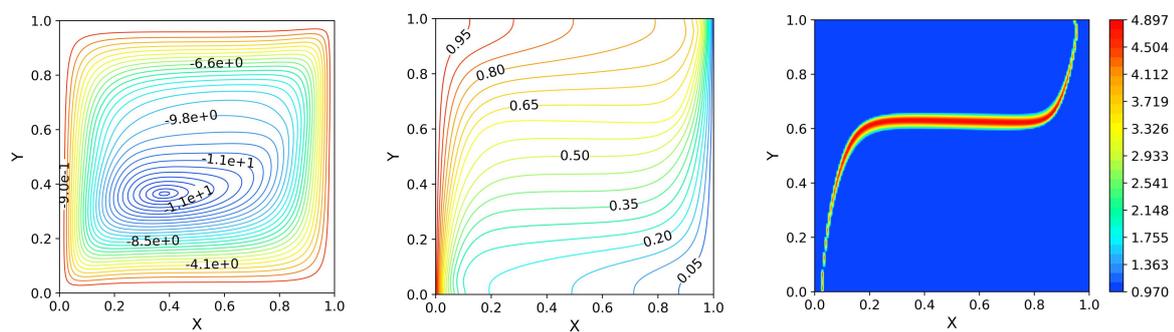
Sur le plan thermique, à faible Ha , les isothermes sont fortement déformées sous l'effet des mouvements convectifs. Lorsque Ha augmente, la diminution de la circulation fluide due à la

force de Lorentz rend les isothermes plus parallèles et moins perturbées, ce qui indique un passage progressif vers un transfert thermique dominé par la conduction. Pour des valeurs élevées de Ha , les vitesses d'écoulement deviennent très faibles et la convection devient négligeable, comme en témoigne l'alignement quasi horizontal des isothermes.

La distribution du rapport de capacité thermique est fortement influencée par le nombre de Hartmann. Lorsque Ha est faible, la convection naturelle prédomine, favorisant une fusion rapide, une large zone de changement de phase et une répartition homogène de la chaleur. En revanche, à mesure que Ha augmente, la résistance à l'écoulement s'intensifie sous l'effet de la force de Lorentz, ce qui ralentit la circulation du fluide, diminue l'efficacité du mélange thermique et réduit le transfert de chaleur. Cela entraîne une modification notable des lignes de changement de phase, avec une zone active (en couleur) qui se déplace vers le centre de la cavité.



(a) $Ha = 0$



(b) $Ha = 50$

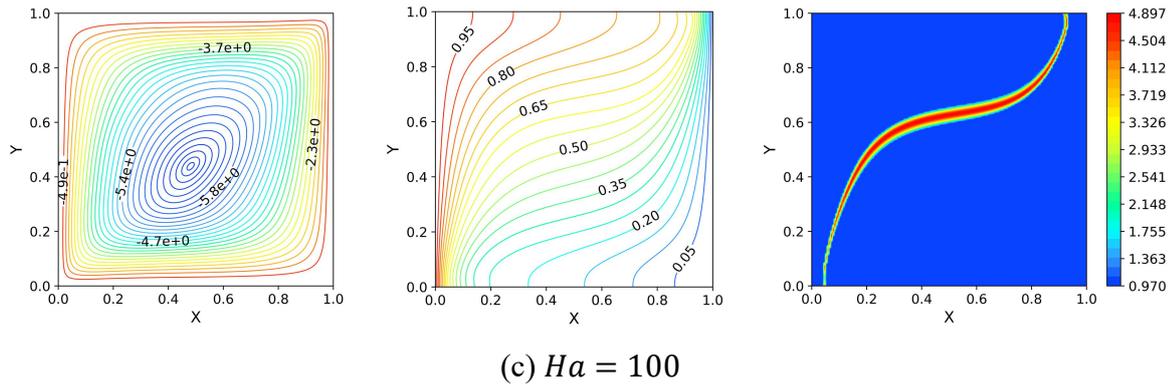


Figure (IV.5) : Effet du nombre de Hartmann Ha sur les lignes de courant, les isothermes et les lignes de rapport de capacité thermique (Cr) pour $Ra = 10^6$, $Ste = 0.4$, $\theta_f = 0.6$, $N_v = 6$ et $N_c = 6$.

IV.4.5 Taux de transfert de chaleur :

La figure (IV.6) illustre l'impact de la température de fusion sur le nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs du nombre de Stefan. Lorsque la température de fusion est faible, son augmentation entraîne une élévation du nombre de Nusselt moyen. Dans l'intervalle de température de fusion compris entre 0.3 et 0.7, un minimum est observé autour de $\theta_f = 0.5$. Ce comportement est confirmé par la figure (IV.5), où la température de fusion égale à 0.5 conduit à une zone de changement de phase centrée dans la cavité, en interaction avec les zones chaude et froide. Pour $Ra = 10^6$ et $Ste = 0.2$, le nombre de Nusselt maximal atteint environ 10.6, tandis que celui du fluide de base (sans NEPCM) est d'environ 9.22. Ainsi, l'introduction de 5 % de particules de NEPCM permet d'améliorer le transfert thermique jusqu'à 13 % par rapport au fluide de base pour $Ste = 0.2$. Comme mentionné précédemment, pour $Ra = 10^5$, toutes les courbes présentent un maximum pour des températures de fusion identiques, notamment à $\theta_f = 0.3$ et $\theta_f = 0.7$. En revanche, pour $Ra = 10^6$, l'amplitude des courbes varie, et les points maximaux ne sont plus localisés aux mêmes températures de fusion. Cette variabilité s'explique par l'intensification de l'écoulement, qui modifie la localisation des zones de fusion active, provoquant ainsi un déplacement des pics sur les courbes de Nusselt.

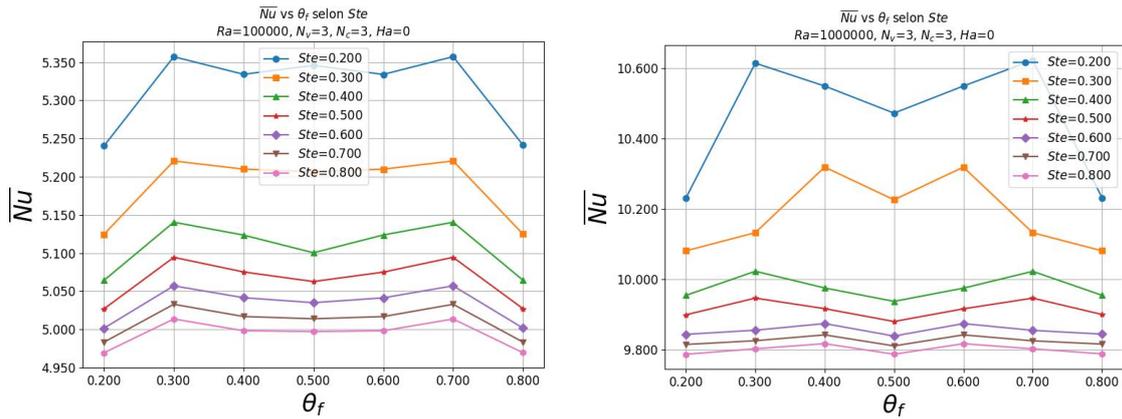


Figure (IV.6) : Effet de la température de fusion sur \overline{Nu} pour $Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6$, $N_v = 3$, $N_c = 3$ et $Ha = 0$.

La figure (IV.7) présente l'influence du nombre de Stefan sur le nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Pour chaque courbe, on observe que le Nusselt moyen varie légèrement lorsque Ste évolue entre 0.2 et 0.8. Pour les faibles valeurs de Ste , le nombre de Nusselt est relativement élevé, ce qui indique une dominance de la chaleur latente sur la chaleur sensible. Cela traduit un processus de changement de phase plus actif, favorisant un transfert de chaleur plus important. En revanche, à mesure que Ste augmente, la chaleur latente devient moins prépondérante et le fluide tend à se comporter comme un fluide porteur classique, avec un changement de phase moins marqué. On peut donc conclure que le nombre de Nusselt présente une faible sensibilité à la variation du nombre de Stefan dans la plage étudiée, ce qui signifie que le transfert de chaleur est modérément influencé par ce paramètre.

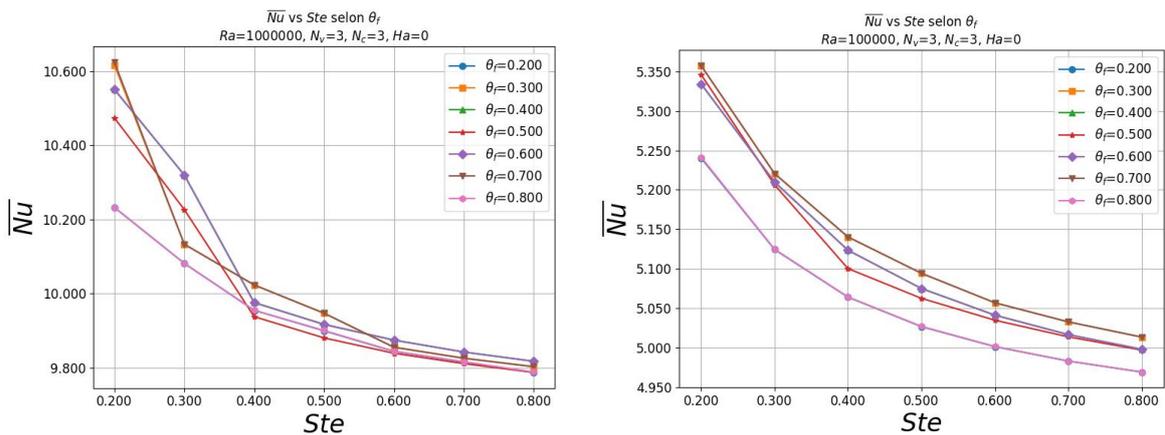


Figure (IV.7) : l'effet nombre de Stéfan sur \overline{Nu} pour $Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6$, $N_v = 3$, $N_c = 3$ et $Ha = 0$.

La figure (IV.8) illustre l'influence du nombre de Hartmann sur le nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. On observe que l'augmentation du nombre de

Hartmann entraîne une diminution du Nusselt moyen. Ce comportement s'explique par l'effet inhibiteur du champ magnétique sur le mouvement convectif du fluide, comme le montre également la figure (IV.8). En effet, la force de Lorentz générée par le champ magnétique agit comme une résistance au mouvement du fluide, réduisant sa vitesse de circulation et, par conséquent, l'efficacité du transfert thermique par convection.

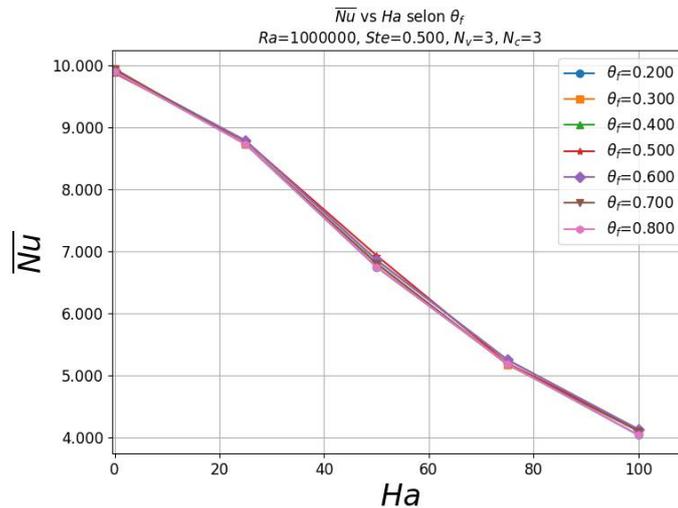


Figure (IV.8) : Effet nombre de Hartmann sur \overline{Nu} pour $Ra = 10^6, N_v = 3, N_c = 3$ et $ste = 0.5$.

Les résultats du tableau (IV.3) mettent en évidence l'impact significatif du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt moyen. On observe que \overline{Nu} augmente avec le nombre de Rayleigh, ce qui indique une amélioration du transfert de chaleur par convection naturelle. Cette amélioration s'explique par l'accroissement de la force de flottabilité, qui engendre une intensification du mouvement convectif à l'intérieur de la cavité, augmentant ainsi l'efficacité du transport thermique. Précisément, l'accroissement du Nusselt moyen varie d'environ 51% à 54 %, selon le type de régime thermique.

Ra	\overline{Nu}
10^4	2.488645
10^5	5.240295
10^6	10.23185

Tableau (IV.3) : Effet du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour les paramètres suivants : $Ra = 10^4, Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6$.

D'après le tableau (IV.4), on observe une diminution progressive du nombre de Nusselt moyen à mesure que la viscosité dynamique augmente. Une viscosité plus élevée limite la mobilité du fluide à changement

de phase (NEPCM) en accentuant les frottements internes, ce qui ralentit la circulation naturelle. Par conséquent, l'efficacité du transfert thermique par convection est réduite.

Ste	θ_f	N_c	N_v	\overline{Nu}
0.2	0.3	3	3	10.61485
/	/	/	6	10.021945
/	/	/	9	9.65547
0.3	/	/	3	10.133025
/	/	/	6	9.824985
/	/	/	9	9.485965
0.5	/	/	3	9.946925
/	/	/	6	9.5879
/	/	/	9	9.32288
0.7	0.5	/	3	9.811085
/	/	/	6	9.54473
/	/	/	9	9.30679

Tableau (IV.4) : Effet de la viscosité sur le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour $Ra = 10^6$.

Conclusion générale

Cette étude présente une analyse numérique approfondie de la convection naturelle d'un NEPCM dans une cavité carrée différentiellement chauffée, sous l'influence d'un champ magnétique externe orienté horizontalement. Les équations gouvernantes de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie ont été formulées, puis transformées en une forme adimensionnelle. Elles ont ensuite été résolues numériquement à l'aide d'un programme écrit en langage Fortran, basé sur la méthode des volumes finis. Le couplage entre la vitesse et la pression est assuré par l'utilisation de l'algorithme SIMPLER. Les effets des paramètres tels que les nombres de Rayleigh et de Stefan, la température de fusion des nanoparticules et le champ magnétique sur l'écoulement, le transfert thermique ont été étudiés et discutés en détail. Les principaux résultats obtenus conduisent aux conclusions suivantes :

- L'intensité de l'écoulement augmente avec l'accroissement du nombre de Rayleigh, ce qui favorise une convection plus active au sein de la cavité.
- L'ajout de NEPCM dans le fluide améliore le transfert thermique en renforçant la conductivité thermique effective et en augmentant la capacité thermique spécifique de la suspension, notamment à la température de fusion des particules. Cependant, l'intégration des nanoparticules de NEPCM présente aussi certains inconvénients, notamment une augmentation de la viscosité dynamique, une réduction de la capacité thermique sensible ainsi qu'un affaiblissement des forces de flottabilité, ce qui conduit finalement à une baisse du transfert de chaleur.
- La température de fusion des particules de NEPCM constitue un paramètre déterminant dans l'optimisation du transfert thermique en convection naturelle. L'efficacité maximale est observée lorsque la température de fusion adimensionnelle se situe entre 0,3 et 0,7 permet d'obtenir une amélioration relative d'environ 13 % par rapport au fluide de base.
- Un transfert thermique plus performant est également obtenu pour de faibles valeurs du nombre de Stefan. Cela traduit une augmentation de la chaleur latente des noyaux de PCM, ce qui accroît la contribution des particules de NEPCM au transfert thermique global.

- En revanche, l'augmentation du nombre de Hartmann entraîne une diminution du taux de transfert thermique, en raison de l'effet de freinage exercé par la force de Lorentz sur le mouvement du fluide, ce qui affaiblit les mouvements convectifs.

Ces conclusions soulignent l'importance de la gestion des paramètres de contrôle pour optimiser les performances thermiques dans les systèmes utilisant des NEPCM dans des cavités confinées.

References

- [1] Aissa Abderrahmane, Naef A.A. Qasem Convection flow of nano-encapsulated phase change material in wavy chamber with double sliding walls, flame-shaped heating source, and magnetic force, *Case Studies in Thermal Engineering*, Volume 56,104250, 2024.
<https://doi.org/10.1016/j.csite.2024.104250>
- [2] A.W. Kandeal, M. Ismail, Ali Basem, Mamoun, M. Elsayad, WissamH. Alawee, Hasan Sh Majdi, A.S. Abdullah, Sung-Hwan Jang, Meng An, Z.M. Omara, Nouby M. Ghazaly, Swellam W. Sharshir, *Results in Engineering*, Volume 23, 102514, 2024.
<https://doi.org/10.1016/j.rineng.2024.102514>
- [3] Obai Younis, Aissa Abderrahmane, Mohammad Hatami, Abed mourad & Kamel Guedri Nanoencapsulated phase change material in a trapezoidal prism wall under the magnetic field effect for energy storage purposes. *Scientific Reports*, Volume13, 16060, 2023.
<https://doi.org/10.1038/s41598-023-43394-2>
- [4]Anas Alazzam, NaefA.A. Qasem, Abderrahmane Aissa, Mohamed Salah Abid, Kamel Guedri, Obai Younis, Natural convection characteristics of nano-encapsulated phase change materials in a rectangular wavy enclosure with heating element and under an external magnetic field, *Journal of Energy Storage*, Volume 57, 106213, 2023.
<https://doi.org/10.1016/j.est.2022.106213>
- [5] S. Koochi-Fayegh, M.A. Rosen, A review of energy storage types, applications and recent developments, *Journal of Energy Storage*, Volume 27, 101047, 2020.
<https://doi.org/10.1016/j.est.2019.101047>
- [6] Zhonghao Rao, Shuangfeng Wang , Feifei Peng,Self diffusion of the nano-encapsulated phase change materials: A molecular, *Applied Energy*, Volume 100, Pages 303-308, 2012.
<https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2012.05.022>
- [7] Semahat Barlak, Osman Nuri Sara, Ali Karaipekli & Sinan Yapıcı, Thermal conductivity and viscosity of nanofluids having nanoencapsulated phase change material, *Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering*, Volume 20, Pages 85-96, 2016.
<http://dx.doi.org/10.1080/15567265.2016.1174321>
- [8] Mohammad Ghalambaz, Ali J. Chamkha, Dongsheng Wen, Natural convective flow and heat transfer of Nano-Encapsulated Phase Change Materials (NEPCMs) in a cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 138, Pages 738-749, 2019.

<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.04.037>

[9] S.A.M. Mehryana, Mohammad Ghalambaz , Leila Sasani Gargarid , Ahmad Hajjare , Mikhail Sheremet, Natural convection flow of a suspension containing nano-encapsulated phase change particles in an eccentric annulus, Journal of Energy Storage, Volume 28, 101236, 2020.

<https://doi.org/10.1016/j.est.2020.101236>

[10] M.S. Sadeghi, Ali J. Chamkha, Rifaqat Ali, Mohamed Bechir Ben Hamida, M. Ghodrat, Ahmed M. Galal, hydrothermal behavior of micro-polar Nano-Encapsulated phase change materials (NEPCMs) in an inclined L-shaped cavity, Case Studies in Thermal Engineering, Volume35, 102039, 2022.

<https://doi.org/10.1016/j.csite.2022.102039>

[11] Uhyaddin J.H. Rawa, Omar S. Mahdy , Nidal H. Abu-Hamdeh d,e , Abbas J. Sultan c , Hamed Kazemi-Varnamkhasti f , Sh. Baghaei g , Meshari A. Al-Ebrahim, Cooling a cavity equipped with a hot electrical element using nano-encapsulated phase change material /water: Study of mixed convection and natural convection, Case Studies in Thermal Engineering, Volume 50,103412, 2023.

<https://doi.org/10.1016/j.csite.2023.103412>

[12] Tahar Tayebi , Hakan F. Oztop, Investigation of the Local thermal Non-Equilibrium (LTNE) effects on magneto-natural convection of nano-encapsulated PCMs in an elliptical non-Darcian porous annulus, International Journal of Heat and Fluid Flow, Volume112, 109710, 2025.

<https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2024.109710>

[13] Abdelraheem M. Aly, Munirah Aali Alotaibi, AI-integrated ISPH framework for enhanced heat and mass transfer in NEPCM systems within porous wavy cylindrical annuli, Journal of Energy Storage, Volume108, 115113, 2025.

<https://doi.org/10.1016/j.est.2024.115113>

[14] kun Wang, Yuan Li, Bao-Lei Wang, Zhong-Hao Rao, Chun-Hua Min, Study on the integrated battery thermal management system based on magnetic fields and nano-enhanced phase change materials coupled with electrothermal films, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 240, 126665,2025.

<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2025.126665>

[15] Abed Mourad, Naim Hocine, Aissa Abderrahmane, Obai Younis, Riadh Marzouki, Double diffusion heat convection of a porous enclosure loaded with nano-encapsulated phase change materials, International Communications in Heat and Mass Transfer, Volume 163, 108764, 2025.

<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2025.108764>

[16] Analysis of thermosolutal buoyancy-driven suspension comprising Marouan Kouki, M.K. Nayak, Kashif Irshad, Mohammed K. Al MMesfer, Mohd Danish, Amjad Ali Pasha, Md Hasan Zahir, Ali J. Chamkha, Nano-encapsulated phase change materials using finite element method and ANN-based MLP algorithm, journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers, volume 168, 105912, 2025.

<https://doi.org/10.1016/j.jtice.2024.105912>

[17] Alexandra Soh, Vivekh Prabakaran, and Kian Jon Ernest Chua, Thermal Energy Storage From Fundamentals to Applications, National University of Singapore, Singapore, Stallion Press, 2023.

<https://doi.org/10.1142/13276>

[18] İbrahim Dinçer and Marc A. Rosen, Thermal Energy Storage Systems and Applications, Third Edition, Tech University Ontario, Canada, Wiley, 2021.

[19] Zafar Said · Adarsh Kumar Pandey, Nano Enhanced Phase Change Materials Preparation, Properties and Applications, Springer, 2023.

<https://doi.org/10.1007/978-981-99-5475-9>

[20] J. Buongiorno, D.C. Venerus, N. Prabhat, T. McKrell, J. Townsend, R. Christianson, Y.V. Tolmachev, P. Keblinski, L. Hu, J.L. Alvarado, I.C. Bang, S.W. Bishnoi, M. Bonetti, F. Botz, A. Cecere, Y. Chang, G. Chen, H. Chen, S.J. Chung, M. K. Chyu, S.K. Das, R. Di Paola, Y. Ding, F. Dubois, G. Dzido, J. Eapen, W. Escher, D. Funfschilling, Q. Galand, J. Gao, P.E. Gharagozloo, K.E. Goodson, J.G. Gutierrez, H. Hong, M. Horton, K.S. Hwang, C.S. Iorio, S.P. Jang, A.B. Jarzebski, Y. Jiang, L. Jin, S. Kabelac, A. Kamath, M.A. Kedzierski, L.G. Kieng, C. Kim, J.-H. Kim, S. Kim, S.H. Lee, K.C. Leong, I. Manna, B. Michel, R. Ni, H.E. Patel, J. Philip, D. Poulikakos, C. Reynaud, R. Savino, P.K. Singh, P. Song, T. Sundararajan, E. Timofeeva, T. Tritcak, A.N. Turanov, S. Van Vaerenbergh, D. Wen, S. Witharana, C. Yang, W.-H. Yeh, X.-Z. Zhao, S.-Q. Zhou, A benchmark study on the thermal conductivity of nanofluids, J. Appl. Phys. 106, 094312, 2009.

<https://doi.org/10.1063/1.3245330>

[21] M.A. Kedzierski, D. Venerus, J. Buongiorno, R. Christianson, J. Townsend, I.C. Bang, G. Chen, S.J. Chung, M. Chyu, H. Chen, Y. Ding, F. Dubois, G. Dzido, D. Funfschilling, Q. Galand, J. Gao, H. Hong, M. Horton, L. Hu, C. Iorio, A. Jarzebski, Y. Jiang, S. Kabelac, C. Kim, J.H. Kim, S. Kim, T. McKrell, R. Ni, J. Philip, N. Prabhat, P. Song, S. Van Vaerenbergh, D. Wen, S. Witharana, X.-Z. Zhao, S.-Q. Zhou, Viscosity measurements on colloidal dispersions (nanofluids) for heat transfer applications NIST, Appl. Rheol. J., 2010.

[22] Y. Rao, F. Dammal, P. Stephan, G. Lin, Convective heat transfer characteristics of microencapsulated phase change material suspensions in minichannels, *Heat Mass Transf.*, volume 44, 175–186, 2007.

<https://doi.org/10.1007/s00231-007-0232-0>

[23] Farid Berrahil, Abdelkader Filali, Fateh Mebarek-Oudina, Smail Benissaad, Sami Ullah Khan, Cherifa Abid, Salah Saouli and Yassine Demagh, Analysis of enhanced magnetohydrodynamic natural convection in a non-Darcy porous cavity with alumina-water fluid and conductive baffles, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, volume 35, page 2608-2645, 2025.

<https://doi.org/10.1108/HFF-01-2025-0026>

[24] S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere, New York, 1980.

[25] Y. Rao, F. Dammal, P. Stephan, G. Lin, Convective heat transfer characteristics of microencapsulated phase change material suspensions in minichannels, *Heat Mass Transf.* volume 44, Pages 175–186, 2007.

<https://doi.org/10.1007/s00231-007-0232-0>