الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf - Mila

المركز الجامعي
عبد الحفيظ بوالصوف ميلة

Institut: Sciences et Technologie
Numéro de série: ………………
Numéro d'inscription: M56/2017

Département: Mathématiques et Informatique

www.centre-univ-mila.dz

Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Doctorat

de troisième cycle (LMD)

Equations de la mécanique quantique

Présentée par : Djahida Bouchefra

Encadré par : Badredine Boudjedaa

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques et Applications

N°	Prénom et Nom	Grade	Université	Désignation
1	Nasr-eddine Hamri	Prof	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila	Président
2	Badredine Boudjedaa	M.C.A	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila	Rapporteur
3	Mohammed Salah Abdelouahab	Prof	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila	Examinateur
4	Mohammed Tayeb Meftah	Prof	Université Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
5	Khireddine Nouicer	Prof	Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel	Examinateur
6	Mohamed Haiour	Prof	Université Badji Mokhtar - Annaba	Examinateur

Année universitaire: 2021 / 2022

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila
✉ **BP 26 RP Mila 43000 Algérie**
☎ **031 450041** 🖷 **031 450040**

المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف - ميلة
✉ ص.ب رقم 26 RP ميلة 43000 الجزائر
☎ 031 450040 🖷 031 450041

DÉDICACE

A la mémoire de mon père

A ma mère

A la mémoire de ma tante

A tous mes frères et sœurs

Je dédie ce travail.

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon directeur de thèse B. Boudjedaa pour les conseils, l'orientation et l'assistance qu'il m'a apporté tout au long de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements au Professeur N. Hamri, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Je suis très honoré de remercier les Professeurs M. S. Abdelouahab, M. T. Meftah, K. Nouicer et M. Haiour d'avoir accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements particuliers au Professeur T. Boudjedaa pour ses précieux conseils et ses réponses à toutes mes questions.

Mes remerciements vont encore à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant les trois cycles, notamment le Professeur N. Arada, à mes amis et à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin.

Mes plus vifs remerciements vont à ma chère mère, à mes frères et sœurs, qui m'ont accompagné et soutenu durant toutes ces années.

Une pensée émue et particulière pour mon père qui aurait été comblé s'il était encore parmi nous.

Djahida

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le XIX^e siècle a vu des progrès dans les sciences physiques, en mécanique, en électricité, en thermodynamique et en optique. Les physiciens étaient si fiers des progrès qu'ils avaient accomplis qu'ils pensaient qu'il n'y avait plus rien à découvrir. La physique à cette époque suivait généralement l'approche d'Isaac Newton et sa philosophie qui est basée sur un ensemble de théories et de lois, qui ont contribué de manière significative à l'interprétation d'un large éventail de phénomènes cosmiques au niveau macroscopique. Le mécanisme d'action des lois de la physique était bien compris par les scientifiques, en plus de lois de Newton en mécanique et la théorie classique de la thermodynamique, il y avait les équations de Maxwell qui ont été considérées comme la base de l'électricité et du magnétisme. En fait, la mécanique de Newton, avec la thermodynamique, la théorie des ondes en optique et les équations de Maxwell en théorie électromagnétique, sont considérées comme l'essence de la physique classique [1]. Cette dernière s'intéresse à l'étude des corps entraînés par des forces et des corps en mouvement qui ont de grandes masses et une vitesse limitée. En ce qui concerne l'énergie, ainsi que la matière, ils sont considérés comme des concepts indépendants en physique classique.

La logique de Newton concernant le mouvement et la logique de Maxwell concernant les charges ont rendu les physiciens pleinement convaincus que ce sont les deux logiques appropriées pour comprendre tout ce qui se passe dans les phénomènes et les expériences physiques, et que la physique classique avait atteint le point où elle pouvait traiter des problèmes très complexes. Cependant, cette image forte de la physique classique n'a pas duré longtemps, où de sérieux doutes ont surgi sur l'exhaustivité de ses théories tandis que certaines formulations théoriques conduisaient à des paradoxes lorsqu'elles étaient poussées à la limite. Plus précisément, les physiciens ont constaté que les lois de Newton sont incompatibles avec les lois du monde des atomes, ce qui a conduit à l'apparition de lacunes dans la physique classique, qui sont généralement représentés dans son impuissance à expliquer les phénomènes qui se produisent au niveau atomique ou subatomique. De ce point de vue, il a été prouvé qu'il existe un monde complètement inconnu et qui n'a pas encore été découvert, qui est le monde des objets subatomiques. Les fiascos apparus dans la physique classique, compte tenu des limites étroites dans lesquelles opèrent ses lois, a fait du passage du monde macroscopique au monde microscopique un véritable dilemme pour les physiciens comme pour les philosophes. Ce dilemme les a amenés à se poser de nombreuses questions, dont la plus importante est de savoir comment le monde macroscopique est-il né du monde microscopique ? et quel est le mécanisme de travail de ce dernier ?. D'où le besoin de repenser certains des fondamentaux de la physique, ainsi que la nécessité d'interpréter les phénomènes naturels d'une manière nouvelle et dans une perspective différente qu'auparavant. Cela a amené les physiciens à revoir la structure des matériaux dans l'univers et à réviser leur concept de l'atome comme la plus petite unité dans la construction de la matière.

Au début du XX^{e} siècle, une révolution majeure secoue le monde de la physique et la communauté scientifique est prête à recevoir une nouvelle ère communément appelée physique moderne [2]. Plus précisément, dans cette ère, la naissance de la plus grande révolution scientifique a été annoncée, dans laquelle tout part de l'atome, connue sous le nom de physique quantique. Cette dernière, qui a apporté et continue d'apporter l'un des changements les plus importants dans notre compréhension du monde atomique. En revanche, la physique quantique s'est concentrée dans son contenu sur les systèmes expliqués par des théories telles que la mécanique quantique et la théorie quantique des champs [3]. En effet, la mécanique quantique est considérée l'outil fondamental qui permet la description et l'étude des phénomènes physiques à une échelle infiniment petite, l'échelle dans lequel les lois de la mécanique classique cessent d'être valables. Avec cela, nous pouvons dire que la mécanique quantique cherche le monde des phénomènes ultra-petits et ultra-rapides, et elle peut être brièvement définie comme un ensemble des principes et des théories qui permettent d'expliquer le comportement de la matière et de l'énergie. Historiquement, l'évolution de la mécanique quantique a connu plusieurs étapes distinctes, chacune d'entre elles impliquait des interprétations différentes et parfois opposées, alors qu'elle était fondée sur un certain nombre d'hypothèses. La première étape, pour une longue série de succès, remonte au physicien Max Planck qui, en 1900, a introduit l'idée de quantification de l'énergie afin d'arriver à une explication de la nature de la lumière émise par les atomes. Il a prouvé, en quelque sorte, que les échanges d'énergie entre la matière et la lumière se font par des quanta discrets et non de façon continue comme le prédit de la théorie classique [4]. En 1905, le physicien Albert Einstein adopta cette idée de quantification et montra, à partir de l'hypothèse que la lumière elle-même était constituée de grains discrets, plus tard appelés photons, qu'il était possible d'expliquer certains phénomènes tels que le rayonnement du corps noir et l'effet photoélectrique. Puis en 1913, Niels Bohr a partiellement répondu à cette question en publiant un article scientifique, en s'appuyant sur les idées de Planck et d'Einstein, dans lequel il propose un modèle intégré de l'atome de sorte que les électrons tournant autour du noyau sur certaines orbites. Ce modèle était connu sous le nom de modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène. De son côté, le physicien Louis de Broglie a proposé en 1924 sa théorie selon laquelle les atomes ont une nature ondulatoire tout comme elles ont une nature ponctuelle ou matérielle. Dans ce cadre, l'électron n'est donc pas complètement solide, mais prend plutôt la forme d'un nuage électronique aux propriétés ondulatoires.

Afin de révéler encore plus la réalité de ce monde atomique, nombreux physiciens se sont précipités à la recherche d'une description ondulatoire de la matière, ce qui nécessitait une équation physique décrivant l'évolution de l'onde dans le temps. Effectivement, à l'aide des équations dites différentielles, Erwin Schrödinger a pu dériver sa célèbre équation qui porte aujourd'hui son nom [5]. L'équation de Schrödinger était si brillamment capable de décrire le mouvement ondulatoire des particules atomiques qu'elle s'avéra rapidement son importance dans la description du modèle de l'atome d'hydrogène. Malgré cela, le physicien Max Born a montré que la solution de l'équation de Schrödinger ne donne que les probabilités dans lesquelles la particule atomique peut exister et ne dit rien sur sa nature. En 1925, avant que Schrödinger ne formule son équation, Werner Heisenberg utilisa un outil mathématique qui n'était pas très courant en physique à l'époque. Au lieu des équations différentielles utilisées par Schrödinger, Heisenberg a utilisé ce qu'on appelle des matrices. Le problème avec ces matrices, comme Born l'a noté plus tard, était qu'elles n'étaient pas commutantes, pourtant leur utilisation a conduit au principe d'incertitude qui a été introduit par Heisenberg peu de temps après.

Dans les années qui suivirent, les caractéristiques de l'image réelle du monde atomique ont commencé à devenir clair, là où la nature des particules et la nature de l'onde sont entrelacées dans les microparticules. En 1926 précisément, les physiciens Oskar Klein et Walter Gordon ont réussi à découvrir leur célèbre équation, l'équation de Klein-Gordon, pour décrire le mouvement des particules connu sous le nom de bosons après avoir trouvé la meilleure façon de modifier l'équation de Schrödinger pour l'adapter à la relativité restreinte [6]. Il est suivi rapidement par

Paul Dirac en 1928, avec sa théorie selon laquelle les approches de Schrödinger et Heisenberg étaient, en fait, deux représentations de la même algèbre linéaire. Cette théorie l'a amené à employer les mathématiques d'une manière idéale qui a rassemblé les idées de Schrödinger et de Heisenberg dans un cadre complet et unique qui a été résumé dans son équation d'onde relativiste [7, 8]. Toutes ces équations ont finalement conduit à la création de deux types de mécanique quantique : la mécanique quantique non relativiste et la mécanique quantique relativiste.

Ainsi, les années ont passé et les idées de la mécanique quantique se sont cristallisées et développées avec elles de plus en plus pour révéler aux scientifiques d'autres nouveaux faits et mystères sur le monde des atomes, ont été réduits sous forme d'équations physiques mathématiques, chacune avec sa propre formule et structure. En fait, ces équations ont joué un rôle clé en décrivant théoriquement ce monde et en révélant ses premières réalités. Outre l'équation de Schrödinger, qui a marqué un tournant dans la mécanique quantique, l'équation de Klein-Gordon, qui décrit le mouvement des particules relativistes de spin-0, et l'équation de Dirac, qui a distingué par sa cohérence mathématique et sa description du comportement des particules relativistes de spin-$\frac{1}{2}$, l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau [9, 10, 11] est venue accompagnée par d'autres merveilles de ce monde atomique. Cette dernière est l'une des équations de mécanique quantique relativistes les plus puissantes qui fournit une bonne base théorique pour le comportement des particules. D'un point de vue mathématique, l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau, en bref l'équation de DKP, est une équation relativiste du premier ordre décrivant le mouvement à la fois des particules scalaires et vectorielles i.e. les particules de spin-0 et de spin-1. De plus, il s'agit d'une extension du formalisme covariant de l'équation de Dirac, sous laquelle les matrices gamma γ de Dirac sont remplacées par des matrices bêta β qui réalisent une algèbre complexe dite algèbre de DKP.

Récemment, l'étude des équations de la mécanique quantique relativiste, en particulier l'équation de Dirac et l'équation de DKP, a suscité beaucoup d'intérêt chez plusieurs chercheurs. Cela est dû au rôle primordial qu'elle joue dans la compréhension profonde et précise de la physique quantique en général, et de ses applications étendues dans la résolution des problèmes de la physique des particules et de la physique nucléaire en particulier [12, 13]. Sans oublier les applications concrètes telles que les centrales nucléaires, le laser, l'IRM en médecine ou les ordinateurs, et dont les propriétés de fonctionnement ne peuvent être comprises que dans le cadre de la physique quantique et de ses équations. Cet intérêt à leur égard a contribué au développement et à l'accélération du rythme de la recherche scientifique, ce qui s'est traduit par une diversité et une multiplicité de résultats dans les deux directions théoriques et expérimentales. Cependant, il reste encore des aspects et des lacunes qui n'ont pas été abordées et étudiées, où ils sont restés sous forme des questions ouvertes, auxquelles nous devons répondre afin que cela n'entrave pas le processus de recherche.

Dans cette thèse, nous étudierons et résoudrons quelques problèmes liés à la mécanique quantique et à ses équations. En s'appuyant sur de nouvelles méthodes et techniques ainsi que sur des outils mathématiques, qui ne peuvent pas être séparés du cadre fonctionnel de la mécanique quantique, ces problèmes seront abordés. Plus précisément, nous étudierons et résoudrons deux types de problèmes associés à deux équations fondamentales en mécanique quantique relativiste, à savoir l'équation de Dirac et l'équation de DKP. En premier lieu, nous traiterons l'équation de Dirac dans le contexte des potentiels non centraux, au cours de laquelle nous contribuerons à élargir les limites de certaines études précédentes par notre utilisation du potentiel de Cornell généralisé en forme de double anneau modifié. En adoptant une nouvelle approche, nous résoudrons cette équation dans le cadre de problèmes quasi-exactement résolubles. Cette étude fait l'objet de notre article [14]. Ensuite, nous étudierons et résoudrons l'équation de DKP pour les particules de spin-0 et de spin-1 dans toutes les dimensions en présence d'une interaction électromagnétique. Pour enrichir davantage l'étude, nous présenterons quelques points importants et applications différentes. L'étude liée à l'équation de DKP pour les particules de spin-0 et de spin-1 à $(1 + 1)$ dimensions a été publiée dans AIP Conference Proceedings [15].

La thèse comporte essentiellement trois chapitres de la manière suivante :

Nous commençons d'abord par une l'introduction générale, qui sert d'arrière-plan historique de la mécanique quantique, où on a essayé de révéler les points principaux du cheminement des idées à travers lesquelles la physique en général et la mécanique quantique en particulier sont passées. Ces idées qui, à leur tour, ont permis la naissance de nombreuses équations physiques. Parmi elles, l'équation de Dirac et l'équation de DKP qui relèvent des équations de la mécanique quantique relativiste.

Dans le premier chapitre, les équations clefs de la mécanique quantique ainsi que les concepts et les résultats auxiliaires nécessaires pour la suite sont présentés de façon plus ou moins détaillée.

Le chapitre deux est consacré à la résolution de l'équation de Dirac avec un potentiel de Cornell généralisé en forme de double anneau modifié dans le cadre de problèmes quasi-exactement résolubles. Tout d'abord, nous présentons les aspects mathématiques de l'équation de Dirac dans le cas de la symétrie du spin, au cours de laquelle elle se transforme en une équation du type Schrödinger. En plus, à l'aide de la procédure de séparation des variables, nous déterminons l'équation azimutale, polaire et radiale correspondante à l'équation de Dirac et montrons la solution de chaque équation en utilisant, respectivement, la méthode fonctionnelle de l'ansatz de Bethe et l'équation différentielle de Heun biconfluente. Ceci est suivi d'une présentation des solutions d'états liées et leurs valeurs propres d'énergie correspondantes. Enfin, quelques résultats numériques sont introduits.

Au troisième chapitre, nous étudions et résolvons l'équation de DKP pour les particules de spin-0 et de spin-1 dans toutes les dimensions. Premièrement, une relation explicite est établie entre l'équation de DKP pour les particules de spin-0 dans toutes les dimensions et l'équation de Klein-Gordon en présence d'une interaction électromagnétique. Dans le cadre de cette relation, deux applications différentes sont présentées. La première application représente dans le calcul de la solution du type Volkov de l'équation et la deuxième dans la résolution de l'équation de DKP sous un puits de potentiel carré avec une masse dépendante de la position comme cela se fait dans la référence [16]. Pour les particules de spin-1 à $(1+1)$ dimensions, les mêmes lignes sont suivies comme dans le cas des particules de spin-0, avec seulement la deuxième application adoptée. Concernant les dimensions $(1+2)$, nous montrons que résoudre l'équation de DKP dans un champ électromagnétique, i.e. résoudre le système de dix équations différentielles du premier ordre couplées, équivaut à résoudre un système d'équations différentielles du second ordre à trois composantes. A titre d'applications, nous étudions et résolvons le dernier système dans le cas des particules libres et essayons de calculer sa solution du type Volkov dans le cas général. De manière similaire, les dimensions $(1+3)$ sont traitées. Dans ces dimensions, nous montrons que résoudre l'équation de DKP équivaut à résoudre un système d'équations différentielles du second ordre à quatre composantes.

Finalement, nous concluons par un récapitulatif des principaux résultats.

CHAPITRE 1

ASPECTS MATHÉMATIQUES DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

1.1 Introduction

Malgré la complexité de ses idées et l'ambiguïté entourant sa terminologie, la mécanique quantique reste l'une des meilleures et des plus étranges théories scientifiques. Les mystères, les surprises et les paradoxes dont elle a été témoin au cours de ses étapes de construction, à commencer par le fait qu'elle a bouleversé la pensée classique, ont entraîné des évolutions fondamentales qui en ont fait l'un des piliers de la science contemporaine. En fait, le succès de la mécanique quantique dans la description du monde atomique et subatomique a mené à une révolution scientifique majeure par laquelle les normes et les critères de recherche ont changé. La caractéristique la plus notable de son succès est peut-être son établissement des premières équations qui ont contribué de manière significative à révéler les faits du petit monde.

Dans ce chapitre, nous donnons un aperçu de quelques équations pionnières en mécanique quantique. A cet égard, nous commençons par présenter l'équation d'onde fondamentale en mécanique quantique, à savoir l'équation de Schrödinger, qui décrit l'évolution de la fonction d'onde d'une particule massive au cours du temps d'un point de vue non relativiste. Par la suite, nous introduisons quelques équations d'onde relativistes qui considèrent le cadre le plus approprié pour décrire le mouvement des particules relativistes où elles sont déterminées principalement en fonction de leurs spins. Plus précisément, nous présentons l'équation de Klein-Gordon, qui est la version relativiste de l'équation de Schrödinger décrit le mouvement de particules sans spin, i.e. les particules de spin-0. Puis, l'équation de Dirac qui décrit le comportement des particules de spin-$\frac{1}{2}$. Enfin, nous concluons avec l'équation de DKP qui décrit le mouvement à la fois des particules de spin-0 et de spin-1. Pour acquérir une connaissance physique et mathématique complète sur toutes ces équations, nous introduisons avant tout quelques notions de base, ainsi que des concepts et des faits nécessaires qui s'y rapportent et qui seront largement utilisés par la suite.

Nous indiquons que, tout au long de la thèse, nous adoptons les unités naturelles $\hbar = c = 1$.

1.2 Concepts préliminaires et outils mathématiques

En physique, le concept d'espace-temps est une représentation mathématique de l'espace et du temps comme deux notions inséparables et s'influençant l'une l'autre. Cette représentation combine les trois dimensions de l'espace avec la quatrième dimension du temps. Un point de l'espace-temps est exprimé par le quadrivecteur [17]

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= (t, \boldsymbol{x}) \\ &= (x^0, x^1, x^2, x^3), \end{aligned} \tag{1.1}$$

où la première composante est dite composante temporelle et les trois suivantes composantes spatiales. Un quadrivecteur peut exister sous deux formes dites covariante et contravariante. x^{μ} est la version contravariante d'un quadrivecteur. Le passage à la version covariante x_{μ} s'effectue en utilisant le tenseur métrique de Minkowski $g_{\mu\nu}$ comme suit

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu},$$

avec

$$\begin{aligned} x_{\mu} &= (t, -\boldsymbol{x}) \\ &= (x_0, x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \tag{1.2}$$

et

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ainsi que

$$x_0 = x^0 \quad \text{et} \quad x_i = -x^i, \qquad i = 1\ldots 3.$$

Le produit scalaire de deux quadrivecteurs x^μ, y^μ s'obtient en contractant les composantes contravariantes de l'un avec les composantes covariantes de l'autre

$$x\cdot y = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu = x^0 y^0 - \boldsymbol{xy}. \tag{1.3}$$

La forme la plus générale de ce produit scalaire peut être écrite par la convention de sommation d'Einstein comme

$$x\cdot y = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu y_\mu. \tag{1.4}$$

On définit le carré de la norme du quadrivecteur x^μ de la façon suivante

$$x^2 = x^\mu x_\mu = x_0^2 - \boldsymbol{x}^2. \tag{1.5}$$

Opérateur gradient

Dans le formalisme tensoriel, on définit l'opérateur gradient par ses composantes covariantes ∂_μ comme [17]

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right). \tag{1.6}$$

Les composantes contravariantes ∂^μ s'obtiennent simplement par

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right). \tag{1.7}$$

La contraction de l'opérateur gradient avec lui-même donne l'opérateur invariant de Lorentz $\Box$ qui n'est autre que le D'Alembertien

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \tag{1.8}$$

où Δ est l'opérateur laplacien.

Quadrivecteur courant

Dans le cadre relativiste, on décrit à la fois la densité de charge ρ et la densité de courant $\boldsymbol{j}$ par un quadrivecteur courant [17]

$$j^{\mu} = (\rho, \boldsymbol{j}). \tag{1.9}$$

L'équation de conservation de la charge, également appelée l'équation de continuité, s'écrit alors simplement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0. \tag{1.10}$$

Cette équation peut être mise sous forme covariante

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0. \tag{1.11}$$

Il convient de noter que l'équation de continuité représente la conservation d'une quantité physique à travers une densité dans une zone de surface en fonction d'un courant à travers cette zone.

Tenseur du champ électromagnétique

Un tenseur est généralement une fonction des coordonnées de l'espace, défini dans un espace à n dimensions par n^k composantes, où k est l'ordre du tenseur. La notion de tenseurs constitue une généralisation des notions de vecteurs et de formes linéaires. En physique, les tenseurs sont utilisés pour décrire et manipuler diverses grandeurs et propriétés physiques où ils fournissent un cadre mathématique concis qui permet la formulation et la résolution des problèmes de physique dans des domaines tels que la mécanique des fluides, l'électrodynamique (tenseur électromagnétique, tenseur de Maxwell ...) et autres.

Le champ électromagnétique, dans sa forme moderne, est représenté par un seul objet mathématique qui est le tenseur électromagnétique. Ce dernier permet de décrire la structure de ce champ en un point donné, où certaines de ses composantes s'identifient à celles du champ électrique $\boldsymbol{E}$ et d'autres à celles du champ magnétique $\boldsymbol{B}$. En fait, pour décrire le champ électromagnétique dans ce formalisme, on peut partir du potentiel scalaire V et du potentiel vectoriel $\boldsymbol{A}$, dont les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ se déduisent par [18]

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}. \tag{1.13}$$

Le quadrivecteur potentiel associé A^μ s'écrit ainsi

$$A^\mu = (V, \boldsymbol{A}). \tag{1.14}$$

Le champ électromagnétique lui-même, champ électrique $\boldsymbol{E}$ et magnétique $\boldsymbol{B}$, est représenté par un tenseur antisymétrique de composantes contravariantes $F^{\mu\nu}$. On peut relier ce tenseur au quadrivecteur potentiel A^μ par la relation

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{1.15}$$

Sous forme matricielle, le tenseur de champ électromagnétique s'écrit

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fonctions et valeurs propres d'un opérateur

Nous rappelons maintenant quelques définitions et propriétés relatives aux opérateurs linéaires qui apparaissent très souvent dans les problèmes de physique. Un opérateur, en mécanique quantique, est une application linéaire d'un espace de Hilbert dans lui-même.

Définition 1.2.1. *[19] Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.*

Définition 1.2.2. *[19] Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_2$.*

L'opérateur linéaire noté $A^\dagger$ défini de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_1$ est dit opérateur adjoint de A si l'on a pour tout $\phi \in \mathcal{H}_1$ et $\Psi \in \mathcal{H}_2$

$$\langle A\,\phi, \Psi\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \phi, A^\dagger \Psi\rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Propriétés 1.2.1. *[19] Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors, on a les relations suivantes*

1. $(A_1^\dagger)^\dagger = A_1$.
2. $(\lambda A_1)^\dagger = \bar{\lambda} A_1^\dagger, \qquad$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $(\alpha A_1 + \beta A_2)^\dagger = \bar{\alpha} A_1^\dagger + \bar{\beta} A_2^\dagger, \qquad$ *pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
4. $(A_1 A_2)^\dagger = A_2^\dagger A_1^\dagger$.

Définition 1.2.3. *[19] Un opérateur linéaire A défini dans un espace de Hilbert complexe est dit hermitien si*

$$A = A^{\dagger}.$$

Définition 1.2.4. *[19] L'opérateur H est dit Hamiltonien si H est un opérateur linéaire et hermitien par rapport à l'espace de Hilbert.*

L'opérateur hamiltonien est utilisé dans de nombreux domaines de la physique, parmi eux la mécanique quantique. Du point de vue de cette dernière, l'hamiltonien d'un système est noté $\hat{H}$.

Définition 1.2.5. *[20] L'hamiltonien $\hat{H}$ est un opérateur correspondant à l'énergie totale de ce système, y compris l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, où il peut prendre la forme*

$$\hat{H} = \frac{-1}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x}),$$

où $\frac{-1}{2m}\Delta$ est l'opérateur associé à l'énergie cinétique et $V(\boldsymbol{x})$ est l'énergie potentielle.

Définition 1.2.6. *[21] On dit que Ψ est une fonction propre de l'opérateur linéaire A, si cette fonction n'est pas identiquement nulle et si*

$$A\Psi = \lambda\Psi,$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ est la valeur propre associée à la fonction propre Ψ.

Remarque 1.2.1. *A chaque valeur propre correspond une fonction propre.*

Les valeurs propres de l'équation de Schrödinger, qui seront abordées dans la section suivante, représentent les énergies possibles que peut avoir le système s'il est dans un état d'énergie bien défini. Chaque fonction propre, de l'hamiltonien, est l'état du système lorsque son énergie est égale à la valeur propre associée.

1.3 Equation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger est l'un des premiers succès qui marque le XX^e siècle et qui a grandement contribué à jeter les fondements de la théorie quantique. Cette équation, conçue par le physicien Erwin Schrödinger en 1925, est principalement l'équation non relativiste fondamentale en mécanique quantique. Elle décrit l'évolution temporelle et spatiale de l'état d'un objet quantique représenté par une fonction d'onde et permet également d'expliquer les niveaux d'énergie des électrons dans les atomes. En fait, l'équation de Schrödinger considérée comme la contrepartie quantique de l'équation de Newton en mécanique classique ou des équations de Maxwell en électromagnétisme. D'un point de vue mathématique, l'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles, du premier ordre par rapport au temps et de deuxième ordre par rapport aux coordonnées spatiales, décrivant l'évolution au cours du temps de la fonction d'onde d'un système quantique.

L'équation de Schrödinger prend plusieurs formes différentes selon la situation physique. On considère tout d'abord le cas d'une particule libre de masse m où l'équation de Schrödinger se met sous la forme [22]

$$i\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\Delta\psi(\boldsymbol{x},t), \tag{1.16}$$

où i est l'unité imaginaire et ψ est la fonction d'onde. On peut introduire l'opérateur Hamiltonien

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\Delta,$$

qui coïncide ici avec l'énergie cinétique, et on obtient ainsi une écriture compacte de l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \tag{1.17}$$

Cette équation différentielle est évidemment satisfaite par des solutions de la forme

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = Ae^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{1.18}$$

où A est une constante, $\boldsymbol{k}$ est le vecteur d'onde et ω est la pulsation, avec $\boldsymbol{k}$ et ω vérifient la relation de dispersion $\omega = \frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}$. Grâce aux relations de Broglie sur l'impulsion $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ et l'énergie de la particule $E = \omega$, la forme (1.18) devient

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = Ae^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}. \tag{1.19}$$

D'une façon générale, quand la particule est soumise à l'influence d'un potentiel $V(\boldsymbol{x},t)$, l'équation de Schrödinger est présentée sous la forme

$$i\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\Delta\psi(\boldsymbol{x},t) + V(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t), \tag{1.20}$$

avec sa nouvelle valeur d'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{-1}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x},t). \tag{1.21}$$

1.3.1 Fonction d'onde

La fonction d'onde en mécanique quantique est la description mathématique la plus complète qui peut être donnée à un système physique. Les solutions de l'équation de Schrödinger, qui sont représentées par la fonction d'onde, décrivent non seulement des systèmes moléculaires, atomiques et subatomiques, mais aussi des systèmes macroscopiques, ce qui permet de fournir toutes les informations relatives au système quantique. En mathématiques, la fonction d'onde ψ est une fonction complexe appartient à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et remplit certaines conditions. Parmi ces conditions, cette fonction et ses premières dérivées doivent être continues, ainsi qu'elle doit être normalisée. Il convient de noter ici que l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel, en général de dimension infinie, construit sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ et muni du produit scalaire noté $\langle \varphi, \psi \rangle$. Il s'exprime en terme des fonctions d'onde correspondantes comme

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \varphi^*(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$

où φ^* représente le complexe conjugué de φ.

En fait, l'équation de Schrödinger est divisée en deux types : l'un dans lequel le temps apparaît explicitement et décrit ainsi comment la fonction d'onde d'une particule évoluera dans le temps. L'autre est l'équation dans laquelle la dépendance temporelle a été supprimée, et qui est connue sous le nom d'équation de Schrödinger indépendante du temps ou d'équation de Schrödinger stationnaire et se trouve décrire, entre autres, quelles sont les énergies de la particule. Dans ce qui suit nous nous intéresserons à rappeler quelques faits importants concernant la deuxième équation qui ne dépend pas du temps.

1.3.2 Equation de Schrödinger indépendante du temps

L'équation de Schrödinger pour une particule de masse m soumise à un potentiel indépendant du temps $V(\boldsymbol{x})$ est donnée par [23]

$$i\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\Delta\psi(\boldsymbol{x},t) + V(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},t). \tag{1.22}$$

Cette écriture est utilisée lorsque l'hamiltonien lui-même ne dépend pas du temps, mais plutôt de l'espace seulement

$$\hat{H} = \frac{-1}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x}). \tag{1.23}$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps peut être obtenue à partir de la version dépendante du temps en supposant une dépendance temporelle triviale de la fonction d'onde, appelée état stationnaire, comme suit [24]

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \psi(\boldsymbol{x})e^{-iEt}. \tag{1.24}$$

Cela n'est possible que si l'hamiltonien n'est pas une fonction explicite du temps, sinon l'équation n'est pas séparable en ses parties spatiales et temporelles. L'opérateur $i\frac{\partial}{\partial t}$ peut alors être remplacé par E. Ainsi, l'équation de Schrödinger indépendante du temps (1.22) s'écrit sous la forme compacte

$$E\psi = \hat{H}\psi. \tag{1.25}$$

Cette équation est caractérisée mathématiquement en ce qu'elle donne une équation aux valeurs propres du système. Autrement dit, l'équation de Schrödinger indépendante du temps (1.25) est l'équation aux valeurs propres de l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$: l'application de $\hat{H}$ à la fonction propre ψ donne la même fonction, multipliée par la valeur propre correspondante E. Les énergies du système sont donc les valeurs propres de l'opérateur $\hat{H}$. Par contre, les fonctions propres de $\hat{H}$ sont les fonctions d'onde qui décrivent les états stationnaires appelés encore états propres.

Il faut noter ici que l'équation de Schrödinger dépendante du temps est une équation générale qui donne l'évolution de la fonction d'onde, quel que soit l'état de la particule. Alors que l'équation de Schrödinger indépendante du temps permet de trouver, parmi tous les états possibles de la particule, ceux qui sont stationnaires.

1.3.3 Densité de probabilité et de courant

La représentation d'un état quantique peut être décrite par une fonction d'onde ψ, qui, elle-même, est interprétée comme une amplitude de probabilité de présence de la particule, tandis que le module carré de cette fonction d'onde, sous la forme la plus générale, représente la densité de probabilité [25]

$$\rho = \psi^*\psi = |\psi|^2, \tag{1.26}$$

alors que la densité de courant est définie de la manière suivante

$$\boldsymbol{j} = \frac{-i}{2m}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right). \tag{1.27}$$

L'équation de continuité, reliant la densité de probabilité ρ et la densité de courant $\boldsymbol{j}$, est donnée par

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Pour l'état stationnaire, la densité de probabilité est indépendante du temps

$$\begin{aligned} \rho &= \psi^*(\boldsymbol{x})\, e^{iEt}\psi(\boldsymbol{x})\, e^{-iEt} \\ &= |\psi(\boldsymbol{x})|^2. \end{aligned} \tag{1.29}$$

1.4 Equation de Klein-Gordon

L'équation de Klein-Gordon, parfois également appelée équation de Klein-Gordon-Fock et abrégée en équation de KG, est la première équation d'onde relativiste, formulée en 1926 comme une version relativiste de l'équation de Schrödinger. Elle a été fondée indépendamment par les physiciens Oskar Klein et Walter Gordon qui ont adopté, à travers elle, une nouvelle approche de la mécanique quantique notamment de la mécanique quantique relativiste. Plus précisément, cette équation est une équation différentielle du second ordre par rapport au temps ainsi qu'à l'espace et est l'équation la plus appropriée pour décrire correctement les particules relativistes ayant un spin-0, telles que les pions et le boson de Higgs.

L'équation de KG interagissant avec un champ électromagnétique prend la forme [26]

$$(\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu + m^2)\psi = 0, \tag{1.30}$$

où $\mathcal{D}_\mu = (\partial_\mu + ieA_\mu)$ est la dérivée covariante, m est la masse de la particule et ψ est la fonction d'onde. Pour une particule libre, on peut écrire l'équation de KG (1.30) en utilisant un changement, consiste à remplacer la dérivée covariante $\mathcal{D}_\mu$ par la dérivée ∂_μ, qui conduit simplement à l'écriture suivante

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0. \tag{1.31}$$

Cette équation est connue sous le nom de l'équation libre de KG. Les solutions, sous forme d'ondes planes, de cette équation s'écrivent

$$\begin{aligned} \psi &= Ce^{-ip_\mu x^\mu} \\ &= Ce^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}, \end{aligned} \tag{1.32}$$

où C est une constante de normalisation et $\boldsymbol{p} = -i\boldsymbol{\nabla}$ est l'opérateur d'impulsion tandis que $E = \pm\sqrt{\boldsymbol{p^2} + m^2}$ représente l'énergie de la particule, pouvant être positive ou négative. Ainsi, l'équation libre de KG possède deux solutions différentes, l'une avec l'énergie positive et l'autre avec l'énergie négative. Par conséquent, il y a une différence dans ce que les solutions de l'équation libre de KG décrivent. Ces deux solutions sont définies pour décrire deux particules distinctes : la particule et l'antiparticule. La particule d'énergie négative est définie comme l'antiparticule.

1.4.1 Densité de charge et de courant

D'autres aspects importants liés à l'équation libre de KG, à savoir la densité de charge et de courant, sont présentés dans cette partie. L'équation de continuité correspondant à l'équation libre de KG est définie de la manière suivante [26]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0, \tag{1.33}$$

où la densité s'écrit

$$\rho = \frac{i}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \tag{1.34}$$

et la densité de courant prend la forme

$$\boldsymbol{j} = \frac{-i}{2m} \left(\psi^* \boldsymbol{\nabla} \psi - \psi \boldsymbol{\nabla} \psi^* \right). \tag{1.35}$$

Un aspect intrigant de la densité ρ est qu'elle n'est pas définie positive. Par conséquent, elle ne peut donc pas être interprétée directement et de manière cohérente comme une densité de probabilité, mais plutôt comme une densité de charge électrique. En recourant à l'approche de Pauli et Weisskopf [27] basée sur la symétrie de charge, l'équation de continuité (1.33) est multipliée par la charge élémentaire e, de sorte que les valeurs négatives de la densité ρ dans ce cas deviennent raisonnables. La raison la plus profonde à cela est liée au fait que l'équation de KG est du second ordre dans le temps, de sorte que nous devons connaître à la fois ψ et $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ pour un t donné. De plus, à l'existence des solutions pour l'énergie négative.

A partir de là, deux difficultés majeures de l'équation de KG peuvent être identifiées : l'existence de solutions d'énergie négative, pour lesquelles nous n'avons aucune interprétation physique, et le manque de densité de probabilité définie positive. Pour ces raisons et d'autres, l'équation de KG a été considérée comme insatisfaisante dans les années qui ont immédiatement suivi son introduction. Elle a depuis été réhabilitée et est maintenant considérée comme une équation d'onde respectable décrivant des particules relativistes de spin-0.

1.5 Equation de Dirac

Afin de surmonter les difficultés rencontrées à l'équation de KG et d'éviter tous les paradoxes et obstacles qui découlent de l'existence de dérivées du second ordre. Le physicien et mathématicien Paul Dirac a cherché à trouver une équation d'onde alternative à elle, dans laquelle les dérivées du temps et de l'espace sont du premier ordre. Effectivement, Dirac parvient à proposer, en 1928, une équation différentielle du premier ordre qui décrit mathématiquement le mouvement de particules élémentaires de spin-$\frac{1}{2}$ d'un point de vue relativiste et qui porte son nom. Cette équation de Dirac a introduit un nouveau type d'objet mathématique, où elle utilisait des matrices au lieu de quantités standard et qu'elle permettait également une meilleure compréhension du mouvement de certaines particules comme les électrons, les quarks et les neutrinos.

L'équation de Dirac peut être exprimée dans la version de Schrödinger, relativiste et covariante, en présence d'une interaction électromagnétique comme suit [28]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \tag{1.36}$$

où ψ est la fonction d'onde et $\hat{H}$ est l'hamiltonien de Dirac défini par

$$\hat{H} = eV + \boldsymbol{\alpha}(-i\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}) + \beta m,$$

avec $\boldsymbol{\alpha}$ et β sont les matrices de Dirac satisfaisant les relations d'anticommutation

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1, \tag{1.37}$$

$$\alpha_i\alpha_j = -\alpha_j\alpha_i, \qquad i,j = 1,2,3 \ \text{ et } \ i \neq j, \tag{1.38}$$

$$\alpha_i\beta = -\beta\alpha. \tag{1.39}$$

Le choix de ces matrices n'est pas unique : différents choix sont appropriés pour éclairer différentes propriétés de l'équation de Dirac. Nous utiliserons la représentation dite Pauli-Dirac, dans laquelle

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}, \tag{1.40}$$

où $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{I}$ sont respectivement la matrice nulle et unité de dimensions 2×2 et σ_i sont les matrices de Pauli données par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.41}$$

Puisque α_i et β sont des matrices de dimension 4×4, cela montre nécessairement que la fonction d'onde ψ dans l'équation de Dirac prend la forme d'une matrice colonne à quatre composantes

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T.$$

L'équation de Dirac (1.36) peut être écrite sous forme covariante comme suit [29]

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi = 0, \tag{1.42}$$

où γ^μ, $\mu = 0 \ldots 3$, sont des matrices de dimension 4×4, $\mathcal{D}_\mu$ est la dérivée covariante, m est la masse de la particule et ψ est la fonction d'onde. Les matrices γ^μ, aussi connues comme matrices de Dirac, construites de la manière suivante

$$\gamma^0 = \beta \qquad \text{et} \qquad \gamma^i = \beta\alpha_i,$$

et sous une forme plus explicite, sont écrites comme

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{1.43}$$

La matrice γ^5, construite à partir des quatre premières matrices, est définie par

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

avec $(\gamma^5)^2 = \boldsymbol{I}$. Cette matrice est anticommute avec les autres

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0.$$

En l'absence d'interaction, l'équation de Dirac (1.42), sous la forme covariante, devient

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \tag{1.44}$$

Pour une particule libre, chaque composante de la fonction d'onde ψ doit satisfaire à l'équation libre de KG. Autrement dit, toute solution de l'équation libre de Dirac est, pour chacune de ses quatre composantes, une solution de l'équation libre de KG. On peut le voir à partir de la décomposition de l'équation libre de KG

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = -(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \tag{1.45}$$

Alors, l'équation libre de Dirac a, comme celle de l'équation libre de KG et pour les mêmes raisons, des solutions d'énergie positive et négative avec l'énergie de la particule $E = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$.

Plus clairement, il existe quatre solutions indépendantes, dont deux sont positives et deux sont négatives. Les deux solutions de l'énergie positive correspondent à l'électron, tandis que les deux solutions de l'énergie négative correspondent à un positron. Cette équation d'énergie exige l'existence d'antiparticule et précède la découverte du positron, l'antiparticule de l'électron. C'est l'une des principales réalisations de la physique théorique moderne.

1.5.1 Densité de probabilité et de courant

L'équation de Dirac conduit, comme l'équation de Schrödinger et l'équation de KG, à l'équation de continuité [30]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0, \tag{1.46}$$

dans laquelle la densité de probabilité prend la forme

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^{4} |\psi_i|^2, \tag{1.47}$$

et la densité de courant associée est définie comme

$$\boldsymbol{j} = \overline{\psi} \gamma \psi, \tag{1.48}$$

où $\psi^\dagger$ et $\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ ici désignent, respectivement, le complexe conjugué et l'adjoint de ψ.

La densité de probabilité ρ, comme on peut le remarquer, est une quantité positive. Alors, l'équation de Dirac résout le problème de la densité de probabilité négative présenté par l'équation de KG.

1.5.2 Algèbre des matrices de Dirac

Dans cette partie, nous présentons quelques formules et relations que les matrices γ réalisent sans recourir à leur forme concrète dans une représentation ou une autre, qui à leur tour jouent un rôle important dans les calculs liés à l'équation de Dirac. Les règles de manipulation de ces matrices sont entièrement déterminées par les relations de permutation [31]

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \\ &= 2g^{\mu\nu}, \qquad\qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{1.49}$$

qui expriment toutes leurs propriétés générales.

Le produit $\gamma^\mu\gamma^\nu$, prenant en compte la relation symétrique (1.49) et le quadritenseur matriciel antisymétrique $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$, s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\ &= g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu},\end{aligned} \tag{1.50}$$

par contre, le produit scalaire des matrices γ par elles-mêmes est exprimé par

$$g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4\boldsymbol{I}_4.$$

Il est commode d'étendre aux matrices γ les règles habituelles de montée et de descente d'indices et de définir la désignation

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu,$$

et

$$\gamma^\mu = \gamma_\mu^{-1},$$

où γ_μ^{-1} représente l'inverse de la matrice γ_μ. Alors, nous avons comme résultat

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4\boldsymbol{I}_4.$$

De plus, les matrices γ^μ vérifiant les relations utiles suivantes

$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\gamma^\nu, \tag{1.51}$$

$$\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu = 4g^{\lambda\nu}, \tag{1.52}$$

$$\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu = -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda. \tag{1.53}$$

Généralement, γ^μ apparaissent en combinaison avec différents quadrivecteurs comme produits scalaires

$$\gamma a \equiv \gamma^\mu a_\mu.$$

Pour ces produits, les relations (1.49) deviennent

$$\begin{aligned}(a\gamma)(b\gamma) + (b\gamma)(a\gamma) &= 2(ab), \\ (a\gamma)(a\gamma) &= a^2,\end{aligned}$$

et les relations (1.51)-(1.53) sont réécrites comme suit

$$\begin{aligned}\gamma_\mu(a\gamma)\gamma^\mu &= -2(a\gamma), \\ \gamma_\mu(a\gamma)(b\gamma)\gamma^\mu &= 4(ab), \\ \gamma_\mu(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma)\gamma^\mu &= -2(c\gamma)(b\gamma)(a\gamma).\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous rappellerons un autre point concernant l'équation de Dirac et qui joue physiquement un rôle très essentiel. Ce point est représenté par la solution du type Volkov de l'équation de Dirac, où ce type de solution a considérablement contribué à la compréhension du monde des électrons.

1.5.3 Solution du type Volkov

L'équation de Dirac a des solutions exactes pour un électron se déplaçant dans le champ d'une onde électromagnétique plane [32]. Ce sont les solutions dites de Volkov, un prototype de problème du champ externe dépendant du temps. Ces solutions ont trouvé de nombreuses applications du fait qu'elles fournissent une base non perturbative pour les phénomènes fortement dépendants du temps.

Dans ce qui suit, nous utilisons une autre forme de l'équation de Dirac connue sous le nom d'équation quadratique de Dirac, qui prend la forme [30]

$$(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu} - m^2)\psi = 0, \tag{1.54}$$

où γ^{μ} sont des matrices de dimension 4×4 données par la relation (1.43), $\mathcal{D}_{\mu}$ est la dérivée covariante, m est la masse de la particule et ψ est la fonction d'onde. Le produit $\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu}$ peut être écrit en fonction du tenseur de champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ comme suit

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mu}\mathcal{D}_{\nu} &= \frac{ie}{2}\left(\partial_{\nu}A_{\mu} - \partial_{\mu}A_{\nu}\right)\\ &= -\frac{ie}{2}F_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{1.55}$$

Grâce aux relations (1.50) et (1.55), l'équation quadratique de Dirac (1.54) devient

$$\left[\left(\mathcal{D}^{\mu}\mathcal{D}_{\mu} + m^2\right)\boldsymbol{I}_4 + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\psi = 0, \tag{1.56}$$

qui est l'équation de KG pour les particules de spin-$\frac{1}{2}$. Le deuxième terme représente l'interaction du spin avec le tenseur de champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$. Quand le champ électromagnétique correspondant A^{μ} dépende de l'onde plane ϕ qui prend la forme de produit scalaire de deux quadrivecteurs comme $\phi = k \cdot x$, où le quadrivecteur k remplit la condition $k^2 = 0$, à savoir

$$A^{\mu} = A^{\mu}(\phi), \tag{1.57}$$

la condition de jauge de Lorenz est alors donnée par

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = k_{\mu}A^{\mu'} = 0, \tag{1.58}$$

où la prime désigne la dérivation par rapport à ϕ. Par conséquent, il vient que

$$k \cdot A = \text{const} = 0, \tag{1.59}$$

parce que la constante peut être mise à zéro. De plus, le tenseur de champ électromagnétique est réécrit sous la forme

$$F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu. \tag{1.60}$$

Prenant en compte le fait que $\partial_\mu(A^\mu \psi) = A^\mu \partial_\mu \psi$ et les relations de $\sigma^{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu}$ mentionnées ci-dessus, l'équation quadratique de Dirac (1.56) peut être transformée en

$$\left[-\partial^2 - 2ie(A\partial) + e^2A^2 - m^2 - ie(\gamma k)(\gamma A')\right]\psi = 0. \tag{1.61}$$

Pour résoudre cette équation, on peut supposer une solution de la forme

$$\psi = e^{-ip\cdot x}F(\phi), \tag{1.62}$$

où p est un quadrivecteur constant et on peut toujours lui imposer la condition $p^2 = m^2$. En insérant la forme (1.62) dans l'équation (1.61), on obtient l'équation différentielle du premier ordre pour $F(\phi)$

$$2i(kp)F'(\phi) + \left[-2e(pA) + e^2A^2 - ie(\gamma k)(\gamma A')\right]F(\phi) = 0, \tag{1.63}$$

ce qui implique que

$$F(\phi) = \exp\left[-i\int_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\phi + \frac{e(\gamma k)(\gamma A)}{2(kp)}\right]\frac{u}{\sqrt{2p_0}}, \tag{1.64}$$

où $u/\sqrt{2p_0}$ est un constant arbitraire. Les puissances de $(\gamma k)(\gamma A)$, à partir de la deuxième, sont nulles puisque

$$\begin{aligned}(\gamma k)(\gamma A)(\gamma k)(\gamma A) &= -(\gamma k)(\gamma k)(\gamma A)(\gamma A) + 2(kA)(\gamma k)(\gamma A)\\ &= -k^2A^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Il vient alors que

$$\exp\frac{e(\gamma k)(\gamma A)}{2(kp)} = 1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A). \tag{1.65}$$

Finalement, la solution de l'équation quadratique de Dirac (1.54) est la suivante

$$\psi = \left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A)\right]\frac{u}{\sqrt{2p_0}}e^{iS}, \tag{1.66}$$

où S est l'action classique du système pour une particule se déplaçant dans le champ d'une onde électromagnétique plane définie par

$$S = -px - \int_0^{kx} \left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)} A^2 \right] d\phi. \tag{1.67}$$

1.6 Equation de Duffin-Kemmer-Petiau

Après le grand pas fait dans la mécanique quantique à travers le travail exceptionnel de Dirac qui, d'une part, représente dans sa création d'une équation d'onde relativiste décrivant les particules de spin-$\frac{1}{2}$ et capable de répondre à l'exigence de covariance relativiste, et, de l'autre, dans sa contribution significative à interpréter les solutions à énergie négative comme des antiparticules. Certains chercheurs, au milieu des années 1930, ont efforcé de trouver une équation d'onde similaire à l'équation de Dirac décrivant à la fois les particules de spin-0 et de spin-1. En fait, un premier effort dans cette direction est due au physicien de Broglie qui a basé ses recherches sur une équation différentielle du premier ordre contenant des matrices de dimensions 16×16 qui sont établies principalement à partir de matrices γ de Dirac. Par la suite, les chercheurs Gérard Petiau, Nicholas Kemmer et Richard Duffin ont fait plusieurs modifications à l'équation de ce dernier jusqu'à une équation, attribuée à eux, a finalement été atteint, appelée l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (équation de DKP). Cette équation qui, en examinant sa composition, semble être mieux adaptée que les équations de KG relatives aux particules de spin-0, et à celle de l'équation de Proca qui décrit les particules de spin-1.

L'équation de DKP, également appelée l'équation de Kemmer, est une équation différentielle du premier ordre qui décrit les particules relativistes scalaires et vectorielles de spin respectivement 0 et 1. Cette équation est, par sa forme, semblable à celle de Dirac où les matrices γ de Dirac sont remplacées par les matrices β avec une algèbre plus compliquée que celle relative aux matrices γ et qui est connue sous le nom de l'algèbre de DKP. En présence de l'interaction électromagnétique, l'équation de DKP est de la forme [33]

$$(i\beta^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi = 0, \tag{1.68}$$

où $\mathcal{D}_\mu$ est la dérivée covariante, m est la masse de la particule, ψ est la fonction d'onde de DKP et β^μ sont des matrices singulières et carrées satisfaisant la relation de commutation

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\mu, \tag{1.69}$$

qui définit ce qu'on appelle l'algèbre de DKP. Le tenseur métrique de Minkowski $g^{\mu\nu}$ a la signature $(+---)$. L'algèbre (1.69) a trois représentations irréductibles : une représentation triviale à une dimension, n'ayant aucun contenu physique, et deux représentations non triviales dont les dimensions sont 5 et 10 correspondant respectivement aux particules de spin-0 et de spin-1. Explicitement, pour les particules de spin-0, les matrices β^μ sont définies comme suit

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta^i = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \rho_i \\ -\rho_i^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3$$

avec

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\bar{0}, \tilde{0}$ et $\mathbf{0}$ sont des matrices nulles de dimensions 2×3, 2×2 et 3×3, respectivement, et ρ^T désigne la matrice transposée de ρ.

Pour les particules de spin-1, les matrices β^μ sont données par

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3$$

avec e_i et $\bar{0}$ sont données par

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 1), \qquad \bar{0} = (0, 0, 0),$$

et $\boldsymbol{I}$ désigne la matrice unité de dimension 3×3. Les s_i étant les matrices standard non relativistes du spin-1 de dimension 3×3

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour les particules libres, l'équation de DKP est exprimée par

$$\left(i\beta^\mu \partial_\mu - m\right) \psi = 0. \tag{1.70}$$

Il convient de souligner ici que la fonction d'onde de DKP a cinq composantes pour les particules de spin-0 et dix composantes pour les particules de spin-1.

1.6.1 Densité de charge et de courant

Comme toutes les équations d'onde précédentes, l'équation libre de DKP contient un courant qui vérifie l'équation de continuité suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0, \tag{1.71}$$

où la densité s'écrit

$$\rho = \psi^{\dagger} \psi, \tag{1.72}$$

tandis que la densité de courant $\boldsymbol{j}$ est exprimée comme

$$\boldsymbol{j} = \overline{\psi} \beta \psi, \tag{1.73}$$

avec l'adjoint $\overline{\psi}$ de ψ est défini par

$$\overline{\psi} = \psi^{\dagger} \left[2 \left(\beta^{0} \right)^{2} - 1 \right]. \tag{1.74}$$

Comme dans le cas de l'équation libre de KG, la densité correspondant à l'équation libre de DKP n'est pas définie positive. Il est donc nécessaire de recourir à la réinterprétation de Pauli et Weisskopf [27] qui est basée sur la symétrie de charge. Autrement dit, en multipliant la densité ρ par la charge élémentaire e, on passe ainsi de la notion de densité de probabilité à celle de densité de charge électrique. Il est également remarquable de noter que cette composante est positive pour les états d'énergie positive et négative pour ceux d'énergie négative.

1.6.2 Algèbre des matrices de DKP

Comme dans le cas des matrices γ de Dirac, les matrices β satisfont certaines relations importantes et qui peuvent être déduites de l'algèbre de DKP (1.69). Parmi les relations les plus couramment utilisées dans les calculs, on a [34]

$$\begin{array}{rcll}
\beta^{\mu} \beta^{\nu} \beta^{\mu} & = & \beta^{\mu} g^{\mu\nu}, & \\
\beta^{\mu} \beta^{\nu} \beta^{\lambda} & = & 0, & \mu \neq \nu \neq \lambda \\
\beta^{\mu} \beta^{\nu} \beta^{\mu} & = & 0, & \mu = \lambda \neq \nu \\
\beta^{\mu} \left(\beta^{\nu} \right)^{2} & = & \left[1 - \left(\beta^{\nu} \right)^{2} \right] \beta^{\mu}, & \mu \neq \nu \\
\beta^{\mu} \left(\beta^{\nu} \right)^{2} & = & \beta^{\mu}, & \mu = \nu \\
\left(\beta^{\mu} \right)^{2} \left(\beta^{\nu} \right)^{2} & = & \left(\beta^{\nu} \right)^{2} \left(\beta^{\mu} \right)^{2}. &
\end{array}$$

D'autre part, des matrices η_μ définies par

$$\eta^\mu = 2\left(\beta^\mu\right)^2 - 1,$$

on peut aussi déduire les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
(\eta^\mu)^2 &= 1, \\
\eta^\mu\eta^\nu &= \eta^\nu\eta^\mu, \\
\beta^\mu\eta^\nu &= -\eta^\nu\beta^\mu, & \mu \neq \nu \\
\beta^\mu &= \eta^\mu\beta^\mu = \beta^\mu\eta^\mu, \\
g^{\mu\mu}\beta^\lambda &= \left(\beta^\mu\right)^2\beta^\lambda + \beta^\lambda\left(\beta^\mu\right)^2, & \mu = \nu \neq \lambda.
\end{aligned}$$

Il est important de souligner que dans les relations mentionnées ci-dessus, il n'y a pas de sommation sur les indices répétés.

1.7 Méthodes fonctionnelles pour résoudre des équations différentielles

Dans cette section, nous introduisons quelques méthodes et techniques notables liées à la résolution des équations différentielles ordinaires. Ces techniques jouent un rôle privilégié dans l'analyse et l'étude de la première équation que nous examinerons, ainsi qu'elles permettent de trouver ses solutions analytiques.

1.7.1 Ansatz de Bethe

La méthode fonctionnelle de l'ansatz de Bethe est l'une des méthodes utilisées pour résoudre les équations différentielles ordinaires du second ordre, qui s'est avérée efficace pour résoudre certains modèles physiques. Dans le cadre de la mécanique quantique, cette méthode est considérée comme l'outil principal qui permet de trouver des solutions exactes pour les niveaux d'énergie et leurs fonctions propres correspondantes de certains modèles quantiques [35].

Considérons l'équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre écrite sous la forme générale [36]

$$\left[X(x)\frac{d^2}{dx^2} + Y(x)\frac{d}{dx} + Z(x)\right]S(x) = 0, \tag{1.75}$$

où $X(x)$, $Y(x)$ et $Z(x)$ sont des polynômes de degré au plus 4, 3, 2, respectivement, définis comme

$$X(x) = \sum_{k=0}^{4} \alpha_k x^k, \qquad Y(x) = \sum_{k=0}^{3} \beta_k x^k, \qquad Z(x) = \sum_{k=0}^{2} \eta_k x^k, \tag{1.76}$$

avec α_k, β_k et η_k sont des paramétrées.

La solution correspondante à l'équation différentielle (1.75) est construite grâce à la méthode fonctionnelle de l'ansatz de Bethe. Les résultats liés à la résolution de cette équation feront l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.7.1. *[36] Etant donné une paire de polynômes $X(x)$ et $Y(x)$, les valeurs des coefficients η_2, η_1 et η_0 du polynôme $Z(x)$ de sorte que l'équation différentielle* (1.75) *ait une solution polynomiale de degré n*

$$S(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i), \qquad S \equiv 1 \quad \textit{pour } n = 0, \tag{1.77}$$

avec des racines distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont données par

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= -n(n-1)\alpha_4 - n\,\beta_3, &(1.78)\\
\eta_1 &= -\left[2(n-1)\alpha_4 + \beta_3\right]\sum_{i=1}^{n} x_i - n(n-1)\alpha_3 - n\beta_2, &(1.79)\\
\eta_0 &= -\left[2(n-1)\alpha_4 + \beta_3\right]\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\alpha_4 \sum_{i<j} x_i x_j - \left[2(n-1)\alpha_3 + \beta_2\right]\sum_{i=1}^{n} x_i\\
&\quad -n(n-1)\alpha_2 - n\,\beta_1, &(1.80)
\end{aligned}$$

où les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfont les équations de l'ansatz de Bethe

$$\sum_{j\neq i}^{n} \frac{2}{x_i - x_j} + \frac{\beta_3 x_i^3 + \beta_2 x_i^2 + \beta_1 x_i + \beta_0}{\alpha_4 x_i^4 + \alpha_3 x_i^3 + \alpha_2 x_i^2 + \alpha_1 x_i + \alpha_0} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.81}$$

Les équations ci-dessus (1.78)–(1.81) *donnent tous les polynômes $Z(x)$ tels que l'équation différentielle ordinaire* (1.75) *ait la solution polynomiale* (1.77).

Preuve. Voir le théorème 1.1 dans [36].

1.7.2 Equation de Heun biconfluente

Afin d'obtenir une aperçue plus claire sur l'équation de Heun biconfluente et de la présenter dans un cadre fonctionnel adéquat, nous commençons d'abord par rappeler quelques faits importants associés à l'équation de Heun. Cette dernière est une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre qui apparaît sous diverses formes dans un large éventail de problèmes de mathématiques appliquées. La forme canonique de l'équation de Heun est prise comme [37]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha\beta x - q}{x(x-1)(x-a)}u = 0, \tag{1.82}$$

où u est une fonction complexe d'une variable complexe x et $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, a, q$ sont des paramètres, généralement complexes et arbitraires, sauf que $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Les cinq premiers paramètres sont liés par la relation

$$1 + \alpha + \beta = \gamma + \delta + \epsilon. \tag{1.83}$$

L'équation de Heun (1.82) a quatre points singuliers réguliers $0, 1, a, \infty$ et les exposants à ces singularités étant respectivement $\{0, 1, -\gamma\}$, $\{0, 1, -\delta\}$, $\{0, 1, -\epsilon\}$, $\{\alpha, \beta\}$. La somme de ces exposants doit prendre la valeur 2, c'est ce fait qui donne la relation (1.83).

L'équation de Heun a également plusieurs formes confluentes parmi lesquelles il y a l'équation de Heun biconfluente qui contient deux points singuliers irréguliers, à savoir, 0 et ∞ de rang 2. Cette équation s'écrit sous sa forme canonique [37, 38, 39]

$$xu'' + \left(1 + \alpha - \beta x - 2x^2\right)u' + \left[(\gamma - \alpha - 2)\,x - \frac{1}{2}\left[\delta + (1+\alpha)\,\beta\right]\right]u = 0, \tag{1.84}$$

où α, β, γ et δ sont des paramètres arbitraires. A l'aide de la transformation [38]

$$u(x) = x^{-(1+\alpha)/2}\ e^{(\beta x + x^2)/2} v(x), \tag{1.85}$$

l'équation différentielle de Heun biconfluente prend la forme suivante

$$v''(x) + \left(Ax^2 + Bx + C + \frac{D}{x} + \frac{E}{x^2}\right)v(x) = 0, \tag{1.86}$$

avec

$$A = -1, \qquad B = -\beta, \qquad C = \gamma - \frac{1}{4}\beta^2, \qquad D = -\frac{1}{2}\delta, \qquad E = \frac{1}{4}(1-\alpha^2). \tag{1.87}$$

La transformation (1.85) permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 1.7.2. *[37] Désignons par $u(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ une solution de l'équation* (1.84)*. Par conséquent, les fonctions suivantes sont également des solutions*

$$
\begin{aligned}
& u(\alpha, -\beta, \gamma, -\delta; -x), \\
& e^{\beta x + x^2} u(\alpha, -i\beta, -\gamma, i\delta; -ix), \\
& e^{\beta x + x^2} u(\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta; ix), \\
& x^{-\alpha} u(-\alpha, \beta, \gamma, \delta; x), \\
& x^{-\alpha} e^{\beta x + x^2} u(-\alpha, -i\beta, -\gamma, i\delta; -ix), \\
& x^{-\alpha} e^{\beta x + x^2} u(-\alpha, i\beta, -\gamma, -i\delta; ix), \\
& x^{-\alpha} u(-\alpha, -\beta, \gamma, -\delta; -x).
\end{aligned}
$$

Lorsque α est un entier positif, on peut désigner par $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ la solution de série de l'équation de Heun biconfluente (1.84) qui peut être écrit comme [37, 39]

$$v(x) = N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{(1+\alpha)_n} \frac{x^n}{n!}, \tag{1.88}$$

où

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 1, && (1.89) \\
A_1 &= \frac{1}{2}\left[\delta + \beta(1+\alpha)\right], && (1.90) \\
A_{n+2} &= \left[(n+1)\beta + \frac{1}{2}\left[\delta + \beta(1+\alpha)\right]\right] A_{n+1} - (n+1)(n+1+\alpha) \\
&\quad (\gamma - \alpha - 2 - 2n) A_n, \qquad n \geq 0 && (1.91)
\end{aligned}
$$

et

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}, \qquad n \geq 0. \tag{1.92}$$

Remarque 1.7.1. *[37] Lorsque α est un entier négatif, $\alpha = -\omega$, $\omega \geq 1$, il est possible de définir la fonction N en mettant*

$$N(-\omega, \beta, \gamma, \delta; x) = x^{\omega} N(\omega, \beta, \gamma, \delta; x).$$

La fonction N satisfait les relations fonctionnelles suivantes qui, d'après la proposition 1.7.2, sont également des solutions de l'équation (1.84).

Proposition 1.7.3. *[37] Lorsque α n'est pas un entier négatif*

$$N(\alpha,\beta,\gamma,\delta;x) = e^{\beta x+x^2} N(\alpha,-i\beta,-\gamma,i\delta;-ix), \tag{1.93}$$

$$N(\alpha,\beta,\gamma,\delta;x) = N(\alpha,-\beta,\gamma,-\delta;-x). \tag{1.94}$$

Lorsque α est un entier négatif $(\alpha=-\omega)$

$$N(-\omega,\beta,\gamma,\delta;x) = i^{\omega} e^{\beta x+x^2} N(-\omega,-i\beta,-\gamma,i\delta;-ix), \tag{1.95}$$

$$N(-\omega,\beta,\gamma,\delta;x) = (-1)^{\omega} N(-\omega,-\beta,\gamma,-\delta;-x). \tag{1.96}$$

A partir des expressions de récurrences (1.89)-(1.91), on peut obtenir les relations suivantes

$$A_1+\xi A_0=0,$$

$$A_2+(\xi-\beta)A_1+(1+\alpha)(\gamma-\alpha-2)A_0=0,$$

$$A_{n+2}+[\xi-(n+1)\beta]\,A_{n+1}+(\gamma-\alpha-2-2n)(n+1)(\alpha+n+1)A_n=0, \quad n\geq 1$$

et on peut aussi déduire que la fonction N, définie dans l'équation (1.88), devient un polynôme de degré n si et seulement si [37]

$$\gamma-\alpha-2=2n, \quad n=0,1,2,3,\ldots \qquad \text{et} \qquad A_{n+1}=0, \tag{1.97}$$

où A_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ en $\xi=-\frac{1}{2}[\delta+\beta(1+\alpha)]$.

Remarque 1.7.2. *[37] Lorsque $\alpha+1>0$ et $\beta\in\mathbb{R}$, le polynôme A_{n+1} possède $n+1$ racines réelles.*

CHAPITRE 2

ETATS LIÉS DE L'ÉQUATION DE DIRAC AVEC UN POTENTIEL SCALAIRE ET VECTORIEL NON CENTRAL : UN POTENTIEL DE CORNELL GÉNÉRALISÉ EN FORME DE DOUBLE ANNEAU MODIFIÉ

2.1 Introduction

L'équation de Dirac est l'une des équations physiques les plus célèbres et les plus importantes qui ont contribué à révéler les secrets du monde atomique et son fonctionnement. Cette équation occupe une place prépondérante parmi les théories de la physique mathématique en raison du rôle extrêmement important qu'elle joue dans divers domaines de la physique et des mathématiques modernes. La structure mathématique riche qui caractérise l'équation de Dirac a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs, ce qui est clairement évident par son occupation d'un large espace d'étude, en particulier lorsqu'il s'agit de lui trouver des solutions sous des potentiels centraux et non centraux [40, 41]. A la lumière de ce qui a été étudié, la plupart des recherches menées se sont principalement concentrées sur les modèles des potentiels non centraux. Cela est dû aux résultats exceptionnels qu'elle fournit par rapport à celle des potentiels centraux. En fait, l'intérêt physique considérable qui est attaché à ce type de potentiels découle de sa grande contribution à l'extraction des propriétés dynamiques des structures moléculaires et des interactions [42]. Ainsi, elle fournit une base théorique utile permettant de décrire, par exemple, l'interaction entre les molécules en forme d'anneau et l'interaction entre les noyaux déformés [43]. Les potentiels non centraux ont une longue liste de potentiels qui inclut, mais sans s'y limiter, l'oscillateur d'anisotrope en forme d'anneau [44], le potentiel de kratzer en forme de double anneau [45] et le potentiel de Woods-Saxon en forme d'anneau [46].

Ces dernières années, la question de la recherche de solutions de l'équation de Dirac impliquant les potentiels non centraux a occupé une grande partie de l'étude en raison de la grande importance qu'elle attache. Cependant, ces études ont conclu que cette équation est exactement résoluble seulement pour très peu de potentiels [47]. En plus de cela, les problèmes exactement résolubles ont des applications finies qui ne répondent en aucun cas aux exigences de la physique quantique moderne. Tout cela a incité les chercheurs à construire une autre approche basée sur de nouvelles méthodes de recherche, ce qui a conduit à la détection d'une nouvelle classe de problèmes spectraux de mécanique quantique appelés problèmes quasi-exactement résolubles. Cette classe a tous les avantages des problèmes ordinaires exactement résolubles, c'est-à-dire qu'elle permet de modéliser des situations physiques réelles et d'observer des phénomènes non perturbateurs [48, 49, 50, 51] et, en même temps, elle peut être utilisée comme point de référence dans la réalisation de diverses méthodes approximatives. En raison des avantages qu'elle offre, l'étude des problèmes quasi-exactement résolubles a reçu une attention croissante ces derniers temps, où plusieurs bons résultats sont apparus à partir des travaux qui ont été présentés le long de cette ligne [52, 53]. Par contre, son étude a laissé beaucoup de place pour une exploration plus approfondie.

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation de Dirac en présence d'un potentiel non central. Plus précisément, nous résolvons l'équation de Dirac avec un potentiel de Cornell généralisé en forme de double anneau modifié dans le cadre de problèmes quasi-exactement résolubles. Dans la section 2.2, nous présentons le cadre fonctionnel de l'équation de Dirac dans le cas où le potentiel scalaire $S(\boldsymbol{r})$ et vectoriel $V(\boldsymbol{r})$ sont égaux. Dans la section 2.3, la séparation des variables est effectuée pour l'équation de Dirac pour un potentiel de Cornell généralisé en forme de double anneau modifié. La section 2.4 est consacrée à la détermination des solutions azimutales, polaires et radiales de l'équation de Dirac à l'aide de la méthode fonctionnelle de l'ansatz de Bethe et l'équation de Heun biconfluente. Puis, nous donnons les états liés de Dirac et les valeurs propres associées. Dans la section 2.5, nous calculons numériquement les fonctions d'onde et les niveaux d'énergie correspondant pour différents nombres quantiques n, l et m. Le contenu de ce chapitre a été publié [14].

2.2 Equation de Dirac avec des potentiels scalaires et vectoriels

L'équation de Dirac indépendante du temps pour les particules de masse M en présence à la fois d'un potentiel scalaire $S(\boldsymbol{r})$ et d'un potentiel vectoriel $V(\boldsymbol{r})$ a la forme [54]

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta(M + S(\boldsymbol{r}))]\, \psi(\boldsymbol{r}) = [E - V(\mathbf{r})]\, \psi(\boldsymbol{r}), \tag{2.1}$$

où $\boldsymbol{p} = -i\boldsymbol{\nabla}$ est l'opérateur d'impulsion, E est l'énergie relativiste du système, $\psi(\boldsymbol{r})$ est la fonction d'onde, tandis que $\boldsymbol{\alpha}$ et β sont les matrices de Dirac définies comme

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

avec $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{I}$ désignent respectivement la matrice nulle et unité de dimensions 2×2 et σ_i sont les matrices de Pauli données par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Dans la représentation de Pauli-Dirac, lorsque nous laissons

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{r}) \\ \chi(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

la substitution des formules (2.2)-(2.4) dans l'équation (2.1), donne l'ensemble d'équations différentielles couplées pour les composantes spinor supérieures $\varphi(\boldsymbol{r})$ et inférieures $\chi(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}\, \chi(\boldsymbol{r}) = [E - V(\boldsymbol{r}) - M - S(\boldsymbol{r})]\, \varphi(\boldsymbol{r}), \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}\, \varphi(\boldsymbol{r}) = [E - V(\boldsymbol{r}) + M + S(\boldsymbol{r})]\, \chi(\boldsymbol{r}). \tag{2.6}$$

Lorsque le potentiel scalaire $S(\boldsymbol{r})$ est égal au potentiel vectoriel $V(\boldsymbol{r})$ i.e. le cas de la symétrie du spin, les équations (2.5) et (2.6) réduisent à

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\,\chi(\boldsymbol{r}) \;=\; [E-M-2V(\boldsymbol{r})]\,\varphi(\boldsymbol{r}), \tag{2.7}$$

où

$$\chi(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+M}\,\varphi(\boldsymbol{r}). \tag{2.8}$$

En éliminant $\chi(\boldsymbol{r})$ entre ces deux équations, on peut obtenir

$$[\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}+2(E+M)V(\boldsymbol{r})]\,\varphi(\boldsymbol{r})=[E^2-M^2]\,\varphi(\boldsymbol{r}). \tag{2.9}$$

On considère le potentiel non central, représenté par le potentiel de Cornell généralisé en forme de double anneau modifié, qui est donné par [14]

$$V(\boldsymbol{r})=V(r,\theta,\phi)=V_0(r)+\frac{V_1(\theta)}{r^2}+\frac{V_2(\phi)}{r^2\sin^2\theta}, \tag{2.10}$$

où

$$\begin{aligned}
V_0(r) &= A_0r^2+A_1r+A_2+\frac{A_3}{r}+\frac{A_4}{r^2}, && (2.11)\\
V_1(\theta) &= \frac{a_0+a_1\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{a_2+a_3\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{a_4}{\sin^2\theta\cos^2\theta}+\frac{a_5}{\sin\theta}, && (2.12)\\
V_2(\phi) &= \frac{b_0+b_1\cos^2(k\phi)}{\sin^2(k\phi)}+\frac{c_0+c_1\sin^2(k\phi)}{\cos^2(k\phi)}+\frac{d_0}{\sin^2(k\phi)\cos^2(k\phi)}, && (2.13)
\end{aligned}$$

avec $A_i, a_j, b_\kappa, c_\kappa,\ d_0,\ i=0,1,\ldots,4,\ j=0,1,\ldots,5,\ \kappa=0,1$, sont des paramètres arbitraires et $k=1,2,3,\ldots$

A ce stade, nous donnons certains des cas spéciaux inclus dans le potentiel mentionné ci-dessus :

i)− ***Cas $\boldsymbol{V_2(\phi)=0}$ et $\boldsymbol{V_1(\theta)=0}$, on obtient :***

1. Pour $A_0=A_2=A_4=0$, ce potentiel revient au potentiel de Cornell.
2. Si $A_0=A_1=0$, le potentiel (2.10) coïncide avec le potentiel de Mie-type.
3. Lorsque $A_2=A_4=0$, notre potentiel se réduit au potentiel de Killingbeck.
4. Dans le cas $A_0=A_1=A_2=A_4=0$, le potentiel mentionné ci-dessus correspond au potentiel de Coulomb.

ii)− ***Cas $\boldsymbol{V_2(\phi)=0}$ et $\boldsymbol{V_1(\theta)\neq 0}$, on trouve :***

1. Quand $A_1=A_2=A_3=A_4=a_1=a_3=a_4=a_5=0$, le potentiel (2.10) se transforme en potentiel de l'oscillateur en forme de double anneau.

2. Si $A_0 = A_1 = A_2 = A_4 = a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, le potentiel mentionné ci-dessus se change en potentiel de Coulomb en forme de double anneau.
3. Dans le cas $A_1 = A_2 = A_3 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, notre potentiel revient au potentiel oscillatoire harmonique non sphérique en forme d'anneau.
4. Pour $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = a_2 = a_3 = a_5 = 0$, le potentiel (2.10) devient un potentiel oscillatoire harmonique sphérique en forme d'anneau.
5. Si $A_0 = A_1 = A_2 = A_4 = a_0 = a_1 = a_5 = 0$, notre potentiel se transforme en potentiel de Coulomb plus un nouveau potentiel dépendant de l'angle.
6. Lorsque $A_0 = A_1 = A_2 = A_4 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, le potentiel mentionné ci-dessus se réduit au potentiel de Hartmann.
7. Dans le cas $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = a_0 = a_1 = a_5 = 0$, le potentiel (2.10) se convertir en potentiel de l'oscillateur harmonique plus un nouveau potentiel dépendant de l'angle.

iii)− ***Cas*** $\boldsymbol{V_2(\phi) \neq 0}$ ***et*** $\boldsymbol{V_1(\theta) \neq 0}$***, on a :***

1. Pour $A_0 = A_1 = A_2 = A_4 = a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = b_1 = c_1 = d_0 = 0$, notre potentiel se réduit au potentiel de Coulomb en forme de double anneau de Pöschl-Teller.

2.3 Séparation des variables

Afin de trouver les solutions analytiques de l'équation de Dirac avec le potentiel de Cornell généralisé en forme de double anneau modifié, nous adoptons, comme première étape, sur la procédure standard de séparation des variables utilisant les coordonnées sphériques. Ceci fera l'objet de cette section.

L'équation de Dirac (2.9) en coordonnées sphériques est donnée par

$$\left[\frac{-1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + 2\left(E+M\right)V(r,\theta,\phi)\right]\varphi(r,\theta,\phi)$$
$$= \left[E^2 - M^2\right]\varphi(r,\theta,\phi). \tag{2.14}$$

Par analogie avec la pratique habituelle pour un potentiel sphérique, nous laissons

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{U_{n,l,m}(r)}{r}F_{l,m}(\theta,\phi), \tag{2.15}$$

dans laquelle $U_{n,l,m}(r)$ est la fonction d'onde radiale et $F_{l,m}(\theta,\phi)$ est la fonction d'onde polaire. En remplaçant la fonction d'onde (2.15) dans l'équation de Dirac (2.14), on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{-F_{l,m}(\theta,\phi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{U_{n,l,m}(r)}{r}\right]-\frac{U_{n,l,m}(r)}{r^3\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]-\frac{U_{n,l,m}(r)}{r^3\sin^2\theta}\frac{\partial^2F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\\+\frac{2\left(E_{n,l,m}+M\right)}{r}V(r,\theta,\phi)U_{n,l,m}(r)F_{l,m}(\theta,\phi)=\frac{E_{n,l,m}^2-M^2}{r}U_{n,l,m}(r)F_{l,m}(\theta,\phi).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Multipliant la dernière équation par $\frac{-r^3}{U_{n,l,m}(r)F_{l,m}(\theta,\phi)}$, nous donne

$$\begin{aligned}\frac{r}{U_{n,l,m}(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{U_{n,l,m}(r)}{r}\right]+\frac{1}{\sin\theta F_{l,m}(\theta,\phi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\\\frac{1}{\sin^2\theta F_{l,m}(\theta,\phi)}\frac{\partial^2F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}-2r^2\left(E_{n,l,m}+M\right)V(r,\theta,\phi)=-r^2\left[E_{n,l,m}^2-M^2\right],\end{aligned}\tag{2.17}$$

qui, prenant en compte la forme (2.10), peut être réécrit comme

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{U_{n,l,m}(r)}\frac{\partial^2U_{n,l,m}(r)}{\partial r^2}-2r^2\left(E_{n,l,m}+M\right)V_0(r)+r^2\left[E_{n,l,m}^2-M^2\right]=\\\frac{-1}{F_{l,m}(\theta,\phi)}\frac{\partial^2F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\theta^2}-\frac{\cot\theta}{F_{l,m}(\theta,\phi)}\frac{\partial F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\theta}+2\left(E_{n,l,m}+M\right)V_1(\theta)-\\\frac{1}{\sin^2\theta F_{l,m}(\theta,\phi)}\frac{\partial^2F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\frac{2}{\sin^2\theta}\left(E_{n,l,m}+M\right)V_2(\phi)=\lambda,\end{aligned}\tag{2.18}$$

où λ est une constante de séparation. Ainsi, l'équation (2.18) se réduit aux équations différentielles radiales et polaires suivantes

$$\frac{r^2}{U_{n,l,m}(r)}\frac{\partial^2U_{n,l,m}(r)}{\partial r^2}-2r^2\left(E_{n,l,m}+M\right)V_0(r)+r^2\left[E_{n,l,m}^2-M^2\right]=\lambda,\tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{-1}{F_{l,m}(\theta,\phi)}\frac{\partial^2F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\theta^2}-\frac{\cot\theta}{F_{l,m}(\theta,\phi)}\frac{\partial F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\theta}+2\left(E_{n,l,m}+M\right)V_1(\theta)-\\\frac{1}{\sin^2\theta F_{l,m}(\theta,\phi)}\frac{\partial^2F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\frac{2}{\sin^2\theta}\left(E_{n,l,m}+M\right)V_2(\phi)=\lambda.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Après simplification des deux dernières équations, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d^2U_{n,l,m}(r)}{dr^2}+\left[-2(E_{n,l,m}+M)V_0(r)+E_{n,l,m}^2-M^2-\frac{\lambda}{r^2}\right]U_{n,l,m}(r)=0,\\\sin^2\theta\frac{\partial^2F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\theta^2}+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\theta}-2\sin^2\theta\left(E_{n,l,m}+M\right)V_1(\theta)F_{l,m}(\theta,\phi)+\\\frac{\partial^2F_{l,m}(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}-2\left(E_{n,l,m}+M\right)V_2(\phi)F_{l,m}(\theta,\phi)+\lambda\sin^2\theta F_{l,m}(\theta,\phi)=0.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Pour simplifier l'équation polaire (2.21), on peut utiliser à nouveau la méthode de séparation des variables en posant

$$F_{l,m}(\theta,\phi) = H_l(\theta)K_m(\phi). \tag{2.22}$$

Autrement dit, la fonction (2.15) devient

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{U_{n,l,m}(r)}{r}H_l(\theta)K_m(\phi). \tag{2.23}$$

L'insertion de l'équation (2.22) dans l'équation (2.21), conduit à

$$\begin{aligned}\sin^2\theta K_m(\phi)\frac{\partial^2 H_l(\theta)}{\partial\theta^2} + \sin\theta\cos\theta K_m(\phi)\frac{\partial H_l(\theta)}{\partial\theta} - 2\sin^2\theta\left(E_{n,l,m}+M\right)V_1(\theta)H_l(\theta)K_m(\phi)+\\ H_l(\theta)\frac{\partial^2 K_m(\phi)}{\partial\phi^2} - 2\left(E_{n,l,m}+M\right)V_2(\phi)H_l(\theta)K_m(\phi) + \lambda\sin^2\theta H_l(\theta)K_m(\phi) = 0.\end{aligned} \tag{2.24}$$

En multipliant cette équation par $\frac{1}{\sin^2\theta H_l(\theta)K_m(\phi)}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{H_l(\theta)}\frac{\partial^2 H_l(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{H_l(\theta)}\frac{\partial H_l(\theta)}{\partial\theta} - 2\left(E_{n,l,m}+M\right)V_1(\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta K_m(\phi)}\frac{\partial^2 K_m(\phi)}{\partial\phi^2} -\\ \frac{2}{\sin^2\theta}\left(E_{n,l,m}+M\right)V_2(\phi) + \lambda = 0,\end{aligned} \tag{2.25}$$

qui peut être séparé l'équation polaire de l'équation azimutale comme suit

$$\frac{d^2H_l(\theta)}{d\theta^2} + \cot\theta\,\frac{dH_l(\theta)}{d\theta} + \left[-2(E_{n,l,m}+M)V_1(\theta) - \frac{\nu}{\sin^2\theta} + \lambda\right]H_l(\theta) = 0,$$

$$\frac{d^2K_m(\phi)}{d\phi^2} + \left[-2(E_{n,l,m}+M)V_2(\phi) + \nu\right]K_m(\phi) = 0,$$

où ν est une constante de séparation.

D'une manière générale, l'équation de Dirac (2.14) séparée en variables représentées par trois équations différentielles du second ordre en fonction de $U_{n,l,m}(r)$, $H_l(\theta)$ et $K_m(\phi)$ qui sont, respectivement, données par

$$\frac{d^2U_{n,l,m}(r)}{dr^2} + \left[-2(E_{n,l,m}+M)V_0(r) + E_{n,l,m}^2 - M^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right]U_{n,l,m}(r) = 0, \tag{2.26}$$

$$\frac{d^2H_l(\theta)}{d\theta^2} + \cot\theta\,\frac{dH_l(\theta)}{d\theta} + \left[-2(E_{n,l,m}+M)V_1(\theta) - \frac{\nu}{\sin^2\theta} + \lambda\right]H_l(\theta) = 0, \tag{2.27}$$

$$\frac{d^2K_m(\phi)}{d\phi^2} + \left[-2(E_{n,l,m}+M)V_2(\phi) + \nu\right]K_m(\phi) = 0, \tag{2.28}$$

où $V_0(r), V_1(\theta)$ et $V_2(\phi)$ sont, respectivement, donnés par les équations (2.11), (2.12) et (2.13), tandis que λ et ν sont les constantes de séparation.

2.4 Solutions azimutales, polaires et radiales de l'équation de Dirac

2.4.1 Solutions azimutales

Dans cette partie, on s'intéresse à résoudre l'équation azimutale (2.28) qui, prenant en compte l'expression (2.13), s'écrit comme suit

$$\frac{d^2K_m(\phi)}{d\phi^2} + \left[-2(E_{n,l,m} + M)\left[\frac{b_0 + b_1\cos^2(k\phi)}{\sin^2(k\phi)} + \frac{c_0 + c_1\sin^2(k\phi)}{\cos^2(k\phi)} + \frac{d_0}{\sin^2(k\phi)\cos^2(k\phi)}\right] + \nu\right] K_m(\phi) = 0. \tag{2.29}$$

Plus précisément, selon l'expression de $V_2(\phi)$, nous allons résoudre cette équation dans deux cas différents, de sorte que nous les traiterons séparément.

2.4.1.1 Cas particulier

Comme cas particulier, nous laissons $\boldsymbol{c_0 = c_1 = d_0 = 0}$, où l'équation (2.29) est reformulée comme

$$\frac{d^2K_m(\phi)}{d\phi^2} + \left[\frac{-2(E_{n,l,m} + M)\left[b_0 + b_1\cos^2(k\phi)\right]}{\sin^2(k\phi)} + \nu\right] K_m(\phi) = 0. \tag{2.30}$$

En introduisant une nouvelle variable $x = \sin(k\phi)$, l'équation (2.30) peut être changée en

$$k^2x^2(1-x^2)\,\frac{d^2K_m(x)}{dx^2} - k^2x^3\,\frac{dK_m(x)}{dx} + \left[(2b_1(E_{n,l,m}+M)+\nu)\,x^2 - 2(E_{n,l,m}+M)(b_0+b_1)\right] K_m(x) = 0. \tag{2.31}$$

La forme de cette équation est appropriée pour appliquer la méthode fonctionnelle de l'ansatz de Bethe énoncée au premier chapitre, ce qui permet de trouver ses solutions polynomiales. Avant cela, il convient de noter que l'équation (2.31) peut être écrite sous forme compacte comme suit

$$\left[X(x)\frac{d^2}{dx^2} + Y(x)\frac{d}{dx} + Z(x)\right] K_m(x) = 0, \tag{2.32}$$

où les expressions des polynômes $X(x)$, $Y(x)$ et $Z(x)$ sont données par

$$X(x) = -k^2x^4 + k^2x^2, \qquad Y(x) = -k^2x^3, \tag{2.33}$$

$$Z(x) = (2b_1(E_{n,l,m}+M)+\nu)\,x^2 - 2d_1(E_{n,l,m}+M)x - 2(E_{n,l,m}+M)(b_0+b_1). \tag{2.34}$$

En suivant les points généraux de cette méthode, les solutions polynomiales de l'équation (2.31) peuvent être facilement déterminées. Plus simplement, d'après le théorème 1.7.1, l'équation (2.31) a une solution polynomiale de degré m avec racines distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de la forme

$$K_m(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - x_i), \qquad K_m \equiv 1 \quad \text{pour } m = 0. \tag{2.35}$$

L'utilisation des équations (1.78)-(1.80) et des termes correspondant aux polynômes (2.33)-(2.34), nous permet d'écrire les relations suivantes

$$\begin{aligned} 2b_1(E_{n,l,m} + M) &= k^2m^2 - \nu, &(2.36)\\ -2(E_{n,l,m} + M)(b_0 + b_1) &= -k^2m(m-1) + k^2(2m-1)\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + 2k^2\sum_{i<j}^{m} x_i x_j, &(2.37)\\ \sum_{i=1}^{m} x_i, &= 0, &(2.38)\end{aligned}$$

à condition que les racines x_i obéissent aux équations de l'ansatz de Bethe

$$\sum_{j\neq i}^{m} \frac{2}{x_i - x_j} + \frac{x_i}{x_i^2 - 1} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.39}$$

Il résulte, des relations ci-dessus, que les paramètres ν, b_0 et b_1 doivent satisfaire aux équations (2.36) et (2.37), pour que l'équation (2.31) ait des solutions polynomiales de degré m, $m = 1, 2, \ldots$, où le terme $(E_{n,l,m} + M)$ sera déterminé dans la sous-section 2.4.2.

Pour $\boldsymbol{m = 0}$, nous avons $K_0(\phi) = 1$ est une solution de l'équation (2.31) telle que, prenant en compte les équations (2.36) et (2.37), la constante de séparation ν prend la valeur

$$\nu = -2b_1(E_{n,l,m} + M), \tag{2.40}$$

et la condition sur les paramètres b_0 et b_1 est la suivante

$$b_0 + b_1 = 0.$$

Pour $\boldsymbol{m = 1}$, nous trouvons à partir des équations de l'ansatz de Bethe (2.39) que la racine $x_1 = 0$. Par conséquent, la fonction d'onde azimutale correspondante est exprimée

$$K_1(\phi) = \sin(k\phi). \tag{2.41}$$

En utilisant les équations (2.36) et (2.37), nous trouvons que la constante de séparation ν et les paramètres b_0 et b_1 prennent la forme

$$\nu = k^2 - 2b_1(E_{n,l,m} + M) \qquad \text{et} \qquad b_0 + b_1 = 0. \tag{2.42}$$

Pour $\boldsymbol{m = 2}$, on obtient, à partir des équations de l'ansatz de Bethe (2.39), les deux racines

$$x_1 = -x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.43}$$

Il vient alors que la fonction d'onde azimutale est

$$K_2(\phi) = \sin^2(k\phi) - \frac{1}{2}. \tag{2.44}$$

La constante de séparation ν satisfait la forme suivante

$$\nu = 4k^2 - 2b_1(E_{n,l,m} + M), \tag{2.45}$$

tandis que les paramètres b_0 et b_1 obéissent à la condition

$$b_0 + b_1 = 0. \tag{2.46}$$

Pour $\boldsymbol{m = 3}$, on peut facilement montrer que les racines x_1, x_2 et x_3 sont

$$x_1 = -x_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_3 = 0. \tag{2.47}$$

Par conséquent, la fonction d'onde azimutale correspondante est la suivante

$$K_3(\phi) = \sin^3(k\phi) - \frac{3}{4}\sin(k\phi). \tag{2.48}$$

Par contre, la constante de séparation ν et les paramètres b_0 et b_1 s'écrivent

$$\nu = 9k^2 - 2b_1(E_{n,l,m} + M) \qquad \text{et} \qquad b_0 + b_1 = 0. \tag{2.49}$$

2.4.1.2 Cas général

Dans le cas général, i.e. le cas où les paramètres c_0, c_1 et d_0 sont différents de zéro, nous traiterons l'équation (2.29) qui est

$$\frac{d^2K_m(\phi)}{d\phi^2} + \left[-2(E_{n,l,m} + M)\left[\frac{b_0 + b_1\cos^2(k\phi)}{\sin^2(k\phi)} + \frac{c_0 + c_1\sin^2(k\phi)}{\cos^2(k\phi)} + \right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{d_0}{\sin^2(k\phi)\cos^2(k\phi)}\right] + \nu\right] K_m(\phi) = 0.$$

En définissons à nouveau le changement de variable $x = \sin(k\phi)$, ce qui amène l'équation (2.29) à la forme d'une équation différentielle de second ordre

$$k^2x^2\left(1 - x^2\right)^2 \frac{d^2K_m(x)}{dx^2} + k^2(x^5 - x^3)\frac{dK_m(x)}{dx} + \left[(-2(E_{n,l,m} + M)(b_1 + c_1) - \nu)\, x^4 + \right.$$

$$[2(E_{n,l,m}+M)(b_0+2b_1-c_0)+\nu]x^2-2(E_{n,l,m}+M)(b_0+b_1+d_0)\big]\,K_m(x)=0. \tag{2.50}$$

Nous pouvons facilement montrer que l'équation (2.50) peut se mettre sous la forme de l'équation (2.32). A cet effet, nous exprimons $\boldsymbol{c_0+c_1+d_0=0}$ qui nous permet d'arriver à

$$\begin{aligned} k^2x^2\left(1-x^2\right)\ \frac{d^2K_m(x)}{dx^2}-k^2x^3\ \frac{dK_m(x)}{dx}+\left[(2(E_{n,l,m}+M)(b_1+c_1)+\nu\right)x^2 \\ -2(E_{n,l,m}+M)(b_0+b_1+d_0)]\,K_m(x)=0. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Nous notons ici que le cas particulier est inclus dans le cas général associé à la contrainte $\boldsymbol{c_0+c_1+d_0=0}$.

D'après les résultats généraux de la méthode fonctionnelle de l'ansatz de Bethe soulignée dans le cas précédent, il vient que l'équation (2.51) a des solutions polynomiales de degré $m=1,2,\dots$

$$K_m(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-x_i),\qquad K_m\equiv 1\quad \text{pour } m=0, \tag{2.52}$$

où x_i sont les racines du polynôme ci-dessus à déterminer, à condition que :

$$\begin{aligned} 2(E_{n,l,m}+M)(b_1+c_1)+\nu &= k^2m^2, &(2.53)\\ -2(E_{n,l,m}+M)(b_0+b_1+d_0) &= -k^2m(m-1)+k^2(2m-1)\sum_{i=1}^{m}x_i^2+2k^2\sum_{i<j}^{m}x_ix_j, &(2.54)\\ \sum_{i=1}^{m}x_i &= 0, &(2.55) \end{aligned}$$

et qu'elles satisfassent les équations de l'ansatz de Bethe

$$\sum_{j\neq i}^{m}\frac{2}{x_i-x_j}+\frac{x_i}{x_i^2-1}=0,\qquad i=1,2,\dots,m. \tag{2.56}$$

Nous notons que $K_0(\phi)=1$ est une solution de l'équation (2.51) où la constante de séparation est donnée par

$$\nu=-2(E_{n,l,m}+M)(b_1+c_1), \tag{2.57}$$

et les paramètres b_0, b_1 et d_0 vérifient cette contrainte

$$b_0+b_1+d_0=0,$$

qui peut être obtenu à partir des équations (2.53)-(2.54) en posant $\boldsymbol{m=0}$.

Pour $\boldsymbol{m = 1}$, comme dans le cas précédent, on peut déduire d'après les équations de l'ansatz de Bethe (2.56) que la racine prend la valeur $x_1 = 0$ et la fonction d'onde azimutale correspondante est

$$K_1(\phi) = \sin(k\phi). \tag{2.58}$$

A partir de l'équation (2.53), la constante de séparation ν est donnée par

$$\nu = k^2 - 2(E_{n,l,m} + M)(b_1 + c_1), \tag{2.59}$$

et de l'équation (2.54), nous trouvons que les paramètres b_0, b_1 et d_0 doivent obéir à la même contrainte

$$b_0 + b_1 + d_0 = 0.$$

Pour $\boldsymbol{m = 2}$, après de simples calculs, on peut facilement révéler que les racines sont les mêmes que celles obtenues dans le cas particulier, à savoir

$$x_1 = -x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Par conséquent, la fonction d'onde azimutale s'écrit

$$K_2(\phi) = \sin^2(k\phi) - \frac{1}{2}, \tag{2.60}$$

tandis que la constante de séparation ν et les paramètres b_0, b_1, d_0 sont donnés par

$$\nu = 4k^2 - 2(E_{n,l,m} + M)(b_1 + c_1) \qquad \text{et} \qquad b_0 + b_1 + d_0 = 0. \tag{2.61}$$

Lorsque nous fixons $\boldsymbol{m = 3}$, la fonction d'onde azimutale prend la forme

$$K_3(\phi) = \sin^3(k\phi) - \frac{3}{4}\sin(k\phi), \tag{2.62}$$

ainsi que la constante de séparation ν et les paramètres b_0, b_1, d_0 prennent les valeurs

$$\nu = 9k^2 - 2(E_{n,l,m} + M)(b_1 + c_1) \qquad \text{et} \qquad b_0 + b_1 + d_0 = 0. \tag{2.63}$$

2.4.2 Solutions polaires

Afin de résoudre l'équation polaire qui définit, en utilisant la forme (2.12), comme suit

$$\frac{d^2H_l(\theta)}{d\theta^2} + \cot\theta\,\frac{dH_l(\theta)}{d\theta} + \left[-2(E_{n,l,m} + M)\left[\frac{a_0 + a_1\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{a_2 + a_3\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{a_4}{\sin^2\theta\cos^2\theta} + \frac{a_5}{\sin\theta}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{\nu}{\sin^2\theta} + \lambda\right] H_l(\theta) = 0, \tag{2.64}$$

où ν est donné dans la sous-section précédente, nous suivrons la même manière que dans l'équation azimutale, où nous traiterons également deux cas différents.

2.4.2.1 Cas particulier

Lorsque nous choisissons $\boldsymbol{a_2 = a_3 = a_4 = 0}$ comme cas particulier, l'équation (2.64) se réduit à

$$\frac{d^2H_l(\theta)}{d\theta^2}+\cot\theta\,\frac{dH_l(\theta)}{d\theta}+\left[\frac{-2(E_{n,l,m}+M)(a_0+a_1\cos^2\theta)-\nu}{\sin^2\theta}-\frac{2(E_{n,l,m}+M)a_5}{\sin\theta}+\lambda\right]H_l(\theta)=0. \tag{2.65}$$

En introduisant la transformation appropriée $x=\sin\theta$, l'équation polaire (2.65) devient

$$x^2\left(1-x^2\right)\frac{d^2H_l(x)}{dx^2}+x\left(-2x^2+1\right)\frac{dH_l(x)}{dx}+\left[\left(2(E_{n,l,m}+M)a_1+\lambda\right)x^2-2(E_{n,l,m}+M)a_5x\right.$$
$$\left.-2(E_{n,l,m}+M)(a_0+a_1)-\nu\right]H_l(x)=0. \tag{2.66}$$

En utilisant les points généraux de la méthode fonctionnelle de l'ansatz de Bethe décrite dans le chapitre précédent, nous pouvons montrer que l'équation (2.66) admet des solutions polynomiales de degré $l=1,2,\ldots$

$$H_l(x)=\prod_{i=1}^{l}(x-x_i),\qquad H_l\equiv 1\quad\text{pour } l=0, \tag{2.67}$$

où x_i sont les racines du polynôme ci-dessus à déterminer, à condition que $E_{n,l,m}$, a_0, a_1 et a_5 obéissent aux relations suivantes :

$$2(E_{n,l,m}+M)a_1+\lambda = l(l+1), \tag{2.68}$$
$$(E_{n,l,m}+M)a_5 = -l\sum_{i=1}^{l}x_i, \tag{2.69}$$
$$-2(E_{n,l,m}+M)(a_0+a_1)-\nu = -l^2+2l\sum_{i=1}^{l}x_i^2+2\sum_{i<j}^{l}x_ix_j, \tag{2.70}$$

avec ν est donné dans la sous-section 2.4.1 pour les deux cas, i.e. le cas particulier et le cas général, tandis que le terme $(E_{n,l,m}+M)$ sera déterminé dans la sous-section 2.4.3. De plus, les racines x_i sont déterminées par l'ensemble des équations de l'ansatz de Bethe

$$\sum_{j\neq i}^{l}\frac{2}{x_i-x_j}+\frac{2x_i^2-1}{x_i^3-x_i}=0,\qquad i=1,2,\ldots,l. \tag{2.71}$$

Pour $\boldsymbol{l=0}$, nous avons $H_0(\theta)=1$ est une solution de l'équation (2.66). D'après l'équation (2.68), la constante de séparation λ est donnée par

$$\lambda=-2(E_{n,l,m}+M)a_1, \tag{2.72}$$

et à partir des équations (2.69) et (2.70), nous trouvons simplement les contraintes suivantes sur a_0, a_1 et a_5

$$\nu + 2(E_{n,l,m} + M)(a_0 + a_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad a_5 = 0. \tag{2.73}$$

Lorsqu'on pose $\boldsymbol{l = 1}$, on obtient, prenant en compte l'équation (2.71), que la racine x_1 a deux valeurs

$$x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La fonction d'onde polaire correspondante a donc les deux expressions suivantes

$$H_1(\theta) = \sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{2.74}$$

$$H_1(\theta) = \sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.75}$$

De plus, à partir de l'équation (2.68), la constante de séparation λ est exprimée par

$$\lambda = 2 - 2(E_{n,l,m} + M)a_1. \tag{2.76}$$

En utilisant les équations (2.69) et (2.70), nous pouvons également montrer que les paramètres a_0, a_1 et a_5 satisfont les relations

$$\nu + 2(E_{n,l,m} + M)(a_0 + a_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad (E_{n,l,m} + M)a_5 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.77}$$

Pour $\boldsymbol{l = 2}$, on peut facilement trouver les racines (x_1, x_2) comme suit

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{22}}{8}, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{22}}{8}\right), \quad \left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{22}}{8}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{22}}{8}\right).$$

Ainsi, selon ces racines, on trouve immédiatement l'expression de la fonction d'onde polaire

- Pour les deux racines $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \mp\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, la fonction d'onde polaire s'exprime par

$$H_2(\theta) = \sin^2\theta - \frac{2}{3}, \quad \text{avec la contrainte} \quad a_5 = 0. \tag{2.78}$$

- Pour la racine $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{22}}{8}, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{22}}{8}\right)$, la fonction d'onde polaire prendre la forme

$$H_2(\theta) = \sin^2\theta - \frac{\sqrt{22}}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}, \quad \text{à condition que} \quad (E_{n,l,m} + M)a_5 = -\frac{\sqrt{22}}{2}. \tag{2.79}$$

- Pour la racine $\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{22}}{8}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{22}}{8}\right)$, la fonction d'onde polaire est la suivante

$$H_2(\theta) = \sin^2\theta + \frac{\sqrt{22}}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}, \quad \text{avec la contrainte} \quad (E_{n,l,m} + M)a_5 = \frac{\sqrt{22}}{2}. \tag{2.80}$$

Par ailleurs, la constante de séparation λ est donnée par

$$\lambda = 6 - 2(E_{n,l,m} + M)a_1, \tag{2.81}$$

tandis que les paramètres a_0 et a_1 vérifient la même condition précédente

$$\nu + 2(E_{n,l,m} + M)(a_0 + a_1) = 0. \tag{2.82}$$

2.4.2.2 Cas général

Maintenant, on s'intéresse à résoudre l'équation polaire (2.64) dans le cas où les paramètres $\boldsymbol{a_2 \neq 0}$, $\boldsymbol{a_3 \neq 0}$ et $\boldsymbol{a_4 \neq 0}$. A cet égard, nous effectuons d'abord le changement de variable $x = \sin\theta$ dans cette équation, ce qui conduit à sa transformation en

$$\begin{aligned} x^2\left(1-x^2\right)^2\frac{d^2H_l(x)}{dx^2} + \left(x-x^3\right)\left(-2x^2+1\right)\frac{dH_l(x)}{dx} + \big[\left(-2(E_{n,l,m}+M)(a_1+a_3)-\lambda\right)x^4 \\ +2(E_{n,l,m}+M)a_5x^3 + \left[2(E_{n,l,m}+M)(a_0+2a_1-a_2)+\nu+\lambda\right]x^2 - 2(E_{n,l,m}+M)a_5x \\ -2(E_{n,l,m}+M)(a_0+a_1+a_4)-\nu\big]H_l(x) = 0. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Cette équation peut facilement être rendue compatible avec la forme (1.75). Autrement dit, en posant $\boldsymbol{a_2 + a_3 + a_4 = 0}$, l'équation (2.83) est amenée à la forme

$$\begin{aligned} x^2\left(1-x^2\right)\frac{d^2H_l(x)}{dx^2} + \left(-2x^3+x\right)\frac{dH_l(x)}{dx} + \big[\left(2(E_{n,l,m}+M)(a_1+a_3)+\lambda\right)x^2 - 2(E_{n,l,m}+M)a_5x \\ -2(E_{n,l,m}+M)(a_0+a_1+a_4)-\nu\big]H_l(x) = 0. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Nous remarquons ici que le cas particulier est inclus dans le cas général attaché à la contrainte $\boldsymbol{a_2 + a_3 + a_4 = 0}$.

L'équation (2.84) admet, selon la méthode fonctionnelle de l'ansatz de Bethe, solutions polynomiales de degré l, $l = 1, 2, \ldots$, de la forme (2.67). De manière similaire aux cas précédents, après avoir utilisé les équations (1.78)-(1.80), on obtient que

$$2(E_{n,l,m}+M)(a_1+a_3)+\lambda = l(l+1), \tag{2.85}$$

$$(E_{n,l,m}+M)a_5 = -l\sum_{i=1}^{l}x_i, \tag{2.86}$$

$$-2(E_{n,l,m}+M)(a_0+a_1+a_4)-\nu = -l^2 + 2l\sum_{i=1}^{l}x_i^2 + 2\sum_{i<j}^{l}x_ix_j, \tag{2.87}$$

où ν est donné dans la sous-section 2.4.1 dans les deux cas examinés, tandis que les racines x_i satisfont les équations de l'ansatz de Bethe suivantes

$$\sum_{j\neq i}^{l} \frac{2}{x_i - x_j} + \frac{2x_i^2 - 1}{x_i^3 - x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{2.88}$$

Lorsque $\boldsymbol{l = 0}$, il est clair que $H_0(\theta) = 1$ est une solution de l'équation (2.84). En outre, la constante de séparation λ s'écrit

$$\lambda = -2(E_{n,l,m} + M)(a_1 + a_3), \tag{2.89}$$

et les paramètres a_0, a_1, a_4 et a_5 sont donnés par

$$\nu + 2(E_{n,l,m} + M)(a_0 + a_1 + a_4) = 0 \qquad \text{et} \qquad a_5 = 0. \tag{2.90}$$

Pour $\boldsymbol{l = 1}$, on trouve, comme dans le cas précédent, que la racine x_1 prend deux valeurs

$$x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

et la fonction d'onde polaire correspondante indique que

$$H_1(\theta) = \sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{2.91}$$

$$H_1(\theta) = \sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.92}$$

De plus, la constante de séparation λ est

$$\lambda = 2 - 2(E_{n,l,m} + M)(a_1 + a_3), \tag{2.93}$$

et les paramètres a_0, a_1, a_4 et a_5 obéissent aux contraintes suivantes

$$\nu + 2(E_{n,l,m} + M)(a_0 + a_1 + a_4) = 0 \qquad \text{et} \qquad (E_{n,l,m} + M)a_5 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.94}$$

Pour $\boldsymbol{l = 2}$, la fonction d'onde polaire prend la même forme que le cas particulier et avec les mêmes contraintes, à savoir

- Pour chacune des racines $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \mp\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, la fonction d'onde polaire s'écrit

$$H_2(\theta) = \sin^2\theta - \frac{2}{3}, \quad \text{avec} \quad a_5 = 0. \tag{2.95}$$

- Pour la racine $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{22}}{8}, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{22}}{8}\right)$, la fonction d'onde polaire correspondante est la suivante

$$H_2(\theta) = \sin^2\theta - \frac{\sqrt{22}}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}, \quad \text{où} \quad (E_{n,l,m} + M)a_5 = -\frac{\sqrt{22}}{2}. \tag{2.96}$$

- Pour la racine $\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{22}}{8}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{22}}{8}\right)$, la fonction d'onde polaire devient

$$H_2(\theta) = \sin^2\theta + \frac{\sqrt{22}}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}, \quad \text{avec} \quad (E_{n,l,m} + M)a_5 = \frac{\sqrt{22}}{2}. \tag{2.97}$$

La constante de séparation λ est exprimée par

$$\lambda = 6 - 2(E_{n,l,m} + M)(a_1 + a_3), \tag{2.98}$$

et la condition sur les paramètres a_0, a_1 et a_4 est définie par

$$\nu + 2(E_{n,l,m} + M)(a_0 + a_1 + a_4) = 0. \tag{2.99}$$

2.4.3 Solutions radiales

Avec une approche complètement différente de celle adoptée dans l'équation azimutale et polaire, nous résolvons l'équation radiale qui, en considérant le potentiel de Cornell généralisé $V_0(r)$ de la forme (2.11), est donnée par

$$\frac{d^2U_{n,l,m}(r)}{dr^2} + \left[-2(E_{n,l,m} + M)\left[A_0r^2 + A_1r + A_2 + \frac{A_3}{r} + \frac{A_4}{r^2}\right] + E^2_{n,l,m} - M^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right]U_{n,l,m}(r) = 0. \tag{2.100}$$

Pour $A_0 > 0$, en utilisant le changement de variable

$$r_1 = [2A_0(E_{n,l,m} + M)]^{\frac{1}{4}}\, r, \tag{2.101}$$

l'équation différentielle (2.100) devient

$$\frac{d^2U_{n,l,m}(r_1)}{dr_1^2} + \left[q_1 + q_2r_1 - r_1^2 + \frac{q_3}{r_1} - \frac{q_4}{r_1^2}\right]U_{n,l,m}(r_1) = 0, \tag{2.102}$$

où

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{-2A_2(E_{n,l,m} + M) + E^2_{n,l,m} - M^2}{\sqrt{2A_0(E_{n,l,m} + M)}}, & q_2 = -2A_1(E_{n,l,m} + M)\left[2A_0(E_{n,l,m} + M)\right]^{-\frac{3}{4}}, \\ q_3 = -2A_3(E_{n,l,m} + M)\left[2A_0(E_{n,l,m} + M)\right]^{-\frac{1}{4}}, & q_4 = 2A_4(E_{n,l,m} + M) + \lambda. \end{cases} \tag{2.103}$$

L'équation (2.102) peut être transformée directement en la forme canonique de l'équation différentielle de Heun biconfluente [14]

$$r_1v''(r_1) + \left(1 + \alpha - \beta r_1 - 2r_1^2\right)v'(r_1) + \left[(\gamma - \alpha - 2)\,r_1 - \frac{1}{2}\left[\delta + (1 + \alpha)\,\beta\right]\right]v(r_1) = 0. \tag{2.104}$$

En fait, la transformation appropriée

$$U_{n,l,m}(r_1) = r_1^{\frac{1+\sqrt{4q_4+1}}{2}} \exp\left[\frac{q_2 r_1 - r_1^2}{2}\right] v(r_1), \tag{2.105}$$

implique que l'équation (2.102) est réécrite comme

$$r_1 v''(r_1) + \left[1 + \sqrt{4q_4+1} + q_2 r_1 - 2r_1^2\right] v'(r_1) + \left[\frac{q_2}{2}\left(1+\sqrt{4q_4+1}\right) + q_3 \right.$$
$$\left. + \left[q_1 + \frac{q_2^2}{4} - \sqrt{4q_4+1} - 2\right] r_1\right] v(r_1) = 0, \tag{2.106}$$

qui est exactement de la forme (2.104), à condition que les quatre paramètres de Heun soient définis comme suit :

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{4q_4+1}, \qquad \beta = -q_2, \\ \\ \gamma = q_1 + \frac{1}{4}q_2^2, \qquad \delta = -2q_3. \end{cases} \tag{2.107}$$

Maintenant, pour déterminer les solutions polynomiales de l'équation (2.106), nous pouvons désigner par $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; r)$ la solution de série qui s'exprime par [37, 39]

$$v(r_1) = N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; r_1) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{B_p}{(1+\alpha)_p} \frac{r_1^p}{p!}, \tag{2.108}$$

où

$$(\alpha)_p = \frac{\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(\alpha)}, \quad p \geq 0. \tag{2.109}$$

Les deux premiers coefficients sont $B_0 = 1$ et $B_1 = \dfrac{1}{2}[\delta + \beta(1+\alpha)]$. L'insertion de la solution de série $v(r_1)$, définie dans l'équation (2.108), ainsi que ses premiers et deuxièmes dérivés dans l'équation (2.106) conduit aux relations de récurrence

$$B_1 + \xi B_0 = 0, \tag{2.110}$$

$$B_2 + (\xi - \beta) B_1 + (1+\alpha)(\gamma - \alpha - 2) B_0 = 0, \tag{2.111}$$

$$B_{p+2} + [\xi - (p+1)\beta]\; B_{p+1} + (\gamma - \alpha - 2 - 2p)(p+1)(\alpha + p + 1) B_p = 0, \quad p \geq 1, \tag{2.112}$$

où $\xi = -\frac{1}{2}[\delta + \beta(1+\alpha)]$ et chaque coefficient B_p est un polynôme de degré p en ξ.

A partir des expressions de récurrence (2.110), (2.111) et (2.112), la fonction $v(r_1)$, donnée par l'équation (2.108), devient une solution polynomiale de degré n si et seulement si [37]

$$\gamma - \alpha - 2 = 2n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{et} \qquad B_{n+1} = 0. \tag{2.113}$$

Nous notons que dans le cas des solutions polynomiales, il y a au plus $n+1$ valeurs convenables de ξ qui sont les racines de B_{n+1} et représentent également les valeurs propres correspondant aux solutions de l'équation BCH (2.104).

D'autre part, afin de déterminer les coefficients B_p pour $p = 2, 3, \dots, n$, sous la condition (2.113), on peut facilement écrire les équations de récurrence (2.110), (2.111) et (2.112) sous forme matricielle comme $\mathbb{M} \times B = 0$, où B est défini par

$$B = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_{p-1} & B_p \end{pmatrix}^T, \tag{2.114}$$

et $\mathbb{M}$ est la matrice tridiagonale de degré $(n+1) \times (n+1)$

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \xi_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \xi_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \xi_4 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \gamma_{p-1} & \xi_p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_p & \xi_{p+1} \end{pmatrix}, \tag{2.115}$$

où les facteurs, ξ_p et γ_p, de la matrice $\mathbb{M}$ sont écrits comme

$$\xi_p = \xi - (p+1)\beta, \quad p = 1, \dots, n+1, \tag{2.116}$$

$$\gamma_p = 2\,(n-p)\,(p+1)(\alpha + p + 1), \quad p = 1, \dots, n. \tag{2.117}$$

Par conséquent, les $n+1$ racines de B_{n+1} peuvent être déterminées en résolvant le déterminant de la matrice $\mathbb{M}$ définie ci-dessus. A cet effet, nous notons ses racines indépendantes par ξ_μ^n $(0 \leq \mu \leq n)$. Lorsque $p = n$, les n racines peuvent être déterminées en résolvant le déterminant d'ordre $p \times p$ de la matrice M définie ci-dessous

$$\det \mathbb{M} = \begin{Vmatrix} \xi_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \xi_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \xi_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \xi_4 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \gamma_{n-1} & \xi_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_n & \xi_{n+1} \end{Vmatrix} = 0. \tag{2.118}$$

En fait, ce déterminant peut être calculé en utilisant la décomposition inférieure-supérieure $\mathbb{M} = \mathbb{V} \times \mathbb{X} = 0$, de sorte que

$$\det \mathbb{M} = \det \mathbb{V} \times \det \mathbb{X} = 0, \tag{2.119}$$

où $\mathbb{V}$ est la matrice triangulaire inférieure

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v_{n+1} & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.120}$$

et $\mathbb{X}$ est la matrice triangulaire supérieure

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \xi_1 - v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 - v_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 - v_3 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \xi_n - v_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_{n+1} - v_{n+1} \end{pmatrix}, \tag{2.121}$$

tel que

$$v_1 = 0 \quad \text{et} \quad v_{i+1} = \frac{\gamma_i}{\xi_i - v_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \tag{2.122}$$

Puisque les deux matrices $\mathbb{V}$ et $\mathbb{X}$ sont des matrices triangulaires, chaque déterminant est égal au produit des éléments de la diagonale principale. Par conséquent, il vient que

$$\det \mathbb{V} = 1 \qquad \text{et} \qquad \det \mathbb{X} = \xi_1 \left(\xi_2 - v_2\right) \dots \left(\xi_{n+1} - v_{n+1}\right).$$

Des calculs simples montrent que $\det \mathbb{M}$ est réécrit comme

$$\begin{aligned} \det \mathbb{M} &= \xi_1 \times \left[\xi_2 - \frac{\gamma_1}{\xi_1}\right] \times \left[\xi_3 - \frac{\gamma_2}{\xi_2 - v_2}\right] \times \dots \times \left[\xi_{n+1} - \frac{\gamma_n}{\xi_n - v_n}\right]. \\ &= \xi_1 \times \left[\xi_2 - \frac{\gamma_1}{\xi_1}\right] \times \left[\xi_3 - \frac{\gamma_2}{\xi_2 - \frac{\gamma_1}{\xi_1}}\right] \times \left[\xi_4 - \frac{\gamma_3}{\xi_3 - \frac{\gamma_2}{\xi_2 - \frac{\gamma_1}{\xi_1}}}\right] \times \dots \end{aligned}$$

Pour plus de simplification, nous introduisons les nouveaux paramètres $s_i, i = 0, \ldots, n+1$, comme suit

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, \\ s_1 &= \xi_1, \\ \vdots &= \vdots \\ s_{i+1} &= \xi_{i+1} s_i - \gamma_i s_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\det \mathbb{M} = s_1 \times \frac{s_2}{s_1} \times \frac{s_3}{s_2} \times \ldots \times \frac{s_n}{s_{n-1}} \times \frac{s_{n+1}}{s_n} = s_{n+1}. \tag{2.123}$$

Il est clair que s_{n+1} est un polynôme d'ordre $n+1$ en ξ et la condition $\det \mathbb{M} = 0$ nous permet de donner les $n+1$ racines indépendantes ξ_μ^n $(0 \leq \mu \leq n)$ de B_{n+1}. Autrement dit, une fois ces racines déterminées, les coefficients B_p, $p = 2, \ldots, n$, ne peuvent être déterminées que pour elles. Sinon, $B_p = 0$, $p = 2, \ldots, n$, parce que $\det \mathbb{M} \neq 0$, i.e. la matrice M sera inversible.

Puisque $1+\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors toutes les racines $\xi_\mu^n, 0 \leq \mu \leq n$, de B_{n+1} sont réelles [37]. Nous mentionnons ici que, ces valeurs discrètes de $\xi_\mu^n, 0 \leq \mu \leq n$, ne correspondront qu'à des valeurs discrètes de A_3 dans le potentiel $V_0(r)$. Une fois ces racines déterminées, la forme polynomiale explicite des solutions de l'équation (2.106), qui dépend de trois nombres quantiques (n, l, m), peut être écrite comme

$$v_{n,l,m}(r_1) = N(\alpha, \beta, \alpha + 2(n+1), \delta_\mu^n; r_1) = \sum_{p=0}^{n} \frac{B_p}{(1+\alpha)_p} \frac{r_1^p}{p!}, \tag{2.124}$$

où $\xi_\mu^n = -\frac{1}{2}[\delta_\mu^n + \beta\,(1+\alpha)],\ 0 \leq \mu \leq n.$

Ainsi, la fonction d'onde radiale est simplement donnée par

$$U_{n,l,m}(r_1) = r_1^{\frac{1+\sqrt{4q_4+1}}{2}} \exp\left[\frac{q_2 r_1 - r_1^2}{2}\right] \sum_{p=0}^{n} \frac{B_p}{(1+\alpha)_p} \frac{r_1^p}{p!}, \quad n, l, m = 0, 1, \ldots, \tag{2.125}$$

où $r_1 = [2A_0(E_{n,l,m} + M)]^{\frac{1}{4}}\, r, B_0 = 1,\ B_1 = -\xi_\mu^n$ et, pour $p = 2, 3, \ldots, n$, B_p est un polynôme de degré p en ξ_μ^n défini par les relations de récurrence (2.111)-(2.112).

De plus, grâce aux formes (2.103), (2.107) et la condition (2.113), on peut déterminer les niveaux d'énergie comme suit

$$E_{n,l,m}^{2} - M^{2} + (E_{n,l,m} + M)\left(\frac{A_{1}^{2}}{2A_{0}} - 2A_{2}\right) - 2\sqrt{2A_{0}(E_{n,l,m} + M)} \times \left[n + 1 + \sqrt{2A_{4}(E_{n,l,m} + M) + \lambda + \frac{1}{4}}\right] = 0, \tag{2.126}$$

où λ est donnée par l'équation (2.68) pour le cas particulier et par l'équation (2.85) pour le cas général.

2.4.4 Etats liés de Dirac et valeurs propres associées

Comme dernier point, les états liés de l'équation de Dirac (2.1) sont exprimés par

$$\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) = [2A_{0}(E_{n,l,m} + M)]^{\frac{1}{4}}\, r_{1}^{\frac{-1+\sqrt{4q_{4}+1}}{2}} \exp\left[\frac{q_{2}r_{1} - r_{1}^{2}}{2}\right] H_{l}(\theta)\; K_{m}(\phi) \times \sum_{p=0}^{n} \frac{B_{p}}{(1+\alpha)_{p}} \frac{r_{1}^{p}}{p!} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_{n,l,m}+M} \end{pmatrix}, \qquad n,l,m = 0,1,\ldots, \tag{2.127}$$

où $r_{1} = [2A_{0}(E_{n,l,m} + M)]^{\frac{1}{4}}\, r$, tandis que $H_{l}(\theta)$ et $K_{m}(\phi)$ sont, respectivement, les solutions polynomiales des équations (2.27) et (2.28).

Les niveaux d'énergie dans le cas particulier sont données par

$$E_{n,l,m}^{2} - M^{2} - 2\sqrt{2A_{0}(E_{n,l,m} + M)}\left[n + 1 + \sqrt{2(E_{n,l,m} + M)\left[A_{4} - a_{1}\right] + \left(l + \frac{1}{2}\right)^{2}}\right] + (E_{n,l,m} + M)\left(\frac{A_{1}^{2}}{2A_{0}} - 2A_{2}\right) = 0, \tag{2.128}$$

avec la contrainte $a_{2} = a_{3} = a_{4} = 0$, tandis que dans le cas général ils prennent la forme

$$E_{n,l,m}^{2} - M^{2} - 2\sqrt{2A_{0}(E_{n,l,m} + M)}\left[n + 1 + \sqrt{2(E_{n,l,m} + M)\left[A_{4} - a_{1} - a_{3}\right] + \left(l + \frac{1}{2}\right)^{2}}\right] + (E_{n,l,m} + M)\left(\frac{A_{1}^{2}}{2A_{0}} - 2A_{2}\right) = 0, \tag{2.129}$$

où la contrainte est $a_{2} + a_{3} + a_{4} = 0$.

2.5 Résultats numériques

Dans cette section, afin que notre étude soit plus précise et exhaustive, nous déterminons explicitement la fonction d'onde et les niveaux d'énergie pour certaines valeurs des nombres quantiques n, l et m dans un cadre numérique. Comme première étape dans cette direction, nous calculons les polynômes B_n ainsi que les solutions correspondantes $U_{n,l,m}(r)$ pour certaines valeurs de n. A partir de l'équation (2.125), la forme explicite de $U_{n,l,m}(r)$, pour $n = 1, 2, 3, 4$ et $\forall\ l, m$, est donnée par

$$\begin{aligned}
U_{0,l,m}(r) &= r_1^{\frac{1+\sqrt{4q_4+1}}{2}} \exp\left[\frac{q_2 r_1 - r_1^2}{2}\right], \\
U_{1,l,m}(r) &= r_1^{\frac{1+\sqrt{4q_4+1}}{2}} \left[1 + \frac{B_1}{1+\alpha} r_1\right] \exp\left[\frac{q_2 r_1 - r_1^2}{2}\right], \\
U_{2,l,m}(r) &= r_1^{\frac{1+\sqrt{4q_4+1}}{2}} \left[1 + \frac{B_1}{1+\alpha} r_1 + \frac{B_2}{2!(1+\alpha)(2+\alpha)} r_1^2\right] \exp\left[\frac{q_2 r_1 - r_1^2}{2}\right], \\
U_{3,l,m}(r) &= r_1^{\frac{1+\sqrt{4q_4+1}}{2}} \left[1 + \frac{B_1}{1+\alpha} r_1 + \frac{B_2}{2!(1+\alpha)(2+\alpha)} r_1^2 + \frac{B_3}{3!(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)} r_1^3\right] \\
&\quad \times \exp\left[\frac{q_2 r_1 - r_1^2}{2}\right], \\
U_{4,l,m}(r) &= r_1^{\frac{1+\sqrt{4q_4+1}}{2}} \left[1 + \frac{B_1}{1+\alpha} r_1 + \frac{B_2}{2!(1+\alpha)(2+\alpha)} r_1^2 + \frac{B_3}{3!(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)} r_1^3\right. \\
&\quad \left. + \frac{B_4}{4!(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)(4+\alpha)} r_1^4\right] \exp\left[\frac{q_2 r_1 - r_1^2}{2}\right],
\end{aligned}$$

où les polynômes B_n, $n = 1, 2, 3, 4$, prenant en compte les formules de récurrence (2.110)-(2.112), sont exprimés sous la forme

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1, \\
B_1 &= -\xi, \\
B_2 &= \xi^2 - \beta\xi - (1+\alpha)(\gamma - \alpha - 2), \\
B_3 &= -\xi^3 + 3\beta\xi^2 - \left[2\beta^2 - \sum_{i=1}^{2} i(\gamma - \alpha - 2i)(i+\alpha)\right] \xi - 2\beta(1+\alpha)(\gamma - \alpha - 2), \\
B_4 &= \xi^4 - 6\beta\xi^3 + \left[11\beta^2 - \sum_{i=1}^{3} i(\gamma - \alpha - 2i)(i+\alpha)\right] \xi^2 - \beta \left[6\beta^2 + 4(\gamma - \alpha - 6)(3+\alpha)\right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{3} (i+4)(\gamma - \alpha - 2i)(i+\alpha)\right] \xi + 3(1+\alpha)(\gamma - \alpha - 2)\left[(\gamma - \alpha - 6)(3+\alpha) - 2\beta^2\right].
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous considérons le potentiel $V(r, \theta, \phi)$ qui prend la forme (2.10) dans les deux cas examinés. De plus, nous définissons $M = 1$, $A_0 = 1, A_1^2 = 4A_2$, $A_4 = a_1$ pour le cas particulier et $A_4 = a_1 + a_3$ pour le cas général. Ainsi, ces paramètres nous permettent d'écrire les niveaux d'énergie comme suit

$$E^3_{n,l,m} - E^2_{n,l,m} - E_{n,l,m} + 1 - 8\left[n + l + \frac{3}{2}\right]^2 = 0. \qquad (2.130)$$

Selon les expressions ci-dessus, nous présentons quelques valeurs explicites d'énergie discrète $E_{n,l,m}$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, $l = 0, 1, 2$ et $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
E_{0,0,m} &= E_0 &&= \frac{4}{9\sqrt[3]{\frac{\sqrt{681}}{3} + \frac{235}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{681}}{3} + \frac{235}{27}} + \frac{1}{3}, \\
E_{0,1,m} &= E_1 &&= \frac{4}{9\sqrt[3]{\frac{\sqrt{16475}}{\sqrt{27}} + \frac{667}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{16475}}{\sqrt{27}} + \frac{667}{27}} + \frac{1}{3}, \qquad \text{pour} \quad n + l = 1, \\
E_{0,2,m} &= E_2 &&= \frac{4}{9\sqrt[3]{\frac{\sqrt{64043}}{\sqrt{27}} + \frac{1315}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{64043}}{\sqrt{27}} + \frac{1315}{27}} + \frac{1}{3}, \qquad \text{pour} \quad n + l = 2, \\
E_{0,3,m} &= E_3 &&= \frac{4}{9\sqrt[3]{\sqrt{6513} + \frac{2179}{27}}} + \sqrt[3]{\sqrt{6513} + \frac{2179}{27}} + \frac{1}{3}, \qquad \text{pour} \quad n + l = 3, \\
E_{0,4,m} &= E_4 &&= \frac{4}{9\sqrt[3]{\frac{\sqrt{393371}}{\sqrt{27}} + \frac{3259}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{393371}}{\sqrt{27}} + \frac{3259}{27}} + \frac{1}{3}, \qquad \text{pour} \quad n + l = 4, \\
E_{0,5,m} &= E_5 &&= \frac{4}{9\sqrt[3]{\frac{\sqrt{768443}}{\sqrt{27}} + \frac{4555}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{768443}}{\sqrt{27}} + \frac{4555}{27}} + \frac{1}{3}, \qquad \text{pour} \quad n + l = 5, \\
E_{0,6,m} &= E_6 &&= \frac{4}{9\sqrt[3]{\frac{\sqrt{151475}}{\sqrt{3}} + \frac{6067}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{151475}}{\sqrt{3}} + \frac{6067}{27}} + \frac{1}{3}, \qquad \text{pour} \quad n + l = 6.
\end{aligned}$$

Pour le cas général, nous définissons $A_0 = A_2 = 1$, $A_1 = 2$ et $A_4 = a_1 + a_3 = \frac{1}{2}$ avec les contraintes $a_2 + a_3 + a_4 = 0$ et $c_0 + c_1 + d_0 = 0$. Alors, le potentiel $V(r, \theta, \phi)$, donné par la forme (2.10), est réécrit comme

$$V(r, \theta, \phi) = r^2 + 2r + 1 + \frac{A_3}{r} + \frac{1}{2r^2} + \frac{V_1(\theta)}{r^2} + \frac{V_2(\phi)}{r^2 \sin^2\theta}, \qquad (2.131)$$

où $V_1(\theta)$ et $V_2(\phi)$ sont, respectivement, donnés par l'équation (2.12) et (2.13).

Ensuite, sous la condition $\gamma - \alpha - 2 = 2n$, on détermine différentes valeurs numériques d'énergie $E_{n,l,m}$ et ξ^n_μ, $0 \leq \mu \leq n$, qui sont les racines de $B_{n+1}, n = 1, 2, 3, 4$, comme indiqué dans les tableaux 1, 2 et 3.

Tableau 1. Valeurs d'énergies $E_{n,l,m}$ et des racines ξ_μ^n, $0 \le \mu \le n$, pour $l = 0$ et $n = 1, 2, 3, 4$.

Valeurs de n	Valeurs de $E_{n,0,m}$	Valeurs de la racine ξ_μ^n
1	E_1	$-0.89431,\ 4.4727$
2	E_2	$-1.8606,\ 3.2846,\ 9.7580$
3	E_3	$-2.9270,\ 2.0448,\ 8.2995,\ 15.678$
4	E_4	$-4.1203,\ 0.75310,\ 6.7914,\ 13.974,\ 22.133$

Tableau 2. Valeurs d'énergies $E_{n,l,m}$ et des racines ξ_μ^n, $0 \le \mu \le n$, pour $l = 1$ et $n = 1, 2, 3, 4$.

Valeurs de n	Valeurs de $E_{n,1,m}$	Valeurs de la racine ξ_μ^n
1	E_2	$-1.5236,\ 5.2508$
2	E_3	$-3.1228,\ 3.5457,\ 11.124$
3	E_4	$-4.8164,\ 1.7799,\ 9.2243,\ 17.531$
4	E_5	$-6.6202,\ -5.3368 \times 10^{-2},\ 7.2724,\ 15.437,\ 24.405$

Tableau 3. Valeurs d'énergie $E_{n,l,m}$ et des racines ξ_μ^n, $0 \le \mu \le n$, pour $l = 2$ et $n = 1, 2, 3, 4$.

Valeurs de n	Valeurs de $E_{n,2,m}$	Valeurs de la racine ξ_μ^n
1	E_3	$-2.0383,\ 5.8874$
2	E_4	$-4.151,\ 3.7192,\ 12.291$
3	E_5	$-6.3518,\ 1.4871,\ 9.9740,\ 19.156$
4	E_6	$-8.6522,\ -0.81601,\ 7.6019,\ 16.683,\ 26.437$

Enfin, après avoir déterminé les valeurs de ξ_μ^n, $0 \le \mu \le n$, nous pouvons facilement donner la forme explicite des fonctions d'onde $\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi)$ et les niveaux d'énergie correspondants $E_{n,l,m}$ pour différentes valeurs de n, l et m :

1. ***Pour*** $\boldsymbol{n = l = m = 0}$, on trouve

$$\psi_{0,0,0}\,(r, \theta, \phi) = [2(E_0 + 1)]^{\frac{1}{4}} \exp\left[-[2(E_0+1)]^{\frac{1}{4}} r_1 - \frac{1}{2} r_1^2\right] \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_0+1} \end{pmatrix}, \qquad E_{0,0,0} = E_0,$$

de sorte que les contraintes sur les paramètres sont les suivantes

$$a_2+a_3+a_4 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_0+a_1+a_4-b_1-c_1 = 0, \quad b_0+b_1+d_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_0+c_1+d_0 = 0.$$

2. ***Pour $n = 1$ et $l = m = 0$:***

— Dans le cas $\xi \approx -0.89431$, on a

$$\psi_{1,0,0}(r,\theta,\phi) \approx [2(E_1+1)]^{\frac{1}{4}}\,[1+0.44716\,r_1]\exp\left[-[2(E_1+1)]^{\frac{1}{4}}r_1-\frac{1}{2}r_1^2\right]\begin{pmatrix}1\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_1+1}\end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, le niveau d'énergie est $E_{1,0,0} = E_1$ et les contraintes sont les mêmes que ci-dessus, i.e.

$$a_2+a_3+a_4=0,\quad a_5=0,\quad a_0+a_1+a_4-b_1-c_1=0,\quad b_0+b_1+d_0=0 \quad \text{et} \quad c_0+c_1+d_0=0.$$

3. ***Pour $n = l = 1$ et $m = 2$:***

— Lorsque nous posons $\xi \approx -1.5236$, nous obtenons

$$\psi_{1,1,2}(r,\theta,\phi) \approx [2(E_2+1)]^{\frac{1}{4}}\left[r_1+0.50787r_1^2\right]\exp\left[-[2(E_2+1)]^{\frac{1}{4}}r_1-\frac{1}{2}r_1^2\right]H_1(\theta)$$
$$\times\left(\sin^2(k\phi)-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_2+1}\end{pmatrix}.$$

Le niveau d'énergie correspondant est $E_{1,1,2} = E_2$ et les contraintes sont

$$a_2+a_3+a_4=0,\quad 2(E_2+1)[a_0+a_1+a_4-b_1-c_1]+k^2=0,\quad (E_2+1)a_5=\mp\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$b_0+b_1+d_0=0 \quad \text{et} \quad c_0+c_1+d_0=0.$$

4. ***Pour $n = 2$, $l = 1$ et $m = 2$:***

— Si on laisse $\xi \approx 11.124$, on obtient

$$\psi_{2,1,2}(r,\theta,\phi) \approx [2(E_3+1)]^{\frac{1}{4}}\left[r_1-2.781\,r_1^2+1.6232\,r_1^3\right]\exp\left[-[2(E_3+1)]^{\frac{1}{4}}r_1-\frac{1}{2}r_1^2\right]$$
$$\times H_1(\theta)\left(\sin^2(k\phi)-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_3+1}\end{pmatrix},\qquad E_{2,1,2}=E_3,$$

où les contraintes sur les paramètres sont

$$a_2+a_3+a_4=0,\quad 2(E_3+1)[a_0+a_1+a_4-b_1-c_1]+k^2=0,\quad (E_3+1)a_5=\mp\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$b_0+b_1+d_0=0 \quad \text{et} \quad c_0+c_1+d_0=0.$$

5. ***Pour $n = l = 2$ et $m = 3$:***

— Lorsque $\xi \approx -4.151$, il vient que

$$\psi_{2,2,3}(r,\theta,\phi) \approx [2(E_4+1)]^{\frac{1}{4}} \left[r_1^2 + 0.69183\, r_1^3 + 0.11476\, r_1^4\right] \exp\left[-[2(E_4+1)]^{\frac{1}{4}} r_1 - \frac{1}{2} r_1^2\right]$$

$$\times H_2(\theta) \left(\sin^3(k\phi) - \frac{3}{4}\sin(k\phi)\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_4+1} \end{pmatrix}, \qquad E_{2,2,3} = E_4,$$

tel que, pour les racines $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \mp\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, on obtient les contraintes suivantes

$$a_2 + a_3 + a_4 = 0, \quad 2(E_4+1)[a_0 + a_1 + a_4 - b_1 - c_1] + 9k^2 = 0, \quad a_5 = 0, \quad b_0 + b_1 + d_0 = 0$$

et $\quad c_0 + c_1 + d_0 = 0.$

6. ***Pour $n = 3$, $l = 1$ et $m = 2$:***

— Si on prend $\xi \approx 9.2243$, on peut obtenir

$$\psi_{3,1,2}(r,\theta,\phi) \approx [2(E_4+1)]^{\frac{1}{4}} \left[r_1 - 2.3061\, r_1^2 + 0.61558\, r_1^3 + 0.46739\, r_1^4\right] \left(\sin^2(k\phi) - \frac{1}{2}\right)$$

$$\times \exp\left[-[2(E_4+1)]^{\frac{1}{4}} r_1 - \frac{1}{2} r_1^2\right] H_1(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_4+1} \end{pmatrix}, \qquad E_{3,1,2} = E_4.$$

Les contraintes correspondantes sont les suivantes

$$a_2 + a_3 + a_4 = 0, \quad 2(E_4+1)[a_0 + a_1 + a_4 - b_1 - c_1] + k^2 = 0, \quad (E_4+1)a_5 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$b_0 + b_1 + d_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_0 + c_1 + d_0 = 0.$$

7. ***Pour $n = 3$, $l = 2$ et $m = 3$:***

— Quand on prend $\xi \approx -6.3518$, on obtient

$$\psi_{3,2,3}(r,\theta,\phi) \approx [2(E_5+1)]^{\frac{1}{4}} \left[r_1^2 + 1.0586\, r_1^3 + 0.35754\, r_1^4 + 0.03868\, r_1^5\right] H_2(\theta)$$

$$\times \exp\left[-[2(E_5+1)]^{\frac{1}{4}} r_1 - \frac{1}{2} r_1^2\right] \left(\sin^3(k\phi) - \frac{3}{4}\sin(k\phi)\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_5+1} \end{pmatrix}.$$

Le niveau d'énergie correspondant est $E_{3,2,3} = E_5$ et, pour la racine $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{22}}{8}, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{22}}{8}\right)$, les contraintes prennent la forme

$$a_2 + a_3 + a_4 = 0, \quad 2(E_5+1)[a_0 + a_1 + a_4 - b_1 - c_1] + 9k^2 = 0, \quad (E_5+1)a_5 = -\frac{\sqrt{22}}{2},$$

$$b_0 + b_1 + d_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_0 + c_1 + d_0 = 0.$$

8. ***Pour $n = 4$, $l = 1$ et $m = 2$:***

— Si on pose $\xi \approx 24.405$, on trouve

$$\psi_{4,1,2}(r,\theta,\phi) \approx [2(E_5+1)]^{\frac{1}{4}} \left[r_1 - 6.1013\, r_1^2 + 11.623\, r_1^3 - 8.5021\, r_1^4 + 2.0661\, r_1^5\right] H_1(\theta)$$
$$\times \exp\left[-[2(E_5+1)]^{\frac{1}{4}} r_1 - \frac{1}{2} r_1^2\right] \left(\sin^2(k\phi) - \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_5+1} \end{pmatrix}, \quad E_{4,1,2} = E_5,$$

avec les contraintes correspondantes

$$a_2 + a_3 + a_4 = 0, \quad 2(E_5+1)[a_0 + a_1 + a_4 - b_1 - c_1] + k^2 = 0, \quad (E_5+1)a_5 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$b_0 + b_1 + d_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_0 + c_1 + d_0 = 0.$$

9. ***Pour $n = 4$, $l = 2$ et $m = 3$:***

— Dans le cas $\xi \approx -0.81601$, on obtient

$$\psi_{4,2,3}(r,\theta,\phi) \approx [2(E_6+1)]^{\frac{1}{4}} \left[r_1^2 + 0.136\, r_1^3 - 0.52343\, r_1^4 - 0.23174\, r_1^5 - 0.026762\, r_1^6\right] H_2(\theta)$$
$$\times \exp\left[-[2(E_6+1)]^{\frac{1}{4}} r_1 - \frac{1}{2} r_1^2\right] \left(\sin^3(k\phi) - \frac{3}{4}\sin(k\phi)\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_6+1} \end{pmatrix}.$$

Le niveau d'énergie correspondant $E_{4,2,3} = E_6$ et, pour la racine $\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{22}}{8}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{22}}{8}\right)$, les contraintes s'écrivent comme

$$a_2 + a_3 + a_4 = 0, \quad 2(E_6+1)[a_0 + a_1 + a_4 - b_1 - c_1] + 9k^2 = 0, \quad (E_6+1)a_5 = \frac{\sqrt{22}}{2},$$

$$b_0 + b_1 + d_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_0 + c_1 + d_0 = 0.$$

Nous précisons que $r_1 = [2A_0(E_{n,l,m} + M)]^{\frac{1}{4}}\, r$, $H_1(\theta)$ est donné par les équations (2.91)-(2.92) et $H_2(\theta)$ est donné par les équations (2.95)-(2.97).

CHAPITRE 3

SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU

3.1 Introduction

En raison de l'énorme quantité d'informations précieuses fournies par les équations d'onde relativistes, notamment en ce qui concerne le mouvement des particules, l'étude de ce type d'équation est devenue l'un des plus grands défis pour les chercheurs, et qui s'efforcent actuellement de découvrir tous les mystères à son sujet et de déchiffrer ses secrets. Parmi les plus importantes de ces équations qui ont fait l'objet d'études approfondies, outre l'équation de Dirac, se trouve l'équation de DKP. Cette dernière, jouissant d'une richesse pas capable d'être exprimée dans les théories de KG et Proca. En fait, l'équation de DKP est l'une des équations différentielles les plus difficiles et les plus complexes et qui a dérouté de nombreux chercheurs depuis son apparition. En conséquence, à la fin des années 1950, elle a été abandonnée et laissée sans étude, alors qu'elle ne conservait que ses formules générales pour décrire les particules de spin-0 et de spin-1.

Au cours des dernières années, l'équation de DKP a connu un intérêt renouvelé et croissant, ainsi qu'elle est devenue une source d'attraction pour de nombreux chercheurs, non seulement pour les physiciens, mais même pour les mathématiciens. Cet intérêt s'est reflété dans son occupation d'un vaste espace d'étude, qui à son tour a ouvert de multiples perspectives de recherches qui ont conduit à l'émergence d'une série d'études variées exclusivement basées sur elle [55, 56, 57]. Pour n'en nommer que quelques-uns, certains articles se sont concentrés sur l'étude de quelques propriétés liées à cette équation [58, 59], tandis que d'autres se sont concentrés sur la discussion de ses différents aspects tels que le couplage électromagnétique et l'hermiticité dans la théorie de DKP [60, 61] et le concept d'oscillateur de DKP [62]. Malgré tous les efforts qui ont été faits et qui sont encore faits, certains sujets sont encore très débattus, constituant ainsi un obstacle majeur au développement du processus de recherche scientifique. Parmi ces sujets, nous trouvons la question d'équivalence entre l'équation de DKP et l'équation de KG. Cette question est considérée comme l'un des sujets les plus ressentis et les plus controversés. En fait, des études précédentes ont conclu qu'il existe une équivalence parfaite entre ces deux équations, à l'exception d'un cas, le cas des particules libres. Fainberg et al. [63], dans le but de rétablir cette équivalence, ont montré son existence dans le cas de particules scalaires chargées interagissant de manière minimale avec un champ électromagnétique externe ou quantifié, en s'appuyant sur les éléments de la matrice S et les formules de réduction LSZ (Lehmann-Symanzik-Zimmermann). Malheureusement, peu d'articles ont été publiés sur ce sujet, ce qui a laissé beaucoup de place pour une étude et une exploration plus approfondie. Sur la question de la recherche de solutions à l'équation de DKP, qui fait également partie des sujets importants qui doivent être étudiés plus en profondeur, des contributions considérables ont été apportées à cet égard. Ces contributions comprenaient divers aspects, parmi lesquels nous mentionnons, le cas de masse constante sous différents types de potentiels [64, 65], le cas de masse dépendant du temps [66], dans le contexte de dimensions courbes et arbitraires de l'espace-temps [67, 68]. De son côté, Lunardi a conclu que l'équation de DKP restreinte à un espace-temps de dimension $(1 + 1)$ n'admet qu'une représentation irréductible de spin-0 [69].

L'objectif de ce chapitre est d'étudier et de résoudre l'équation de DKP pour les particules de spin-0 et de spin-1 dans toutes les dimensions. Dans la section 3.2, nous étudions l'équation de DKP pour les particules de spin-0 dans toutes les dimensions. Au cours de celle-ci, une relation explicite est établie entre l'équation de DKP et l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique. Conformément à cette relation, nous calculons la solution du type Volkov de l'équation de DKP dans un champ d'une onde électromagnétique plane comme première application pratique. Quant à la deuxième application, nous déterminons analytiquement les solutions de l'équation de DKP pour un puits de potentiel carré avec une masse dépendante de la position, comme calculé dans la référence [16]. La section 3.3 est consacrée à l'étude de l'équation de DKP pour les particules de spin-1 en toutes dimensions. Plus précisément, nous prouvons en dimensions $(1+1)$, comme dans le cas des particules de spin-0, l'existence d'une relation explicite entre l'équation de DKP et l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique. Comme application directe, la solution de l'équation de DKP pour un puits de potentiel carré avec une masse dépendante de la position est déterminée [16]. Pour les dimensions $(1+2)$, nous montrons que résoudre l'équation de DKP dans un champ électromagnétique équivaut à que résoudre un système d'équations différentielles du second ordre à trois composantes. A titre d'applications, nous prouvons, dans le cas des particules libres, que toutes les composantes de la solution de l'équation de DKP sont des solutions de l'équation de KG et nous essayons également de calculer la solution du type Volkov pour le système de trois équations différentielles. En adaptant une approche similaire aux dimensions $(1+2)$, nous étudions les dimensions $(1+3)$. Dans ces dimensions, nous montrons que résoudre l'équation de DKP équivaut à résoudre un système d'équations différentielles du second ordre à quatre composantes. Il convient de noter ici que la partie relative à l'étude de l'équation de DKP pour les particules de spin-0 et de spin-1 à $(1+1)$ dimensions en présence d'une interaction électromagnétique fait l'objet de notre article publié [15].

3.2 Equation de DKP pour les particules de spin-0

Dans cette section, nous étudierons l'équation de DKP pour les particules de spin-0 à $(1+3)$ dimensions et prouverons, à travers elle, l'existence d'une relation explicite entre l'équation de DKP et l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique. Cette étude comprendra également l'adoption de deux applications différentes.

L'équation de DKP pour les particules de spin-0 à $(1+3)$ dimensions en présence d'une interaction électromagnétique est exprimée

$$\left[i\beta^0\mathcal{D}_0 + i\beta^1\mathcal{D}_1 + i\beta^2\mathcal{D}_2 + i\beta^3\mathcal{D}_3 - m\right]\psi = 0, \tag{3.1}$$

où $\mathcal{D}_\mu$, $\mu = 0,1,2,3$, est la dérivée covariante, m est la masse de la particule, ψ est la fonction d'onde de DKP et β^μ sont des matrices 5×5 données par

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta^i = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \rho_i \\ -\rho_i^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,3 \tag{3.2}$$

avec

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

$\bar{0}, \tilde{0}$ et $\mathbf{0}$ sont des matrices nulles de dimensions 2×3, 2×2 et 3×3, respectivement, et ρ^T représente la matrice transposée de ρ. Pour la fonction d'onde de DKP ψ qui prend la forme

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)^T,$$

l'équation (3.1), peut être écrit sous forme d'un système de cinq équations différentielles du premier ordre couplées comme indiqué ci-dessous

$$\begin{cases} i\mathcal{D}_0\psi_2 - i\mathcal{D}_1\psi_3 - i\mathcal{D}_2\psi_4 - i\mathcal{D}_3\psi_5 - m\psi_1 = 0, & (3.5) \\ i\mathcal{D}_0\psi_1 - m\psi_2 = 0, & (3.6) \\ i\mathcal{D}_1\psi_1 - m\psi_3 = 0, & (3.7) \\ i\mathcal{D}_2\psi_1 - m\psi_4 = 0, & (3.8) \\ i\mathcal{D}_3\psi_1 - m\psi_5 = 0. & (3.9) \end{cases}$$

A partir de ce système, nous remarquons que les cinq composantes $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)$ ne sont pas indépendantes les unes des autres.

Des équations (3.6)-(3.9), on peut facilement remarquer que les composantes ψ_2, ψ_3, ψ_4 et ψ_5 dépendent de la composante ψ_1 par les relations suivantes

$$\begin{cases} \psi_2 = \dfrac{i}{m}\mathcal{D}_0\psi_1, & (3.10) \\ \psi_3 = \dfrac{i}{m}\mathcal{D}_1\psi_1, & (3.11) \\ \psi_4 = \dfrac{i}{m}\mathcal{D}_2\psi_1, & (3.12) \\ \psi_5 = \dfrac{i}{m}\mathcal{D}_3\psi_1. & (3.13) \end{cases}$$

En remplaçant chacune des composantes ψ_2, ψ_3, ψ_4 et ψ_5, trouvées dans le système d'équations (3.10)-(3.13), dans l'équation (3.5), il vient que

$$\left[\mathcal{D}_0^2 - \mathcal{D}_1^2 - \mathcal{D}_2^2 - \mathcal{D}_3^2 + m^2\right]\psi_1 = 0, \tag{3.14}$$

qui n'est autre que l'équation de KG en présence d'un champ électromagnétique pour la composante ψ_1.

Les résultats obtenus jusqu'à présent sur l'équation de DKP pour les particules de spin-0 à $(1+3)$ dimensions peuvent être résumés dans un cadre plus fonctionnel, en les présentant dans des formes compactes. Plus précisément, le système d'équations (3.5)-(3.9) est écrit sous forme compacte comme suit

$$\begin{cases} i\mathcal{D}^{\mu}\psi_{\mu+2} - m\psi_1 = 0, & (3.15) \\ i\mathcal{D}_{\mu}\psi_1 - m\psi_{\mu+2} = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, & (3.16) \end{cases}$$

tandis que la forme compacte du système d'équations (3.10)-(3.13) est

$$\psi_{\mu+2} = \frac{i}{m}\mathcal{D}_{\mu}\psi_1, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{3.17}$$

Il s'ensuit également que la composante ψ_1 satisfait l'équation de KG en présence d'un champ électromagnétique qui prend la forme compacte

$$(\mathcal{D}^{\mu}\mathcal{D}_{\mu} + m^2)\psi_1 = 0. \tag{3.18}$$

Maintenant, nous présentons quelques points intéressants qui peuvent être extraits en ce qui concerne la résolution de l'équation de DKP pour les particules de spin-0 à $(1+3)$ dimensions. Grâce aux équations (3.5)-(3.9) et (3.14), nous pouvons facilement montrer la relation explicite entre l'équation de DKP et l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique. Plus précisément, la fonction d'onde ψ est solution de l'équation de DKP (3.1) si et seulement si la composante ψ_1 est solution de l'équation de KG (3.14) et les composantes ψ_2, ψ_3, ψ_4 et ψ_5 sont également solutions de l'équation de KG données par le système d'équations (3.10)-(3.13), i.e.

- Si la composante ψ_1 est une solution de l'équation de KG (3.14), alors la solution de l'équation de DKP (3.1) est donnée par la fonction d'onde ψ où les composantes ψ_2, ψ_3, ψ_4 et ψ_5 sont données par le système d'équations (3.10)-(3.13).
- Inversement, si la fonction d'onde ψ est une solution de l'équation de DKP (3.1), où les composantes ψ_2, ψ_3, ψ_4 et ψ_5 sont données par le système d'équations (3.10)-(3.13), alors la composante ψ_1 est la solution de l'équation de KG (3.14).

Par conséquent, on peut conclure que toutes les composantes de la solution de l'équation de DKP pour les particules de spin-0 à $(1+3)$ dimensions sont des solutions de l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique.

Remarque 3.2.1. *Cette relation explicite entre l'équation de DKP et l'équation de KG, est établie de la même manière pour les dimensions* $(1+2)$ *et* $(1+1)$.

Les résultats exceptionnels que nous avons obtenus dans cette partie, indiquent une nouvelle contribution scientifique qui va changer le point de vue de nombreux chercheurs et répondre à une partie des questions qui ont suscité une large controverse. Plus précisément, nos résultats jettent un éclairage nouveau sur l'existence d'équivalence, qui est une relation explicite, entre l'équation de DKP pour les particules de spin-0 en toutes dimensions et l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique, et donc ces résultats vont au-delà des travaux précédents. Ces derniers, suggèrent que l'équation de DKP même si contient une description des particules de spin-0, mais elle n'est pas complètement équivalente à celle de KG sauf dans le cas où l'interaction est absente. Alors, nos résultats fournissent désormais une preuve claire et explicite que, pour les particules de spin-0 en toutes dimensions, l'équivalence entre les deux équations DKP et KG existe même en présence de l'interaction et pas seulement en son absence.

Afin d'enrichir nos résultats, nous les attacherons à deux applications pratiques et différentes, ce qui fera l'objet de la sous-section suivante.

3.2.1 Applications

3.2.1.1 Solution du type Volkov

Le processus de recherche de solutions analytiques exactes des équations d'onde relativistes des particules chargées est d'une grande importance, car il aide les chercheurs à considérer leur interaction au-delà du régime perturbatif. Les solutions Volkov, étant les solutions exactes de l'équation de Dirac, sont le meilleur exemple de telles solutions et qui ont longtemps été un outil théorique important. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons, dans le cadre de la relation explicite entre l'équation de DKP et l'équation de KG, au calcul d'une solution du type Volkov de l'équation de DKP (3.1) pour les particules de spin-0 dans un champ d'une onde électromagnétique plane. Ainsi, notre étude sera un autre résultat prometteur à travers lequel nous pourrons étendre l'espace des équations d'ondes relativistes sur lesquelles les solutions Volkov ont été appliquées.

Suivant cette logique, il convient de rappeler d'abord que la composante ψ_1, qui est la solution Volkov de l'équation de KG (3.14) dans un champ d'une onde électromagnétique plane, est défini

$$\psi_1 = Ce^{-ip\cdot x}F_1(\phi) \qquad \text{pour } \phi = k\cdot x, \tag{3.19}$$

où C est une constante de normalisation, p, x et k sont des quadrivecteurs constants, ϕ est une onde plane et $F_1(\phi)$ est la solution de l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$2i(kp)F_1'(\phi) + [-2e(pA) + e^2A^2]F_1(\phi) = 0. \tag{3.20}$$

Autrement dit

$$F_1'(\phi) = -i\left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]F_1(\phi), \tag{3.21}$$

ce qui implique que

$$F_1(\phi) = \exp\left(-i\int_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\phi\right). \tag{3.22}$$

En substituant l'équation (3.19) dans le système d'équations (3.10)-(3.13), on obtient

$$\begin{cases} \psi_1 = C\exp\{-iS\}, & (3.23)\\ \psi_2 = \dfrac{C}{m}\left[p_0 - eA_0 + \dfrac{ek_0}{(kp)}(pA) - \dfrac{e^2k_0}{2(kp)}A^2\right]\exp\{-iS\}, & (3.24)\\ \psi_3 = \dfrac{C}{m}\left[-p_1 + eA_1 - \dfrac{ek_1}{(kp)}(pA) + \dfrac{e^2k_1}{2(kp)}A^2\right]\exp\{-iS\}, & (3.25)\\ \psi_4 = \dfrac{C}{m}\left[-p_2 + eA_2 - \dfrac{ek_2}{(kp)}(pA) + \dfrac{e^2k_2}{2(kp)}A^2\right]\exp\{-iS\}, & (3.26)\\ \psi_5 = \dfrac{C}{m}\left[-p_3 + eA_3 - \dfrac{ek_3}{(kp)}(pA) + \dfrac{e^2k_3}{2(kp)}A^2\right]\exp\{-iS\}, & (3.27) \end{cases}$$

où S désigne l'action classique du système pour une particule se déplaçant dans le champ d'une onde électromagnétique plane et qui est donnée par

$$S = px + \int_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\phi.$$

Le système d'équations (3.23)-(3.27) peut être écrit sous forme compacte comme suit

$$\begin{cases} \psi_1 = C\exp\{-iS\},\\ \psi_{\mu+2} = \dfrac{1}{m}\left[p_\mu - eA_\mu + k_\mu\left(\dfrac{e}{(kp)}(pA) - \dfrac{e^2}{2(kp)}A^2\right)\right]\psi_1, \qquad \mu = 0,1,2,3. \end{cases}$$

Selon le système d'équations (3.23)-(3.27), on peut conclure que $\psi = (\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5)^T$ est une solution du type Volkov de l'équation de DKP pour les particules de spin-0 dans le champ d'une onde électromagnétique plane.

3.2.1.2 Equation de DKP pour un puits de potentiel carré avec une masse dépendante de la position

Dans le cadre de la relation explicite obtenue entre l'équation de DKP et l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique, nous adoptons dans cette partie la deuxième application pour déterminer les solutions de l'équation de DKP (3.1), mais cette fois pour un puits de potentiel carré avec une masse dépendante de la position comme ce qui a été appliqué en [16]. A cet égard, nous considérons d'abord l'équation de DKP pour les particules de spin-0 à $(1+1)$ dimensions

$$\left[i\beta^0\mathcal{D}_0 + i\beta^1\mathcal{D}_1 - m\right]\psi(t,x) = 0, \tag{3.28}$$

où $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ est la dérivée covariante, m est la masse de la particule, $\psi(t,x)$ est la fonction d'onde de DKP et β^0, β^1 sont des matrices 5×5 données par la relation (3.2).

L'équation (3.28) fournit le système d'équations différentielles du premier ordre couplées suivant

$$\begin{cases} i\mathcal{D}_0\psi_2 - i\mathcal{D}_1\psi_3 - m\psi_1 = 0, & (3.29)\\ i\mathcal{D}_0\psi_1 - m\psi_2 = 0, & (3.30)\\ i\mathcal{D}_1\psi_1 - m\psi_3 = 0, & (3.31)\\ -m\psi_4 = 0, & (3.32)\\ -m\psi_5 = 0, & (3.33)\end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \psi_2 = \dfrac{i}{m}\mathcal{D}_0\psi_1, & (3.34)\\ \psi_3 = \dfrac{i}{m}\mathcal{D}_1\psi_1, & (3.35)\\ \psi_4 = 0, & (3.36)\\ \psi_5 = 0. & (3.37)\end{cases}$$

La substitution des composantes ψ_2 et ψ_3 du système ci-dessus dans l'équation (3.29), donne

$$(\mathcal{D}_0^2 - \mathcal{D}_1^2 + m^2)\psi_1 = 0, \tag{3.38}$$

qui est l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique pour la composante ψ_1. Cela signifie qu'il existe une relation explicite entre l'équation de DKP et l'équation de KG dans le cas des particules de spin-0 à $(1+1)$ dimensions.

Afin d'appliquer la relation ci-dessus pour déterminer analytiquement les solutions de l'équation de DKP pour un puits de potentiel carré avec une masse dépendante de la position [16], nous devons prendre en compte le fait que la masse n'est pas constante dans l'équation (3.28), i.e.

$$\left[i\beta^0\mathcal{D}_0 + i\beta^1\mathcal{D}_1 - m(x)\right]\psi(t,x) = 0. \tag{3.39}$$

Il convient de noter ici que, dans la référence [16], la matrice β^3 a été utilisée au lieu de la matrice β^1 (ou la matrice β^2), ce qui est physiquement le même.

Selon cette logique, l'équation (3.38) prend la forme de l'équation du type KG modifiée suivante

$$\left[\mathcal{D}_0^2 - m(x)\mathcal{D}_1\left(\frac{1}{m(x)}\mathcal{D}_1\right) + m^2(x)\right]\psi_1(t,x) = 0. \tag{3.40}$$

Alors, pour les choix $eA_0 = V_0(x)$, $A_1 = 0$ et la composante $\psi_1(t,x) = e^{-iEt}\varphi_1(x)$, l'équation ci-dessus devient

$$\left[m(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}\right) + \left[E - V_0(x)\right]^2 - m^2(x)\right]\varphi_1(x) = 0. \tag{3.41}$$

Ici, $V_0(x)$ et $m(x)$ sont choisis sous la forme suivante

$$\begin{cases} V_0(x) = W_1\theta(-a-x) + W_2\theta(-a+x), \\ m(x) = (m_1 - m_2)\left[\theta(-a-x) + \theta(-a+x)\right] + m_2, \end{cases} \tag{3.42}$$

où $\theta(x)$ désignant la fonction de pas de Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x < 0, \end{cases} \tag{3.43}$$

avec $m_1 \neq m_2$ et W_1, W_2 sont des constantes positives telles que $W_2 > W_1$.

Avec des arguments similaires à ceux utilisés dans la référence [16], nous obtenons que la fonction d'onde $\psi(t,x)$ de l'équation de DKP (3.39) dans chaque région est

$$\psi(t,x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E-W_1}{m_1} \\ \frac{ik_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} Ae^{(k_1x - iEt)} \quad \text{pour} \quad x < -a, \tag{3.44}$$

$$\psi(t,x) = \begin{pmatrix} Fe^{ik_2x} + Ge^{-ik_2x} \\ \\ \frac{E}{m_2}\left(Fe^{ik_2x} + Ge^{-ik_2x}\right) \\ \\ \frac{-k_2}{m_2}\left(Fe^{ik_2x} - Ge^{-ik_2x}\right) \\ \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iEt} \quad \text{pour} \quad -a < x < a, \tag{3.45}$$

$$\psi(t,x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{E-W_2}{m_1} \\ \\ \frac{-ik_3}{m_1} \\ \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} De^{(k_3x-iEt)} \quad \text{pour} \quad x > a, \tag{3.46}$$

où k_1, k_2 et k_3 sont donnés par

$$k_1 = \sqrt{m_1^2 - (E-W_1)^2}, \qquad k_2 = \sqrt{E^2 - m_2^2}, \qquad k_3 = \sqrt{m_1^2 - (E-W_2)^2}, \tag{3.47}$$

et A, F, G, D sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites.

3.3 Equation de DKP pour les particules de spin-1

3.3.1 Particules de spin-1 à $(1+1)$ dimensions

Dans cette partie, nous prouverons l'existence d'une relation explicite entre l'équation de DKP pour les particules de spin-1 à $(1+1)$ dimensions et l'équation de KG de la même manière que dans le cas des particules de spin-0.

L'équation de DKP pour les particules de spin-1 à $(1+1)$ dimensions en présence d'une interaction électromagnétique est s'écrit sous la forme

$$[i\beta^0\mathcal{D}_0 + i\beta^1\mathcal{D}_1 - m]\psi = 0, \tag{3.48}$$

où $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ sont les dérivées covariantes, m est la masse de la particule, ψ est la fonction d'onde de DKP et β^0, β^1 sont des matrices 10×10 données par

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_1 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_1 \\ -e_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & -is_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{3.49}$$

où $\bar{0}$ et e_1 sont données par

$$\bar{0} = (0, 0, 0), \qquad e_1 = (1, 0, 0),$$

et $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{I}$ sont, respectivement, la matrice nulle et la matrice unité de dimensions 3×3, tandis que s_1 est une matrice écrite comme

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la fonction d'onde de DKP ψ à dix composantes

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})^T, \tag{3.50}$$

l'équation (3.48), peut être écrite sous forme d'un système de dix équations différentielles du premier ordre couplées

$$\begin{cases} i\mathcal{D}_1\psi_5 - m\psi_1 = 0, & (3.51) \\ i\mathcal{D}_0\psi_5 - m\psi_2 = 0, & (3.52) \\ i\mathcal{D}_0\psi_6 - i\mathcal{D}_1\psi_{10} - m\psi_3 = 0, & (3.53) \\ i\mathcal{D}_0\psi_7 + i\mathcal{D}_1\psi_9 - m\psi_4 = 0, & (3.54) \\ i\mathcal{D}_0\psi_2 - i\mathcal{D}_1\psi_1 - m\psi_5 = 0, & (3.55) \\ i\mathcal{D}_0\psi_3 - m\psi_6 = 0, & (3.56) \\ i\mathcal{D}_0\psi_4 - m\psi_7 = 0, & (3.57) \\ -m\psi_8 = 0, & (3.58) \\ -i\mathcal{D}_1\psi_4 - m\psi_9 = 0, & (3.59) \\ i\mathcal{D}_1\psi_3 - m\psi_{10} = 0. & (3.60) \end{cases}$$

Selon ce système, on peut observer que les dix composantes $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})$ ne sont pas indépendantes les unes des autres.

A partir des équations (3.51)-(3.52) et (3.56)-(3.60), nous pouvons facilement voir que chacune des composantes $\psi_1, \psi_2, \psi_6, \psi_7, \psi_9$ et ψ_{10} dépend de la composante ψ_3, ψ_4 ou ψ_5 comme suit

$$\begin{cases} \psi_1 = \dfrac{i}{m}\mathcal{D}_1\psi_5, & (3.61) \\ \psi_2 = \dfrac{i}{m}\mathcal{D}_0\psi_5, & (3.62) \\ \psi_6 = \dfrac{i}{m}\mathcal{D}_0\psi_3, & (3.63) \\ \psi_7 = \dfrac{i}{m}\mathcal{D}_0\psi_4, & (3.64) \\ \psi_8 = 0, & (3.65) \\ \psi_9 = \dfrac{-i}{m}\mathcal{D}_1\psi_4, & (3.66) \\ \psi_{10} = \dfrac{i}{m}\mathcal{D}_1\psi_3. & (3.67) \end{cases}$$

Substituant chaque composante $\psi_1, \psi_2, \psi_6, \psi_7, \psi_9$ et ψ_{10} du système d'équations (3.61)-(3.67) dans les équations (3.53)-(3.55), on aura

$$\begin{cases} (\mathcal{D}^\mu\mathcal{D}_\mu + m^2)\psi_3 = 0, & & (3.68) \\ (\mathcal{D}^\mu\mathcal{D}_\mu + m^2)\psi_4 = 0, & \mu = 0, 1. & (3.69) \\ (\mathcal{D}^\mu\mathcal{D}_\mu + m^2)\psi_5 = 0. & & (3.70) \end{cases}$$

Les équations (3.68)-(3.70) représentent les équations de KG en présence d'une interaction électromagnétique pour chaque composante ψ_3, ψ_4 et ψ_5.

Conformément aux ces résultats, nous pouvons facilement conclure la relation explicite entre l'équation de DKP pour les particules de spin-1 à $(1+1)$ dimensions et l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique. Autrement dit, la fonction d'onde ψ est solution de l'équation DKP (3.48) si et seulement si les composantes ψ_3, ψ_4 et ψ_5 sont des solutions de l'équation de KG et les composantes $\psi_1, \psi_2, \psi_6, \psi_7, \psi_9$ et ψ_{10} sont données par le système d'équations (3.61)-(3.67), i.e.

- Si les composantes ψ_3, ψ_4 et ψ_5 sont, respectivement, des solutions de l'équation de KG (3.68), (3.69) et (3.70), alors la fonction d'onde ψ est une solution de l'équation de DKP (3.48), où les composantes $\psi_1, \psi_2, \psi_6, \psi_7, \psi_9$ et ψ_{10} sont données par le système d'équations (3.61)-(3.67).
- En sens inverse, si la fonction d'onde ψ est la solution de l'équation de DKP (3.48), où les composantes $\psi_1, \psi_2, \psi_6, \psi_7, \psi_9$ et ψ_{10} sont données par le système d'équations (3.61)-

(3.67), alors les composantes ψ_3, ψ_4 et ψ_5 sont, respectivement, solutions des équations de KG (3.68), (3.69) et (3.70).

Ainsi, ces résultats conduisent clairement au fait que toutes les composantes de la solution de l'équation de DKP pour les particules de spin-1 à $(1+1)$ dimensions sont des solutions de l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique.

Remarque 3.3.1. *Cette relation explicite entre l'équation de DKP pour les particules de spin-1 à $(1+1)$ dimensions et l'équation de KG, peut être établie de la même manière si on utilise la matrice β^2 ou β^3 au lieu de la matrice β^1.*

En plus de notre contribution faite dans la section 3.2, en ce qui concerne l'équation de DKP pour les particules de spin-0 à $(1+3)$ dimensions, nous avons de nouveau pu présenter une autre contribution prometteuse, mais cette fois pour les particules de spin-1 à $(1+1)$ dimensions. Plus précisément, nous avons pu prouver l'existence d'équivalence, qui est une relation explicite, entre l'équation de DKP pour les particules de spin-1 à $(1+1)$ dimensions et l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique. Ainsi, nos résultats vont également au-delà des travaux précédents et étendent la présence de l'équivalence pour inclure non seulement la présence d'un champ électromagnétique, mais aussi le cas des particules de spin-1 à $(1+1)$ dimensions.

3.3.2 Application

3.3.2.1 Equation de DKP pour un puits de potentiel carré avec une masse dépendante de la position

Avec la même procédure, comme dans la sous-section 3.2.1.2, nous appliquerons la relation explicite entre l'équation de DKP et l'équation de KG pour déterminer la fonction d'onde correspondante de l'équation de DKP pour un puits de potentiel carré avec une masse dépendante de la position comme dans la référence [16].

A cet effet, nous devons prendre en compte le fait que la masse n'est pas constante dans l'équation (3.48), à savoir

$$[i\beta^0\mathcal{D}_0 + i\beta^1\mathcal{D}_1 - m(x)]\psi(t,x) = 0. \tag{3.71}$$

Pour les mêmes choix : $eA_0 = V_0(x)$ et $A_1 = 0$, où $m(x)$ et $V_0(x)$ sont donnés par la formule (3.42) et la fonction d'onde $\psi(t,x)$ est exprimée sous la forme

$$\psi(t,x) = e^{-iEt}\Phi(x), \tag{3.72}$$

avec la fonction Φ est

$$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10})^T,$$

le système d'équations (3.51)-(3.60) devient alors

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dx}\varphi_5 - m(x)\varphi_1 = 0, & (3.73)\\ (E - V_0(x))\varphi_5 - m(x)\varphi_2 = 0, & (3.74)\\ (E - V_0(x))\varphi_6 - i\dfrac{d}{dx}\varphi_{10} - m(x)\varphi_3 = 0, & (3.75)\\ (E - V_0(x))\varphi_7 + i\dfrac{d}{dx}\varphi_9 - m(x)\varphi_4 = 0, & (3.76)\\ (E - V_0(x))\varphi_2 - i\dfrac{d}{dx}\varphi_1 - m(x)\varphi_5 = 0, & (3.77)\\ (E - V_0(x))\varphi_3 - m(x)\varphi_6 = 0, & (3.78)\\ (E - V_0(x))\varphi_4 - m(x)\varphi_7 = 0, & (3.79)\\ -m(x)\varphi_8 = 0, & (3.80)\\ -i\dfrac{d}{dx}\varphi_4 - m(x)\varphi_9 = 0, & (3.81)\\ i\dfrac{d}{dx}\varphi_3 - m(x)\varphi_{10} = 0, & (3.82) \end{cases}$$

et le système d'équations (3.61)-(3.67) devient aussi

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{i}{m(x)}\dfrac{d}{dx}\varphi_5, & (3.83)\\ \varphi_2 = \dfrac{(E - V_0(x))}{m(x)}\varphi_5, & (3.84)\\ \varphi_6 = \dfrac{(E - V_0(x))}{m(x)}\varphi_3, & (3.85)\\ \varphi_7 = \dfrac{(E - V_0(x))}{m(x)}\varphi_4, & (3.86)\\ \varphi_8 = 0, & (3.87)\\ \varphi_9 = \dfrac{-i}{m(x)}\dfrac{d}{dx}\varphi_4, & (3.88)\\ \varphi_{10} = \dfrac{i}{m(x)}\dfrac{d}{dx}\varphi_3. & (3.89) \end{cases}$$

Par conséquent, le système d'équations (3.68)-(3.70) prend la forme d'équations du type KG

$$\begin{cases} \left[m(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}\right)+(E-V_0(x))^2-m^2(x)\right]\varphi_3=0, & (3.90)\\ \left[m(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}\right)+(E-V_0(x))^2-m^2(x)\right]\varphi_4=0, & (3.91)\\ \left[m(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}\right)+(E-V_0(x))^2-m^2(x)\right]\varphi_5=0. & (3.92)\end{cases}$$

D'autre part, si nous décomposons la fonction d'onde Φ^T comme

$$\Psi^T=(\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5),\quad \phi^T=(\varphi_2,\varphi_6,\varphi_7),\quad \Theta^T=(\varphi_1,\varphi_9,\varphi_{10})\quad \text{et}\quad \varphi_8=0, \tag{3.93}$$

les systèmes d'équations (3.83)-(3.89) et (3.90)-(3.92) peuvent être réécrit sous forme compacte. Plus précisément, sous ces notations, la composante Ψ doit obéir à l'équation du type KG

$$\left[m(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}\right)+(E-V_0(x))^2-m^2(x)\right]\Psi=0, \tag{3.94}$$

et les autres composantes ϕ et Θ doivent vérifier les équations suivantes

$$\begin{pmatrix}\phi\\ \Theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{E-V_0(x)}{m(x)}\\ \frac{i}{m(x)}\frac{d}{dx}\end{pmatrix}\otimes\Psi. \tag{3.95}$$

En suivant les mêmes étapes que dans la référence [16], nous obtenons la fonction d'onde $\psi(t,x)$ dans chaque région comme

$$\psi(t,x)=\begin{pmatrix}\frac{i\rho_1 k_1}{m_1}\\ \frac{(E-W_1)\rho_1}{m_1}\\ b_1\\ a_1\\ \rho_1\\ \frac{(E-W_1)b_1}{m_1}\\ \frac{(E-W_1)a_1}{m_1}\\ 0\\ -\frac{ia_1k_1}{m_1}\\ \frac{ib_1k_1}{m_1}\end{pmatrix}e^{(k_1x-iEt)}\quad \text{pour}\quad x<-a, \tag{3.96}$$

$$\psi(t,x)=\begin{pmatrix} \frac{-k_2}{m_2}\left(\rho_2 e^{ik_2x}-\rho_3 e^{-ik_2x}\right) \\ \frac{E}{m_2}\left(\rho_2 e^{ik_2x}+\rho_3 e^{-ik_2x}\right) \\ b_2 e^{ik_2x}+b_3 e^{-ik_2x} \\ a_2 e^{ik_2x}+a_3 e^{-ik_2x} \\ \rho_2 e^{ik_2x}+\rho_3 e^{-ik_2x} \\ \frac{E}{m_2}\left(b_2 e^{ik_2x}+b_3 e^{-ik_2x}\right) \\ \frac{E}{m_2}\left(a_2 e^{ik_2x}+a_3 e^{-ik_2x}\right) \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2}\left(a_2 e^{ik_2x}-a_3 e^{-ik_2x}\right) \\ -\frac{k_2}{m_2}\left(b_2 e^{ik_2x}-b_3 e^{-ik_2x}\right) \end{pmatrix} e^{-iEt} \quad \text{pour} \quad -a<x<a, \tag{3.97}$$

$$\psi(t,x)=\begin{pmatrix} -\frac{i\rho_4 k_3}{m_1} \\ \frac{(E-W_2)\rho_4}{m_1} \\ b_4 \\ a_4 \\ \rho_4 \\ \frac{(E-W_2)b_4}{m_1} \\ \frac{(E-W_2)a_4}{m_1} \\ 0 \\ \frac{ia_4k_3}{m_1} \\ -\frac{ib_4k3}{m_1} \end{pmatrix} e^{-(k_3x+iEt)} \quad \text{pour} \quad x>a, \tag{3.98}$$

où k_1, k_2 et k_3 sont donnés par la formule (3.47), $a_1, a_2, a_3, a_4,\ b_1, b_2, b_3, b_4$ et $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites.

3.3.3 Particules de spin-1 à $(1+2)$ dimensions

Dans cette partie, nous étudierons l'équation de DKP pour les particules de spin-1 à $(1+2)$ dimensions en présence d'une interaction électromagnétique et nous nous appuierons également sur deux applications différentes pour enrichir davantage notre étude. La première application est une application directe au cas libre et la deuxième est une tentative de trouver des solutions du type Volkov.

Pour les particules de spin-1 à $(1+2)$ dimensions, l'équation de DKP en présence d'une interaction électromagnétique prend la forme

$$\left(i\beta^0\mathcal{D}_0 + i\beta^1\mathcal{D}_1 + i\beta^2\mathcal{D}_2 - m\right)\psi = 0, \tag{3.99}$$

où $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ sont les dérivées covariantes, m est la masse de la particule, ψ est la fonction d'onde de DKP et β^0, β^1, β^2 sont des matrices 10×10 données par

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2 \tag{3.100}$$

avec $\bar{0}$ et e_i sont données par

$$\bar{0} = (0,0,0), \qquad e_1 = (1,0,0), \qquad e_2 = (0,1,0),$$

et $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{I}$ désignent respectivement la matrice nulle et la matrice unité de dimensions 3×3. Les s_i étant les matrices

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la fonction d'onde de DKP

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})^T,$$

l'équation (3.99) fournit un système d'équations différentielles du premier ordre couplées comme suit

$$\begin{cases} i\mathcal{D}_1\psi_5 + i\mathcal{D}_2\psi_6 - m\psi_1 = 0, & (3.101)\\ i\mathcal{D}_0\psi_5 + i\mathcal{D}_2\psi_{10} - m\psi_2 = 0, & (3.102)\\ i\mathcal{D}_0\psi_6 - i\mathcal{D}_1\psi_{10} - m\psi_3 = 0, & (3.103)\\ i\mathcal{D}_0\psi_7 - i\mathcal{D}_2\psi_8 + i\mathcal{D}_1\psi_9 - m\psi_4 = 0, & (3.104)\\ -i\mathcal{D}_1\psi_1 + i\mathcal{D}_0\psi_2 - m\psi_5 = 0, & (3.105)\\ -i\mathcal{D}_2\psi_1 + i\mathcal{D}_0\psi_3 - m\psi_6 = 0, & (3.106)\\ i\mathcal{D}_0\psi_4 - m\psi_7 = 0, & (3.107)\\ i\mathcal{D}_2\psi_4 - m\psi_8 = 0, & (3.108)\\ -i\mathcal{D}_1\psi_4 - m\psi_9 = 0, & (3.109)\\ -i\mathcal{D}_2\psi_2 + i\mathcal{D}_1\psi_3 - m\psi_{10} = 0. & (3.110) \end{cases}$$

Conformément à ce système, les dix composantes $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})$ ne sont pas indépendantes les unes des autres.

D'après les équations (3.105), (3.106) et (3.110), nous pouvons facilement voir que les composantes ψ_5, ψ_6 et ψ_{10} dépendent des composantes ψ_1, ψ_2 et ψ_3 comme suit

$$\begin{cases} \psi_5 = \frac{i}{m}\left(-\mathcal{D}_1\psi_1 + \mathcal{D}_0\psi_2\right), & (3.111)\\ \psi_6 = \frac{i}{m}\left(-\mathcal{D}_2\psi_1 + \mathcal{D}_0\psi_3\right), & (3.112)\\ \psi_{10} = \frac{i}{m}\left(-\mathcal{D}_2\psi_2 + \mathcal{D}_1\psi_3\right), & (3.113) \end{cases}$$

et à partir des équations (3.107)-(3.109), on peut également voir que les composantes ψ_7, ψ_8 et ψ_9 ne dépendent que de la composante ψ_4

$$\begin{cases} \psi_7 = \frac{i}{m}\mathcal{D}_0\psi_4, & (3.114)\\ \psi_8 = \frac{i}{m}\mathcal{D}_2\psi_4, & (3.115)\\ \psi_9 = \frac{-i}{m}\mathcal{D}_1\psi_4. & (3.116) \end{cases}$$

En remplaçant les composantes ψ_5, ψ_6 et ψ_{10}, du système d'équations (3.111)-(3.113), dans les équations (3.101)-(3.103), on obtient un système d'équations différentielles du second ordre pour les composantes ψ_1, ψ_2 et ψ_3

$$\begin{cases} \left(\mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2 - m^2\right)\psi_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{D}_0\psi_2 - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_0\psi_3 = 0, & (3.117) \\ \mathcal{D}_0\mathcal{D}_1\psi_1 - \left(\mathcal{D}_0^2 - \mathcal{D}_2^2 + m^2\right)\psi_2 - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\psi_3 = 0, & (3.118) \\ \mathcal{D}_0\mathcal{D}_2\psi_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\psi_2 - \left(\mathcal{D}_0^2 - \mathcal{D}_1^2 + m^2\right)\psi_3 = 0. & (3.119) \end{cases}$$

Par contre, si nous remplaçons les composantes ψ_7, ψ_8 et ψ_9 du système d'équations (3.114)-(3.116) dans l'équation (3.104), nous obtenons

$$(\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu + m^2)\psi_4 = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2 \tag{3.120}$$

qui représente l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique pour la composante ψ_4.

Dans le cadre des résultats obtenus dans cette partie, nous pouvons extraire quelques remarques notables sur la résolution de l'équation de DKP pour les particules de spin-1 à (1+2) dimensions en présence d'une interaction électromagnétique. D'une manière plus précise

- Si la fonction d'onde ψ est une solution de l'équation de DKP (3.99), alors les composantes ψ_1, ψ_2 et ψ_3 sont des solutions du système d'équations (3.117)-(3.119) et la composante ψ_4 est une solution de l'équation de KG (3.120), où les composantes ψ_5, ψ_6, ψ_{10} vérifient le système d'équations (3.111)-(3.113) et les composantes ψ_7, ψ_8, ψ_9 vérifient le système d'équations (3.114)-(3.116).
- Inversement, si les composantes ψ_1, ψ_2 et ψ_3 sont des solutions du système d'équations (3.117)-(3.119) et la composante ψ_4 est la solution de l'équation de KG (3.120), alors la fonction d'onde ψ est une solution de l'équation de DKP (3.99), où les composantes ψ_5, ψ_6, ψ_{10} et les composantes ψ_7, ψ_8, ψ_9 sont donnés respectivement par le système d'équations (3.111)-(3.113) et le système d'équations (3.114)-(3.116).

Nous concluons de tout cela que pour résoudre l'équation de DKP (3.99) i.e. le système d'équations (3.101)-(3.110), il suffit de résoudre à la fois le système d'équations (3.117)-(3.119) et l'équation de KG (3.120), où les composantes ψ_5, ψ_6 et ψ_{10} sont données par le système d'équations (3.111)-(3.113) et les composantes ψ_7, ψ_8 et ψ_9 sont données par le système d'équations (3.114)-(3.116). Autrement dit, résoudre l'équation de DKP pour les particules de spin-1 à $(1+2)$ dimensions en présence d'une interaction électromagnétique est équivalent à résoudre un système d'équations différentielles du second ordre à trois composantes.

3.3.4 Applications

3.3.4.1 Particules libres

Dans le cas des particules libres, nous devons opérer un petit changement aux résultats obtenus précédemment. Ce changement consiste à remplacer les dérivées covariantes $\mathcal{D}_\mu$ par les dérivées ∂_μ. Selon ce changement, l'équation (3.99) est réécrite de la manière suivante

$$\left(i\beta^0\partial_0 + i\beta^1\partial_1 + i\beta^2\partial_2 - m\right)\psi = 0, \tag{3.121}$$

tandis que le système d'équations (3.101)-(3.110) devient

$$\begin{cases} i\partial_1\psi_5 + i\partial_2\psi_6 - m\psi_1 = 0, & (3.122)\\ i\partial_0\psi_5 + i\partial_2\psi_{10} - m\psi_2 = 0, & (3.123)\\ i\partial_0\psi_6 - i\partial_1\psi_{10} - m\psi_3 = 0, & (3.124)\\ i\partial_0\psi_7 - i\partial_2\psi_8 + i\partial_1\psi_9 - m\psi_4 = 0, & (3.125)\\ -i\partial_1\psi_1 + i\partial_0\psi_2 - m\psi_5 = 0, & (3.126)\\ -i\partial_2\psi_1 + i\partial_0\psi_3 - m\psi_6 = 0, & (3.127)\\ i\partial_0\psi_4 - m\psi_7 = 0, & (3.128)\\ i\partial_2\psi_4 - m\psi_8 = 0, & (3.129)\\ -i\partial_1\psi_4 - m\psi_9 = 0, & (3.130)\\ -i\partial_2\psi_2 + i\partial_1\psi_3 - m\psi_{10} = 0. & (3.131) \end{cases}$$

Il s'ensuit également que les systèmes d'équations (3.111)-(3.113) et (3.114)-(3.116) prennent respectivement la forme

$$\begin{cases} \psi_5 = \dfrac{i}{m}\left(-\partial_1\psi_1 + \partial_0\psi_2\right), & (3.132)\\ \psi_6 = \dfrac{i}{m}\left(-\partial_2\psi_1 + \partial_0\psi_3\right), & (3.133)\\ \psi_{10} = \dfrac{i}{m}\left(-\partial_2\psi_2 + \partial_1\psi_3\right), & (3.134) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \psi_7 = \dfrac{i}{m}\partial_0\psi_4, & (3.135)\\ \psi_8 = \dfrac{i}{m}\partial_2\psi_4, & (3.136)\\ \psi_9 = \dfrac{-i}{m}\partial_1\psi_4. & (3.137) \end{cases}$$

Ainsi, le système d'équations (3.117)-(3.119) devient

$$\begin{cases} \left(\partial_1^2 + \partial_2^2 - m^2\right)\psi_1 - \partial_1\partial_0\psi_2 - \partial_2\partial_0\psi_3 = 0, & (3.138) \\ \partial_0\partial_1\psi_1 - \left(\partial_0^2 - \partial_2^2 + m^2\right)\psi_2 - \partial_2\partial_1\psi_3 = 0, & (3.139) \\ \partial_0\partial_2\psi_1 - \partial_1\partial_2\psi_2 - \left(\partial_0^2 - \partial_1^2 + m^2\right)\psi_3 = 0, & (3.140) \end{cases}$$

et l'équation de KG (3.120) sera la suivante

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi_4 = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2 \tag{3.141}$$

qui est l'équation libre de KG pour la composante ψ_4.

Dans le cadre de ce qui a été étudié dans cette partie, les résultats obtenus nous permettent de présenter quelques remarques intéressantes sur la résolution de l'équation de DKP dans le cas des particules libres. Plus précisément, à partir des équations (3.122)-(3.124), on peut facilement déduire que les composantes ψ_1, ψ_2 et ψ_3 doivent vérifier la relation suivante

$$\partial_0\psi_1 - \partial_1\psi_2 - \partial_2\psi_3 = 0. \tag{3.142}$$

Prenant en compte cette relation, le système d'équations (3.138)-(3.140) devient

$$\begin{cases} (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi_1 = 0, & (3.143) \\ (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi_2 = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2 & (3.144) \\ (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi_3 = 0. & (3.145) \end{cases}$$

Ainsi, il résulte du système ci-dessus que chaque composante ψ_1, ψ_2 et ψ_3 est une solution de l'équation libre de KG.

Grâce au système d'équations (3.132)-(3.134), nous déduisons que les composantes ψ_5, ψ_6 et ψ_{10} sont aussi des solutions de l'équation libre de KG.

D'autre part, puisque la composante ψ_4 est une solution de l'équation libre de KG (3.141), les composantes ψ_7, ψ_8 et ψ_9, données par le système d'équations (3.135)-(3.137), sont également des solutions de l'équation libre de KG.

Plus brièvement, selon ce qui précède, on peut dire que toutes les composantes correspondant à la fonction d'onde ψ de l'équation libre de DKP à $(1+2)$ dimensions sont des solutions de l'équation libre de KG.

Inversement, pour les composantes φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 solutions de l'équation libre de KG, on peut choisir les composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 solutions de l'équation libre de KG comme suit

$$\begin{cases} \psi_1 = \dfrac{-1}{m^2}\left(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2\right), & (3.146)\\ \psi_2 = \dfrac{-1}{m^2}\left(\partial_0\varphi_1 + \partial_2\varphi_3\right), & (3.147)\\ \psi_3 = \dfrac{-1}{m^2}\left(\partial_0\varphi_2 - \partial_1\varphi_3\right), & (3.148)\\ \psi_4 = \varphi_4, & (3.149)\end{cases}$$

de sort que la relation (3.142) est vérifiée, les composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont également des solutions du système d'équations (3.138)-(3.140) et que la composante ψ_4 est évidemment solution de l'équation libre de KG (3.141).

Dans ce contexte, nous concluons également que la fonction d'onde ψ est une solution de l'équation libre de DKP (3.121), i.e. le système d'équations (3.122)-(3.131), où les composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 sont données par le système d'équations (3.146)-(3.149), les composantes ψ_5, ψ_6 et ψ_{10} sont données par le système d'équations (3.132)-(3.134) et les composantes ψ_7, ψ_8 et ψ_9 sont données par le système d'équations (3.135)-(3.137).

Enfin, la conclusion principale que l'on peut en tirer de tout ce qui a été obtenu concernant le cas des particules libres est que chaque composante de la fonction d'onde ψ de l'équation libre de DKP à $(1 + 2)$ dimensions est une solution de l'équation libre de KG. Ainsi, s'il y a une solution à l'équation libre de KG, une solution à l'équation libre de DKP peut être trouvée.

Il convient de noter ici que dans la référence [70], il a été montré que l'équation de DKP pour les particules de spin-1 dans le cas libre est équivalente à l'équation de KG, i.e. l'équation de Proca, utilisant les opérateurs de projection. Alors que dans notre étude, nous avons adopté, comme indiqué, une approche complètement différente de celle-ci, où nous nous sommes appuyés sur l'équation de DKP elle-même. Plus précisément, à partir des relations explicites que nous avons atteintes entre les composantes de la solution de l'équation de DKP en présence d'une interaction électromagnétique, nous avons pu obtenir un système équivalent pour elle. Cette dernière nous a conduit, dans le cas des particules libres, à prouver que chaque composante de la fonction d'onde ψ de l'équation libre de DKP à $(1 + 2)$ dimensions est une solution de l'équation libre de KG.

3.3.4.2 Solution du type Volkov

Maintenant, comme deuxième application, nous essayons de calculer la solution du type Volkov du système d'équations (3.101)-(3.110), à savoir

$$\begin{cases} i\mathcal{D}_1\psi_5 + i\mathcal{D}_2\psi_6 - m\psi_1 = 0, \\ i\mathcal{D}_0\psi_5 + i\mathcal{D}_2\psi_{10} - m\psi_2 = 0, \\ i\mathcal{D}_0\psi_6 - i\mathcal{D}_1\psi_{10} - m\psi_3 = 0, \\ i\mathcal{D}_0\psi_7 - i\mathcal{D}_2\psi_8 + i\mathcal{D}_1\psi_9 - m\psi_4 = 0, \\ -i\mathcal{D}_1\psi_1 + i\mathcal{D}_0\psi_2 - m\psi_5 = 0, \\ -i\mathcal{D}_2\psi_1 + i\mathcal{D}_0\psi_3 - m\psi_6 = 0, \\ i\mathcal{D}_0\psi_4 - m\psi_7 = 0, \\ i\mathcal{D}_2\psi_4 - m\psi_8 = 0, \\ -i\mathcal{D}_1\psi_4 - m\psi_9 = 0, \\ -i\mathcal{D}_2\psi_2 + i\mathcal{D}_1\psi_3 - m\psi_{10} = 0, \end{cases}$$

qui, d'après les résultats obtenus précédemment, se limite à résoudre le système d'équations différentielles du second ordre à trois composantes (3.117)-(3.119), i.e.

$$\begin{cases} \left(\mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2 - m^2\right)\psi_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{D}_0\psi_2 - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_0\psi_3 = 0, \\ \mathcal{D}_0\mathcal{D}_1\psi_1 - \left(\mathcal{D}_0^2 - \mathcal{D}_2^2 + m^2\right)\psi_2 - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\psi_3 = 0, \\ \mathcal{D}_0\mathcal{D}_2\psi_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\psi_2 - \left(\mathcal{D}_0^2 - \mathcal{D}_1^2 + m^2\right)\psi_3 = 0. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, comme dans le cas des particules de spin-0, on cherche des solutions de la forme

$$\begin{aligned} \psi_1 &= C_1 e^{-ip\cdot x} F_1(\phi), \\ \psi_2 &= C_2 e^{-ip\cdot x} F_2(\phi), \qquad\qquad \text{pour} \quad \phi = k\cdot x, \\ \psi_3 &= C_3 e^{-ip\cdot x} F_3(\phi), \end{aligned}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes de normalisation, p, x, k sont des quadrivecteurs constants, ϕ est une onde plane et $F_1(\phi)$, $F_2(\phi)$, $F_3(\phi)$ sont des fonctions.

En remplaçant les composantes ψ_1, ψ_2 et ψ_3 par leurs formes dans le système ci-dessus, on obtient un système d'équations différentielles du second ordre couplées pour les fonctions F_1, F_2 et F_3 comme suit

$$\begin{cases} k_0\left[k_0 F_1'' + k_1 F_2'' + k_2 F_3''\right] - 2ik_0\mathcal{P}_0 F_1' - i\left[k_1\mathcal{P}_0 + k_0\mathcal{P}_1\right] F_2' - i\left[k_2\mathcal{P}_0 + k_0\mathcal{P}_2\right] F_3' + \\ \left[iek_0 A_0' - \mathcal{P}_0^2\right] F_1 + \left[iek_1 A_0' - \mathcal{P}_0\mathcal{P}_1\right] F_2 + \left[iek_2 A_0' - \mathcal{P}_0\mathcal{P}_2\right] F_3 + \\ \boldsymbol{2i(kp)F_1' + \left[-2e(pA) + e^2A^2\right] F_1} = 0, & (3.150) \\ -k_1[k_0 F_1'' + k_1 F_2'' + k_2 F_3''] + i\left[k_0\mathcal{P}_1 + k_1\mathcal{P}_0\right] F_1' + 2ik_1\mathcal{P}_1 F_2' + i\left[k_2\mathcal{P}_1 + k_1\mathcal{P}_2\right] F_3' + \\ \left[-iek_0 A_1' + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_1\right] F_1 + \left[-iek_1 A_1' + \mathcal{P}_1^2\right] F_2 + \left[-iek_2 A_1' + \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\right] F_3 + \\ \boldsymbol{2i(kp)F_2' + \left[-2e(pA) + e^2A^2\right] F_2} = 0, & (3.151) \\ -k_2[k_0 F_1'' + k_1 F_2'' + k_2 F_3''] + i\left[k_0\mathcal{P}_2 + k_2\mathcal{P}_0\right] F_1' + i\left[k_1\mathcal{P}_2 + k_2\mathcal{P}_1\right] F_2' - 2ik_2\mathcal{P}_2 F_3' + \\ \left[-iek_0 A_2' + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_2\right] F_1 + \left[-iek_1 A_2' + \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\right] F_2 + \left[-iek_2 A_2' + \mathcal{P}_2^2\right] F_3 + \\ \boldsymbol{2i(kp)F_3' + \left[-2e(pA) + e^2A^2\right] F_3} = 0. & (3.152) \end{cases}$$

Il convient de noter ici que pour simplifier l'écriture de ce système, nous avons adopté les notations suivantes : $\mathcal{P}_i = (p_i - eA_i(\phi)), i = 0, 1, 2$, et F_1, F_2, F_3 au lieu de $F_1(\phi), F_2(\phi), F_3(\phi)$ respectivement.

De l'autre côté, en additionnant le produit des équations (3.150), (3.151), (3.152) par k_0, k_1, k_2 respectivement, prenant en compte la condition $k^2 = 0$, on obtient

$$i(kp)\left[k_0 F_1' + k_1 F_2' + k_2 F_3'\right] + \left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[k_0 F_1 + k_1 F_2 + k_2 F_3\right] - \\ (kp)\left[\mathcal{P}_0 F_1 + \mathcal{P}_1 F_2 + \mathcal{P}_2 F_3\right] = 0.$$

De plus, en additionnant le produit des équations (3.150), (3.151), (3.152) par A_0, A_1, A_2 respectivement et en utilisant le fait que $k \cdot A = 0$, nous aurons

$$\left[-i(pA) + ieA^2\right]\left[k_0 F_1' + k_1 F_2' + k_2 F_3'\right] + 2i(kp)\left[A_0 F_1' + A_1 F_2' + A_2 F_3'\right] + \\ ie(AA')\left[k_0 F_1 + k_1 F_2 + k_2 F_3\right] + \left[-(pA) + eA^2\right]\left[\mathcal{P}_0 F_1 + \mathcal{P}_1 F_2 + \mathcal{P}_2 F_3\right] + \\ \left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[A_0 F_1 + A_1 F_2 + A_2 F_3\right] = 0.$$

Enfin, en additionnant le produit des équations (3.150), (3.151), (3.152) par A_0', A_1', A_2' respectivement et en employant la condition de jauge de Lorenz $k \cdot A' = 0$, on trouve

$$\left[-i(pA') + ie(AA')\right]\left[k_0 F_1' + k_1 F_2' + k_2 F_3'\right] + 2i(kp)\left[A_0' F_1' + A_1' F_2' + A_2' F_3'\right] + \\ ieA'^2\left[k_0 F_1 + k_1 F_2 + k_2 F_3\right] + \left[-(pA') + e(AA')\right]\left[\mathcal{P}_0 F_1 + \mathcal{P}_1 F_2 + \mathcal{P}_2 F_3\right] + \\ \left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[A_0' F_1 + A_1' F_2 + A_2' F_3\right] = 0.$$

Grâce aux calculs ci-dessus, le système d'équations différentielles du second ordre (3.150)-(3.152) se réduit au système d'équations différentielles du premier ordre

$$\begin{cases} i(kp)\left[k_0F_1' + k_1F_2' + k_2F_3'\right] + \left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[k_0F_1 + k_1F_2 + k_2F_3\right] - \\ (kp)\left[\mathcal{P}_0F_1 + \mathcal{P}_1F_2 + \mathcal{P}_2F_3\right] = 0, & (3.153) \\ \left[-i(pA) + ieA^2\right]\left[k_0F_1' + k_1F_2' + k_2F_3'\right] + 2i(kp)\left[A_0F_1' + A_1F_2' + A_2F_3'\right] + \\ ie(AA')\left[k_0F_1 + k_1F_2 + k_2F_3\right] + \left[-(pA) + eA^2\right]\left[\mathcal{P}_0F_1 + \mathcal{P}_1F_2 + \mathcal{P}_2F_3\right] + \\ \left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[A_0F_1 + A_1F_2 + A_2F_3\right] = 0, & (3.154) \\ \left[-i(pA') + ie(AA')\right]\left[k_0F_1' + k_1F_2' + k_2F_3'\right] + 2i(kp)\left[A_0'F_1' + A_1'F_2' + A_2'F_3'\right] + \\ ieA'^2\left[k_0F_1 + k_1F_2 + k_2F_3\right] + \left[-(pA') + e(AA')\right]\left[\mathcal{P}_0F_1 + \mathcal{P}_1F_2 + \mathcal{P}_2F_3\right] + \\ \left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[A_0'F_1 + A_1'F_2 + A_2'F_3\right] = 0. & (3.155) \end{cases}$$

En conséquence, la résolution du système d'équations (3.153)-(3.155), nous permet de trouver les composantes ψ_1, ψ_2 et ψ_3 qui sont les solutions du système d'équations (3.117)-(3.119). Par ailleurs, l'utilisation des systèmes d'équations (3.111)-(3.113) et (3.114)-(3.116), nous permet de trouver les autres composantes. Selon cela, nous pouvons trouver la solution du type Volkov du système d'équations (3.101)-(3.110) i.e. l'équation de DKP (3.99). Malheureusement, en raison des difficultés que nous avons rencontrées lors des calculs, nous n'avons pas pu trouver les solutions du système d'équations (3.153)-(3.155). Toutefois, ce système est toujours à l'étude.

3.3.5 Particules de spin-1 à $(1+3)$ dimensions

En suivant exactement la même procédure que dans la partie précédente, nous pouvons aussi montrer que l'équation de DKP à $(1+3)$ dimensions est équivalente à un système d'équations différentielles du second ordre à quatre composantes.

L'équation de DKP pour les particules de spin-1 à $(1+3)$ dimensions en présence d'une interaction électromagnétique est la suivante

$$\left(i\beta^0\mathcal{D}_0 + i\beta^1\mathcal{D}_1 + i\beta^2\mathcal{D}_2 + i\beta^3\mathcal{D}_3 - m\right)\psi = 0, \quad (3.156)$$

où $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ sont les dérivées covariantes, m est la masse de la particule, ψ est la fonction d'onde de DKP et β^0, β^1, β^2, β^3 sont des matrices 10×10 données par

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \ \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, 3 \qquad (3.157)$$

dans lequel $\bar{0}$ et e_i prennent la forme

$$\bar{0} = (0, 0, 0), \qquad e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 1),$$

et $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{I}$ sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de dimensions 3×3, tandis que s_i sont des matrices écrites de la manière suivante

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la fonction d'onde de DKP à dix composantes, l'équation (3.156) peut être écrite sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre couplées comme

$$\begin{cases} i\mathcal{D}_1\psi_5 + i\mathcal{D}_2\psi_6 + i\mathcal{D}_3\psi_7 - m\psi_1 = 0, & (3.158) \\ i\mathcal{D}_0\psi_5 - i\mathcal{D}_3\psi_9 + i\mathcal{D}_2\psi_{10} - m\psi_2 = 0, & (3.159) \\ i\mathcal{D}_0\psi_6 + i\mathcal{D}_3\psi_8 - i\mathcal{D}_1\psi_{10} - m\psi_3 = 0, & (3.160) \\ i\mathcal{D}_0\psi_7 - i\mathcal{D}_2\psi_8 + i\mathcal{D}_1\psi_9 - m\psi_4 = 0, & (3.161) \\ -i\mathcal{D}_1\psi_1 + i\mathcal{D}_0\psi_2 - m\psi_5 = 0, & (3.162) \\ -i\mathcal{D}_2\psi_1 + i\mathcal{D}_0\psi_3 - m\psi_6 = 0, & (3.163) \\ -i\mathcal{D}_3\psi_1 + i\mathcal{D}_0\psi_4 - m\psi_7 = 0, & (3.164) \\ -i\mathcal{D}_3\psi_3 + i\mathcal{D}_2\psi_4 - m\psi_8 = 0, & (3.165) \\ i\mathcal{D}_3\psi_2 - i\mathcal{D}_1\psi_4 - m\psi_9 = 0, & (3.166) \\ -i\mathcal{D}_2\psi_2 + i\mathcal{D}_1\psi_3 - m\psi_{10} = 0. & (3.167) \end{cases}$$

Comme dans le cas des particules de spin-1 à $(1+1)$ et $(1+2)$ dimensions, les dix composantes $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})$ ne sont pas indépendantes les unes des autres.

A partir des équations (3.162)-(3.167), on peut facilement voir que les composantes $\psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8$, ψ_9 et ψ_{10} dépendent des composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 comme

$$\begin{cases} \psi_5 = \dfrac{i}{m}\left(-\mathcal{D}_1\psi_1 + \mathcal{D}_0\psi_2\right), & (3.168) \\ \psi_6 = \dfrac{i}{m}\left(-\mathcal{D}_2\psi_1 + \mathcal{D}_0\psi_3\right), & (3.169) \\ \psi_7 = \dfrac{i}{m}\left(-\mathcal{D}_3\psi_1 + \mathcal{D}_0\psi_4\right), & (3.170) \\ \psi_8 = \dfrac{i}{m}\left(-\mathcal{D}_3\psi_3 + \mathcal{D}_2\psi_4\right), & (3.171) \\ \psi_9 = \dfrac{i}{m}\left(\mathcal{D}_3\psi_2 - \mathcal{D}_1\psi_4\right), & (3.172) \\ \psi_{10} = \dfrac{i}{m}\left(-\mathcal{D}_2\psi_2 + \mathcal{D}_1\psi_3\right). & (3.173) \end{cases}$$

La substitution des composantes $\psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9$ et ψ_{10} du système ci-dessus dans les équations (3.158)-(3.161), conduit au système d'équations différentielles du second ordre pour les composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4

$$\begin{cases} \left(\mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2 + \mathcal{D}_3^2 - m^2\right)\psi_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{D}_0\psi_2 - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_0\psi_3 - \mathcal{D}_3\mathcal{D}_0\psi_4 = 0, & (3.174) \\ \mathcal{D}_0\mathcal{D}_1\psi_1 - \left(\mathcal{D}_0^2 - \mathcal{D}_2^2 - \mathcal{D}_3^2 + m^2\right)\psi_2 - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\psi_3 - \mathcal{D}_3\mathcal{D}_1\psi_4 = 0, & (3.175) \\ \mathcal{D}_0\mathcal{D}_2\psi_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\psi_2 - \left(\mathcal{D}_0^2 - \mathcal{D}_1^2 - \mathcal{D}_3^2 + m^2\right)\psi_3 - \mathcal{D}_3\mathcal{D}_2\psi_4 = 0, & (3.176) \\ \mathcal{D}_0\mathcal{D}_3\psi_1 - \mathcal{D}_1\mathcal{D}_3\psi_2 - \mathcal{D}_2\mathcal{D}_3\psi_3 + \left(-\mathcal{D}_0^2 + \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2 - m^2\right)\psi_4 = 0. & (3.177) \end{cases}$$

A présent, nous donnons quelques remarques sur la résolution de l'équation de DKP pour les particules de spin-1 à $(1+3)$ dimensions en présence d'une interaction électromagnétique. Plus précisément

- Si la fonction d'onde ψ est une solution de l'équation de DKP (3.156), alors les composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 sont des solutions du système d'équations (3.174)-(3.177), où les composantes ψ_5, ψ_6, ψ_7, ψ_8, ψ_9 et ψ_{10} vérifient le système d'équations (3.168)-(3.173).
- Inversement, si les composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 sont des solutions du système d'équations (3.174)-(3.177), alors la fonction d'onde ψ est une solution de l'équation de DKP (3.156), où les composantes $\psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9$ et ψ_{10} sont données par le système d'équations (3.168)-(3.173).

A partir de ce qui précède, nous concluons que pour résoudre l'équation de DKP (3.156), i.e. le système d'équations (3.158)-(3.167), il suffit de résoudre le système d'équations (3.174)-(3.177), où les composantes ψ_5, ψ_6, ψ_7, ψ_8, ψ_9 et ψ_{10} sont données par le système d'équations (3.168)-(3.173). Autrement dit, résoudre l'équation de DKP pour les particules de spin-1 à $(1+3)$ dimensions en présence d'une interaction électromagnétique est équivalent à résoudre un système d'équations différentielles du second ordre à quatre composantes.

3.3.6 Applications

3.3.6.1 Particules libres

Avec des arguments similaires à ceux utilisés dans le cas des particules libres présentés dans la sous-section 3.3.4, qui indiquent d'utiliser les dérivées ∂_μ au lieu des dérivées covariantes $\mathcal{D}_\mu$ dans les systèmes obtenus ci-dessus, on peut passer du cas de l'interaction électromagnétique au cas libre. Sur cette base, l'équation de DKP (3.156) est écrit dans le cas des particules libres

$$\left(i\beta^0\partial_0 + i\beta^1\partial_1 + i\beta^2\partial_2 + i\beta^3\partial_3 - m\right)\psi = 0. \tag{3.178}$$

Ce qui implique que le système d'équations (3.158)-(3.167) devient

$$\begin{cases} i\partial_1\psi_5 + i\partial_2\psi_6 + i\partial_3\psi_7 - m\psi_1 = 0, & (3.179)\\ i\partial_0\psi_5 - i\partial_3\psi_9 + i\partial_2\psi_{10} - m\psi_2 = 0, & (3.180)\\ i\partial_0\psi_6 + i\partial_3\psi_8 - i\partial_1\psi_{10} - m\psi_3 = 0, & (3.181)\\ i\partial_0\psi_7 - i\partial_2\psi_8 + i\partial_1\psi_9 - m\psi_4 = 0, & (3.182)\\ -i\partial_1\psi_1 + i\partial_0\psi_2 - m\psi_5 = 0, & (3.183)\\ -i\partial_2\psi_1 + i\partial_0\psi_3 - m\psi_6 = 0, & (3.184)\\ -i\partial_3\psi_1 + i\partial_0\psi_4 - m\psi_7 = 0, & (3.185)\\ -i\partial_3\psi_3 + i\partial_2\psi_4 - m\psi_8 = 0, & (3.186)\\ i\partial_3\psi_2 - i\partial_1\psi_4 - m\psi_9 = 0, & (3.187)\\ -i\partial_2\psi_2 + i\partial_1\psi_3 - m\psi_{10} = 0, & (3.188) \end{cases}$$

tandis que le système d'équations (3.168)-(3.173) prend la forme

$$\begin{cases} \psi_5 = \dfrac{i}{m}\left(-\partial_1\psi_1 + \partial_0\psi_2\right), & (3.189)\\ \psi_6 = \dfrac{i}{m}\left(-\partial_2\psi_1 + \partial_0\psi_3\right), & (3.190)\\ \psi_7 = \dfrac{i}{m}\left(-\partial_3\psi_1 + \partial_0\psi_4\right), & (3.191)\\ \psi_8 = \dfrac{i}{m}\left(-\partial_3\psi_3 + \partial_2\psi_4\right), & (3.192)\\ \psi_9 = \dfrac{i}{m}\left(\partial_3\psi_2 - \partial_1\psi_4\right), & (3.193)\\ \psi_{10} = \dfrac{i}{m}\left(-\partial_2\psi_2 + \partial_1\psi_3\right). & (3.194) \end{cases}$$

Ainsi, le système d'équations (3.174)-(3.177) sera

$$\begin{cases} \left(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2-m^2\right)\psi_1-\partial_1\partial_0\psi_2-\partial_2\partial_0\psi_3-\partial_3\partial_0\psi_4=0, & (3.195)\\ \partial_0\partial_1\psi_1-\left(\partial_0^2-\partial_2^2-\partial_2+m^2\right)\psi_2-\partial_2\partial_1\psi_3-\partial_3\partial_1\psi_4=0, & (3.196)\\ \partial_0\partial_2\psi_1-\partial_1\partial_2\psi_2-\left(\partial_0^2-\partial_1^2-\partial_3^2+m^2\right)\psi_3-\partial_3\partial_2\psi_4=0, & (3.197)\\ \partial_0\partial_3\psi_1-\partial_1\partial_3\psi_2-\partial_2\partial_3\psi_3+\left(-\partial_0^2+\partial_1^2+\partial_2^2-m^2\right)\psi_4=0. & (3.198)\end{cases}$$

Dans le contexte de ce qui a été atteint, nous pouvons présenter quelques remarques notables sur la résolution de l'équation de DKP pour les particules libres. Plus clairement, des équations (3.179)-(3.182), on peut facilement déduire que les composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 doivent vérifier la relation

$$\partial_0\psi_1-\partial_1\psi_2-\partial_2\psi_3-\partial_3\psi_4=0. \tag{3.199}$$

Grâce à la relation ci-dessus, le système d'équations (3.195)-(3.198) devient

$$\begin{cases} (\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\psi_1=0, & & (3.200)\\ (\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\psi_2=0, & \mu=0,1,2,3 & (3.201)\\ (\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\psi_3=0, & & (3.202)\\ (\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\psi_4=0. & & (3.203)\end{cases}$$

Ce système indique que chaque composante ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 est une solution de l'équation libre de KG.

Ainsi, d'après le système d'équations (3.189)-(3.194), les composantes ψ_5, ψ_6, ψ_7, ψ_8, ψ_9 et ψ_{10} sont également des solutions de l'équation libre de KG.

Plus brièvement, nous pouvons dire de ce qui précède que toutes les composantes correspondant à la fonction d'onde ψ de l'équation libre de DKP à $(1+3)$ dimensions sont des solutions de l'équation libre de KG.

Inversement, pour les composantes φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 et φ_6 solutions de l'équation libre de KG, on peut choisir les composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 solutions de l'équation libre de KG telles que

$$\begin{cases} \psi_1=\dfrac{-1}{m^2}\left(\partial_1\varphi_1+\partial_2\varphi_2+\partial_3\varphi_3\right), & (3.204)\\ \psi_2=\dfrac{-1}{m^2}\left(\partial_0\varphi_1-\partial_2\varphi_4+\partial_3\varphi_5\right), & (3.205)\\ \psi_3=\dfrac{-1}{m^2}\left(\partial_0\varphi_2+\partial_1\varphi_4+\partial_3\varphi_6\right), & (3.206)\\ \psi_4=\dfrac{-1}{m^2}\left(\partial_0\varphi_3-\partial_1\varphi_5-\partial_2\varphi_6\right), & (3.207)\end{cases}$$

dans laquelle la relation (3.199) est vérifiée et les composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 sont des solutions du système d'équations (3.195)-(3.198).

Dans ce cadre, nous concluons que la fonction d'onde ψ est une solution de l'équation libre de DKP (3.178), i.e. le système d'équations (3.179)-(3.188), où les composantes ψ_5, ψ_6, ψ_7, ψ_8, ψ_9 et ψ_{10} sont données par le système d'équations (3.189)-(3.194).

Enfin, la conclusion générale qui peut être tirée dans ce cas est que chaque composante de la fonction d'onde ψ de l'équation libre de DKP à $(1+3)$ dimensions est une solution de l'équation libre de KG. Alors, si nous avons une solution à l'équation libre de KG, nous pouvons trouver une solution à l'équation libre de DKP.

Il faut mentionner ici que, par les mêmes étapes suivies pour l'équation de DKP à $(1 + 2)$ dimensions dans le cas des particules libres, nous avons pu prouver que chaque composante de la fonction d'onde ψ de l'équation libre de DKP à $(1 + 3)$ dimensions est une solution de l'équation libre de KG. Cela a été prouvé en s'appuyant sur l'équation de DKP elle-même i.e. avec une approche complètement différente de celle prise dans la référence [70].

3.3.6.2 Solution du type Volkov

Dans cette partie, à titre d'application, nous essayons de calculer la solution du type Volkov du système d'équations (3.158)-(3.167), i.e.

$$\begin{cases} i\mathcal{D}_1\psi_5 + i\mathcal{D}_2\psi_6 + i\mathcal{D}_3\psi_7 - m\psi_1 = 0, \\ i\mathcal{D}_0\psi_5 - i\mathcal{D}_3\psi_9 + i\mathcal{D}_2\psi_{10} - m\psi_2 = 0, \\ i\mathcal{D}_0\psi_6 + i\mathcal{D}_3\psi_8 - i\mathcal{D}_1\psi_{10} - m\psi_3 = 0, \\ i\mathcal{D}_0\psi_7 - i\mathcal{D}_2\psi_8 + i\mathcal{D}_1\psi_9 - m\psi_4 = 0, \\ -i\mathcal{D}_1\psi_1 + i\mathcal{D}_0\psi_2 - m\psi_5 = 0, \\ -i\mathcal{D}_2\psi_1 + i\mathcal{D}_0\psi_3 - m\psi_6 = 0, \\ -i\mathcal{D}_3\psi_1 + i\mathcal{D}_0\psi_4 - m\psi_7 = 0, \\ -i\mathcal{D}_3\psi_3 + i\mathcal{D}_2\psi_4 - m\psi_8 = 0, \\ i\mathcal{D}_3\psi_2 - i\mathcal{D}_1\psi_4 - m\psi_9 = 0, \\ -i\mathcal{D}_2\psi_2 + i\mathcal{D}_1\psi_3 - m\psi_{10} = 0. \end{cases}$$

Selon les résultats obtenus précédemment, notre étude se limite à résoudre le système d'équations différentielles du second ordre à quatre composantes (3.174)-(3.177), à savoir

$$\begin{cases} \left(\mathcal{D}_1^2+\mathcal{D}_2^2+\mathcal{D}_3^2-m^2\right)\psi_1-\mathcal{D}_1\mathcal{D}_0\psi_2-\mathcal{D}_2\mathcal{D}_0\psi_3-\mathcal{D}_3\mathcal{D}_0\psi_4=0,\\ \mathcal{D}_0\mathcal{D}_1\psi_1-\left(\mathcal{D}_0^2-\mathcal{D}_2^2-\mathcal{D}_3^2+m^2\right)\psi_2-\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\psi_3-\mathcal{D}_3\mathcal{D}_1\psi_4=0,\\ \mathcal{D}_0\mathcal{D}_2\psi_1-\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\psi_2-\left(\mathcal{D}_0^2-\mathcal{D}_1^2-\mathcal{D}_3^2+m^2\right)\psi_3-\mathcal{D}_3\mathcal{D}_2\psi_4=0,\\ \mathcal{D}_0\mathcal{D}_3\psi_1-\mathcal{D}_1\mathcal{D}_3\psi_2-\mathcal{D}_2\mathcal{D}_3\psi_3+\left(-\mathcal{D}_0^2+\mathcal{D}_1^2+\mathcal{D}_2^2-m^2\right)\psi_4=0. \end{cases}$$

A cette fin, nous cherchons des solutions au système ci-dessus sous la forme

$$\psi_n=C_ne^{-ip\cdot x}F_n(\phi),\qquad \text{pour}\quad \phi=k\cdot x\quad \text{et}\quad n=1,2,3,4, \tag{3.208}$$

où C_n sont des constantes de normalisation, p, x, k sont des quadrivecteurs constants, ϕ est une onde plane et $F_n(\phi)$ sont des fonctions.

La substitution des composantes ψ_n par leurs formes (3.208) dans le système d'équations (3.174)-(3.177), conduit au système d'équations différentielles du second ordre couplées pour les fonctions F_n

$$\begin{cases} k_0\left[k_0F_1''+k_1F_2''+k_2F_3''+k_3F_4''\right]-2ik_0\mathcal{P}_0F_1'-i\left[k_1\mathcal{P}_0+k_0\mathcal{P}_1\right]F_2'-\\ i\left[k_2\mathcal{P}_0+k_0\mathcal{P}_2\right]F_3'-i\left[k_3\mathcal{P}_0+k_0\mathcal{P}_3\right]F_4'+\left[iek_0A_0'-\mathcal{P}_0^2\right]F_1+\\ \left[iek_1A_0'-\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1\right]F_2+\left[iek_2A_0'-\mathcal{P}_0\mathcal{P}_2\right]F_3+\left[iek_3A_0'-\mathcal{P}_0\mathcal{P}_3\right]F_4+\\ \boldsymbol{2i(kp)F_1'+\left[-2e(pA)+e^2A^2\right]F_1}=0. & (3.209)\\ -k_1[k_0F_1''+k_1F_2''+k_2F_3''+k_3F_4'']+i\left[k_0\mathcal{P}_1+k_1\mathcal{P}_0\right]F_1'+2ik_1\mathcal{P}_1F_2'+\\ i\left[k_2\mathcal{P}_1+k_1\mathcal{P}_2\right]F_3'+i\left[k_3\mathcal{P}_1+k_1\mathcal{P}_3\right]F_4'+\left[-iek_0A_1'+\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1\right]F_1+\\ \left[-iek_1A_1'+\mathcal{P}_1^2\right]F_2+\left[-iek_2A_1'+\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\right]F_3+\left[-iek_3A_1'+\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3\right]F_4+\\ \boldsymbol{2i(kp)F_2'+\left[-2e(pA)+e^2A^2\right]F_2}=0. & (3.210)\\ -k_2[k_0F_1''+k_1F_2''+k_2F_3''+k_3F_4'']+i\left[k_0\mathcal{P}_2+k_2\mathcal{P}_0\right]F_1'+i\left[k_1\mathcal{P}_2+k_2\mathcal{P}_1\right]F_2'-\\ 2ik_2\mathcal{P}_2F_3'+i\left[k_3\mathcal{P}_2+k_2\mathcal{P}_3\right]F_4'+\left[-iek_0A_2'+\mathcal{P}_0\mathcal{P}_2\right]F_1+\left[-iek_1A_2'+\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\right]F_2+\\ \left[-iek_2A_2'+\mathcal{P}_2^2\right]F_3+\left[-iek_3A_2'+\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\right]F_4+\\ \boldsymbol{2i(kp)F_3'+\left[-2e(pA)+e^2A^2\right]F_3}=0. & (3.211)\\ -k_3[k_0F_1''+k_1F_2''+k_2F_3''+k_3F_4'']+i\left[k_0\mathcal{P}_3+k_3\mathcal{P}_0\right]F_1'+i\left[k_1\mathcal{P}_3+k_3\mathcal{P}_1\right]F_2'+\\ i\left[k_2\mathcal{P}_3+k_3\mathcal{P}_2\right]F_3'+2ik_3\mathcal{P}_3F_4'+\left[-iek_0A_3'+\mathcal{P}_0\mathcal{P}_3\right]F_1+\left[-iek_1A_3'+\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3\right]F_2+\\ \left[-iek_2A_3'+\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3\right]F_3+\left[-iek_3A_3'+\mathcal{P}_3^2\right]F_4+\\ \boldsymbol{2i(kp)F_4'+\left[-2e(pA)+e^2A^2\right]F_4}=0. & (3.212) \end{cases}$$

Pour une écriture plus simple, nous avons adopté les notations : $\mathcal{P}_i=(p_i-eA_i(\phi)), i=0,1,2,3,$ et F_n au lieu de $F_n(\phi)$.

D'autre part, en additionnant le produit des équations (3.209), (3.210), (3.211), (3.212) par k_0, k_1, k_2, k_3 respectivement et en utilisant la condition $k^2 = 0$, on trouve que

$$i(kp)\left[k_0F_1' + k_1F_2' + k_2F_3' + k_3F_4'\right] + \left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[k_0F_1 + k_1F_2 + k_2F_3 + k_3F_4\right] - (kp)\left[\mathcal{P}_0F_1 + \mathcal{P}_1F_2 + \mathcal{P}_2F_3 + \mathcal{P}_3F_4\right] = 0.$$

Puis, en additionnant le produit des équations (3.209), (3.210), (3.211), (3.212) par A_0, A_1, A_2, A_3 respectivement et en utilisant le fait que $k \cdot A = 0$, on aura

$$\left[-i(pA) + ieA^2\right]\left[k_0F_1' + k_1F_2' + k_2F_3' + k_3F_4'\right] + 2i(kp)\left[A_0F_1' + A_1F_2' + A_2F_3' + A_3F_4'\right] + ie(AA')\left[k_0F_1 + k_1F_2 + k_2F_3 + k_3F_4\right] + \left[-(pA) + eA^2\right]\left[\mathcal{P}_0F_1 + \mathcal{P}_1F_2 + \mathcal{P}_2F_3 + \mathcal{P}_3F_4\right] + \left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[A_0F_1 + A_1F_2 + A_2F_3 + A_3F_4\right] = 0.$$

Enfin, en additionnant le produit des équations (3.209), (3.210), (3.211), (3.212) par A_0', A_1', A_2', A_3' respectivement et en employant la condition de jauge de Lorenz $k \cdot A' = 0$, on obtient

$$\left[-i(pA') + ie(AA')\right]\left[k_0F_1' + k_1F_2' + k_2F_3^{'} + k_3F_4'\right] + 2i(kp)\left[A_0'F_1' + A_1'F_2' + A_2'F_3' + A_3'F_4'\right] + ieA'^2\left[k_0F_1 + k_1F_2 + k_2F_3 + k_3F_4\right] + \left[-(pA') + e(AA')\right]\left[\mathcal{P}_0F_1 + \mathcal{P}_1F_2 + \mathcal{P}_2F_3 + \mathcal{P}_3F_4\right] + \left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[A_0'F_1 + A_1'F_2 + A_2'F_3 + A_3'F_4\right] = 0.$$

A l'aide de ces équations, le système d'équations (3.209)-(3.212) est réduit au système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases}
i(kp)\left[k_0F_1' + k_1F_2' + k_2F_3' + k_3F_4'\right] + \left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[k_0F_1 + k_1F_2 + k_2F_3 + k_3F_4\right] \\
-(kp)\left[\mathcal{P}_0F_1 + \mathcal{P}_1F_2 + \mathcal{P}_2F_3 + \mathcal{P}_3F_4\right] = 0. & (3.213) \\
\left[-i(pA) + ieA^2\right]\left[k_0F_1' + k_1F_2' + k_2F_3' + k_3F_4'\right] + 2i(kp)\left[A_0F_1' + A_1F_2' + A_2F_3' + A_3F_4'\right] \\
+ie(AA')\left[k_0F_1 + k_1F_2 + k_2F_3 + k_3F_4\right] + \left[-(pA) + eA^2\right]\left[\mathcal{P}_0F_1 + \mathcal{P}_1F_2 + \mathcal{P}_2F_3 + \mathcal{P}_3F_4\right] \\
+\left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[A_0F_1 + A_1F_2 + A_2F_3 + A_3F_4\right] = 0. & (3.214) \\
\left[-i(pA') + ie(AA')\right]\left[k_0F_1' + k_1F_2' + k_2F_3^{'} + k_3F_4'\right] + 2i(kp)\left[A_0'F_1' + A_1'F_2' + A_2'F_3' + A_3'F_4'\right] \\
+ieA'^2\left[k_0F_1 + k_1F_2 + k_2F_3 + k_3F_4\right] + \left[-(pA') + e(AA')\right]\left[\mathcal{P}_0F_1 + \mathcal{P}_1F_2 + \mathcal{P}_2F_3 + \mathcal{P}_3F_4\right] \\
+\left[-2e(pA) + e^2A^2\right]\left[A_0'F_1 + A_1'F_2 + A_2'F_3 + A_3'F_4\right] = 0. & (3.215) \\
k_0\left[k_0F_1'' + k_1F_2'' + k_2F_3'' + k_3F_4''\right] - 2ik_0\mathcal{P}_0F_1' - i\left[k_1\mathcal{P}_0 + k_0\mathcal{P}_1\right]F_2' - i\left[k_2\mathcal{P}_0 + k_0\mathcal{P}_2\right]F_3' \\
-i\left[k_3\mathcal{P}_0 + k_0\mathcal{P}_3\right]F_4' + \left[iek_0A_0' - \mathcal{P}_0^2\right]F_1 + \left[iek_1A_0' - \mathcal{P}_0\mathcal{P}_1\right]F_2 + \left[iek_2A_0' - \mathcal{P}_0\mathcal{P}_2\right]F_3 \\
+\left[iek_3A_0' - \mathcal{P}_0\mathcal{P}_3\right]F_4 + 2i(kp)F_1' + \left[-2e(pA) + e^2A^2\right]F_1 = 0. & (3.216)
\end{cases}$$

Ainsi, la résolution du système d'équations (3.213)-(3.216) permet de trouver les composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 qui représentent les solutions du système d'équations (3.174)-(3.177). L'utilisation du système d'équations (3.168)-(3.173) permet également de trouver les autres composantes. Dans ce cadre, nous pouvons trouver la solution du type Volkov de l'équation de DKP (3.156) i.e. au système d'équations (3.158)-(3.167). Comme dans le cas de l'équation de DKP à $(1+2)$ dimensions, la résolution du système d'équations (3.213)-(3.216) est encore à l'étude en raison de sa difficulté.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, nous avons mis en évidence certains aspects importants liés aux équations de la mécanique quantique relativiste qui ont laissé beaucoup de place pour de nouvelles recherches et investigations. Plus précisément, nous avons étudié et résolu l'équation de Dirac et l'équation de DKP dans une perspective de recherche nouvelle et différente. Bien que l'équation de DKP soit semblable à celle de Dirac, nous avons traité chaque équation dans un cadre particulier qui est complètement différent de l'autre.

Afin que la thèse soit très claire, nous avons introduit plusieurs notions et concepts de la mécanique quantique, ainsi que quelques outils mathématiques et résultats auxiliaires nécessaires. Nous avons également fourni un aperçu des équations que nous avons abordées dans notre recherche. Ensuite, nous avons présenté nos résultats et contributions en détail dans deux chapitres distincts.

Dans le chapitre deux, nous avons résolu l'équation de Dirac avec des potentiels scalaires et vectoriels non centraux, un potentiel de Cornell généralisé en forme de double anneau modifié, dans le cadre de problèmes quasi-exactement résolubles. Au cours de notre étude, nous avons pris le cas de la symétrie du spin où l'équation de Dirac a été convertie en une équation du type Schrödinger. Dans ce contexte, à l'aide des coordonnées sphériques, nous avons cherché à présenter les solutions de l'équation azimutale, polaire et radiale correspondante à l'équation de Dirac d'une manière claire et explicite. A cette fin, nous avons adopté deux méthodes mathématiques qui, à leur tour, nous ont permis de faire des progrès dans la résolution de chacune de ces équations. Plus précisément, les solutions de l'équation azimutale et polaire ont été établies en utilisant la méthode fonctionnelle de l'ansatz de Bethe et les solutions de l'équation radiale ont été déterminées en utilisant l'équation différentielle de Heun biconfluente. Sur la base de ces solutions, nous avons présenté les solutions des états liés et leurs valeurs propres d'énergie relativistes correspondantes. Afin d'illustrer la précision de nos résultats et l'enrichir, nous avons introduit quelques résultats numériques. Il convient de noter que nos résultats présentés dans ce chapitre incluent, en tant que cas général, plusieurs modèles de potentiels spécifiques. Parmi lesquels, les douze potentiels susmentionnés comme des cas particuliers.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié et résolu l'équation de DKP pour les particules de spin-0 et de spin-1 dans toutes les dimensions. Pour les particules de spin-0 à $(1+3)$ dimensions et de spin-1 à $(1+1)$ dimensions, nous avons établi une relation explicite entre l'équation de DKP et l'équation de KG en présence d'une interaction électromagnétique. Cette relation représentée par le fait que toutes les composantes de la solution de l'équation de DKP sont des solutions de l'équation de KG. Pour enrichir davantage notre étude, nous avons utilisé cette relation dans deux applications différentes. La première application consiste à calculer la solution du type Volkov de l'équation de DKP dans le champ d'une onde électromagnétique plane et la deuxième consiste à résoudre l'équation de DKP pour un puits de potentiel carré avec une masse dépendante de la position [16]. Pour les particules de spin-0 à $(1+3)$ dimensions, nous avons adopté les deux applications, tandis que pour les particules de spin-1 à $(1+1)$ dimensions nous n'avons adopté que la deuxième. D'autre part, pour les particules de spin-1 à $(1+2)$ dimensions et à $(1+3)$ dimensions, nous avons montré que résoudre l'équation de DKP en présence d'une interaction électromagnétique, i.e. résoudre le système de dix équations différentielles du premier ordre couplées, équivaut à résoudre respectivement un système d'équations différentielles du second ordre à trois composantes et un système d'équations différentielles du second ordre à quatre composantes. Autrement dit, la résolution de l'équation de DKP pour les particules de spin-1 en présence d'une interaction électromagnétique est limitée à la résolution d'un système d'équations à trois composantes dans les dimensions $(1+2)$ et un système d'équations à quatre composantes dans les dimensions $(1+3)$. Selon cela, comme première application pratique, nous avons conclu que chaque composante de la fonction d'onde ψ de l'équation libre de DKP est une solution de l'équation libre de KG. Bien que ce résultat soit quelque peu identique à ce qui est énoncé dans la référence [70], mais l'approche adoptée ici est très différente de celle qui y est appliquée. Dans cette référence, les opérateurs de projection ont été utilisés alors qu'ici nous avons adopté sur les relations explicites entre les composantes de la fonction d'onde de l'équation de DKP. Dans la deuxième application, nous avons essayé de calculer la solution du type Volkov de l'équation de DKP dans les deux dimensions.

Comme perspectives, nous espérons continuer à étudier de nombreuses équations, non seulement les équations de la mécanique quantique, mais d'autres types d'équations aux dérivées partielles qui nécessitent une étude plus approfondie, que ce soit en physique ou dans d'autres domaines.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Fabre, C. Antoine, N. Treps, *Introduction à la physique moderne : relativité et physique quantique*, Dunod, France, 2015.

[2] J. Agar, *Science in the 20th Century and Beyond*, Polity Press, Cambridge, 2012.

[3] J. N. Roux, S. Rodts, G. Stoltz , *Introduction à la physique statistique et à la physique quantique*, Paris, France, 2019.

[4] M. Kumar, *Le grand roman de la physique quantique*, Flammarion, France, 2012.

[5] E. Schrödinger, *An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules*, Phys. Rev., **28**, 1049 (1926).

[6] F. J. Ynduráin, *Relativistic Quantum Mechanics and Introduction to Field Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[7] P. A. M. Dirac, *The quantum theory of the electron*, Proc. R. Soc. Lond. A., **117**, 610 (1928).

[8] P. A. M. Dirac, *The quantum theory of the electron*, Part II, Proc. R. Soc. Lond. A., **118**, 351 (1928).

[9] R. J. Duffin, *On the characteristic matrices of covariant systems*, Phys. Rev., **54**, 1114 (1938).

[10] N. Kemmer, *The particle aspect of meson theory*, Proc. R. Soc. A., **173**, 91 (1939).

[11] G. Petiau, *Contribution à la théorie des équations d'ondes corpusculaires*, Ph.D. thesis, Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect., 8, 16 (1936).

[12] L. P. de Oliveira, *Quantum dynamics of relativistic bosons through nonminimal vector square potentials*, Ann. Phys., **372**, 320 (2016).

[13] Y. Kasri, L. Chetouani, *Energy spectrum of the relativistic Duffin-Kemmer-Petiau equation*, Int. J. Theor. Phys., **47**, 2249 (2008).

[14] D. Bouchefra, B. Boudjedaa, *Bound states of the Dirac equation with non-central scalar and vector potentials : a modified double ring-shaped generalized Cornell potential*, Eur. Phys. J. Plus., **137**, 16 (2022).

[15] D. Bouchefra, B. Boudjedaa, *The explicit relation between the DKP equation and the Klein-Gordon equation*, AIP Conf. Proc., **2183**, 090004 (2019).

[16] Z. Hammoud, L. Chetouanti, *Bound states of the Duffin-Kemmer-Petiau equation for square potential well with position-dependent mass*, Turk. J. Phys., **41**, 183 (2017).

[17] M. Klasen, *Mécanique quantique relativiste*, Paris, France, 2009.

[18] E. Belorizky, *Outils mathématiques*, Grenoble, France, 2006.

[19] J. Hladik, M. Chrysos, P. E. Hladik, L. U. Ancarani, *Mécanique quantique : atomes et noyaux applications technologiques*, Dunod, France, 2009.

[20] D. Sénéchal, *Mécanique quantique*, Université de Sherbrooke, Canada, 2018.

[21] J. L. Basdevant, J. Dalibard, *Mécanique quantique*, Ecole polytechnique, France, 2002.

[22] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum mechanics*, Wiley, New York, 1977.

[23] W. Greiner, *Quantum mechanics : An introduction*, 3rd. ed., Heidelberg, Germany, 1994.

[24] D. J. Griffiths, D. F. Schroeter, *Introduction to quantum mechanics*, 3rd. ed., Cambridge university press, England, 2018.

[25] R. Shankar, *Principles of quantum mechanics*, 2nd. ed., New Haven, United states, 1994.

[26] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics : Wave equations*, 3rd. ed., Springer-Verlag, Germany, 2000.

[27] W. Pauli, V. F Weisskopf, *on quantization of the scalar relativistic wave equation*, Helv. Phys. Acta., **7**, 709 (1934).

[28] B. Thaller, *The Dirac equation*, Springer-Verlag, Germany, 1992.

[29] A. I. Breev, A. V. Shapovalov, *The Dirac equation in an external electromagnetic field : symmetry algebra and exact integration*, J. Phys. Conf. Ser., **670**, 012015 (2016).

[30] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Quantum electrodynamics*, 2nd. ed., Oxford, England, 1982.

[31] A. HIRSHFELD, *The supersymmetric Dirac equation*, London, England, 2012.

[32] D. M. VOLKOV, *On a class of solutions of the Dirac equation*, Z. Phys., **94**, 250 (1935).

[33] L. CHETOUANI, M. MERAD, T. BOUDJEDAA, A. LECHEHEB, *Solution of Duffin-Kemmer-Petiau equation for the step potential*, Int. J. Theor. Phys., **43**, 1147 (2004).

[34] J. T. LUNARDI, B. M. PIMENTEL, R. G. TEIXEIRA, *Duffin-Kemmer-Petiau equation in Riemannian space-times*, World Scientific, Singapore, 2001.

[35] N. HATAMI, M. R. SETARE, *Exact solutions for a class of quasi-exactly solvable models : A unified treatment*, Eur. Phys. J. Plus., **132**, 311 (2017).

[36] Y. Z. ZHANG, *Exact polynomial solutions of second order differential equations and their applications*, J. Phys. A., **45**, 065206 (2012).

[37] A. RONVEAUX, *Heun's differential equations*, Oxford, New York, 1995.

[38] E. R. ARRIOLA, A. ZARZO, J. S. DEHESA, *Spectral properties of the biconfluent Heun differential equation*, J. Comput. Appl. Math., **37**, 161 (1991).

[39] F. CARUSO, J. MARTINS, V. OGURI, *Solving a two-electron quantum dot model in terms of polynomial solutions of a Biconfluent Heun equation*, Ann. Phys., **347**, 130 (2014).

[40] A. D. ALHAIDARI, *Solution of the Dirac equation by separation of variables in spherical coordinates for a large class of non-central electromagnetic potentials*, Ann. Phys., **320**, 453 (2005).

[41] H. HASSANABADI, E. MAGHSOODI, S. ZARRINKAMAR, *Dirac equation with vector and scalar cornell potentials and an external magnetic field*, Ann. Phys. (Berlin)., **525**, 944 (2013).

[42] F. YASUK, I. BOZTOSUN, A. DURMUS, *Orthogonal polynomial solutions to the non-central modified Kratzer potential*, [arXiv : quant-ph/0605007].

[43] X. Q. HU, G. LUO, Z. M. WU, L. B. NIU, Y. MA, *Solving Dirac equation with new ring-shaped non-spherical harmonic oscillator potential*, Commun. Theor. Phys., **53**, 242 (2010).

[44] H. BOSCHI-FILHO, A. N. VAIDYA, *Algebraic solution of an anisotropic ring-shaped oscillator*, Phys. Lett. A., **145**, 69 (1990).

[45] Y. KASRI, L. CHETOUANI, *Application of the exact quantization rule for some noncentral separable potentials*, Can. J. Phys., **86**, 1803 (2008).

[46] H. Hassanabadi, E. Maghsoodi, S. Zarrinkamar, *Approximate solutions of Dirac equation with a ring-shaped Woods-Saxon potential by Nikiforov-Uvarov method*, Chin. Phys. C., **37**, 113104 (2013).

[47] A. Schulze-Halberg, *Exactly solvable combinations of scalar and vector potentials for the Dirac equation interrelated by Riccati equations*, Chin. Phys. Lett., **23**, 1365 (2006).

[48] A. V. Turbiner, *Quantum mechanics : problems intermediate between exactly solvable and completely unsolvable*, Sov. Phys. JETP., **67**, 230 (1988).

[49] A. V. Turbiner, *Quasi-exactly-solvable problems and sl(2) algebra*, Commun. Math. Phys., **118**, 467 (1988).

[50] A. G. Usheridze, *Quasi-exactly solvable models in quantum mechanics*, Great Britain, New York, 1994.

[51] A. V. Turbiner, *One-dimensional quasi-exactly solvable Schrödinger equations*, Phy. Rep., **642**, 71 (2016).

[52] R. Koç, M. Koca, E. Körcük, *A new class of quasi-exactly solvable potentials with a position-dependent mass*, J. Phys. A., **35**, L527 (2002).

[53] I. Bousafsaf, B. Boudjedaa, *Quasi-exactly solvable Schrödinger equation for a modified ring-shaped harmonic oscillator potential*, Eur. Phys. J. Plus., **136**, 803 (2021).

[54] W. Grenier, *Relativistic quantum mechanics*, Berlin, Germany, 2000.

[55] Y. Nedjadi, R. C. Barrett, *The Duffin-Kemmer-Petiau oscillator*, J. Phys. A., **27**, 4301 (1994).

[56] T. Nedjadi, S. Ait-Tahar, R. C. Barrett, *An extended relativistic quantum oscillator for $S = 1$ particles*, J. Phys. A., **31**, 3867 (1998).

[57] Y. Nedjadi, R. C. Barrett, *A generalized Duffin-Kemmer-Petiau oscillator*, J. Phys. A., **31**, 6717 (1998).

[58] Y. Nedjadi, R. C. Barrett, *On the properties of the Duffin-Kemmer-Petiau equation*, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys., **19**, 87 (1993).

[59] E. Fischbach, M. M. Nieto, C. K. Scott, *The association of the Sakata-Taketani (Feshbach-Villars) field with the Kemmer field, under symmetry breaking*, Prog. Theor. Phys., **48**, 574 (1972).

[60] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, J. S. Valverde, *Remarks on Duffin-Kemmer-Petiau theory and gauge invariance*, Phys. Lett. A., **268**, 165 (2000).

[61] L. B. Castro, A. S. de Castro, *Corroborating the equivalence between the Duffin-Kemmer-Petiau and the Klein-Gordon and Proca equations*, Phys. Rev. A., **90**, 022101 (2014).

[62] A. Boumali, L. Chetouani, H. Hassanabadi, *Two-dimensional Duffin-Kemmer-Petiau oscillator under an external magnetic field*, Can. J. Phys., **91**, 11 (2013).

[63] V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, *On equivalence of Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Gordon equations*, B. J. Phys., **30**, 275 (2000).

[64] M. Merad, *DKP equation with smooth potential and position-dependent mass*, Int. J. Theor. Phys., **46**, 2105 (2007).

[65] B. Boutabia-Chéraitia, T. Boudjedaa, *The Green function for the Duffin-Kemmer-Petiau equation*, J. Geom. Phys., **62**, 2038 (2012).

[66] M. Merad, H. Bada, A. Lecheheb, *DKP particle in time-dependent field*, Czech. J. Phys., **56**, 765 (2006).

[67] M. Falek, M. Merad, *Exact solution to the scalar DKP equation in* $(1+3)$*-dimensional Robertson-Walker space-time*, Int. J. Mod. Phys. A., **25**, 2747 (2010).

[68] M. de Montigny, E. S. Santoss, *On the Duffin-Kemmer-Petiau equation in arbitrary dimensions*, J. Math. Phys., **60**, 082302 (2019).

[69] J. T. Lunardi, *A note on the Duffin-Kemmer-Petiau equation in* $(1+1)$ *space-time dimensions*, J. Math. Phys., **58**, 123501 (2017).

[70] H. Umezawa, *Quantum field theory*, North-Holland, Amsterdam, 1956.

ملخص

في هذه الأطروحة، قمنا بدرسة وحل نوعين من المشاكل المرتبطة بمعادلتين أساسيتين في ميكانيكا الكم النسبية، وهما معادلة ديراك ومعادلة ديكابي. في المقام الاول، قمنا بحل معادلة ديراك مع إمكانية كورنيل المعممة في شكل حلقة مزدوجة معدلة في إطار مشاكل شبه قابلة للحل. علاوة على ذلك، تم تقديم حلول الحالات المقيدة والقيم الذاتية للطاقة المقابلة لها بالاضافة الى بعض النتائج العددية. بعد ذلك، درسنا معادلة ديكابي للجسيمات ذات اللف المغزلي 0 و اللف المغزلي 1 في وجود تفاعل كهرومغناطيسي. لإثراء الدراسة اكثر، تم تقديم العديد من التطبيقات العملية ممثلة في حساب حلول من نوع فولكوف لمعادلة ديكابي، حساب الحلول التحليلية لمعادلة ديكابي لبئر من الإمكانات المربعة مع كتلة تعتمد على الموضع وكذلك حلولها في حالة الجسيمات الحرة.

الكلمات المفتاحية:

معادلة ديراك، إمكانية كورنيل المعممة في شكل حلقة مزدوجة معدلة، مشكلة شبه قابلة للحل، معادلة ديكابي، تفاعل كهرومغناطيسي، حلول من نوع فولكوف، بئر من الإمكانات المربعة، جسيمات حرة.

Résumé

Dans cette thèse, nous avons étudié et résolu deux types de problèmes associés à deux équations fondamentales en mécanique quantique relativiste, à savoir l'équation de Dirac et l'équation de DKP. En premier lieu, nous avons résolu l'équation de Dirac avec un potentiel de Cornell généralisé en forme de double anneau modifié dans le cadre de problèmes quasi-exactement résolubles. De plus, les solutions des états liés et leurs valeurs propres d'énergie correspondantes ainsi que quelques résultats numériques ont été introduites. Par la suite, nous avons étudié l'équation de DKP pour les particules de spin-0 et de spin-1 dans toutes les dimensions en présence d'une interaction électromagnétique. Pour enrichir encore l'étude, plusieurs applications pratiques ont été présentées représentées dans le calcul des solutions du type Volkov de l'équation de DKP, le calcul des solutions analytiques de l'équation de DKP pour un puits de potentiel carré avec une masse dépendante de la position ainsi que ses solutions dans le cas des particules libres.

Mots clés :

Equation de Dirac, potentiel de Cornell généralisé en forme de double anneau modifié, problème quasi-exactement résoluble, équation de DKP, interaction électromagnétique, solutions du type Volkov, puits de potentiel carré, particules libres.

Abstract

In this thesis, we studied and solved two types of problems associated with two fundamental equations in relativistic quantum mechanics, namely the Dirac equation and the DKP equation. First, we solved the Dirac equation with a modified double ring-shaped generalized Cornell potential in the framework of quasi-exactly solvable problems. Moreover, the bound state solutions and their corresponding energy eigenvalues as well as some numerical results have been introduced. Subsequently, we studied the DKP equation for spin-0 and spin-1 particles in all dimensions in the presence of an electromagnetic interaction. To enrich the study further, several practical applications have been presented represented in the calculation of Volkov-like solutions of the DKP equation, the calculation of analytical solutions of the DKP equation for square potential well with position-dependent mass as well as its solutions in the case of free particles.

Keywords :

Dirac equation, modified double ring-shaped generalized Cornell potential, quasi-exactly solvable problem, DKP equation, electromagnetic interaction, Volkov-like solutions, square potential well, free particles.