



Thèse
Présentée pour l'obtention du Diplôme de
Doctorat
de troisième cycle (LMD)

**Contrôle et synchronisation de quelques types de
systèmes dynamiques chaotiques**

Présentée par: Messaouda Labid

Encadré par: Pr. Nasr-Eddine Hamri

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques et applications

N°	Nom & Prénom	Grade	Université	Désignation
1	Mr. Abdelouahab Mohammed Salah	Prof	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila	Président
2	Mr. Hamri Nasr-Eddine	Prof	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila	Rapporteur
3	Mr. Halim Yacine	M.C.A	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila	Examineur
4	Mr. Bellour Azzeddine	M.C.A	Ecole Normale Supérieure Assia Djebar, Constantine	Examineur
5	Mr. Berkane Abdelhak	Prof	Université Frères Mentouri	Examineur

Année Universitaire: 2020 /2021

ملخص

في العشرية الاخيرة، عرفت البحوث المتعلقة بمزامنة الفوضى انتشارا واسعا حيث قدمت العديد من الدراسات و يرجع ذلك الى تطبيقاتها المتنوعة لا سيما في مجالات الاتصالات المؤمنة، الانظمة البيولوجية، الاعلامية، و غيرها.

على هذا الاساس، اقترحت مجموعة متنوعة من النهج لتزامن الفوضى لجملتين فوضويتين، مثل المزامنة المكتملة، العامة، المتبادلة، الخ.

في هذا العمل ، درسنا تزامن نظامين يعملان على نمذجة ديناميكيات من النموذج الذي يصف سوسة النخيل الكسري المطابق من خلال تطبيق طريقة التزامن الشامل وطريقة التحكم النشط ، ثم درسنا أيضا مضاداً للتزامن بين نظامين نموذجيين كسريين متطابقين يصفان سوسة النخيل باستخدام طريقة التحكم النشط.

الكلمات المفتاحية

الفوضى، التزامن، مكافحة التزامن، التحكم النشط، أنظمة ترتيب كسري

Résumé

Dans la dernière décennie, la synchronisation du chaos a été amplement explorée et étudiée à cause de ses applications potentielles dans les communications, les systèmes biologiques, la science de l'information, etc. De ce fait, diverses approches ont été proposées pour la synchronisation des systèmes chaotiques, comme la synchronisation complète, la synchronisation généralisée, la synchronisation projective.

Dans ce travail, nous avons étudié la synchronisation de deux systèmes modélisant la dynamique d'un modèle biologique correspondant au charançon de la datte, d'ordre fractionnaires, identiques en appliquant la méthode de la synchronisation globale et la méthode du contrôleur actif, nous avons ensuite étudié également une anti-synchronisation de deux systèmes du modèle décrivant le charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques par l'utilisation de la méthode du contrôleur actif.

Mots clés

Le chaos, Synchronisation, Anti-synchronisation, Contrôle actif, Système d'ordre fractionnaire.

Abstract

In recent years, chaos synchronization has been widely explored and studied because of its potential applications, such as in secure communication, biological systems, information science. Thereby, a variety of approaches have been proposed for the synchronization of chaotic systems, such as complete synchronization, generalized synchronization and projective synchronization.

In this work, we studied the synchronization of two identical chaotic systems of the fractional-order lesser date moth model via the methods of global synchronization and active control, then we also studied an anti-synchronization of two identical chaotic systems of the fractional-order lesser date moth model via the method of active control.

Key words

Chaos, Synchronization, Anti-synchronization, Active control; Fractional-order systems.

REMERCIEMENTS

*Avant tout, je remercie infiniment Dieu, le Miséricordieux qui m'a donné la force, le courage et la réussite et qui a mis à ma disposition des gens merveilleux qui m'ont supporté et soutenu : Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sentiments les plus sincères à monsieur **N. HAMRI**, professeur au centre universitaire de Mila, sous la direction duquel j'ai eu le plaisir de travailler, ses conseils m'ont permis de mener ce travail à son terme.*

*J'exprime mes sincères remerciements également à monsieur **M. ABDELOUAHAB**, maître de conférences "A" au centre universitaire de Mila, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

*Mes remerciements vont aussi aux messieurs: **A. BERKANE**, maître de conférence "A" à l'université frères Mentouri Constantine-1, **Y. Halim**, maître de conférences "A" au centre universitaire de Mila, et **A. Bellour**, maître de conférences "A" à l'école Normale Supérieure Assia Djebar, Constantine, pour avoir accepté d'être membres du jury et pour leur volonté de lire et examiner ma thèse.*

Mes remerciements vont bien entendu à tous les enseignants du département de Mathématiques de centre universitaire de Mila. Je tiens, surtout, à adresser ma reconnaissance à mon mari, qui m'a aidé, soutenu et encouragé dans cette période. Ses encouragements m'ont été d'une aide et d'une valeur. Je sais à quel point, sans lui, je n'aurais pu mener cette thèse à son terme.

Enfin, je remercie toute ma famille, tous mes amis et tous mes collègues sans exception, qui m'ont supporté, soutenu et encouragé tout au long de ces années.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à:

Mon père

Ma mère

Ma petite famille, mon mari et mes
enfants

Mes frères et mes sœurs

Mes amis et tous ceux qui me sont
chers

Table des matières

Introduction générale	8
1 Généralités sur les systèmes dynamiques	11
1.1 Introduction	11
1.2 Définitions et notations	12
1.2.1 Représentations mathématiques	12
1.2.2 Systèmes continus et systèmes discrets	12
1.2.3 Systèmes autonomes ou non autonomes	12
1.2.4 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs	13
1.2.5 Espace de phase	13
1.2.6 Espace d'état	14
1.2.7 Flot ou système dynamique	14
1.2.8 Trajectoire et Orbite	14
1.3 Propriétés des systèmes dynamiques	14
1.3.1 Points d'équilibres	14
1.3.2 Points et ensembles limites	15
1.3.3 Portrait de phase	17
1.3.4 Cycles limites et orbite périodique	17
1.4 Invariance et attraction	18
1.4.1 Ensemble invariant	18

1.4.2	Attracteurs	18
1.4.3	Bassin d'attraction	18
1.4.4	Les propriétés d'un attracteur	18
1.4.5	Les différents types d'attracteurs	19
1.5	Étude qualitative des systèmes dynamiques	20
1.5.1	Linéarisation des systèmes dynamiques	21
1.5.2	Théorème de Hartmann-Grobman	22
1.6	Stabilité des systèmes dynamiques continus	22
1.6.1	Classification des points d'équilibres	22
1.6.2	Stabilité au sens de Lyapunov	24
1.7	La théorie des bifurcations	26
1.7.1	Définitions	27
1.7.2	Bifurcation locale	27
1.7.3	Bifurcation nœud-col	28
1.7.4	Bifurcations fourches	29
1.7.5	Bifurcations transcritiques	30
1.7.6	Bifurcation de Hopf	31
1.8	Conclusion	33
2	Théorie du chaos	34
2.1	Introduction	34
2.2	Quelques définitions du chaos	34
2.3	Caractéristiques du chaos	36
2.3.1	La non-linéarité	36
2.3.2	Le déterminisme	36
2.3.3	L'aspect aléatoire	36
2.3.4	Sensibilité aux conditions initiales	37
2.3.5	Spectre de puissance	37
2.3.6	L'attracteur étrange	37
2.4	Détection du chaos	39

2.4.1	Les exposants de Lyapunov	40
2.4.2	Dimension fractale	43
2.5	Routes vers le chaos	45
2.5.1	L'intermittence vers le chaos	45
2.5.2	Le dédoublement de période	46
2.5.3	La quasi-périodicité	46
2.6	Conclusion	46
3	Les dérivées fractionnaires	47
3.1	Introduction	47
3.2	Outils de base	47
3.2.1	La fonction Gamma	47
3.2.2	La fonction Bêta	48
3.2.3	La fonction Mittag-Leffler	48
3.2.4	La Transformée de Laplace	48
3.3	Intégration fractionnaire	49
3.3.1	Intégrale de Riemann-Liouville	49
3.4	Dérivation fractionnaire	51
3.4.1	Dérivées de Riemann-Liouville, Liouville et Caputo	52
3.4.2	Dérivées de Grünwald-Letnikov	54
3.5	Quelques propriétés de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire	56
3.6	Comparaison entre la dérivée au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville	57
3.7	Interprétation des dérivées fractionnaires	58
3.7.1	Introduction	58
3.7.2	Interprétation des intégrales fractionnaires à gauche de Riemann-Liouville (Approche de Podlubny)	59
3.7.3	Interprétation physique de l'intégrale de Stieltjes	62
3.7.4	Interprétation physique de l'intégration fractionnaire	63
3.7.5	Interprétation physique de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann- Liouville	63

3.8	Les équations différentielles fractionnaires	64
3.8.1	Problème de Cauchy	65
3.8.2	Équation différentielle fractionnaire linéaire	65
3.8.3	Équation différentielle fractionnaire de forme plus générale	65
3.9	Les systèmes différentiels d'ordre fractionnaire	66
3.9.1	Points d'équilibre et région de stabilité	67
3.9.2	Stabilité des systèmes linéaires autonomes	67
3.9.3	Conditions de stabilité de Routh-Hurwitz	70
3.9.4	Stabilité des systèmes non autonomes (version fractionnaire de la méthode directe de Lyapunov)	71
3.10	Conclusion	73
4	Synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires	75
4.1	Introduction	75
4.2	Définition de la synchronisation	76
4.2.1	Définition générale	76
4.2.2	Définitions mathématiques de la synchronisation	76
4.3	Types de synchronisation	77
4.3.1	Synchronisation complète (CS)	77
4.3.2	Anti-synchronisation	78
4.3.3	Synchronisation décalée	78
4.3.4	Synchronisation projective (PS)	79
4.3.5	Synchronisation généralisée (GS)	79
4.3.6	Synchronisation Q-S	80
4.4	Synchronisation de deux systèmes décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques par la synchronisation globale	81
4.4.1	Un critère pour la synchronisation globale dans le cas des systèmes d'ordre entier	81
4.4.2	Description du modèle décrivant la dynamique du charançon de la datte d'ordre fractionnaire	82

4.4.3	Application de la synchronisation de systèmes décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques par la synchronisation globale	84
4.5	Synchronisation et anti-synchronisation de deux systèmes décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques par le contrôleur actif	88
4.5.1	Méthode du contrôleur actif	88
4.5.2	Application de la synchronisation de systèmes décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques par le contrôleur actif	89
4.5.3	Application de l'anti-synchronisation de systèmes décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques par le contrôleur actif	92
4.6	Conclusion	93
	Conclusion générale	95
	Bibliographie	97

Table des figures

1.1	Exemple de trajectoire d'un système dynamique.	15
1.2	Orbite hétérocline et orbite homocline	16
1.3	Points fixes attracteurs.	19
1.4	Cycle limite périodique et pseudo-périodique	20
1.5	Quelques attracteurs étranges	21
1.6	Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2	23
1.7	Différents types de stabilité de Lyapunov	25
1.8	Diagramme de bifurcation nœud-col	29
1.9	Diagramme de bifurcation fourche : (a) super critique, (b) sous critique.	31
1.10	Diagramme de bifurcation transcritique	32
1.11	Diagramme de bifurcation Hopf	33
2.1	L'aspect aléatoire du système de Rössler	37
2.2	Attracteur de Plykin	39
2.3	Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov	43
3.1	Différence entre l'approche de Riemann et l'approche de Caputo	58
3.2	Grillage et ses ombres ${}_a I_t^\alpha f(t)$ et ${}_a I_t^1 f(t)$ pour $\alpha = 0.75$ et $\alpha = 1.25$, $f(t) = t + 0.5 \sin t$; $0 \leq t \leq 10$	60
3.3	Le processus de changement de la forme de la base du grillage pour : ${}_a I_t^\alpha f(t)$; $\alpha = 0.75$, $0 \leq t \leq 10$	61

3.4	Le profil du changement de l'ombre suivant le changement du grillage pour : ${}_a I_t^\alpha f(t); \alpha = 0.75, 0 \leq t \leq 10$ avec la période de temps $\Delta t = 0.5$ entre les profils	62
3.5	A : Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$ B : Domaine de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $1 < \alpha < 2$	68
4.1	Portrait de phase pour le modèle décrivant la dynamique du charançon de la datte.	84
4.2	Synchronisation de système décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identique pour $k_1 = 1.2, k_2 = 2.45, k_3 = 0.7$	87
4.3	Synchronisation de système décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identique.	91
4.4	Anti-synchronisation de système décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identique.	94

Introduction générale

Les travaux fondamentaux de Lorenz en 1963 ont donné un aperçu scientifique de reconnaissance d'un nouveau type de comportement appelé Chaos. Le chaos est un phénomène d'apparence aléatoire non linéaire qui est déterministe et très sensible aux conditions initiales. Il définit un état spécial d'un système dont le comportement imprévisible ne se répète jamais. La théorie du chaos se trouve être utile dans de nombreux domaines tels que le cryptage des données [1], les systèmes financiers [2], la biologie [3], et le génie biomédical[4].

Parallèlement aux travaux sur le chaos, une autre branche développée dans le domaine des systèmes dynamiques attire l'intérêt des chercheurs scientifiques, c'est la synchronisation. Ce phénomène est devenu un sujet de recherche actif lié au développement de la télécommunication, il a connu des améliorations très remarquables au début du XXeme siècle.

En 1990, Carroll et Pecora, pionniers de la synchronisation, avaient comme idée d'employer un signal chaotique entre deux systèmes dynamiques identiques. Le premier système produisant le signal chaotique, s'appelle le système émetteur (maître), le deuxième est le système récepteur (esclave); c'était la synchronisation identique.

D'autre part, dans la littérature, on donne souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe. Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann et de Liouville, alors que la question de la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne. En effet, l'histoire du calcul fractionnaire a plus de trois siècles. Récemment, le calcul fractionnaire a attiré une attention croissante des systèmes peuvent

être modélisés convenablement et correctement par des équation différentielles d'ordre fractionnaire, tels que les systèmes de diffusion de la chaleur [5], physiques (électricité) [6] et rhéologiques (viscoélasticité) [7]. L'étude des systèmes d'ordre fractionnaire est plus délicate que pour leurs homologues d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales et d'autre part ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe. La synchronisation du chaos, sujet important sur les applications des sciences non linéaires, a été développé et largement étudiée au cours des dernières années, car ils peuvent s'appliquer à de vastes domaines de l'ingénierie et des sciences de l'information, notamment en communication sécurisée [8] et cryptologie [9].

La synchronisation est définie comme étant un problème qui consiste à concevoir un système dit esclave dont le comportement imite un autre système (système maître). Dans la littérature, plusieurs types de synchronisation sont présentés tels que la synchronisation complète [10], l'anti-synchronisation [10], la synchronisation généralisée [11], la synchronisation projective [12], la synchronisation décalée [13] et la synchronisation **Q-S** [14], etc. À l'aide de ces types, plusieurs méthodes de contrôle ont été appliquées pour réaliser la synchronisation, à savoir le contrôle continu [15], le contrôle adaptatif [16], le contrôle de mode glissant [17]. Cependant, toutes ces méthodes de synchronisation sont seulement valides pour les systèmes chaotiques d'ordre entier qui peuvent être considérés comme un cas très particulier des systèmes chaotiques d'ordre non entier (c.à.d. ordre fractionnaire).

Cette thèse a pour objet l'étude de contrôle et synchronisation de quelques types de systèmes dynamiques chaotiques. L'objectif de cette thèse est :

- l'étude de la synchronisation de deux systèmes modélisant la dynamique du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques en appliquant la méthode de la synchronisation globale.
- l'étude de la synchronisation de deux systèmes modélisant la dynamique du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques en appliquant la méthode du contrôleur actif.
- l'étude de l'anti-synchronisation de deux systèmes modélisant la dynamique du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques en appliquant la méthode du contrôleur actif.

Ce travail est donc structuré en quatre chapitres :

Le premier chapitre est un état de l'art sur les systèmes dynamiques en général, en particulier

aux systèmes continus. Ainsi, les notions générales sur les systèmes dynamiques seront décrits.

Le deuxième chapitre sera consacré à la théorie du chaos où nous introduirons une série de définitions qui nous permettront de donner des caractérisations sur le phénomène du chaos, les propriétés du chaos seront aussi présentées suivies par les moyens de détection du chaos et le chapitre sera clôturé par les définitions des routes vers le chaos.

Le troisième chapitre sera dédié à la théorie des dérivées fractionnaires, quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma, Bêta et la fonction de Mittag-Leffler qui jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires, leurs transformées de Laplace. Trois approches (Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov) à la généralisation des notions de dérivation seront ensuite considérés, une interprétation géométrique et physique de la dérivée fractionnaire, l'analyse des solutions des équations et des systèmes différentiels fractionnaires linéaires sont développés, quelques critères de stabilité des systèmes fractionnaires sont présentés.

Le quatrième chapitre sera consacré à la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires telle que : définitions mathématiques de la synchronisation, des différents types de synchronisation (la synchronisation identique, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation projective, la synchronisation généralisée et la synchronisation **Q-S**), et on propose une synchronisation de deux systèmes du modèle décrivant la dynamique du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques en utilisant la méthode de la synchronisation globale et la méthode du contrôleur actif, ensuite on propose aussi une anti-synchronisation de deux systèmes du modèle décrivant la dynamique du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques en utilisant la méthode du contrôleur actif.

Nous terminerons notre thèse par une conclusion générale suivie d'une bibliographie, contenant plusieurs références concernant les systèmes dynamiques, la théorie du chaos, les dérivées fractionnaires et la théorie de synchronisation.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques

1.1 Introduction

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0 ;
- de sa loi d'évolution.

Du point de vue mathématique, les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

- systèmes dynamiques continus.
- systèmes dynamiques discrets.

Le but de ce chapitre est de fournir les principales clés pour étudier le comportement d'un système dynamique avec un accent particulier sur le temps continu et leurs propriétés telles que la stabilité et les bifurcations.

1.2 Définitions et notations

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant.

1.2.1 Représentations mathématiques

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques, encore appelés paramètres, du système sont fixes.

1.2.2 Systèmes continus et systèmes discrets

- Un système dynamique dans un temps continu est représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x}_t = f(x, t, p) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r. \quad (1.1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système.

- Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une application (fonction itérative) sous la forme :

$$\dot{x}_{k+1} = f(x_k, p) \text{ où } x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3, .. \quad (1.2)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ indique la dynamique du système en temps discret.

1.2.3 Systèmes autonomes ou non autonomes

- Lorsque la variable indépendante t apparaît explicitement dans l'expression de f , le système est dit non autonome. En général, c'est un inconvénient majeur pour la résolution numérique et il est préférable de s'en affranchir.

- On peut toujours transformer un système non autonome en système autonome (où t n'apparaît pas explicitement).

1.2.4 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Mais n'oublions pas que les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, alors pour préciser cette définition, on arrive à dire qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 un et un seul état final $x(t)$, il faut pour cela qu'il existe une application bijective φ de l'espace des phases

$$\begin{aligned}\varphi : X \times \mathbb{R} &\rightarrow X, \\ (x, t) &\mapsto \varphi_t(x) = \varphi(x, t),\end{aligned}$$

qu'on appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi_t(x_0) &= x_0, \\ \varphi_{t+s}(x_0) &= \varphi_t(\varphi_s(x_0)) \text{ pour tous } t, s \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 *Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système.*

1.2.5 Espace de phase

L'espace de phase est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.

1.2.6 Espace d'état

L'espace d'état est l'ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d'un système. Cet espace peut être continu ou discret.

1.2.7 Flot ou système dynamique

Soit M un ensemble quelconque et G un groupe additif (\mathbb{R} ou \mathbb{Z}). Considérons $\{\varphi^t\}_{t \in G}$ un groupe à un paramètre d'applications M dans M indexées par le groupe G .

- On appelle flot ou système dynamique le couple $(M, \{\varphi^t\}_{t \in G})$. L'ensemble M précédent constitue l'espace des phases du flot. Tout point x de cet espace représente un état du système dynamique.

1.2.8 Trajectoire et Orbite

Soient $(M, \{\varphi^t\}_{t \in G})$ un système dynamique et x un état de l'espace des phases.

- On appelle trajectoire d'un point x de M l'application définie sur G et à valeurs dans M par :

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow M, \\ t &\rightarrow \varphi^t(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Donc, la trajectoire est une solution du système différentiel.

- On appelle orbite d'un point x (Figure 1.1) l'image de la trajectoire issue de x c'est à dire le sous ensemble $\gamma(x)$ de l'espace des phases défini par :

$$\gamma(x) = \{\varphi^t(x), t \in G\}$$

1.3 Propriétés des systèmes dynamiques

1.3.1 Points d'équilibres

Définition 1.3.1 (*système continu*)

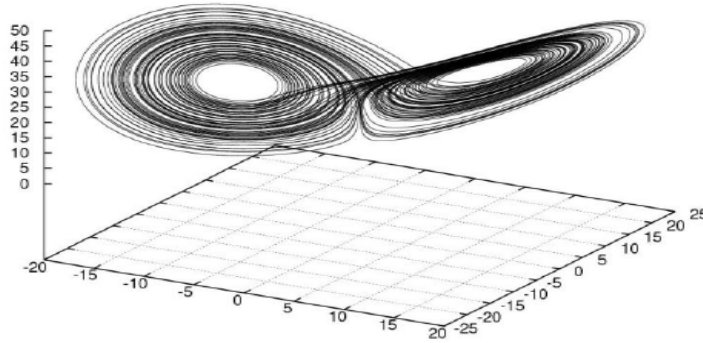


FIGURE 1.1 – Exemple de trajectoire d'un système dynamique.

1. Un point fixe (ou point critique, ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation $\dot{x}_t = f(x, t, p)$ est un point x^* de l'espace des phases vérifiant l'équation $f(x^*) = 0$. (ou pour tout $t \in \mathbb{R} : \varphi_t(x^*) = x^*$) sinon x^* est dit point ordinaire.
2. Un point ordinaire x^* est dit périodique s'il existe $T > 0$ tel que

$$\varphi_T(x^*) = x^*.$$

3. Une orbite γ_{X_0} telle qu'il existe deux points d'équilibre a et b vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(X_0) = a \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(X_0) = b \quad (1.4)$$

est dite orbite hétérocline si $a \neq b$ et homocline si $a = b$.

Définition 1.3.2 (système discret) Un point d'équilibre d'une application $\dot{x}_{k+1} = f(x_k, p)$ est un point invariant par f , c'est-à-dire un point x^* de l'espace des phases vérifiant l'équation $f(x^*) = x^*$. Géométriquement, le point fixe est une intersection de la courbe de la fonction $y = f(x)$ avec la bissectrice $y = x$.

1.3.2 Points et ensembles limites

Définition 1.3.3 Un point $a \in I$ est un point ω -limite d'une trajectoire $X(t, X_0)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n) = a, \quad (1.5)$$

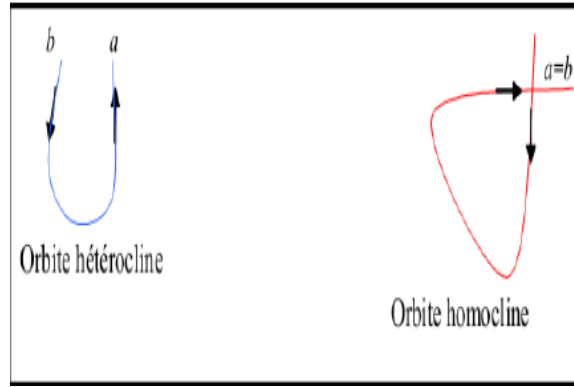


FIGURE 1.2 – Orbite hétérocline et orbite homocline

où $\varphi(t)$ est le flot du système $\frac{dX}{dt} = F(X)$, $X \in \mathbb{R}^n$, $F \in C^k(I)$, $I \subset \mathbb{R}^n$ et $X(t, X_0)$ est une solution de ce système avec $X(0) = X_0$.

Définition 1.3.4 Un point $b \in I$ est un point α -limite d'une trajectoire $X(t, X_0)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow -\infty$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi(t_n) = b. \quad (1.6)$$

Définition 1.3.5 L'ensemble des points α -limites (resp ω -limites) de $X(t, X_0)$ est désigné par $\alpha(X)$ (resp $\omega(X)$), et on définit l'ensemble limite de $X(t, X_0)$ par l'ensemble :

$$\alpha(X) \cup \omega(X). \quad (1.7)$$

Remarque 1.3.1 1. Si a est un point d'équilibre alors $\alpha(a) = \omega(a) = \{a\}$.

2. Si a est périodique alors $\alpha(a) = \omega(a) = \gamma_a$.

3. Si a et b sont dans la même orbite alors $\omega(a) = \omega(b)$ et $\alpha(a) = \alpha(b)$, donc on définit les ensembles limites d'une orbite comme étant les ensembles limites de l'un de ses points.

4. Si γ est une orbite hétérocline allant du point d'équilibre a au point d'équilibre b alors $\omega(\gamma) = \{b\}$, $\alpha(\gamma) = \{a\}$.

1.3.3 Portrait de phase

Définition 1.3.6 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.8)$$

Où P, Q sont des polynômes en x et y . Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.8) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites. Les points critiques du système (1.8) sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.3.4 Cycles limites et orbite périodique

- Un cycle limite du système (1.8) est une orbite isolée, c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.
- L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x sur le cycle limite.
- Une solution périodique du système (1.8) est une solution telle que :

$$(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t)) \text{ pour } T > 0,$$

à toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

- Un cycle d'ordre p (ou orbite périodique d'ordre p ou encore un (p) -cycle) est un ensemble de p points $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{p-1}^*$ vérifiant :

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= f(x_i^*), \quad i = 0, 1, \dots, p-2, \\ x_p^* &= f(x_{p-1}^*) = x_0, \\ x_i^* &= f^p(x_i^*), \quad i = 0, 1, \dots, p-1, \\ x_i^* &\neq f^h(x_i^*), \quad i = 0, 1, \dots, p-1, 1 \leq h \leq p, \end{aligned}$$

où p est l'entier minimal tel que : $x_0^* = f^p(x_0^*)$. Ainsi, les n éléments d'une orbite de période n correspondent aux points fixes propres de f^n .

1.4 Invariance et attraction

1.4.1 Ensemble invariant

Définition 1.4.1 Soit A un sous-ensemble de l'espace des phases; A est dit invariant (resp. positivement invariant) par un flots φ_t , si pour tout t dans \mathbb{R} (resp. dans $[0, +\infty[$), $\varphi_t(A)$ est inclus dans A .

Remarque 1.4.1 La trajectoire d'un système autonome dans l'espace d'état est un ensemble invariant.

1.4.2 Attracteurs

Définition 1.4.2 Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales. Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :

1. A est un ensemble compact et invariant par le flot φ_t (c-à-d $\varphi_t(A) = A$ pour tout t)
2. Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $X(t, X_0) = \varphi_t(X_0)$ restera dans U si $X_0 \in V$
3. $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A$, $t \geq 0$
4. Il existe une orbite dense dans A .

1.4.3 Bassin d'attraction

Définition 1.4.3 Le bassin d'attraction $B(A)$ de A , c'est l'ensemble des points dont les trajectoires convergent asymptotiquement vers A ; donc $B(A) = \bigcup_{t < 0} \varphi_t(V)$.

1.4.4 Les propriétés d'un attracteur

1. Il existe un ensemble $B \supset A$, tel que pour tout voisinage de A , la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A . Autrement dit,

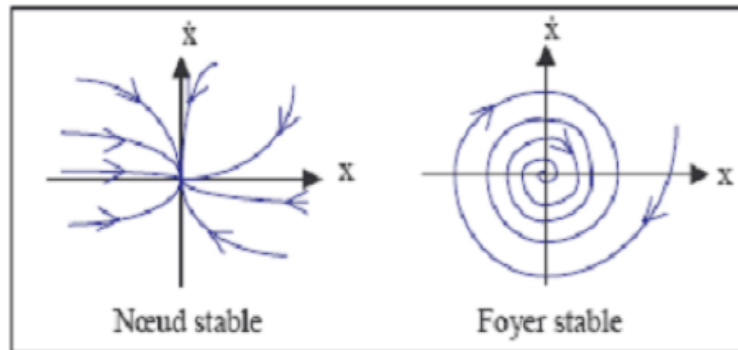


FIGURE 1.3 – Points fixes attracteurs.

toute trajectoire qui a son origine dans B tend vers l'attracteur, cette "zone d'influence" est le (Bassin d'attraction).

2. Un attracteur est indécomposable, c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.
3. Un sous-ensemble borné A de l'espace est de volume nul invariant par flot φ_t . Autrement dit, tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t .

1.4.5 Les différents types d'attracteurs

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1. Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

- **Le point fixe** : C'est le plus simple attracteur, le système évolue vers un état de repos (point). On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des nœuds stables et des foyers stables, représentés (Figure 1.3).
- **Le cycle limite périodique** : On appelle cycle limite d'un système dynamique, toute solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques de ce système.
- **Le cycle limite pseudo-périodique** : Il correspond à une somme de solutions péri-

diques, dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi- périodique peut être représenté dans l'espace d'état par un tore.

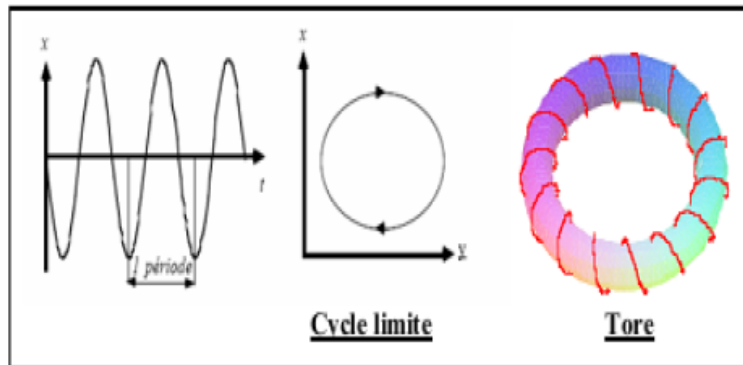


FIGURE 1.4 – Cycle limite périodique et pseudo-périodique

2. Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

L'attracteur étrange se caractérise par :

1. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).
2. La dimension de l'attracteur est fractale et non entière (ce qui justifie l'adjectif étrange).
3. L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases.

1.5 Étude qualitative des systèmes dynamiques

L'étude qualitative permet de voir le comportement des solutions sans avoir à résoudre l'équation différentielle. En particulier, elle permet l'étude locale des solutions autour de points d'équilibre. Pour avoir une étude complète d'un système dynamique, on attend en général de la part de l'environnement un comportement stationnaire, ce dernier va être présenté par la disparition des

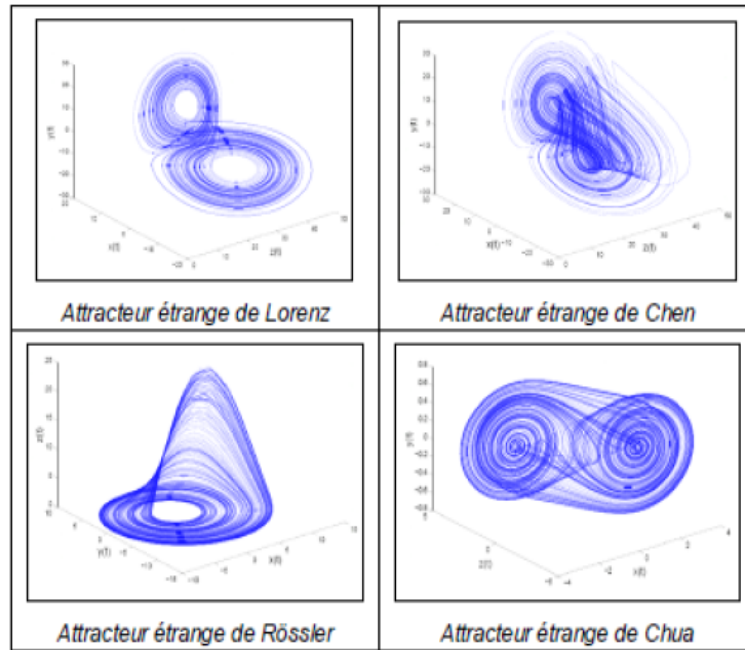


FIGURE 1.5 – Quelques attracteurs étranges

phénomènes transitoires en annulant la fonction de transition ou le champ de vecteurs, dans ce cas le système va avoir l'un des deux états suivants :

- État d'équilibre (points fixes, points périodiques).
- État chaotique.

Pour faciliter cette étude, on utilise les propriétés de l'algèbre linéaire sur les équations qui décrivent nos systèmes dynamiques, or que la majorité des systèmes dynamiques associés à des phénomènes naturels ne sont pas linéaires, à cet effet on est obligé de les linéariser.

1.5.1 Linéarisation des systèmes dynamiques

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{1.9}$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et soit x^* un point d'équilibre de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation $\varepsilon(t)$ soit appliquée au voisinage du point d'équilibre x^* .

La fonction f peut être développée en série de Taylor au voisinage de point x^* comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}^* = f(x^* + \varepsilon(t)) \simeq f(x^*) + J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t), \quad (1.10)$$

où $J_f(x^*)$ est la matrice Jacobienne de la fonction f définie par :

$$J_f(x^*) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x^*}. \quad (1.11)$$

Comme $f(x^*) = \dot{x}^*$, alors l'équation (1.10) devient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t). \quad (1.12)$$

L'écriture (1.12) veut dire que le système (1.9) est linéarisé.

1.5.2 Théorème de Hartmann-Grobman

Considérons le système dynamique (1.9).

Soit x^* un point d'équilibre du système (1.9) et soit $J_f(x^*)$ la matrice Jacobienne au point x^* , alors le théorème d'Hartmann-Grobman s'énonce :

Théorème 1.5.1 [18] *Si $J_f(x^*)$ admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certain voisinage U de x^* . Ce théorème va nous permettre de lier la dynamique du système non linéaire (1.9) à la dynamique du système linéarisé (1.12).*

1.6 Stabilité des systèmes dynamiques continus

1.6.1 Classification des points d'équilibres

a. Cas des système linéaires

Considérons le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax, \quad (1.13)$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et A une matrice constante inversible.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Définition 1.6.1 1. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont réelles et de même signe, la solution $x = 0$ est appelée *nœud*.

2. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée *selle*.

3. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $Re(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$, la solution $x = 0$ est appelée *foyer*.

4. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $Re(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, n$, la solution $x = 0$ est appelée *centre*.

Tous ces cas sont regroupés (Figure 1.6).

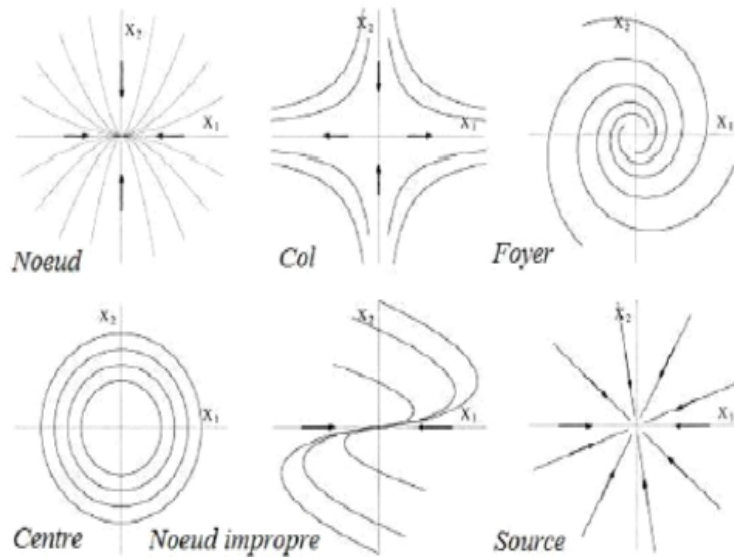


FIGURE 1.6 – Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2

b. Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x). \tag{1.14}$$

Définition 1.6.2 Un point critique x^* de (1.14) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles négatives, il est appelé sources si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles positives, il est appelé selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(x^*)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

Théorème 1.6.1 Soit $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, un système dynamique à temps continu. Si x^* un point fixe, alors si les valeurs propres de $Df(x^*)$ sont de partie réelle négative x^* est stable, et instable si l'une de ces valeurs propres de $Df(x^*)$ est de partie réelle positive.

1.6.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{1.15}$$

avec f une fonction non linéaire.

Définition 1.6.3 Le point d'équilibre x^* du système (1.15) est :

1. Stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0) - x^*)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \tag{1.16}$$

2. Asymptotiquement stable si :

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x(t_0) - x^*)\| = 0. \tag{1.17}$$

3. Localement exponentiellement stable s'il existe deux constantes strictement positives a, b telles que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0) - x^*)\| < a \|x(t_0) - x^*\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in B_r. \tag{1.18}$$

Lorsque $B_r = \mathbb{R}^n$, on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable.

4. *Attractif si :*

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0, \forall t \geq t_0. \quad (1.19)$$

5. *Instable s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.*

Tous ces cas sont montrés (Figure 1.7).

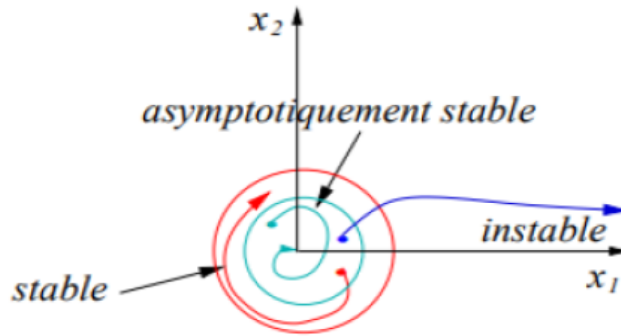


FIGURE 1.7 – Différents types de stabilité de Lyapunov

a. Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre x^* du système (1.15). Plus précisément, on examine les valeurs propres λ_i de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de x^* s'expriment comme suit :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative, x^* est exponentiellement stable.
- Si la matrice Jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, x^* est instable.

Remarque 1.6.1 *Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice Jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous-espace (une variété) dont la dimension est le nombre de valeurs propres nulles de la matrice Jacobienne, la stabilité de l'équilibre peut être étudiée dans ce sous-espace par la seconde méthode.*

b. Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

Comme on a vu, la première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. En outre elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Ce théorème va résumer cette méthode.

Théorème 1.6.2 *Le point d'équilibre x^* du système (1.15) est stable si il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

- i) D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x^* \in D$.*
 - ii) $V(x^*) = 0$ et $V(x) > V(x^*), \forall x \neq x^*$ dans D .*
 - iii) $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq x^*$ dans D .*
- *Si de plus pour x , $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq x^*$ dans D alors x^* est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.*
 - *Si on suppose de plus que V tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x^* , tendent vers x^* (on dit que x^* est globalement asymptotiquement stable).*

Remarque 1.6.2 *il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.*

1.7 La théorie des bifurcations

L'aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques est la notion de bifurcation. Un terme qui a été introduit par Henri Poincaré au début du XX^e siècle dans ces travaux sur les systèmes différentiels. Pour certaines valeurs critiques des paramètres de contrôle du système, la

solution de l'équation différentielle change qualitativement : on dit qu'il y a bifurcation. Une première approche pour l'étude des systèmes dynamiques consiste à rechercher les points d'équilibre, c'est-à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas l'évolution temporelle. L'étape suivante consiste à faire varier les paramètres de contrôle du système. On regarde alors que deviennent les points d'équilibre, en particulier ceux qui étaient stables avant de modifier les paramètres du système et les bifurcations qui apparaissent. Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phase nécessite des outils adaptés.

1.7.1 Définitions

Le terme bifurcation est généralement défini, de manière assez vague, comme un changement radical de comportement du système dynamique étudié.

Soit :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad (1.20)$$

avec le paramètre de contrôle μ , et soit x^* sa solution.

Définition 1.7.1 *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x^* du système (1.20) lorsqu'on modifie μ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.*

Définition 1.7.2 *Un système est dit structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle (la valeur du paramètre μ pour laquelle le système (1.20) n'est pas structurellement stable).*

Définition 1.7.3 *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*

1.7.2 Bifurcation locale

La codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation. On parle ici seulement de la bifurcation de codimension un et il existe quatre

types de bifurcations de codimension un, qui correspondent tous à des comportements génériques.

1.7.3 Bifurcation nœud-col

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre μ est le polynôme quadratique $f(x) = \mu - x^2$, comme celui de la figure suivante Figure 1.8.

Considérons le système (1.20). Si on peut réécrire la fonction f sous la forme :

$$f(x, \mu) = \mu - x^2. \quad (1.21)$$

Nous appelons la fonction (1.21) la forme normale de la bifurcation nœud-col. Étudions le comportement de l'équation (1.21). Les points fixes de cette dernière sont :

$$x_{\pm}^* = \pm\sqrt{\mu} \quad (1.22)$$

qui existent seulement pour $\mu > 0$, leur stabilité est déterminée par :

$$f'(x_{\pm}^*) = -2x_{\pm}^* = -2(\pm\sqrt{\mu}) = \pm 2\sqrt{\mu}, \quad (1.23)$$

selon les signes de $f'(x^*)$, on voit que $x_+^* = \sqrt{\mu}$ est instable, tandis que $x_-^* = -\sqrt{\mu}$ est stable.

Remarque 1.7.1 *Même étude faite lorsque $f(x, \mu) = -\mu - x^2$, $f(x, \mu) = +\mu + x^2$ et $f(x, \mu) = -\mu + x^2$.*

Mais dans tous les cas, il y a une transition à $\mu = 0$ entre existence d'aucun point fixe et de deux points fixes dont un est stable et l'autre instable. La figure (Figure 1.8) présente ce que on appelle le diagramme de bifurcation (la variation du point d'équilibre en fonction de paramètre μ pour le cas $f(x, \mu) = \mu - x^2$).

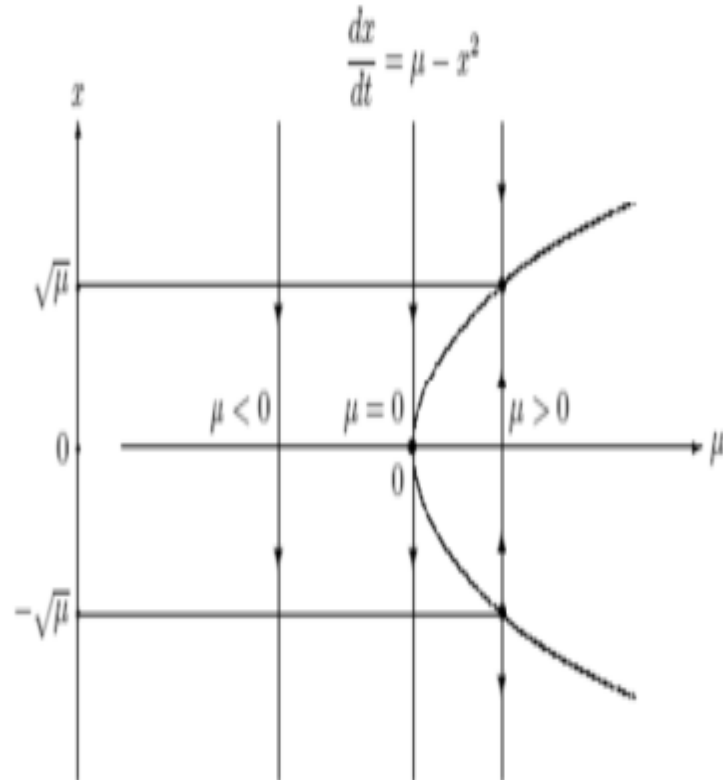


FIGURE 1.8 – Diagramme de bifurcation nœud-col

1.7.4 Bifurcations fourches

Si on peut réduire $f(x, \mu)$ à un polynôme cubique a ces quatre cas :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3, \quad (1.24)$$

$$f(x, \mu) = \mu x + x^3, \quad (1.25)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x + x^3, \quad (1.26)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x - x^3. \quad (1.27)$$

L'équation (1.25) s'appelle la forme normale d'une bifurcation fourche supercritique. Nous calculons ses points :

$$x^*(\mu - x^{*2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \text{ pour tout } \mu, \\ x^* = \pm\sqrt{\mu} \text{ pour } \mu > 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Nous étudions la stabilité de ces points fixes.

$$f'(x^*) = (\mu - 3x^{*2}) = \begin{cases} \mu \text{ pour } x^* = 0, \\ \mu - 3\mu = -2\mu \text{ pour } x^* = \pm\sqrt{\mu}. \end{cases} \quad (1.29)$$

Le point fixe $x^* = 0$ est donc stable pour $\mu < 0$ et devient instable à $\mu = 0$, quand les branches de nouveaux points fixes $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ sont créés. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent. Faisons le même calcul pour (1.26), qui est la forme normale d'une bifurcation fourche souscritique.

$$x^*(\mu + x^{*2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \text{ pour tout } \mu, \\ x^* = \pm\sqrt{-\mu} \text{ pour } \mu < 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

$$f'(x^*) = (\mu + 3x^{*2}) = \begin{cases} \mu \text{ pour } x^* = 0, \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu \text{ pour } x^* = \pm\sqrt{-\mu}. \end{cases} \quad (1.31)$$

Comme pour le cas supercritique, le point fixe $x^* = 0$ est stable pour $\mu < 0$ et devient instable à $\mu = 0$. Mais contrairement au cas supercritique, les autres points fixes $\pm\sqrt{-\mu}$ existent dans la région où $x^* = 0$ est stable, et sont toujours instables (Figure 1.9).

1.7.5 Bifurcations transcritiques

Si f est contrainte à ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d'une bifurcation transcritique, qui est la dernière bifurcation stationnaire dans une dimension :

$$\dot{x} = \mu x - x^2. \quad (1.32)$$

L'analyse usuelle donne :

$$x^*(\mu - x^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0, \\ x^* = \mu. \end{cases} \quad (1.33)$$

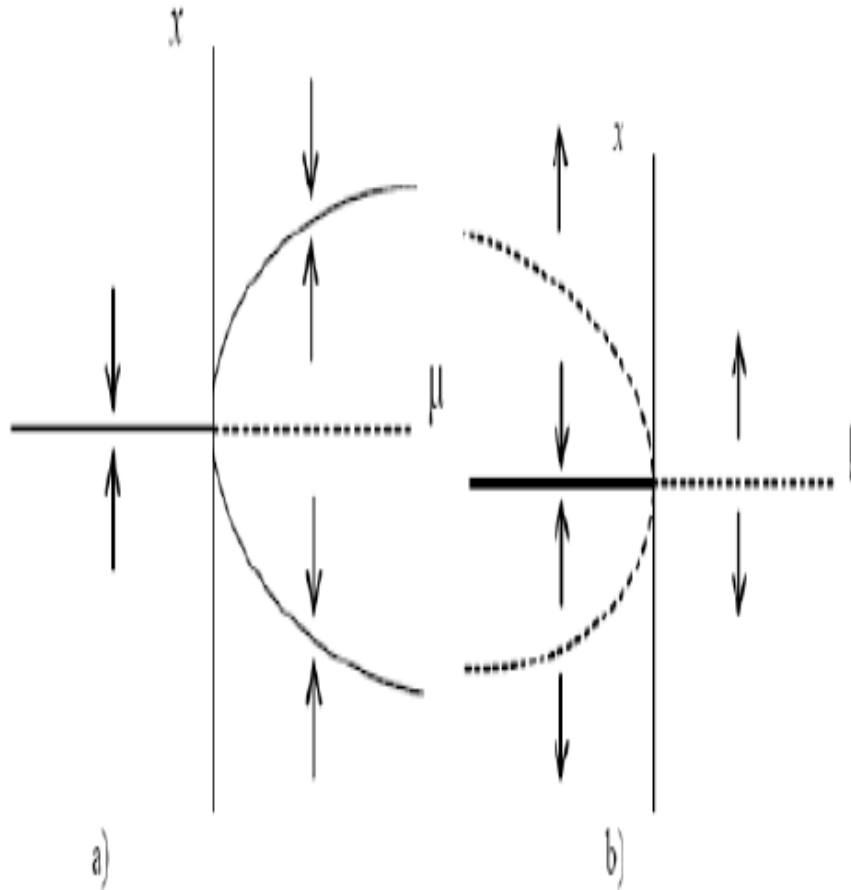


FIGURE 1.9 – Diagramme de bifurcation fourche : (a) super critique, (b) sous critique.

$$f'(x^*) = \mu - 2x^* = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0, \\ -\mu & \text{pour } x^* = \mu. \end{cases} \quad (1.34)$$

Donc $x^* = 0$ est stable pour $\mu < 0$, instable pour $\mu > 0$, tandis que $x^* = \mu$ fait le contraire : ces points fixes échangent simplement leur stabilité (Figure 1.10).

1.7.6 Bifurcation de Hopf

Tandis que toutes les bifurcations que nous avons décrites sont stationnaires, la bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes, l'espace des phases a maintenant deux

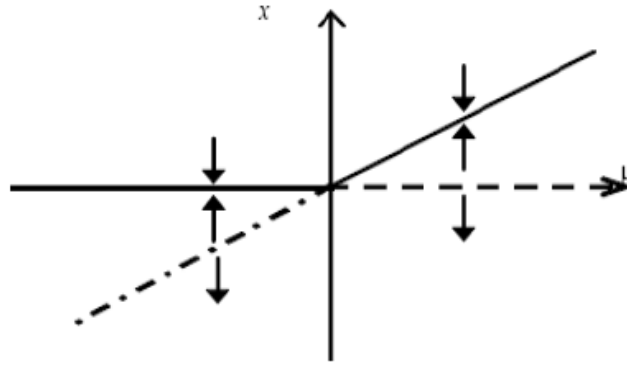


FIGURE 1.10 – Diagramme de bifurcation transcritique

composantes et la forme s'écrit dans le plan complexe. Forme normale :

$$\frac{dZ}{dt} = \mu Z - \|Z\|^2 Z. \quad (1.35)$$

En posant $\mu = \mu_r + i\mu_I$ et $Z = X e^{i\theta}$, on obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu_r x - x^3, \\ \frac{d\theta}{dt} = \mu_I. \end{cases} \quad (1.36)$$

Nous obtenons donc une bifurcation fourche pour l'amplitude tandis que la phase tourne à la vitesse μ_I . La solution est donc périodique et les trajectoires décrivent une spirale attirée vers une courbe asymptotique nommée : cycle limite. Naturellement la bifurcation de Hopf peut être également sous critique si le coefficient du terme $\|Z\|^2 Z$ est de signe positif, il faut alors un terme négatif en $\|Z\|^4 Z$ pour obtenir une saturation non-linéaire. On va s'intéresser maintenant à l'étape qui suit la régularité temporelle. Selon Landau la bifurcation d'un point d'un comportement stationnaire (point fixe) vers un comportement périodique (cycle limite) puis bipériodique (un tore) constituent les première étapes de la transition vers la turbulence, cette dernière présente un phénomène très intéressant qu'on appelle le chaos qui est depuis longtemps synonyme de désordre, de confusion et s'oppose à l'ordre et à la méthode. De nombreux chercheurs en sciences se sont intéressés aux mouvements dit chaotiques. Ils ont confirmé que, contrairement à ce que la pensée déterministe, martèle depuis des lustres, il se pourrait qu'il y ait de l'équilibre dans le déséquilibre, de l'organisation dans la désorganisation. (Figure 1.11)

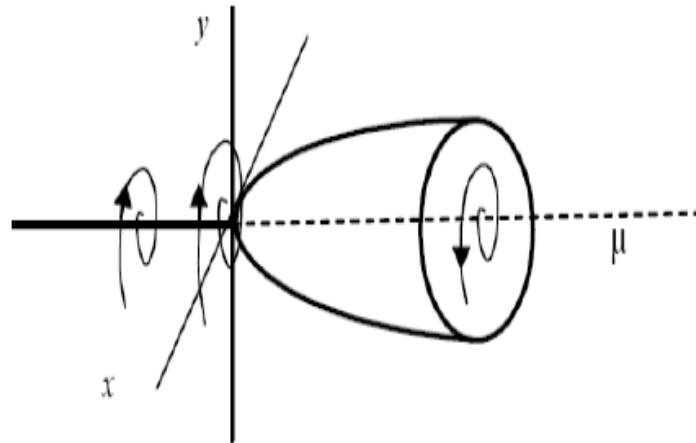


FIGURE 1.11 – Diagramme de bifurcation Hopf

1.8 Conclusion

Ce chapitre fournit les notions de base des systèmes dynamiques, telles que : la représentation mathématique des systèmes dynamiques, leurs classifications, l'espace de phase, les orbites, les trajectoires, etc....

Puis on a donné un aperçu sur l'étude qualitative des systèmes dynamiques, y compris la notion de stabilité. À la fin de ce chapitre, nous avons abordé la théorie de bifurcations.

Chapitre 2

Théorie du chaos

2.1 Introduction

Dans l'usage courant, le «chaos» signifie "un état de désordre". Cependant, dans la théorie du chaos, le terme a un sens précis. La théorie du chaos est un domaine des études en mathématiques, avec des applications dans plusieurs disciplines comme la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie, la météorologie, la sociologie et la philosophie. Chaos ou un système chaotique, c'est un système générant des comportements différents à long terme lorsque les conditions initiales sont perturbées très légèrement. La sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques a fait du chaos une situation indésirable. Alors, l'homme s'interroge sur cette situation depuis la nuit des temps. Dans ce chapitre, nous donnons une brève étude quantitative sur le chaos. Caractérisation du chaos, quelques outils mathématiques de quantification du chaos et différentes routes vers le chaos sont les grandes lignes de ce chapitre.

2.2 Quelques définitions du chaos

En général il n'y a pas de définition rigoureuse du chaos, car ce phénomène est plus une notion philosophique qu'une notion scientifique. On peut observer le phénomène du chaos dans plusieurs domaines, mais comment le formaliser?. La réponse est négative car jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas une théorie générale qui donne une explication ou une caractérisation finale de ce

phénomène. Tout ce qu'il est possible de dire est qu'il existe plusieurs critères physiques qui permettent de confirmer qu'un système est chaotique.

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état, et soit $\varphi_t(x_0)$ la solution de l'équation (2.1) qui passe par x_0 quand $t = t_0$. Nous introduisons la série suivante de définitions données en [19] qui nous permet de donner des définitions assez claires sur le phénomène du chaos.

Définition 2.2.1 *On dit que la fonction $f : I \rightarrow I$ possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour un certain $x \in I$ et un certain voisinage $V \subset I$ de x , il existe $y \in I$ tel que $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta$.*

Définition 2.2.2 *Soit $Y \subset X$ On dit que Y est dense dans X si, pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ arbitrairement proche de x , autrement dit Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une suite $\{y_n\}$ de Y qui convergent vers x .*

Définition 2.2.3 *La fonction $f : I \rightarrow I$ est dite transitive topologiquement si pour toute paire d'ensembles ouverts $U, V \subset I$, il existe $k > 0$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Définition 2.2.4 *Soit un ensemble V , la fonction $f : I \rightarrow I$ est dite chaotique sur V si :*

1. f possède une sensibilité aux conditions initiales,
2. f est topologiquement transitive,
3. les points périodiques sont denses dans V .

Théorème 2.2.1 (Théorème de Devaney) [20] : *Soit un sous-ensemble V de I , la fonction $f : I \rightarrow I$ est dite chaotique sur V si :*

- i) *La fonction f possède une sensibilité aux conditions initiales,*
- ii) *La fonction f est topologiquement transitive, dans le sens que pour toute paire de sous ensembles ouverts $U, V \subset I$, il existe $k > 0$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$,*
- iii) *L'ensembles des points périodiques de la fonction f sont denses dans I .*

2.3 Caractéristiques du chaos

2.3.1 La non-linéarité

Pour prévoir des phénomènes réels générés par les systèmes dynamiques, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effet. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause. En général, un système chaotique est un système dynamique non linéaire, un système linéaire ne peut pas être chaotique.

2.3.2 Le déterminisme

Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer) son évolution au cours du temps. La connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, l'instant initial, permis le calcul précis de l'état du système à n'importe quel autre moment. Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. Donc, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes.

2.3.3 L'aspect aléatoire

Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard : aucune structure n'apparaît. Quand le mouvement est chaotique, les points paraissent à première vue aléatoires. Néanmoins, quand on observe le système suffisamment longtemps, on constate que les points dessinent une forme particulière. La figure (Figure 2.1) montre l'aspect aléatoire d'un système dynamique chaotique, en occurrence, le système de Rössler.

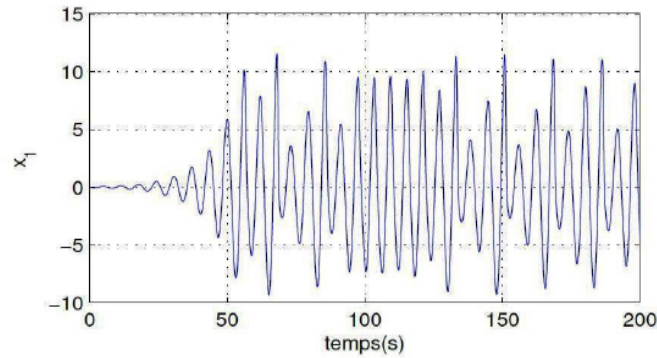


FIGURE 2.1 – L'aspect aléatoire du système de Rössler

2.3.4 Sensibilité aux conditions initiales

La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales ; pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement ; les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incompatibles.

2.3.5 Spectre de puissance

Le spectre d'une variable d'un tel système ne contient donc qu'une assemblée de raies fines situées aux pulsations w_i , à leurs harmoniques mw_i avec $m \in \mathbb{N}$; aux combinaisons linéaires de fréquences $mw_i + nw_j$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$, les spectres qui sont la combinaison de plusieurs fréquences sans rapport simple sont dits quasi-périodiques. L'existence de spectres larges est une caractéristique essentielle des mouvements chaotiques d'un système.

2.3.6 L'attracteur étrange

Un système chaotique dissipatif possède (au moins) un attracteur d'un type particulier appelé attracteur étrange. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme le résultat d'une opération d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases, répétée un nombre infini de fois. La "longueur" de l'attracteur est finie, bien qu'il soit contenu dans un espace fini. Alors

on peut donner cette définition :

Définition 2.3.1 *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage V de A ; c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Attraction : V est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans V est entièrement contenue dans \mathbb{R} . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.*
2. *Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale (non entière).*
3. *Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point : chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.*
4. *Deux trajectoires proches à l'instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).*

Définition 2.3.2 *(D. Ruelle et F. Takens [21]) Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales.*

Définition 2.3.3 *(Berge et al [22]) Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale.*

Définition 2.3.4 *(Farmer et Sidorowich [23]) Un attracteur étrange est un attracteur possédant un exposant de Lyapunov $\lambda_k > 0$.*

Différents types d'attracteurs chaotiques

Les attracteurs chaotiques (étranges) peuvent être classés en trois types principaux :

1. **Attracteur hyperbolique** : sont des ensembles-limites structurellement stables.

Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à cette classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques. L'attracteur de Plykin et l'attracteur Smale-Williams sont des exemples d'un attracteur hyperbolique).

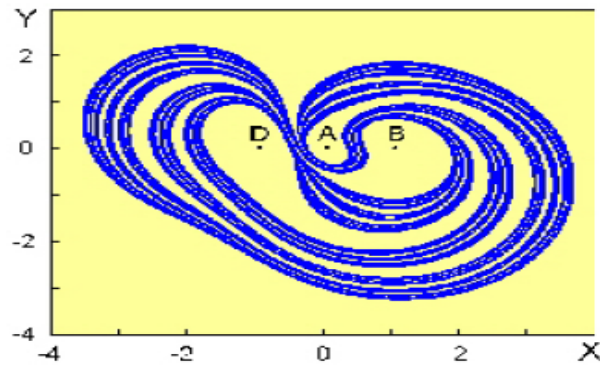


FIGURE 2.2 – Attracteur de plykin

2. **Attracteur de type Lorenz** : Ces types des attracteurs ne sont pas structurellement stables, mais leurs orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stables (hyperboliques), et aucune des orbites périodiques instables apparaît sous les petites variations des paramètres, comme par exemple dans le système de Lorenz lui-même.
3. **Quasi-attracteurs** : Ces attracteurs sont des ensembles-limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instables. Par exemple, les attracteurs générés par le circuit de Chua. Notez que ce type est plus complexe que les deux précédents-attracteurs et donc ne convient pas pour certaines applications potentielles d'un tel chaos que : la sécurité des communications et le masquage du signal.

2.4 Détection du chaos

Il existe plusieurs méthodes qui permettent de déterminer si des systèmes non linéaires sont ou non chaotiques. Elles ne sont généralement pas très nombreuses, ni réparties sur un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On a choisi de mettre en œuvre deux des méthodes les plus couramment utilisées qui sont appelées : **les exposants de Lyapunov et la dimension fractale**.

2.4.1 Les exposants de Lyapunov

L'évolution chaotique est difficile à appréhender, car la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide. Lorsque cette divergence croît exponentiellement avec le temps pour presque toutes les conditions initiales voisines d'un point donné, on a le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, idée à laquelle sont attachés les exposants de Lyapunov, qui donnent une mesure quantitative de cette divergence exponentielle locale et mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique. Rappelons d'abord cette formule et voyons comment Lyapunov a pu arriver à déduire une telle formule.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_{i-1})|. \quad (2.2)$$

Considérons un système dynamique quelconque dont la condition initiale x_0 est affectée d'une erreur infinitésimale E_0 . Après n itérations, l'erreur initiale E_0 sera donc amplifiée d'un facteur $\frac{E_n}{E_0}$. Notons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à 1.

Puisque $|\frac{E_n}{E_0}| = |\frac{E_n}{E_{n-1}}| \cdot |\frac{E_{n-1}}{E_{n-2}}| \cdot |\frac{E_{n-2}}{E_{n-3}}| \dots |\frac{E_2}{E_1}| \cdot |\frac{E_1}{E_0}|$, il suffit alors de calculer ce produit pour déterminer la façon dont s'amplifie l'erreur initiale. Le logarithme d'un produit correspond à une somme de logarithmes. Utilisons plutôt le logarithme du produit pour compléter cette étude.

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \ln \left(\left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \dots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \right) \\ &= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| + \dots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| = \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right|. \end{aligned}$$

Avant de faire tendre cette dernière quantité vers l'infini, on calcule d'abord la moyenne de la somme obtenue. On arrive ainsi à l'exposant de Lyapunov.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right). \quad (2.3)$$

E_i et E_{i-1} étant de très petites valeurs, le rapport correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation utilisée si naturellement la fonction est dérivable. En effet, soit $f(x_i)$ cette fonction :

$$E_i = f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1}).$$

et

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}}. \quad (2.4)$$

puisque :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x), \quad (2.5)$$

alors, si f est dérivable on a :

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} = f'(x_{i-1}) \quad \text{lorsque } E_{i-1} \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

par conséquent :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_{i-1})|. \quad (2.7)$$

Lorsque l'exposant de Lyapunov est positif :

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0, \quad (2.8)$$

et par conséquent :

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1. \quad (2.9)$$

Remarque 2.4.1

- *Les exposants de Lyapunov sont une généralisation des valeurs propres pour le point fixe et des multiplicateurs caractéristiques pour les solutions périodiques.*
- *Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange possèdera toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont un au moins doit être positif (Voir le tableau TABLE 2.1).*

A. Classification des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapunov

Généralement, on peut distinguer trois cas des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapunov :

1. Si $\lambda < 0$, l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable, il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique, plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est grande. Les points fixes et les points périodiques super-stables ont un exposant de Lyapunov λ qui tend vers $-\infty$.
2. Si $\lambda = 0$, l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservatif. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.

3. Si $\lambda > 0$, l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités, ces points sont dits instables. Pour un système discret, on a un ensemble de points sans aucun rapport de liaison. Pour un système continu, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées.

<i>État stable</i>	<i>Flot</i>	<i>Dimension de Lyapunov</i>	<i>Exposants de Lyapunov</i>
Point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Période d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Période d'ordre k	k-tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0, \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyperchaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

TABLE 2.1 – Classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapunov

B. Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de Lyapunov positive indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit donc bien là d'un attracteur étrange. Pour une application bidimensionnelle, on peut résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et signe des exposants de Lyapunov (ici ils sont deux) dans le tableau (TABLE 2.2).

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	$-, -, -$
Cycle limite périodique	$0, -, -$
Cycle limite quasi périodique	$0, 0, -$
Attracteur étrange	$+, 0, -$

TABLE 2.2 – Caractérisation des attracteurs par le signe des exposants de Lyapunov.

C. Exposant de Lyapunov pour un système continu

En 1985, Wolf et al. [24] ont proposé une méthode de calcul du plus grand exposant et de la

somme des n exposants de Lyapunov à partir des séries chronologiques. Leur algorithme est basé sur le contrôle de la divergence entre les trajectoires voisines. On choisit dans un premier temps deux orbites très voisines, et on note $d(t_0)$ leur distance en un temps ultérieur, soit t_1 , cette distance est devenue $d'(t_1)$. On effectue alors un remplacement : on choisit une autre orbite située à une distance $d(t_1)$ (Figure 2.3). On recommence alors ces opérations un grand nombre de fois pour les temps t_1, \dots, t_M , et on calcule l'estimateur du plus grand exposant par la relation suivante :

$$\lambda = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^n \ln \frac{d'(t_i)}{d(t_{i-1})} \quad (2.10)$$

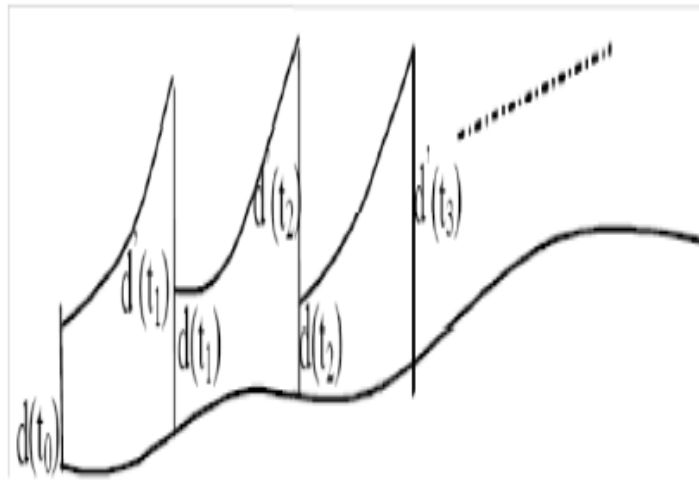


FIGURE 2.3 – Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov

2.4.2 Dimension fractale

Si, à l'issue du calcul de la dimension de l'attracteur d'un système étudié, nous obtenons une valeur positive non entière, cela signifie que le système possède un attracteur étrange. Plusieurs dimensions ont été proposées telles que la dimension de Kolmogorov, dimension de corrélation,

dimension de Lyapunov. Il y a une différence légère entre chacune de ces dimensions, mais elles caractérisent toutes, l'attracteur étrange avec sa dimension fractale et satisfont les trois propriétés suivantes :

1. $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$.
2. $A = \emptyset \Rightarrow d(A) = 0$.
3. $d(A \times B) = d(A) + d(B)$.

A. Dimension de corrélation

Notons $C(R)$ le nombre de boîtes requises pour chaque dimension N .

On peut caractériser la dimension de corrélation à l'aide d'une fonction appropriée, une telle fonction est définie par :

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \vartheta, \quad (2.11)$$

avec ϑ représente le nombre de paires i, j dont la distance $|X_i - X_j| < R$.

On peut réécrire la fonction (2.11) comme :

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum H(R - |X_i - X_j|). \quad (2.12)$$

La dimension de corrélation est alors définie par :

$$v = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log(C(R))}{\log(R)}. \quad (2.13)$$

B. Dimension de Lyapunov

Cette dimension est définie par Li et Yorke [25] et elle est donnée par :

$$d_l = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|}. \quad (2.14)$$

Classant les exposants de Lyapunov de l'attracteur d'un système dynamique par :

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ et m le plus grand entier tel que :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \leq 0. \quad (2.15)$$

C. Dimension de capacité (Kolmogorov)

Soit X un ensemble de points de l'attracteur, on recouvre X par un nombre minimal $N(\varepsilon)$

d'hypercube de côté ε .

- Si X est un carré de côté L , il peut être recouvert par $N(\varepsilon) = (\frac{L}{\varepsilon})^2$ petits carrés de côtés ε .
- Dans le cas général, on a :

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^d, \quad (2.16)$$

$$d = \frac{\log N(\varepsilon)}{\log L - \log \varepsilon} \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \log L \ll -\log \varepsilon. \quad (2.17)$$

Définition 2.4.1 *La dimension de Kolmogorov ou de capacité est définie par :*

$$d_c = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (2.18)$$

2.5 Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système. Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos [26]. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

2.5.1 L'intermittence vers le chaos

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

2.5.2 Le dédoublement de période

Il est caractérisé par une succession de bifurcation de fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, etc... Ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

2.5.3 La quasi-périodicité

Il intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi-périodique. Ce scénario un peu compliqué est relié à la théorie des nombres, notamment aux travaux de Jean Christophe Yoccoz, lauréat de la Médaille Fields en 1994, pour ses travaux sur les systèmes dynamiques.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, après une série de définitions sur la notion du chaos, nous avons présenté des différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique, telles que la notion de sensibilité aux conditions initiales, les exposants de Lyapunov, la dimension fractale et les attracteurs étranges. En fin, quelques routes vers le chaos sont cités.

Chapitre 3

Les dérivées fractionnaires

3.1 Introduction

Le calcul fractionnaire a 300 ans d'existence mathématique. Tout au long de ces années, connaissait les contributions de nombreux mathématiciens qui ont donné plusieurs approches et définitions, dans cette thèse on va restreindre à trois approches les plus populaires et les plus praticable qui sont : l'approche de Riemann-Liouville, de Caputo et l'approche de Grünwald-Letnikov. L'idée principale de la dérivation et d'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et d'intégration itérées. Le terme fractionnaire est un terme trompeur mais il est retenu pour suivre l'usage dominant.

3.2 Outils de base

3.2.1 La fonction Gamma

La fonction Γ d'Euler est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles et complexes [27]. Pour $Re(\alpha) > 0$ on définit $\Gamma(\alpha)$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (3.1)$$

La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tout entier On a $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ et pour n entier on a $n! = \Gamma(n + 1)$, pour plus d'informations sur la fonction Γ voir [27].

3.2.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta (qui est un type d'intégrale d'Euler, au même titre que la fonction gamma) est une fonction remarquable définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1 - \tau)^{q-1} d\tau = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \text{avec } \operatorname{Re}(p) > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(q) > 0. \quad (3.2)$$

3.2.3 La fonction Mittag-Leffler

la fonction Mittag-Leffler est définie par : Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, on a

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (3.3)$$

En particulier, si $\alpha = 1$ on trouve la fonction exponentielle

$$E_1(z) = e^z. \quad (3.4)$$

Cette fonction peut être généralisée pour deux paramètres :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (3.5)$$

3.2.4 La Transformée de Laplace

1. Si la fonction f est d'ordre exponentiel α (c'est à dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pour $t > T$) alors la fonction F de la variable complexe s définie par :

$$F(s) = Lf(t)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction f .

2. On peut reconstituer f à partir de sa transformée F à l'aide de la transformée de Laplace inverse $f(t) = L^{-1}F(s)(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds$, $c = \operatorname{Re}(s)$.
3. La Transformée de Laplace du produit de deux fonctions f et g qui sont nulles pour $t < 0$ est égale au produit de leur transformées de Laplace.

4. La transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier est :

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(t)](s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \end{aligned}$$

5. La transformée de Laplace de la fonction t^{p-1} est :

$$L[t^{p-1}](s) = \Gamma(p)s^{-p}.$$

3.3 Intégration fractionnaire

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire, l'intégrale de Riemann-Liouville. D'autres versions seront ensuite abordées. Nous verrons que toutes les définitions que nous avons données sont des définitions "à gauche", il existe des versions symétriques, "à droites". Celles-ci sont rarement utilisées car anti-causales (elles dépendent du futur des fonctions).

3.3.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Fonctions définies sur $[a, b]$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Commençons par noter ${}_a I_t^1$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a, b], {}_a I_t^1 f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

L'itération de ${}_a I_t^1$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a . De plus, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} {}_a I_t^1 \circ_a I_t^1 f(t) &= \int_a^u \left(\int_a^t f(\tau) d\tau \right) du = \int_a^t \left(\int_\tau^t du \right) f(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $({}_a I_t^1)^n$ la $n^{\text{ième}}$ itération de ${}_a I_t^1$, une récurrence directe montre que

$$({}_a I_t^1)^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Si on note $g = ({}_aI_t^1)^n f$, g est donc l'unique fonction vérifiant

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, g^{(k)}(a) = 0, g^{(n)} = f. \quad (3.8)$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante :

Définition 3.3.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à gauche d'ordre n de f , que l'on note ${}_aI_t^n f$, est définie par

$$\forall t \in [a, b], {}_aI_t^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (3.9)$$

La dénomination "gauche" provient du fait que l'intégrale est évaluée à partir des valeurs à gauche ($\tau < t$) de f . Nous voyons alors qu'il est possible d'étendre directement (3.9) à $n > 0$, et ce grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment. C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition (3.3.1) de la manière suivante :

Définition 3.3.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ est définie par

$$\forall t \in [a, b], {}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Fonctions définies sur \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}

Il est naturel d'étendre la définition (3.3.2) aux axes \mathbb{R}^+ et \mathbb{R} . Notons ces opérateurs I_{0+}^α et I_+^α :

$$\forall t \geq 0, I_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, I_+^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Si $0 < \alpha < 1$, d'après [28], $I_+^\alpha f$ est défini presque partout si $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Intégrales fractionnaires à droite

Si on remonte à la relation de départ (3.6) pour une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, on peut remarquer que l'intégral

$${}_bI_t^1 f(t) = \int_b^t f(\tau) d\tau = - \int_t^b f(\tau) d\tau,$$

est aussi une primitive de f , qui cette fois s'annule en b et fait intervenir les valeurs à droite de f .

À partir de la relation :

$$\int_b^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau = (-1)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-1} f(\tau) d\tau,$$

on pourrait définir de la même manière que précédemment l'intégrale à droite d'ordre n de f par :

$$\forall t \in [a, b], {}_b I_t^n f(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (3.10)$$

En notant $h = {}_b I_t^n f$, h serait l'unique fonction vérifiant :

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, h^{(k)}(b) = 0, h^{(n)} = f. \quad (3.11)$$

On définit alors l'intégrale à droite de la manière suivante :

Définition 3.3.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à droite d'ordre n de f , que l'on note ${}_t I_b^n f$, est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}_t I_b^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (3.12)$$

elle vérifie ainsi la relation

$$\left(-\frac{d}{dt}\right)^n {}_t I_b^n f(t) = f(t).$$

Là encore, l'extension à un ordre réel positif est immédiate.

Définition 3.3.4 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ est définie par

$$\forall t \in [a, b], {}_t I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

L'extension sur $[a, +\infty[$ et \mathbb{R} est noté I_-^α :

$$\forall t \in \mathbb{R}, I_-^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{+\infty} (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

3.4 Dérivation fractionnaire

Il y a beaucoup de définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann-Liouville, Liouville, Caputo ainsi que Grünwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

3.4.1 Dérivées de Riemann-Liouville, Liouville et Caputo

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ {}_a I_t^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ {}_a I_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$ et si $n = [\alpha] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ {}_a I_t^{n-\alpha}. \quad (3.13)$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 3.4.1 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], {}_a D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ {}_a I_t^{n-\alpha} f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

De plus, on a vu que la définition (3.3.4) d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 3.4.2 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], {}_t D_b^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ {}_t I_b^{n-\alpha} f(t), \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Définition 3.4.3 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à gauche d'ordre α est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, D_+^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

Définition 3.4.4 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, D_-^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (\tau - t)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

D'après (3.8) et (3.11), toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}_a D_t^n f = D_+^n f = \frac{d^n}{dt^n} f \\ {}_t D_b^n f = D_-^n f = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f. \end{cases} \quad (3.14)$$

Par ailleurs, si l'on se replace sur $[a, b]$, l'interversion des compositions dans le membre de droite de (3.13) semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = {}_a I_t^{n-\alpha} \circ \frac{d^n}{dt^n}. \quad (3.15)$$

On notera toutefois que cette définition est moins naturelle que la précédente, puisque

$\frac{d}{dt} \circ {}_a I_t^1 f(t) = f(t)$, alors que ${}_a I_t^1 \circ \frac{d}{dt} f(t) = f(t) - f(a)$. Ce problème de termes de bords (ici $f(a)$) se retrouve en fait très souvent dans le calcul fractionnaire. La définition donnée par (3.15) est appelée dérivée de Caputo.

Définition 3.4.5 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], {}_a^c D_t^\alpha &= {}_a I_t^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 3.4.6 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], {}_t^c D_b^\alpha &= {}_t I_b^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(t), \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^b (t - \tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classiques :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}^c D_t^n f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a), \\ {}^c D_b^n f(t) = (-1)^n (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)). \end{cases} \quad (3.16)$$

Heureusement, le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Lemme 3.4.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a, b])$, alors presque partout

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c D_t^\alpha f(t) &= f^{(n)}(t), \\ \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c D_b^\alpha f(t) &= (-1)^n (f^{(n)}(t)). \end{aligned}$$

Démonstration Comme $f^{(n)} \in L^1([a, b])$, d'après [28], en posant $\beta = n - \alpha$, $\lim_{\beta \rightarrow 0^+} {}_a I_t^\beta f^{(n)} = f^{(n)}$ presque partout. Le même raisonnement s'applique pour ${}^c D_b^\alpha$. ■

3.4.2 Dérivées de Grünwald-Letnikov

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies. Nous reprenons ici la présentation de [29].

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. Pour $h > 0$, notons τ_h l'opérateur de translation à gauche

$$\tau_h f(t) = f(t - h).$$

On a ainsi

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t) - f(t - h)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (id - \tau_h) f(t).$$

En notant $\tau_h^2 = \tau_h \circ \tau_h$, on a : $\tau_h^2 f(t) = f(t - 2h)$.

Concernant la dérivée seconde,

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} (id - \tau_h) \right)^2 f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (id - 2\tau_h + \tau_h^2) f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(t) - 2f(t - h) + f(t - 2h)). \end{aligned}$$

Plus généralement, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f est donnée par

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} (id - \tau_h)^n f(t), \quad (3.17)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} id^{n-k} (-\tau_h)^k f(t), \quad (3.18)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \quad (3.19)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Il est possible d'étendre $\binom{n}{k}$ à $k > n$, en posant $\binom{n}{k} = 0$. La formule (3.19) devient alors

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh).$$

Là encore, on peut généraliser le terme de droite grâce à la fonction Gamma, en posant pour $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)}.$$

Notons cette fois que $\binom{\alpha}{k} \neq 0$ même si $k > \alpha$.

Définition 3.4.7 Soit $\alpha > 0$. La dérivée de Grünwald-Letnikov à gauche d'ordre α est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, {}^{GL}\mathcal{D}_+^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh).$$

En remarquant que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (id - \tau_{(-h)}) f(t) = -f'(t)$, on obtient la dérivée de Grünwald-Letnikov à droite.

Définition 3.4.8 Soit $\alpha > 0$. La dérivée de Grünwald-Letnikov à droite d'ordre α est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, {}^{GL}\mathcal{D}_-^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t + kh).$$

La dérivée de Grünwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, l'évaluation discrète de $\frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh)$ permet d'approximer la dérivée fractionnaire sur \mathbb{R} (de Liouville).

3.5 Quelques propriétés de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires sont les suivantes :

- Si $f(t)$ est une fonction analytique en t alors sa dérivée fractionnaire D_t^α est une fonction analytique en t et α .
- La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateurs linéaires :

$$D_t^\alpha(\gamma f(t) + \delta g(t)) = \gamma D_t^\alpha f(t) + \delta D_t^\alpha g(t).$$

- La loi additive d'index :

$$D_t^\alpha D_t^\beta f(t) = D_t^\beta D_t^\alpha f(t) = D_t^{\alpha+\beta} f(t).$$

- Pour $\alpha = 0$ l'opération $D_t^\alpha f(t)$ est l'opérateur identité :

$$D_t^0 f(t) = f(t).$$

- **Règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires**

Prenons deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, et commençons par la règle connue de Leibniz pour évaluer la $n^{\text{ième}}$ dérivée de la produit $f(x) \times g(x)$:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \times g(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x). \quad (3.20)$$

La généralisation de cette formule pour la dérivation fractionnaire est la suivante :

Si $f(t)$ est continue dans $[a, x]$ et $g(t)$ possède $(n + 1)$ dérivées continues sur $[a, x]$, alors la dérivée fractionnaire du produit $f(x) \times g(x)$ est donnée par :

$$D^\alpha(f(x) \times g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x) \times D^{\alpha-k} g(x) - R_n^\alpha(x), \quad (3.21)$$

où $n \geq \alpha + 1$ et

$$R_n^\alpha(x) = \frac{1}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_\alpha^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt \int_t^x g^{(n+1)}(\tau) (t-\tau)^n d\tau.$$

La somme de (3.21) peut être considérée comme une somme partielle d'une série infinie et $R_n^\alpha(x)$ comme un reste de la série. En faisant le changement de variable d'intégration comme le suivant

$\tau = t - \zeta(x - t)$ et $t = a + \eta(x - a)$, on peut avoir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^\alpha(x) = 0$, donc on peut déduire que si, $f(x)$ et $g(x)$ ainsi que tous ses dérivées sont continues dans $[a, x]$, sous cette condition, la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire prend la forme suivante :

$$D^\alpha(f(x) \times g(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x) \times D^{(\alpha-k)}g(x). \quad (3.22)$$

3.6 Comparaison entre la dérivée au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

Nous avons vu que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont reliées par la formule :

$${}_a D_t^\alpha f(t) \stackrel{c}{=} D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k-\alpha}. \quad (3.23)$$

- L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est-à-dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure $x = a$.
- Afin de souligner la différence entre la forme des conditions initiales lesquelles doivent accompagner des équations différentielles en termes des dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo, rappelons les formules des transformées de Laplace correspondantes pour $a = 0$. La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville pour $(m - 1 \leq \alpha < m)$ est

$$L\{{}_0 D^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [{}_0 D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (3.24)$$

tandis que pour celle de Caputo $(m - 1 \leq \alpha < m)$ soit :

$$L\{{}_0^c D^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (3.25)$$

- Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo par contre par Riemann-Liouville elle est

$$\frac{c}{\Gamma(1 - \alpha)}(x - a)^{-\alpha}.$$

- Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit les autres sens (Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov) comme le montre la figure (Figure 3.1) c'est-à-dire : pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m - 1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Riemann-Liouville ou par Grünwald-Letnikov, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m - \alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m : mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m - 1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(m - \alpha)$:

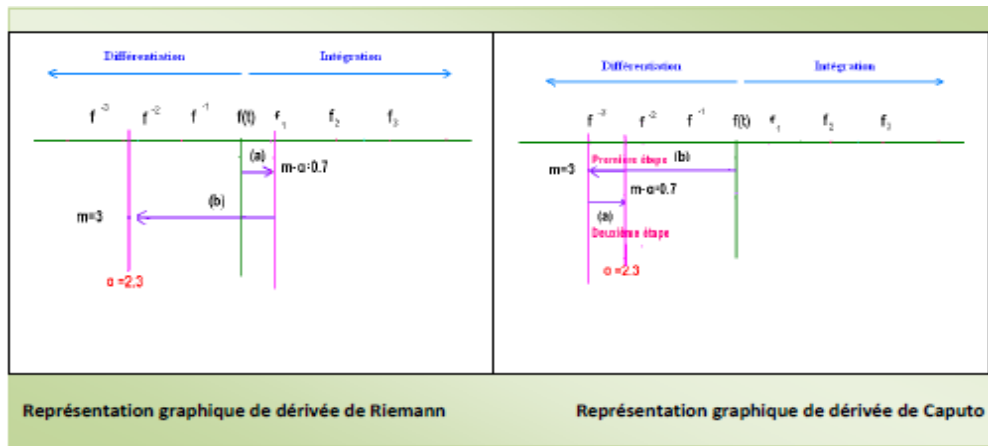


FIGURE 3.1 – Différence entre l'approche de Riemann et l'approche de Caputo

3.7 Interprétation des dérivées fractionnaires

3.7.1 Introduction

La dérivation au sens classique ou d'ordre entier a un sens physique et géométrique, tous deux très clairs, ce qui a priori permet de simplifier son introduction dans la résolution des problèmes

appliqués dans les domaines scientifiques. Cependant, le calcul fractionnaire est né le 30 septembre 1695 mais il n'y avait pas d'interprétation géométrique et physique acceptable de ces opérations pour plus de 300 années. L'intégration et la différentiation fractionnaires sont des généralisations de notions d'intégration et de différentiation d'ordre entier, incluent des dérivées d'ordre n et d'intégrales répétées n fois comme cas particuliers. A cause de ceci, il serait idéal pour avoir des telles interprétations physiques et géométriques d'opérateurs d'ordre fractionnaire qui fourniront aussi un lien aux interprétations classiques de différentiation et d'intégration d'ordre entier connues. Le manque de ces interprétations a été reconnu à la première Conférence Internationale sur le Calcul Fractionnaire dans (New Haven USA) en 1974 en l'incluant dans la liste de problèmes ouverts . La question était sans réponse, et par conséquent il a été répété aux conférences subséquentes à l'Université de Strathclyde (Royaume-Uni) en 1984 et à l'Université Nihon (Tokyo, Japon) en 1989. La conférence sur les Méthodes des Transformées et les Fonctions Spéciales dans Varna (1996) a montré que le problème était encore irrésolu. Récemment, beaucoup d'efforts ont été consacrés à essayer de lier les intégrales et les dérivées fractionnaires d'un côté, et la géométrie fractale, d'un autre (R. Nigmatullin 1992 ; Fu- Yao Ren, Zu-Guo Yu et Feng Su 1996 ; Zu-Guo Yu, Fu-Yao Ren et Ji Zhou 1997 ; M. Monsref-Torbati et J.K. Hammond 1998 ; etc). Cependant, cette approche a été critiquée par R. Rutman. En principe, les fractales eux-mêmes, ne sont pas en rapport directement avec les intégrales fractionnaires ou les dérivées fractionnaires, seulement la description de processus dynamiques dans les structures fractales peut mener à des modèles qui concernent des opérateurs de l'ordre fractionnaires.

3.7.2 Interprétation des intégrales fractionnaires à gauche de Riemann-Liouville (Approche de Podlubny)

Soit l'intégrale fractionnaire à gauche d'ordre α de Riemann-Liouville suivant :

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (3.26)$$

On peut l'écrire sous la forme :

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \int_a^t f(\tau) dg_t(\tau), \quad (3.27)$$

avec

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\}. \quad (3.28)$$

La fonction $g_t(\tau)$ a une propriété d'échelle intéressante. En effet, si on prend $t_1 = kt$ et $\tau_1 = k\tau$; $k > 0$ on obtient alors :

$$g_{t_1}(\tau_1) = g_{kt}(k\tau) = k^\alpha g_t(\tau). \quad (3.29)$$

Considérons maintenant l'intégrale (3.27) pour un t fixé, alors elle devient simplement une intégrale de Stieltjes, et nous pouvons alors utiliser l'idée de G. L Bullock suivante : Prenons les axes τ, g et f . Dans le plan $(\tau; g)$ nous traçons le graphe de la fonction $g_t(\tau)$ pour $0 \leq \tau \leq t$. Le long de la courbe obtenue nous "construisons un grillage" de la hauteur variable $f(\tau)$, donc le bord supérieur du "grillage" est une ligne à trois dimensions $(\tau; g_t(\tau); f(\tau))$, $0 \leq \tau \leq t$. Ce "grillage" peut être projeté sur deux surfaces (voir Figure 3.2) :

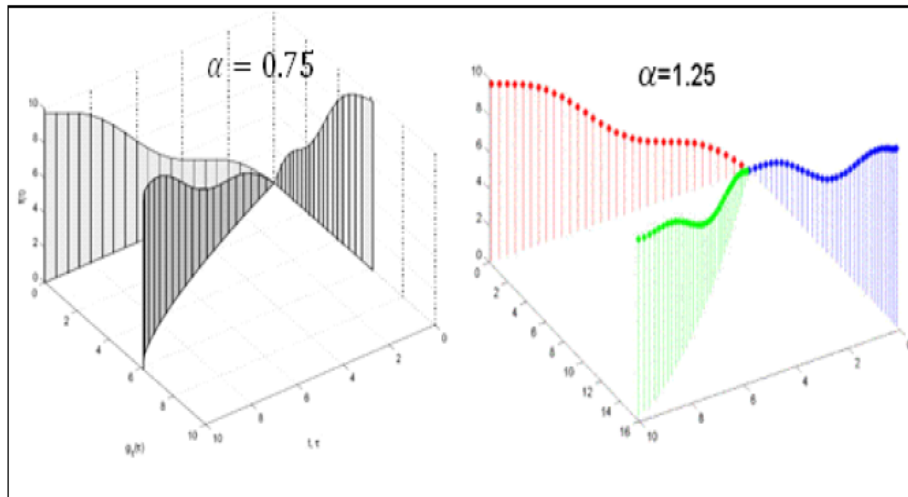


FIGURE 3.2 – Grillage et ses ombres ${}_a I_t^\alpha f(t)$ et ${}_a I_t^1 f(t)$ pour $\alpha = 0.75$ et $\alpha = 1.25$, $f(t) = t + 0.5 \sin t$; $0 \leq t \leq 10$

- L'aire de la projection de ce "grillage" sur le plan $(\tau; f)$ correspond à la valeur de l'intégrale

$${}_a I_t^1 f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau; t \geq 0. \quad (3.30)$$

- L'aire de la projection de ce "grillage" sur le plan $(g; f)$ correspond à la valeur de l'intégrale (3.27) qui est la même valeur de l'intégrale fractionnaire (3.26). En d'autres termes, notre "grillage" projette deux ombres sur deux murs. La première d'entre elle, qui est sur le mur $(\tau; f)$, est " l'aire célèbre sous la courbe $f(\tau)$ " qui est une interprétation géométrique standard de l'intégrale (3.30). L'ombre sur le mur $(g; f)$ est une interprétation géométrique de l'intégrale fractionnaire (3.26) pour un t fixé. Évidemment, si $\alpha = 1$, alors $g_t(\tau) = \tau$, et les deux "ombres" sont égales. Cela montre que l'intégration définie classique est même un cas particulier de l'intégration fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville du point de vue géométrique. Que se passe quand t varie? Comme t change, le "grillage" change simultanément sa longueur et, dans un certain sens sa forme aussi, (Figure 3.3) Si nous suivons le changement de l'ombre sur le mur $(g; f)$ qui change simultanément avec le "grillage" (Figure 3.4), alors on obtient une interprétation géométrique dynamique de l'intégrale fractionnaire (3.26) comme une fonction de la variable t .

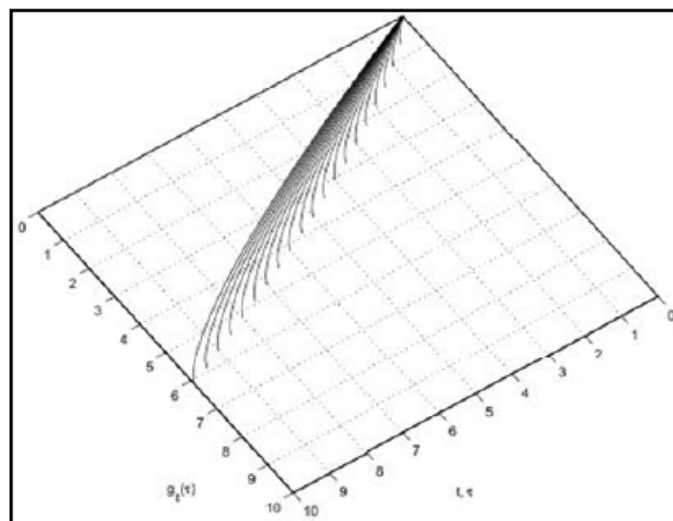


FIGURE 3.3 – Le processus de changement de la forme de la base du grillage pour : ${}_a I_t^\alpha f(t); \alpha = 0.75, 0 \leq t \leq 10$

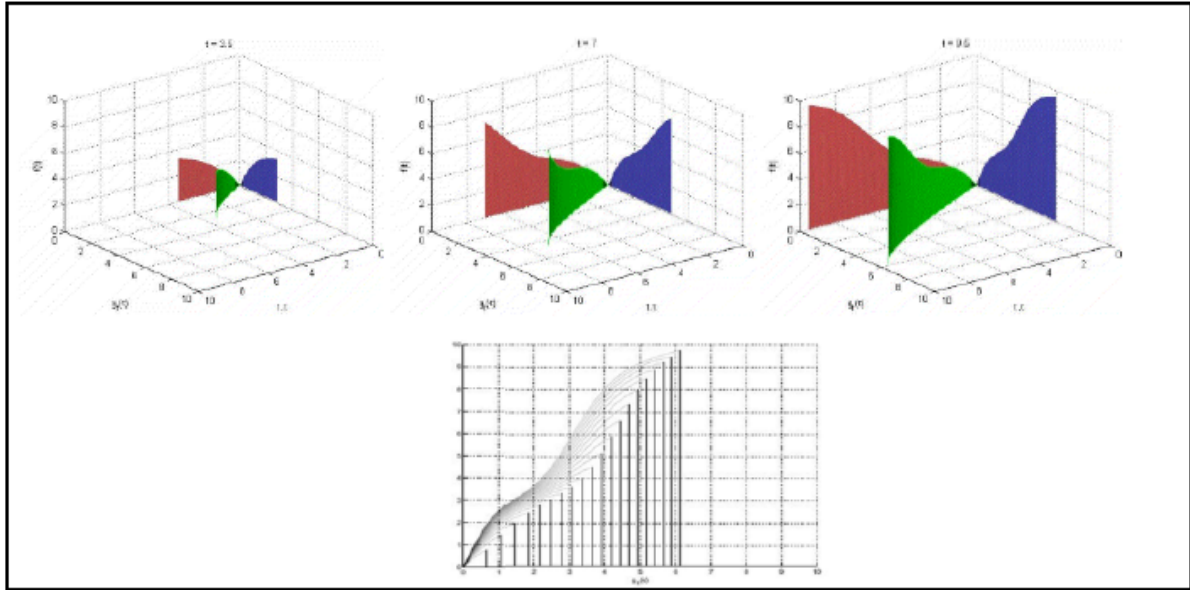


FIGURE 3.4 – Le profil du changement de l'ombre suivant le changement du grillage pour : ${}_a I_t^\alpha f(t)$; $\alpha = 0.75$, $0 \leq t \leq 10$ avec la période de temps $\Delta t = 0.5$ entre les profils

3.7.3 Interprétation physique de l'intégrale de Stieltjes

L'interprétation géométrique de l'intégration fractionnaire, donnée dans la section précédente est essentiellement fondée sur l'ajout de la troisième dimension ($g_t(\tau)$) à la classique paire, $(\tau; f(\tau))$. Si on considère τ comme le temps, alors $g_t(\tau)$ peut être interprété comme un "déformé" échelle de temps. Imaginons une voiture équipée de deux appareils de mesure : le compteur de vitesse qui enregistre la vitesse $v(\tau)$ et l'horloge qui devrait afficher l'heure τ , cependant l'horloge affiche le temps incorrectement. Nous supposons que la relation entre le temps incorrect τ , qui est indiqué par l'horloge et dont le conducteur considère comme l'heure exacte, d'une part, et le vrai temps T , d'autre part, est décrit par la fonction $T = g(\tau)$. Cela signifie que lorsque le conducteur mesure l'intervalle de temps $d\tau$, alors l'intervalle de temps vrai sera donné par $dT = dg(\tau)$. Le conducteur A , qui ne connaît pas le mauvais fonctionnement de l'horloge calcule la distance

parcourue comme l'intégrale classique :

$$S_A(t) = \int_0^t v(\tau) d(\tau).$$

Cependant, l'observateur o qui est en connaissance de la mauvaise horloge et ayant la fonction $g(\tau)$, qui rétablit les valeurs correctes du temps à partir de la cabine de conduite, va calculer la distance réellement parcourue comme :

$$S_o(t) = \int_0^t v(\tau) dg(\tau). \quad (3.31)$$

Cet exemple montre que l'intégrale de Stieltjes (3.31) peut être interprétée comme la véritable distance parcourue par un objet en mouvement, pour lequel nous avons enregistré des valeurs correctes de vitesse et des valeurs inexactes de temps ; le rapport entre le temps incorrectement consigné et l'heure exacte T est donné par une fonction connue $T = g(\tau)$.

3.7.4 Interprétation physique de l'intégration fractionnaire

Considérons l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville

$$S_o(t) = \int_a^t v(\tau) dg_t(\tau) = {}_a I_t^\alpha v(t), \quad (3.32)$$

l'intégrale fractionnaire $S_o(t)$ de la fonction $v(t)$ peut être interprétée comme la vraie distance dépassée par un objet en mouvement, la fonction $g_t(\tau)$ décrit l'échelle de temps non homogène, ce qui dépend non seulement de τ mais aussi du paramètre t . quand t change, la totalité cosmique précédente intervalle du temps change également. Ceci est en accord avec les vues actuelles de la physique.

3.7.5 Interprétation physique de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Nous pouvons utiliser les propriétés de la différentiation et de l'intégration fractionnaire pour exprimer $v(t)$ de l'équation (3.32) comme la dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville de $S_o(t)$:

$$V(t) = {}_a D_t^\alpha S_o(t), \quad (3.33)$$

où ${}_a D_t^\alpha$ dénote la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville définie pour $0 < \alpha < 1$ par :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau.$$

Ceci montre que la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de la vraie distance $S_o(t)$ parcourue par un objet mobile, pour lequel le rapport entre son temps individuel τ et le temps cosmique T à chaque temps individuel t est donné par la fonction connue $T = g_t(\tau)$ décrite par l'équation (3.28), est égale à la vitesse individuel $v(\tau)$ de cet objet. D'autre part, nous pouvons différencier la relation (3.32) par rapport au variable de temps t , qui donne la relation entre la vitesse $v_o(t) = S'_o(t)$ du mouvement de point de vue de l'observateur indépendant o et la vitesse individuel $v(t)$:

$$v_o(t) = \frac{d}{dt} I_t^\alpha v(t) = {}_a D_t^{1-\alpha} v(t). \quad (3.34)$$

Par conséquent, la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $(1-\alpha)$ de la vitesse individuel $v(t)$ est égale à la vitesse du point de vue de l'observateur indépendant $v_o(t)$, si le temps individuel τ et le temps cosmique T sont reliés par la fonction $T = g_t(\tau)$ décrite par l'équation (3.28). Pour $\alpha = 1$, quand il n'y a aucune déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncidentes : $v_o(t) = v(t)$

Remarque 3.7.1 *L'interprétation physique suggérée de l'intégration et de la Différentiation fractionnaires repose sur l'utilisation de deux types de temps : Le temps cosmique et le temps individuel, par contre l'ensemble du calcul différentiel et d'intégral classique est basée sur l'utilisation du temps mathématique (homogène, coulant uniformément).*

En réalité l'échelle de temps homogène est juste une notion idéale, qui est nécessaire pour développer les modèles mathématiques décrivant le temps cosmique non homogène et leur changement.

3.8 Les équations différentielles fractionnaires

On se restreint dans cette section aux équations d'un seul terme de dérivation de la forme :

$${}_a D^\alpha x(t) = f(t, x(t)).$$

3.8.1 Problème de Cauchy

Soit l'équation différentielle fractionnaire :

$${}_aD^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (3.35)$$

où $(n - 1 < \alpha < n)$ et $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application dérivable et $f(t, x(t)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ et ${}_aD^\alpha$ désigne la dérivée au sens de Riemann-Liouville.

Définition 3.8.1 On appelle donnée de Cauchy pour l'équation(3.35) une condition

$${}_aD^{\alpha-k}x(0) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}) \quad (3.36)$$

où $b_k \in \mathbb{R}^n$. Un problème de Cauchy fractionnaire sera la donnée d'une équation fractionnaire et d'une donnée de Cauchy

3.8.2 Équation différentielle fractionnaire linéaire

Considérons le problème aux valeurs initiales suivantes :

$$\begin{cases} {}_aD^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & (a < t < T < \infty) \\ ({}_aD^{\alpha-1}x(t))_{t=0} = b, \end{cases} \quad (3.37)$$

où ${}_aD^\alpha x(t)$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville tels que $0 < \alpha \leq 1$ et $f(t) \in L_1(a, T)$, c'est-à-dire : $\int_a^T |f(t)| dt < \infty$

Théorème 3.8.1 Si $f(t) \in L_1(a, T)$, alors le problème (3.37) admet une unique solution $x(t) \in L_1(a, T)$.

Preuve. voir [30]. ■

3.8.3 Équation différentielle fractionnaire de forme plus générale

En plus des équations différentielles fractionnaires linéaires, les équations non linéaires apparaissent aussi dans les applications surtout dans les systèmes qu'on va étudier prochainement.

On note que les résultats ci-dessous peuvent les utiliser pour toutes les mutations de différenciation fractionnaire. Considérons donc le problème à valeur initiale suivante :

$$\begin{cases} {}_a D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & (a < t < T < \infty) \\ ({}_a D^{\alpha-1} x(t))_{t=0} = b, \end{cases} \quad (3.38)$$

où $0 < \alpha \leq 1$.

Nous supposons que $f(t, x(t))$ est définie dans un domaine G du plan (t, x) , et nous définissons une région $R(h, K) \subset G$ comme étant l'ensemble des points $(t, x) \in G$, qui vérifient les inégalités suivantes : $0 < t < h$,

$$|t^{1-\alpha} x(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} b| \leq K. \quad (3.39)$$

Théorème 3.8.2 Soit $f(t, x(t))$ une fonction continue à valeurs réelles, définie dans le domaine G , la condition de Lipschitz par rapport à x , c'est-à-dire : $|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))| \leq A|x_1(t) - x_2(t)|$ et telle que :

$$|f(t, x(t))| \leq M < \infty \quad \text{pour tout } (t, x) \in G,$$

soit aussi

$$K \geq \frac{Mh}{\Gamma(1 + \alpha)}.$$

Alors il existe, dans la région $R(h, K)$, une unique solution continue $x(t)$ du problème (3.38)

Preuve. Voir [30]. ■

3.9 Les systèmes différentiels d'ordre fractionnaire

Au début on introduit la définition suivante :

- "Le système fractionnaire" est un système qui est décrit par des équations différentielles fractionnaires.

Soit le système différentiel suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (3.40)$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $D^\alpha x(t)$ désigne la dérivée de Caputo.

3.9.1 Points d'équilibre et région de stabilité

Prenons le système (3.40) avec condition initiale $x(0) = x_0$.

Pour évaluer les points d'équilibre du système (3.40), il suffit à résoudre l'équation

$$D^\alpha x(t) = 0. \quad (3.41)$$

Si x^* est une solution de l'équation, alors :

$$f(x^*) = 0. \quad (3.42)$$

Pour

$$x(t) = x^* + \varepsilon(t), \quad (3.43)$$

alors

$$D^\alpha(x^* + \varepsilon) = f(x^* + \varepsilon), \quad (3.44)$$

avec la linéarité de dérivation fractionnaire, le résultat précédent peut s'écrire

$$D^\alpha(\varepsilon(t)) = f(x^* + \varepsilon). \quad (3.45)$$

En utilisant le développement (généralisé aux dérivées fractionnaires) de Taylor de la fonction f , on arrive à

$$f(x^* + \varepsilon) \simeq f'(x^*)\varepsilon. \quad (3.46)$$

La où $f(x^*) = 0$, et puis

$$D^\alpha \varepsilon(t) \simeq f'(x^*)\varepsilon(t), \quad t > 0 \text{ et } \varepsilon(0) = x_0 - x^*. \quad (3.47)$$

3.9.2 Stabilité des systèmes linéaires autonomes

Théorème 3.9.1 *Soit le système autonome suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.48)$$

telles que $0 < \alpha < 1$ et $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

1. Le système (3.48) est asymptotiquement stable, si et si seulement si, $|\arg(\lambda)| > \alpha \frac{\pi}{2}$, pour tout λ : valeurs propres de la matrice A . Aussi, le vecteur d'état $x(t)$ tends vers 0 et vérifie la condition suivante : $\|x(t)\| < Nt^{-\alpha}$, $t > 0$, $\alpha > 0$.
 2. Le système (3.48) est stable, si et si seulement si, la condition $|\arg(\lambda)| \geq \alpha \frac{\pi}{2}$ est vérifiée pour toute valeur propre λ de la matrice A , et les valeurs propres critiques satisfont à $|\arg(\lambda)| = \alpha \frac{\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique qui coïncide avec leur multiplicité algébrique.
- La Figure 3.5 présente les régions stable et instable.

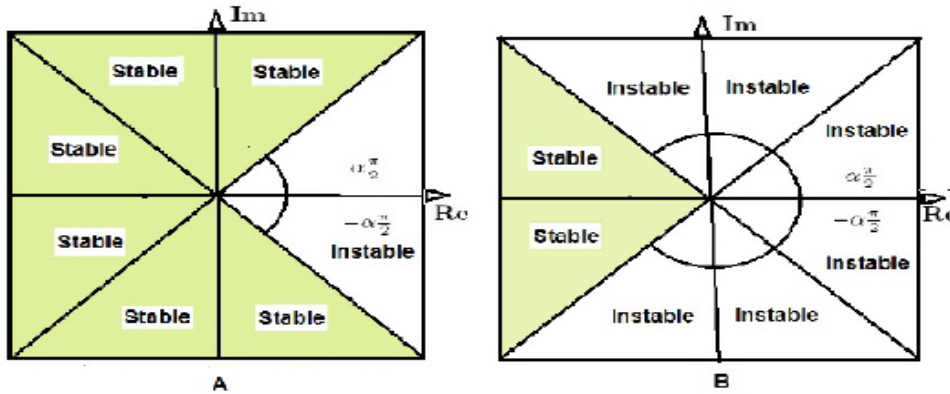


FIGURE 3.5 – A : Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$
 B : Domaine de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $1 < \alpha < 2$

Remarque 3.9.1 Si $1 < \alpha < 2$, alors la relation $|\arg(\lambda)| > \alpha \frac{\pi}{2}$ décrit une région convexe du plan complexe comme le montre la Figure 3.5

Corollaire 3.9.1 Supposons que $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$ et tous les α_i sont des nombres rationnels entre 0 et 1 soit m le plus petit commun multiple des dénominateurs u_i de α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) où $\alpha_i = \frac{v_i}{u_i}$, v_i et $u_i \in \mathbb{Z}^+$ avec $i = 1, 2, \dots, n$ et en posant $\rho = \frac{1}{m}$, donc le système (3.48) est asymptotiquement stable si

$$|\arg(\lambda)| > \rho \frac{\pi}{2} \tag{3.49}$$

pour toutes les racines λ de l'équation caractéristique suivante :

$$\det(\text{diag}([\lambda^{m\alpha_1}, \dots, \lambda^{m\alpha_n}] - A)) = 0. \tag{3.50}$$

Ce corollaire dit que dans le cas des ordres rationnelles l'équation caractéristique peut être transformée en une équation polynomiale d'ordre entier.

Remarque 3.9.2 Dans le cas du système non linéaire :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (3.51)$$

où $0 < \alpha < 1$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

On linéarise le système (autour du point d'équilibre) qui peut s'écrire sous la forme :

$$D^\alpha x(t) = Ax \quad (3.52)$$

avec A est la matrice Jacobienne de f et puis on applique le théorème précédent.

- Dans le cas des systèmes dynamiques non-linéaires de dimension 3, un point d'équilibre "selle" est un point sur lequel le modèle linéarisé l'équivalent a au moins une valeur propre dans la région stable et une valeur propre dans la région instable. Dans le même système, un point "selle" est appelé point "selle" d'index 1 si l'une des valeurs propres est instable et les autres sont stables. Aussi, un point "selle" d'index 2 est un point "selle" avec une valeur propre stable et deux valeurs propres instables. En systèmes chaotiques, il est prouvé que les rouleaux sont générés à autour des points "selles" d'index 2. En outre, les points "selles" d'index 1 sont responsables seulement pour le raccordement des rouleaux [31, 32].

Considérons le système fractionnaire en trois dimensions :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (3.53)$$

où $0 < \alpha < 1$ et $x \in \mathbb{R}^3$. Donc il ne dispose que de trois points d'équilibre. Par conséquent, si ce système a un double attracteur de d'élément, l'un des points d'équilibre est un point "selle" d'index 1 et les autres points sont d'index 2. Supposons que λ est une valeur propre instable de l'un des points "selle" d'index 2, une condition nécessaire pour que le système fractionnaire (3.53) de demeurer chaotique est de maintien de la valeur propre λ dans la région instable. Cela signifie :

$$\tan(\alpha, \frac{\pi}{2}) > \left| \frac{Im(\lambda)}{Re(\lambda)} \right| \Leftrightarrow \alpha > \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\left| \frac{Im(\lambda)}{Re(\lambda)} \right| \right). \quad (3.54)$$

3.9.3 Conditions de stabilité de Routh-Hurwitz

Rappelons que le critère de Routh-Hurwitz est un critère algébrique qui permet d'étudier la stabilité d'un système sans avoir les pôles, en [33] une généralisation est faite pour le cas des systèmes d'ordre fractionnaire, nous donnons ici un résumé pour un système en trois dimensions comme le suivant :

Soit (x_e, y_e, z_e) un point d'équilibre du système d'ordre fractionnaire en trois dimensions suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x, y, z) \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = g(x, y, z) \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = h(x, y, z), \end{cases} \quad (3.55)$$

où $\alpha \in (0, 1]$.

L'équation de valeurs propres du point d'équilibre (x_e, y_e, z_e) est donnée par le polynôme suivant :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda - a_3 = 0, \quad (3.56)$$

et son déterminant $D(P)$ est donné par :

$$D(P) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 = 27(a_3)^2. \quad (3.57)$$

Sachant que le point d'équilibre (x_e, y_e, z_e) est localement asymptotiquement stable si toutes les racines de (3.57) satisfont à la condition $|\arg(\lambda)| > \alpha\frac{\pi}{2}$.

Il est facile de montrer que la zone de stabilité dans le cas d'ordre fractionnaire est plus grande que celle de la région de stabilité du cas d'ordre entier. En utilisant les résultats de [33] nous avons les conditions de Routh-Hurwitz suivantes :

1. Si $D(P) > 0$, alors la condition nécessaire et suffisante pour que le point (x_e, y_e, z_e) soit localement asymptotiquement stable est : $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et $a_1 \times a_2 - a_3 > 0$.
2. Si $D(P) < 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ et $a_3 > 0$, alors (x_e, y_e, z_e) est localement asymptotiquement stable pour $\alpha < \frac{2}{3}$ cependant, si $D(P)$, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ et $\alpha > \frac{2}{3}$ alors toutes les racines de l'équation (3.56) satisfont à la condition $|\arg(\lambda)| < \alpha\frac{\pi}{2}$.
3. Si $D(P) < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et $a_1 \times a_2 - a_3 = 0$, alors (x_e, y_e, z_e) est localement asymptotiquement stable pour tout $\alpha \in (0, 1)$.

4. La condition nécessaire pour que le point (x_e, y_e, z_e) , soit localement asymptotiquement stable est : $a_3 > 0$.

3.9.4 Stabilité des systèmes non autonomes (version fractionnaire de la méthode directe de Lyapunov)

La stabilité de Lyapunov constitue un outil important pour l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires. En fait, les problèmes de stabilité ont été largement couverts par Lyapunov et il ya plusieurs tests associés à ce nom. Nous considérons d'abord ce que l'on appelle souvent, méthode directe de Lyapunov qui consiste à trouver une fonction candidate de Lyapunov pour un système non linéaire donné. Si une telle fonction existe, le système est stable. Dans cette thèse, nous étendons la méthode directe de Lyapunov au cas d'ordre fractionnaire. Autrement dit, les systèmes dynamiques non linéaires se pourraient symboliser l'ordre fractionnaire ainsi que l'évolution de la fonction de Lyapunov pourrait être l'ordre du temps fractionnaire.

Définissons d'abord la stabilité dans le sens de Mittag-Leffler, pour cela nous considérons le système fractionnaire, au sens de Caputo, non autonome suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.58)$$

où $\alpha \in (0, 1)$ et $f : [t_0, +\infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue par morceaux en t et localement Lipschitz en x , $x = 0$ est le point d'équilibre du système(3.58).

Théorème 3.9.2 [34] *Si $x = 0$ est un point d'équilibre du système (3.58), f est Lipschitzienne par rapport à x , avec la constante de Lipschitz (L) et continue par morceaux par rapport à t , alors la solution de (3.58) satisfait*

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| E_\alpha(L(t - t_0)^\alpha), \quad (3.59)$$

où $\alpha \in (0, 1)$, E_α est la fonction Mittag-Leffler.

Remarque 3.9.3 *Si $\alpha = 1$, il s'ensuit que*

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| e^{L(t-t_0)}. \quad (3.60)$$

La stabilité généralisée au sens de Mittag-Leffler

Soit le système fractionnaire

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (3.61)$$

où $\alpha \in (0, 1]$, D^α peut désigner à la fois les opérateurs fractionnaires au sens de Caputo ou de Riemann-Liouville.

Définition 3.9.1 [34] *La solution de (3.61) est dite stable au sens de Mittag-Leffler si*

$$\|x(t)\| \leq \{m[x(t_0)]E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\}^b, \quad (3.62)$$

où t_0 est le temps initial, $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda \geq 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(x) \geq 0$ et $m(x)$ est localement Lipschitzienne par rapport à $x \in B \in \mathbb{R}^n$ avec la constante de Lipschitz m_0 .

Définition 3.9.2 [34] *La solution de (3.61) est dite stable au sens généralisée de Mittag-Leffler si*

$$\|x(t)\| \leq \{m[x(t_0)](t-t_0)^{-\gamma}E_{\alpha,1-\gamma}(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\}^b, \quad (3.63)$$

où t_0 est le temps initial, $\alpha \in (0, 1)$, $-\alpha < \gamma \leq 1 - \alpha$, $\lambda \geq 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(x) \geq 0$ et $m(x)$ est localement Lipschitzienne par rapport à $x \in B \in \mathbb{R}^n$ avec la constante de Lipschitz m_0 .

Remarque 3.9.4 *La stabilité Mittag-Leffler et la stabilité Mittag-Leffler généralisée impliquent la stabilité asymptotique.*

Pour $\lambda = 0$, il résulte de (3.63) que

$$\|x(t)\| \leq \left[\frac{m[x(t_0)]}{\Gamma(1-\gamma)}\right]^b (t-t_0)^{-\gamma b} \quad (3.64)$$

ce qui implique que la stabilité asymptotique est un cas particulier de la stabilité au sens de Mittag-Leffler.

L'extension de la méthode directe de Lyapunov à l'ordre fractionnaire

En utilisant la méthode directe de Lyapunov, nous pouvons obtenir la stabilité asymptotique des systèmes correspondants. Dans cette section, nous étendons la méthode directe de Lyapunov pour le cas des systèmes d'ordre fractionnaire, ce qui conduit à la stabilité au sens de Mittag-Leffler.

Théorème 3.9.3 Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour le système (3.61) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine.

Soit $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et localement Lipschitz par rapport à x tels que

$$\alpha_1 \|x\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2 \|x\|^{ab} \quad (3.65)$$

$${}^c D^\beta (V(t, x(t))) \leq -\alpha_3 \|x\|^{ab}, \quad (3.66)$$

où $t \geq 0$, $x \in D$, $\beta \in (0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a$ et b sont des constantes positives quelconques.

Alors $x = 0$ est Mittag-Leffler stable. Si les hypothèses sont globalement sur \mathbb{R}^n , alors $x = 0$ est globalement Mittag-Leffler stable.

Théorème 3.9.4 Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour le système (3.61) où $\alpha \in (0, 1)$ et $f(x, t)$ satisfait à la condition de Lipschitz avec la constante de Lipschitz L , supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov $V(t, x(t))$ satisfaisant

$$\alpha_1 \|x\| \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2 \|x\|, \quad (3.67)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3 \|x\|, \quad (3.68)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des constantes positives et $\dot{V}(t, x) = \frac{dV(t, x)}{dt}$, alors on a

$$\|x(t)\| \leq \frac{V(0, x(0))}{\alpha_1} E_{1-\alpha} \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2 L} t^{1-\alpha} \right). \quad (3.69)$$

Ensuite, le point d'équilibre du système (3.61) est Mittag-Leffler (asymptotique) stable.

Démonstration voir [34]. ■

3.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné un aperçu du calcul fractionnaire. On a introduit quelques rappels sur les fonctions de gamma, Bêta et Mittag-Leffler et sur les différentes définitions et propriétés de la dérivée fractionnaire. La transformée de Laplace des dérivées fractionnaires et leurs interprétation géométrique et physique sont aussi étés présentés. Nous avons exhibé

une introduction sur les équations différentielles d'ordres fractionnaires, problème de Cauchy, équation différentielle fractionnaire linéaire, équation différentielle fractionnaire de forme plus générale, on a passé aux systèmes différentiels fractionnaires tels que on a introduit le points d'équilibre et région de stabilité, stabilité des systèmes linéaires autonomes, conditions de stabilité de Routh-Hurwitz et stabilité des systèmes non autonomes.

Chapitre 4

Synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires

4.1 Introduction

Le phénomène de synchronisation se manifeste lorsque deux systèmes dynamiques évoluent d'une manière identique en fonction du temps. L'une des configurations de synchronisation les plus populaires est la configuration maître-esclave pour laquelle un système dynamique appelé système esclave suit le rythme et la trajectoire imposés par un autre système dynamique appelé système maître. Les perspectives de l'utilisation du chaos dans diverses applications ont motivé les chercheurs à étudier la question de l'éventuelle possibilité de synchroniser le chaos. Cette synchronisation paraît difficile à réaliser, car à la différence de la synchronisation où l'on cherche à reproduire seulement une période d'oscillation, la synchronisation chaotique présente plus de contraintes. Au cours des dernières années, les recherches montrent qu'on peut aussi prolonger la synchronisation aux systèmes à dérivées fractionnaires et c'est cela que nous essayons de faire dans ce chapitre avec la version fractionnaire d'un système modélisant la dynamique du charançon de la datte en appliquant la méthode de la synchronisation globale et la méthode du contrôleur actif.

4.2 Définition de la synchronisation

4.2.1 Définition générale

Les relations humaines qui se synchronisent sont l'une des premières choses que nous avons apprises, car un bébé qui répond au sourire de sa mère, ne fait rien d'autre que de se synchroniser sur les expressions du visage de sa mère.

Définition 4.2.1 (de Larousse) *Synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : **Syn** veut dire ensemble et **Chrono** veut dire temps. C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.*

Définition 4.2.2 (générale) *La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.*

4.2.2 Définitions mathématiques de la synchronisation

Après plusieurs tentatives pour définir un mouvement synchronisé, Brown et Kocarev [35] ont fourni une définition mathématique de la synchronisation. Pour construire la définition, ils supposent qu'un système dynamique, global, de dimension finie et déterministe est divisible en deux sous-systèmes :

$$\dot{X} = F(X(t)), \dot{Y} = G(Y(t)), \quad (4.1)$$

où, $X(t) \in \mathbb{R}^n$ et $Y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Soit $\varphi(\omega_0)$ une trajectoire du système globale donné par (4.1) avec la condition initiale $\omega_0 = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Pour chaque sous-système, on forme une trajectoire $\varphi_x(\omega_0)$ et $\varphi_y(\omega_0)$ (ω_0 étant une condition initiale donnée).

On note par χ l'espace de toutes les trajectoires du premier sous-système, et par ζ l'espace de toutes les trajectoires du second sous-système, et on considère deux fonctions (propriétés) $g_x : \chi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $g_y : \zeta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, qui ne sont pas identiquement nulle, le premier \mathbb{R} représente le temps, nous dirons que les fonctions g_x et g_y sont des propriétés des sous-systèmes définis par

(4.1) respectivement.

Enfin, pour définir un état synchronisé, Brown et Kocarev [35] définissent une fonction $h(g_x, g_y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $\|h\| = 0$ ou $\|h\| \rightarrow 0$ (où $\|\cdot\|$ est une norme). Nous dirons que la fonction h , qui est indépendante du temps, compare les propriétés mesurées entre les deux sous-systèmes, et les deux mesures convergent dans le temps si et seulement si $h(g_x, g_y) = 0$.

Définition 4.2.3 *Brown et Kocarev [35] Les sous-systèmes dans les équations (4.1) sont synchronisés sur la trajectoire de $\varphi(\omega_0)$, par rapport aux propriétés g_x et g_y , s'il existe un instant indépendant de l'application h tel que $\|h(g_x, g_y)\| = 0$.*

Avec le choix de g_x , g_y et h on peut déterminer le type de synchronisation. Cette approche conduit à l'idée qu'il existe différents types de synchronisation qui pourraient être englobés dans un même formalisme.

Théorème 4.2.1 *Le système maître et le système esclave sont synchronisés si et seulement si tous les exposants de Lyapunov du système esclave, appelés les exposants de Lyapunov conditionnels, sont négatifs.*

4.3 Types de synchronisation

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation complète (CS), l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation projective (PS), la synchronisation généralisée GS et la synchronisation Q-S.

4.3.1 Synchronisation complète (CS)

On considère un système chaotique maître représenté par :

$$D^\alpha X(t) = F(X(t)), \quad (4.2)$$

où $X(t)$ est le vecteur d'état du système maître de dimension n , $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, D^α est la dérivée fractionnaire de Caputo, et le système esclave représenté par la formule suivante :

$$D^\alpha Y(t) = G(Y(t)) + U(t), \quad (4.3)$$

où $Y(t)$ est le vecteur d'état du système esclave de dimension m , $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ déterminent le vecteur de contrôle et D^α est la dérivée fractionnaire de Caputo.

L'erreur de la synchronisation complète est définie par :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \text{ telle que } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0, \quad (4.4)$$

où $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

- Si $F = G$, la relation devient une synchronisation complète identique.
- Si $F \neq G$, c'est une synchronisation complète non identique.

Donc, la synchronisation (**CS**) correspond à une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés.

4.3.2 Anti-synchronisation

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [36]. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit

$$e(t) = Y(t) + X(t). \quad (4.5)$$

4.3.3 Synchronisation décalée

Les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un décalage en temps [37]. On dit qu'on a une synchronisation retardée (ou anticipée) si les variables d'état $Y(t)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $X(t)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - X(t - \tau)\| = 0, \quad \forall x(0), \quad (4.6)$$

avec τ est un nombre positif très petit.

4.3.4 Synchronisation projective (PS)

On dit qu'on a une synchronisation projective si les variables d'état $y_i(t)$ du système chaotique esclave $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ (4.3) se synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(t)$ du système chaotique maître $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ (4.2), tels que [38] :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_i(t) - \alpha_i x_i(t)\| = 0, \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$

- Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète.
- Le cas où tous les α_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation complète.

4.3.5 Synchronisation généralisée (GS)

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents [39]. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques. En comparaison avec la synchronisation identique, la synchronisation généralisée notée par **GS** (en anglais : Generalized Synchronization) peut donner une dynamique plus riche, car elle peut aussi envisager certains cas désynchronisés, dus aux disparités des paramètres, aux déformations des canaux de transmission et autres. En conséquence, les possibilités d'appliquer la **GS** peuvent être plus larges que la synchronisation identique. Parmi les premières publications sur cette méthode, on cite les travaux de Rulkov et al. [40] et de Kocarev et Parlitz [41]. Yan et Li [42] ont introduit la synchronisation généralisée pour des systèmes chaotiques unifiés. Récemment, cette méthode est étudiée pour les systèmes chaotiques de dimension arbitraire par un contrôle non linéaire [43]. Cependant, il n'existe que peu de résultats théoriques sur la synchronisation généralisée des systèmes dynamiques chaotiques de différentes dimensions, alors ce type de recherche est juste en début. Pour définir la **GS**, on considère un couple de systèmes maître-esclave représenté par :

$$\begin{cases} D^\alpha X(t) = F(X(t)), \\ D^\alpha Y(t) = G(Y(t)) + U, \end{cases} \quad (4.8)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $Y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les états du système maître et le système esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, D^α est la dérivée fractionnaire de Caputo et $U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ est un contrôleur à déterminer.

Définition 4.3.1 *S'il existe une fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires du système maître et du système esclave, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ vérifient :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - \Phi(X(t))\| = 0, \forall x(0), y(0), \quad (4.9)$$

alors, les systèmes maître-esclave (4.8) se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction Φ .

4.3.6 Synchronisation Q-S

La synchronisation **Q-S** est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes [44]. Nous dirons qu'un système maître, n-dimensionnelle, $X(t)$ et un système esclave, m-dimensionnelle, $Y(t)$ sont en synchronisation **Q-S** dans la dimension d , s'il existe un contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et deux fonctions $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que l'erreur de synchronisation

$$e(t) = Q(X(t)) - S(Y(t)), \quad (4.10)$$

vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$.

4.4 Synchronisation de deux systèmes décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques par la synchronisation globale

4.4.1 Un critère pour la synchronisation globale dans le cas des systèmes d'ordre entier

Considérons un système chaotique sous la forme de

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + g(x_1), \quad (4.11)$$

où $x_1 \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et $g(x)$ est une fonction continue non linéaire. Supposons que

$$g(x_1) - g(x_2) = M_{x_1, x_2}(x_1 - x_2) \quad (4.12)$$

pour une matrice bornée M_{x_1, x_2} , dans laquelle les éléments dépendent de x_1 et x_2 .

Un système esclave pour (4.11) est construit comme suit :

$$\dot{x}_2 = Ax_2 + g(x_2) + K(x_1 - x_2), \quad (4.13)$$

où $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$, avec $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, est une matrice de rétroaction à définir ultérieurement.

À partir de (4.11) et (4.13), l'équation du système d'erreur suivante peut être obtenue :

$$\dot{e} = Ae + g(x_1) - g(x_2) - K(x_1 - x_2) = (A - K)e + M_{x_1, x_2}e, \quad (4.14)$$

où $e = x_1 - x_2$ est le terme d'erreur.

Théorème 4.4.1 [45] *Si la matrice de gain rétroactif K est choisie telle que*

$$\lambda_i \leq \mu < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.15)$$

où λ_i sont les valeurs propres de la matrice $(A - K + M_{x_1, x_2})^T P + P(A - K + M_{x_1, x_2})$, avec une matrice constante symétrique définie positive P , et μ est une constante négative, alors le système dynamique d'erreur (4.14) est globalement exponentiellement stable autour de l'origine, ce qui implique que les deux systèmes (4.11) et (4.13) sont globalement asymptotiquement synchronisés.

Théorème 4.4.2 [45] Choisissons $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$, et posons

$$P(A + M_{x_1, x_2}) + (A + M_{x_1, x_2})^T P = [\bar{a}_{ij}] \quad \text{et} \quad R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |\bar{a}_{ij}|.$$

Si un K approprié est choisi tel que

$$k_i \geq \frac{1}{2p_i} (\bar{a}_{ii} + R_i - \mu), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.16)$$

alors (4.15) est satisfaite, ce qui implique que les deux systèmes chaotiques (4.11) et (4.13) sont globalement synchronisés.

Remarque 4.4.1 Si $P = I$, alors d'après les théorèmes (4.4.1) et (4.4.2), on obtient les inégalités algébriques suivantes pour choisir les paramètres de couplage :

$$k_i \geq \frac{1}{2} (\bar{a}_{ii} + R_i - \mu), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.17)$$

4.4.2 Description du modèle décrivant la dynamique du charançon de la datte d'ordre fractionnaire

D'après [46, 47], le modèle décrivant la dynamique du charançon de la datte peut être écrit comme un ensemble de trois équations différentielles ordinaires non linéaires comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dP}{d\tau} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \frac{bPL}{a+P} \\ \frac{dL}{d\tau} = -dL + \frac{mPL}{a+P} - pLN \\ \frac{dN}{d\tau} = -\mu N + qLN. \end{cases} \quad (4.18)$$

Le modèle est composé de trois populations : le palmier dont la densité de population à l'instant t est désigné par P , le ravageur (charançon de la datte) dont la densité de population est donnée par L et le prédateur dont la densité de population est notée N .

En l'absence de prédateurs, la densité de population des proies croît suivant une courbe logistique avec une capacité de charge K et avec un taux de croissance intrinsèque constant r . Le taux de croissance maximal du ravageur est indiqué par b . La demi-saturation a est constante. d désigne le taux de mortalité des ravageurs, m est le taux de conversion des ravageurs. p est la quantité qui représente la diminution du taux de croissance des ravageurs due à l'attaque des prédateurs, q est le taux d'augmentation de la population de prédateurs et μ désigne le taux de mortalité intrinsèque du prédateur. Ici, tous les paramètres r, K, b, a, d, m, p, μ et q sont positifs.

On peut réduire le nombre de paramètres dans le système (4.18) en utilisant les changements de variables suivants :

$$P = Kx, \quad L = \frac{Kr}{b}y, \quad N = \frac{r}{p}z, \quad \tau = \frac{t}{r},$$

alors nous avons le système sans dimension suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{xy}{\beta+x} \\ \frac{dy}{dt} = -\delta y + \frac{\gamma xy}{\beta+x} - yz \\ \frac{dz}{dt} = -\eta z + \sigma yz, \end{cases} \quad (4.19)$$

où $\beta = \frac{a}{K}$, $\delta = \frac{d}{r}$, $\gamma = \frac{m}{r}$, $\eta = \frac{\mu}{r}$ et $\sigma = \frac{qK}{b}$.

Nous introduisons maintenant l'ordre fractionnaire dans le modèle (4.19).

Le nouveau système est décrit par le système d'équations différentielles d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x = x(1-x) - \frac{xy}{\beta+x} \\ D^\alpha y = -\delta y + \frac{\gamma xy}{\beta+x} - yz \\ D^\alpha z = -\eta z + \sigma yz, \end{cases} \quad (4.20)$$

où D^α est la dérivée fractionnaire de Caputo.

Le modèle décrivant la dynamique du charançon de la datte est chaotique [48] lorsque les valeurs des paramètres sont prises comme as $\beta = 1.15$, $\delta = \eta = 1$, $\gamma = 3$, $\sigma = 3$, $\alpha = 0.95$.

La Figure 4.1 décrit le portrait de phase du modèle décrivant la dynamique du charançon de la datte.

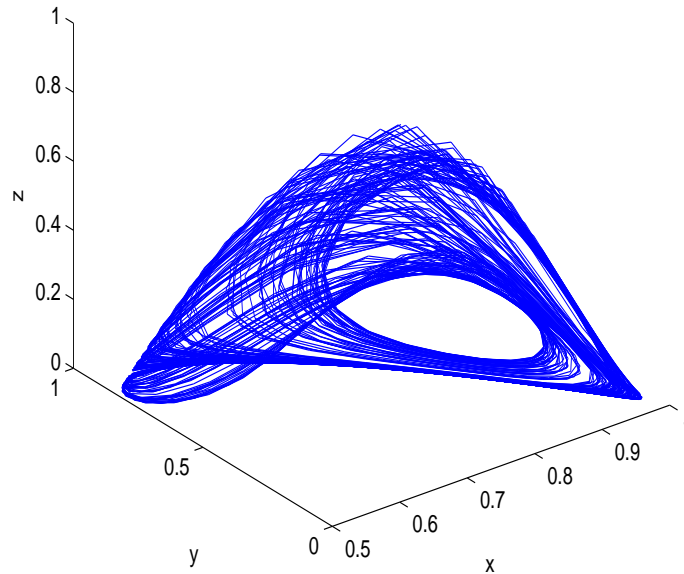


FIGURE 4.1 – Portrait de phase pour le modèle décrivant la dynamique du charançon de la datte.

4.4.3 Application de la synchronisation de systèmes décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques par la synchronisation globale

Dans cette partie, nous étudions la synchronisation du chaos entre deux systèmes chaotiques identiques décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire en utilisant la synchronisation globale.

Ainsi, le système maître est décrit par

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = x_1(1 - x_1) - \frac{x_1 y_1}{\beta + x_1} \\ D^\alpha y_1 = -\delta y_1 + \frac{\gamma x_1 y_1}{\beta + x_1} - y_1 z_1 \\ D^\alpha z_1 = -\eta z_1 + \sigma y_1 z_1, \end{cases} \quad (4.21)$$

les équations du système esclave sont :

$$\begin{cases} D^\alpha x_2 = x_2(1 - x_2) - \frac{x_2 y_2}{\beta + x_2} + k_1(x_1 - x_2) \\ D^\alpha y_2 = -\delta y_2 + \frac{\gamma x_2 y_2}{\beta + x_2} - y_2 z_2 + k_2(y_1 - y_2) \\ D^\alpha z_2 = -\eta z_2 + \sigma y_2 z_2 + k_3(z_1 - z_2). \end{cases} \quad (4.22)$$

Considérons le cas des systèmes d'ordre entier (quand $\alpha = 1$), puis en soustrayant (4.21) de (4.22), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_1 - (x_1 + x_2)e_1 - \left(\frac{y_1}{\beta + x_1}\right)e_1 + \frac{x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)}e_1 - \frac{x_2}{\beta + x_2}e_2 - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = -\delta e_2 + \left[\frac{\gamma y_1}{\beta + x_1} - \frac{\gamma x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)}\right]e_1 - \left(z_2 - \frac{x_2}{\beta + x_2}\right)e_2 - y_1 e_3 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -\eta e_3 + \sigma(y_1 e_3 + z_2 e_2) - k_3 e_3, \end{cases} \quad (4.23)$$

où $e_1 = x_1 - x_2$, $e_2 = y_1 - y_2$, $e_3 = z_1 - z_2$.

Peut être réécrit (4.23) sous la forme matricielle suivant :

$$\dot{e} = (A - K)e + M_{x_1, x_2} e, \quad (4.24)$$

c'est à dire.,

$$\dot{e} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(x_1 + x_2) - \frac{y_1}{\beta + x_1} + \frac{x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)} & -\frac{x_2}{\beta + x_2} & 0 \\ \frac{\gamma y_1}{\beta + x_1} - \frac{\gamma x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)} & -z_2 + \frac{\gamma x_2}{\beta + x_2} & -y_1 \\ 0 & \sigma z_2 & \sigma y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{u_3} \end{bmatrix},$$

où

$$e = [e_1, e_2, e_3]^T$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$M_{x_1, x_2} = \begin{bmatrix} -(x_1 + x_2) - \frac{y_1}{\beta + x_1} + \frac{x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)} & -\frac{x_2}{\beta + x_2} & 0 \\ \frac{\gamma y_1}{\beta + x_1} - \frac{\gamma x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)} & -z_2 + \frac{\gamma x_2}{\beta + x_2} & -y_1 \\ 0 & \sigma z_2 & \sigma y_2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & -\eta \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

De (4.25) et (4.26), on obtient :

$$(A + M_{x_1, x_2}) + (A + M_{x_1, x_2})^T =$$

$$\begin{bmatrix} -2(x_1 + x_2) - 2\frac{y_1}{\beta + x_1} + 2\frac{x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)} + 2 & -\frac{x_2}{\beta + x_2} + \frac{\gamma y_1}{\beta + x_1} - \frac{\gamma x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)} & 0 \\ \frac{\gamma y_1}{\beta + x_1} - \frac{\gamma x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)} - \frac{x_2}{\beta + x_2} & -2z_2 + \frac{2\gamma x_2}{\beta + x_2} - 2\delta & -y_1 + \sigma z_2 \\ 0 & \sigma z_2 - y_1 & 2\sigma y_1 - 2\eta \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

En sélectionnant le contrôle de gain rétroactif k_1, k_2 et k_3 doivent satisfaire les conditions données dans les deux théorèmes précédents, les deux systèmes du modèle du charançon de la datte d'ordre entier sont asymptotiquement synchronisés, c'est-à-dire que la synchronisation est réalisée si les gains de contrôle rétroactif satisfont les inégalités suivantes

$$\begin{cases} k_1 \geq \frac{1}{2}[-2(x_1 + x_2) - \frac{2y_1}{\beta + x_1} + \frac{2x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)} + 2 + |-\frac{x_2}{\beta + x_2} + \frac{\gamma y_1}{\beta + x_1} - \frac{\gamma x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)}| - \mu] \\ k_2 \geq \frac{1}{2}[-2z_2 + \frac{2\gamma x_2}{\beta + x_2} - 2\delta + |-\frac{\gamma x_2 y_1}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)} - \frac{x_2}{\beta + x_2} + \frac{\gamma y_1}{\beta + x_1}| + |-y_1 + \sigma z_2| - \mu] \\ k_3 \geq \frac{1}{2}[-2\sigma y_1 - 2\eta + |\sigma z_2 - y_1| - \mu]. \end{cases} \quad (4.28)$$

Maintenant, les systèmes décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire (4.21) et (4.22) sont intégrés numériquement avec les valeurs des paramètres $\gamma = 3$, $\delta = \eta = 1$, $\sigma = 3$, $\beta = 1.15$ et même ordre fractionnaire $\alpha = 0.95$. En sélectionnant le contrôle de gain rétroactif comme $k_1 = 1.2$, $k_2 = 2.45$, $k_3 = 0.7$, qui satisfont les inégalités (4.28), les systèmes étudiés maître et esclave (4.21) et (4.22) sont asymptotiquement synchronisés.

Pour les simulations numériques, nous utilisons des données suivantes pour certains paramètres comme $\gamma = 3$, $\delta = \eta = 1$, $\sigma = 3$, $\beta = 1.15$, $h = 0.85$, $\alpha = 0.95$, $\mu = -3.5$, alors nous avons

$(x_1, y_1, z_1) = (0.7, 0.3, 0.8)$ et $(x_2, y_2, z_2) = (0.98, 0.35, 0.65)$ et $k_1 = 1.2$, $k_2 = 2.45$, $k_3 = 0.7$.

Les résultats de la simulation sont illustrés à la Figure 4.2.

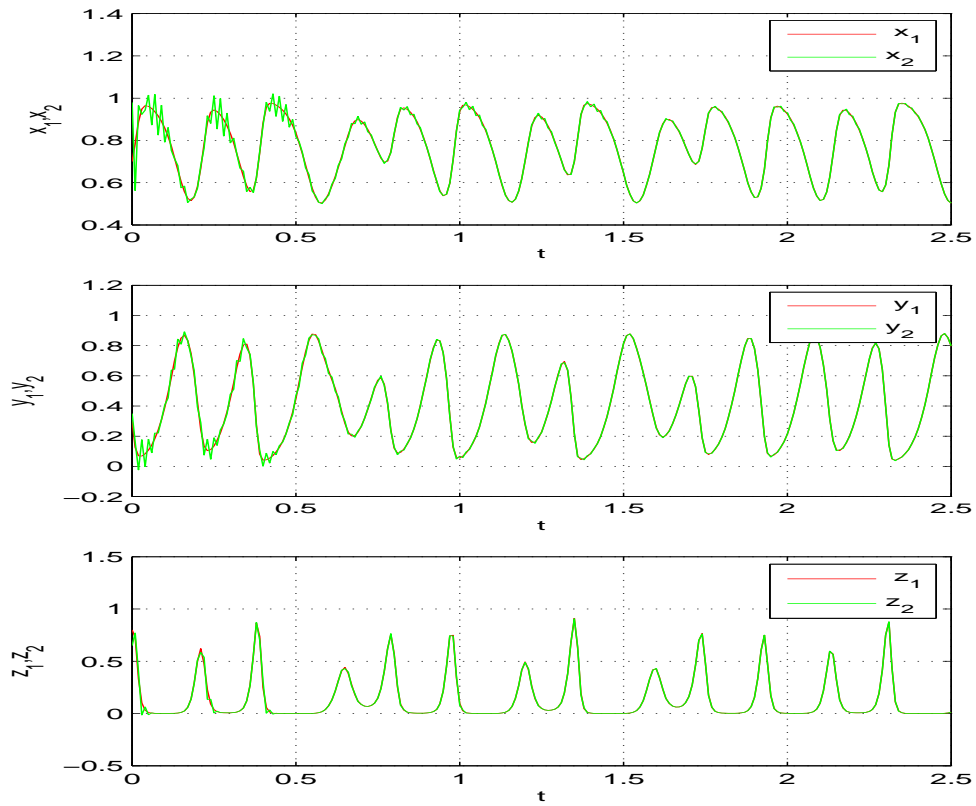


FIGURE 4.2 – Synchronisation de système décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identique pour $k_1 = 1.2$, $k_2 = 2.45$, $k_3 = 0.7$.

4.5 Synchronisation et anti-synchronisation de deux systèmes décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques par le contrôleur actif

4.5.1 Méthode du contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques, a été proposée par Bai et Lonngren [49], c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation numérique [50, 51].

Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$D^\alpha x(t) = F(x(t)), \quad (4.29)$$

et

$$D^\alpha y(t) = G(y(t)) + U, \quad (4.30)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer et D^α est la dérivée fractionnaire de Caputo.

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$e(t) = y(t) - x(t), \quad (4.31)$$

alors,

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) &= D^\alpha y(t) - D^\alpha x(t) \\ &= G(y(t)) - F(x(t)) + U. \end{aligned}$$

Si on peut écrire la quantité $G(y(t)) - F(x(t))$ de la façon suivante

$$G(y(t)) - F(x(t)) = Ae(t) + N(x(t), y(t)) \quad (4.32)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$D^\alpha e(t) = Ae(t) + N(x(t), y(t)) + U, \quad (4.33)$$

d'où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - N(x(t), y(t)), \quad (4.34)$$

d'où V est le contrôleur actif, défini par :

$$V = -Le(t), \quad (4.35)$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$D^\alpha e(t) = (A - L)e(t). \quad (4.36)$$

Le problème de la synchronisation entre le système maître (4.29) et le système esclave (4.30) est transformé en problème de zéro-stabilité du système (4.36). Le théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes fractionnaires linéaires.

Théorème 4.5.1 *Le système maître (4.29) et le système esclave (4.30) sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle (4.34), si et seulement si la matrice de contrôle L est choisie telles que $|\arg(\text{spec}(A - L))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.*

4.5.2 Application de la synchronisation de systèmes décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques par le contrôleur actif

Dans cette partie, nous étudions la synchronisation du chaos entre deux systèmes chaotiques identiques décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire en

utilisant la technique du contrôle actif.

Le système maître est décrit par :

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = x_1(1 - x_1) - \frac{x_1 y_1}{\beta + x_1} \\ D^\alpha y_1 = -\delta y_1 + \frac{\gamma x_1 y_1}{\beta + x_1} - y_1 z_1 \\ D^\alpha z_1 = -\eta z_1 + \sigma y_1 z_1, \end{cases} \quad (4.37)$$

les équations du système esclave sont :

$$\begin{cases} D^\alpha x_2 = x_2(1 - x_2) - \frac{x_2 y_2}{\beta + x_2} + u_1(t) \\ D^\alpha y_2 = -\delta y_2 + \frac{\gamma x_2 y_2}{\beta + x_2} - y_2 z_2 + u_2(t) \\ D^\alpha z_2 = -\eta z_2 + \sigma y_2 z_2 + u_3(t), \end{cases} \quad (4.38)$$

où $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ sont les contrôles actifs.

La soustraction (4.38) de (4.37) donne

$$\begin{cases} D^\alpha e_1 = e_1 - x_1^2 + x_2^2 - \left(\frac{y_2}{\beta + x_2}\right)e_1 + \frac{x_1 y_2}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)}e_1 - \frac{x_1}{\beta + x_1}e_2 + u_1(t) \\ D^\alpha e_2 = -\delta e_2 + \left[\frac{\gamma y_2}{\beta + x_2} - \frac{\gamma x_1 y_2}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)}\right]e_1 - \left(z_2 - \frac{x_1}{\beta + x_1}\right)e_2 - y_1 e_3 + u_2(t) \\ D^\alpha e_3 = -\eta e_3 + \sigma(y_1 e_3 + z_2 e_2) + u_3(t), \end{cases} \quad (4.39)$$

où $e_1 = x_2 - x_1$, $e_2 = y_2 - y_1$, $e_3 = z_2 - z_1$.

Nous introduisons une fonction de Lyapunov en termes de carrés de ces variables :

$$V(e) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 e_i^2. \quad (4.40)$$

La dérivée d'ordre fractionnaire de la fonction de Lyapunov est donnée par

$$\begin{aligned} D^\alpha V(e) &= e_1 \left[e_1 - (x_2 + x_1)e_1 - \left(\frac{y_2}{\beta + x_2}\right)e_1 + \frac{x_1 y_2}{(\beta + x_2)(\beta + x_1)}e_1 - \frac{x_1}{\beta + x_1}e_2 \right] \\ &+ e_2 \left[-\delta e_2 + \left(\frac{\gamma y_2}{\beta + x_2} - \frac{\gamma x_1 y_2}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)}\right)e_1 - \left(z_2 e_2 + \frac{\gamma x_1}{\beta + x_1}\right)e_2 - y_1 e_3 \right] \\ &+ e_3 \left[-\eta e_3 + \sigma z_2 e_2 + \sigma y_1 e_3 \right] + \sum_{i=1}^3 u_i(t) e_i(t). \end{aligned} \quad (4.41)$$

A partir de cette équation, nous concluons que si les fonctions de contrôle actifs u_i sont choisies de telle sorte que

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\left[2e_1 - (x_1 + x_2)e_1 - \left(\frac{y_2}{\beta + x_2}\right)e_1 + \frac{x_1 y_2}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)}e_1 - \frac{x_1}{\beta + x_1}e_2 \right] \\ u_2(t) &= -\left[\left(\frac{\gamma y_2}{\beta + x_2} - \frac{\gamma x_1 y_2}{(\beta + x_1)(\beta + x_2)}\right)e_1 - \left(z_2 - \frac{\gamma x_1}{\beta + x_1}\right)e_2 - y_1 e_3 \right] \\ u_3(t) &= -\left[\sigma z_2 e_2 + \sigma y_1 e_3 \right], \end{aligned}$$

l'équation (4.41) devient

$$D^\alpha V(e) = -(e_1^2 + \delta e_2^2 + \eta e_3^2) \leq 0. \quad (4.42)$$

Selon l'inégalité (4.40), le système est stable.

Pour les simulations numériques, nous utilisons des données suivantes pour certains paramètres $\gamma = 3, \delta = \eta = 1, \sigma = 3, \beta = 1.15, h = 0.85, \alpha = 0.95$, alors nous avons $(x_1, y_1, z_1) = (0.7, 0.3, 0.8)$ et $(x_2, y_2, z_2) = (0.12, 0.21, 0.13)$.

Les résultats de la simulation sont illustrés dans la Figure 4.3.

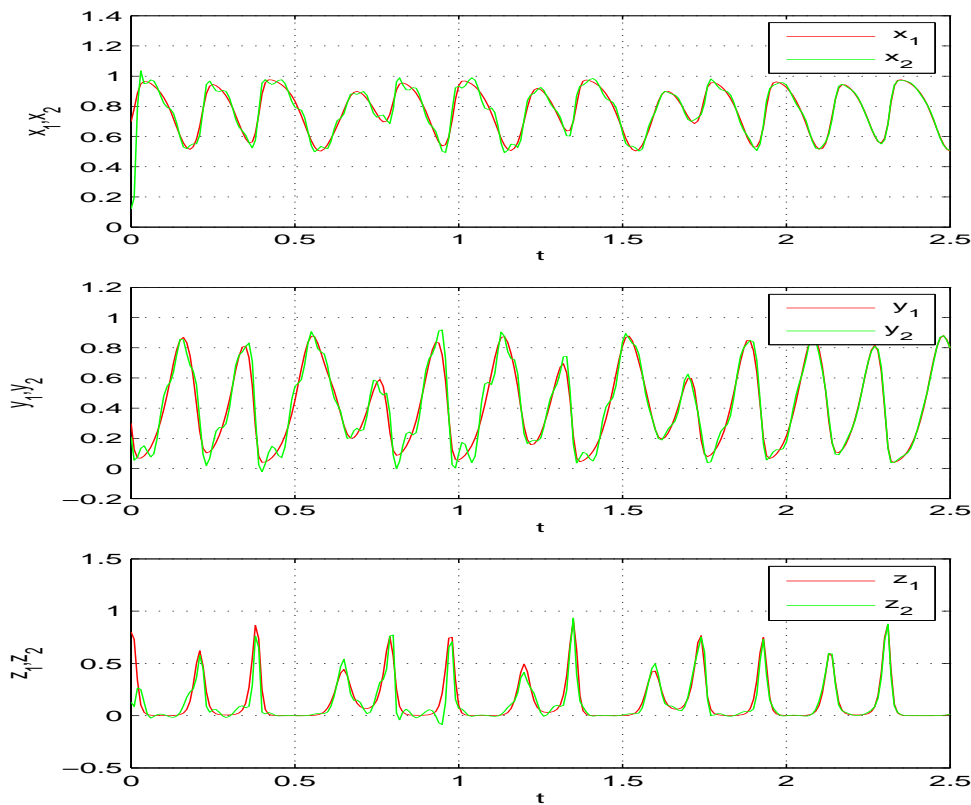


FIGURE 4.3 – Synchronisation de système décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identique.

4.5.3 Application de l'anti-synchronisation de systèmes décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques par le contrôleur actif

Dans cette partie, nous étudions l'anti-synchronisation du chaos entre deux systèmes chaotiques identiques décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire en utilisant la technique du contrôle actif.

Le système maître est décrit par :

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = x_1(1 - x_1) - \frac{x_1 y_1}{\beta + x_1} \\ D^\alpha y_1 = -\delta y_1 + \frac{\gamma x_1 y_1}{\beta + x_1} - y_1 z_1 \\ D^\alpha z_1 = -\eta z_1 + \sigma y_1 z_1, \end{cases} \quad (4.43)$$

les équations du système esclave sont :

$$\begin{cases} D^\alpha x_2 = x_2(1 - x_2) - \frac{x_2 y_2}{\beta + x_2} + u_1(t) \\ D^\alpha y_2 = -\delta y_2 + \frac{\gamma x_2 y_2}{\beta + x_2} - y_2 z_2 + u_2(t) \\ D^\alpha z_2 = -\eta z_2 + \sigma y_2 z_2 + u_3(t), \end{cases} \quad (4.44)$$

où u_1, u_2, u_3 sont les contrôles actifs.

L'erreur d'anti-synchronisation est définie comme

$$\begin{cases} e_1 = x_1 + x_2 \\ e_2 = y_1 + y_2 \\ e_3 = z_1 + z_2. \end{cases} \quad (4.45)$$

Un calcul simple donne la dynamique d'erreur

$$\begin{cases} D^\alpha e_1 = e_1 - x_2^2 - x_1^2 - \frac{x_2 y_2}{\beta + x_2} - \frac{x_1 y_1}{\beta + x_1} + u_1(t) \\ D^\alpha e_2 = -\delta e_2 + \frac{\gamma x_1 y_1}{\beta + x_1} + \frac{\gamma x_2 y_2}{\beta + x_2} - z_2 y_2 - y_1 z_2 + u_2(t) \\ D^\alpha e_3 = -\eta e_3 + \sigma y_1 z_1 + \sigma y_2 z_2 + u_3(t). \end{cases} \quad (4.46)$$

Nous considérons le contrôleur non linéaire actif défini par

$$\begin{cases} u_1(t) = x_2^2 + x_1^2 + \frac{x_2 y_2}{\beta + x_2} + \frac{x_1 y_1}{\beta + x_1} - 2e_1 \\ u_2(t) = -\frac{\gamma x_1 y_1}{\beta + x_1} - \frac{\gamma x_2 y_2}{\beta + x_2} + z_2 y_2 + y_1 z_2 \\ u_3(t) = -\sigma y_2 z_2 - \sigma y_1 z_1. \end{cases} \quad (4.47)$$

La substitution de (4.47) en (4.46) donne la dynamique d'erreur linéaire

$$\begin{cases} D^\alpha e_1 = -e_1 \\ D^\alpha e_2 = -\delta e_2 \\ D^\alpha e_3 = -\eta e_3. \end{cases} \quad (4.48)$$

On considère la fonction de Lyapunov définie par

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T e = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2), \quad (4.49)$$

qui est une fonction positive sur \mathbb{R}^3 .

La dérivée d'ordre fractionnaire de la fonction de Lyapunov est donnée par

$$D^\alpha V(e) = -e_1^2 - \delta e_2^2 - \eta e_3^2 \leq 0. \quad (4.50)$$

D'après l'inégalité (4.49), le système est stable.

Pour les simulations numériques, nous utilisons des données suivants pour certains paramètres $\gamma = 3, \delta = \eta = 1, \sigma = 3, \beta = 1.15, h = 0.85, \alpha = 0.95$, alors nous avons $(x_1, y_1, z_1) = (0.7, 0.3, 0.8)$ et $(x_2, y_2, z_2) = (-0.99, -0.11, -0.15)$.

Les résultats de la simulation sont illustrés à la Figure 4.4.

4.6 Conclusion

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter les différents types de synchronisation et les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes. On a tout d'abord abordé l'histoire de la synchronisation chaotique. La synchronisation globale et le contrôle actif sont les méthodes les plus utilisées pour réaliser la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques.

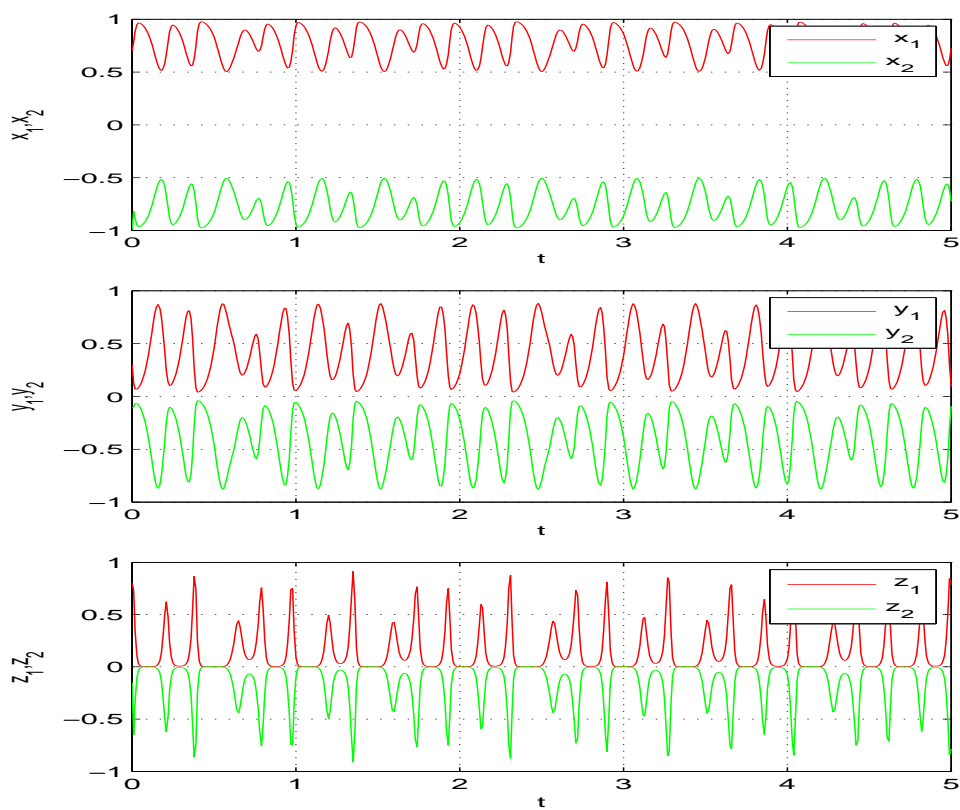


FIGURE 4.4 – Anti-synchronisation de système décrivant la dynamique du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identique.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons présenté une étude le contrôle et la synchronisation de quelques types de systèmes dynamiques chaotiques, pour atteindre cet objectif nous avons divisé notre thèse en quatre chapitres :

-**Le premier chapitre** est consacré à la présentation des notions de base sur les systèmes dynamiques tels que : points d'équilibre, les attracteurs et ses différents types, notions de stabilité et la théorie de bifurcation.

- **Le deuxième chapitre** est dédié à la théorie de chaos où nous avons donne les caractérisations du chaos et ses propriétés. Ensuite, nous sommes passés par les moyens de détection du chaos et nous avons fini ce chapitre par donner quelques routes vers le chaos.

- Dans **le troisième chapitre**, nous avons fait une présentation sur les dérivées fractionnaires, où nous avons fourni quelques détails sur les trois principales définitions des dérivées fractionnaires (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et celle de Caputo) en clarifiant la relation et les différences entre elles, en passant par leurs interprétations géométrique et physique. Ensuite nous avons étudié quelques systèmes dynamiques chaotiques d'ordre fractionnaire où nous avons introduit le concept d'équations et systèmes différentiels fractionnaires, puis nous avons étudié des types de stabilité de ces systèmes.

-**Le quatrième chapitre** est consacré à l'étude de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires, nous avons donné une série de définitions qui conduisent à une définition mathématique de la synchronisation, ensuite nous avons présenté des différents types de la synchronisation telles que la synchronisation complète (**CS**), l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée,

la synchronisation projective (**PS**), la synchronisation généralisée **GS** et la synchronisation **Q-S**, et nous avons étudié le phénomène de synchronisation et anti-synchronisation de deux systèmes du modèle du charançon de la datte d'ordre fractionnaire identiques en appliquant la méthode de la synchronisation globale et la méthode du contrôleur actif. On peut conclure que la synchronisation des systèmes chaotiques qui a été largement étudiée dans les deux dernières décennies et a plusieurs applications dans divers domaines tels que la biologie, la chimie, les télécommunications (sécurité des informations) et la physique ces précités ne sont que des exemples. Cette synchronisation peut être généralisée aux systèmes à dérivées fractionnaires (non entier) déjà, vu dans cette thèse. Comme perspectives, il serait intéressant de contribuer dans ce domaine de recherche et de développer ce type de synchronisation.

Bibliographie

- [1] N. Zhou, Y. Wang, L. Gong, H. He and J. Wu. Novel single-channel color image encryption algorithm based on chaos and fractional Fourier transform. *Optics Communications*, Vol. 284, pp. 2789-2796, (2011).
- [2] N. Laskin. Fractional market dynamics. *Physica A*, Vol. 287, pp. 482-492, (2000).
- [3] S. Vaidyanathan. Lotka-Volterra two-species mutualistic biology models and their ecological monitoring. *Pharm Tech Research*, Vol. 8, pp. 199-212, (2015).
- [4] B. Zsolt. Chaos theory and power spectrum analysis in computerized cardiocography. *Eur J Obstet Gynecol Reprod Biol*, Vol. 71(2), pp. 163-168, (1997).
- [5] I.S. Jesus and J.T. Machado. Fractional control of heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 54(3), pp. 263–282, (2008).
- [6] V.H. Schmidt and J.H. Drumheller. Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate. *Physical Review B*, vol. 4, pp. 4582–4597, (1971).
- [7] R.L. Bagley and R.A. Calico. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *Journal of Guid Control Dyn*, vol. 14(2), pp. 304–311, (1991).
- [8] K. Murali and M. Lakshmanan. Secure communication using a compound signal from generalized synchronizable chaotic system. *Physics Letters. A*, vol. 241, pp. 303-310, (1998).
- [9] E. Inzunza-Gonzalez and C. Cruz-Hernandez. Double hyperchaotic encryption for security in biometric systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, vol. 13 (1), pp. 55–68, (2013).

- [10] Y. Zhang and J. Sun. Chaotic synchronization and anti-synchronization based on suitable separation. *Physics Letters. A*, vol. 330, pp. 442-447, (2004).
- [11] G. Alvarez, S. Li, F. Montoya, G. Pastor and M. Romera. Breaking projective chaos synchronization secure communication using filtering and generalized synchronization. *Chaos, Solutons and Fractals*, vol. 24, pp. 775-783, (2005).
- [12] R. Mainieri and J. Rehacek. Projective synchronization in three dimensional chaotic systems. *Phys. Rev. Lett*, vol. 82, pp. 3042-3045, (1999).
- [13] D. Pazo, M.A. Zaks and J. Kurths. Role of unstable periodic orbit in phase and lag synchronization between coupled chaotic oscillators. *Chaos*, vol. 13, pp. 309-318, (2003).
- [14] Y. Chai, L. Chen, R. Wu and J. Dai. Q-S synchronization of the fractional-order unified system. *Pramana J. Physics*, vol. 80, pp. 449-461, (2013).
- [15] H.E. Guitian and L.U.O. Maokang. Dynamic behavior of fractional order Dufing chaotic system and its synchronization via singly active control. *Appl. Math. Mech.Engl. Ed*, vol. 33 (5), pp. 567-582, (2012).
- [16] Q. Gan, Y. Yang, S. Fan and Y. Wang. Synchronization of stochastic Fuzzy cellular neural networks with leakage delay based on adaptive control. *Differ. Equ. Dyn. Syst*, vol. 22, pp. 319-332, (2014).
- [17] W. Zhen, H. Xia and S. Hao. Control of an uncertain fractional order economic system via adaptive sliding mode. *Neuro computing*, vol. 83, pp. 83-88, (2012).
- [18] Marc. Chaperon. *Calcul différentiel et calcul intégrale 3^e année*, Dunod, paris, (2008).
- [19] Elhadj Zeraoulia. *Etude de quelques types de systèmes chaotiques : Généralisation d'un modèle issu du modèle de chen*, Thèse, constantine, fevrier, (2006).
- [20] R.L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical dystems*, Addison-Wesley, New York, (1987).
- [21] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence, *Ibid.* 20, pp. 167-192, (1971).
- [22] P. Berge, Y. Pomeau and C. Vidal. *Order Within Chaos*, Hermann and John Wiley and Sons, Paris, France, (1984).

- [23] J.D. Farmer and J.J. Sidorowich. Predicting chaotic time series. *Phys. Rev. Lett*, vol. 59, pp. 845, (1987).
- [24] A. Wolf, J.B. Swift, H. L. Swinney and J.A. Vastano. determining Lyapunov Exponents from a time Series. *Physica*, vol. 16 D, 17D, pp. 285-317, (1985).
- [25] T.Y. Li and J.A. Jorke. Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, vol. 82, pp. 481-485, (1975).
- [26] Layec Alan. Développement de modèles de CAO pour la simulation système des systèmes de communication : application aux communications chaotiques. Thèse de doctorat : Électro-nique des Hautes Fréquences et Optoélectronique. Limoges : Université de Limoges, (2006).
- [27] E. Artin. Einführung in die Theorie der Gammafunktion. Teubner, Leipzig (English translation : The Gamma Function. Published 1964 by Holt, Rinehart and Winston, New York), (1931).
- [28] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. Fractional integrals and derivatives : theory and applications. Gordon and Breach , (1993).
- [29] F. Dubois, A.C. Galucio, and N. Point. Introduction á la dérivation fractionnaire, théorie et applications. *Techniques de l'ingénieur AF510*, vol. 13, pp. 23, (2010).
- [30] A.V. Letnikov. Theory of differentiation of an arbitrary order, *Maths Sb*, vol. 3, pp. 1-68, (1868).
- [31] Chua, M. Komuro and T. Matsumot. The double scroll family. *IEEE Trans. Circuits Syst*, vol, CAS-33, pp. 1072-1118, (1986) .
- [32] J. Lu, G. Chen, X. Yu and H. Leung. Design and analysis of multi- scroll chaotic attractors from saturated function series. *Circuits and Systems-I*, vol. 51(12), pp. 2476-2490, (2005).
- [33] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, Hala A.A. El-Saka. On some Routh-Hurwitz conditions for fractional order differential equations an their applications in Lorenz, Rosler, Chua and Chen systems. *Physics Letters. A*, vol. 358(1), pp. 1-4, (2006).
- [34] Yan Li, Yang Quan Chen and Igor Podlubny. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, pp. 1810-1821, (2010).

- [35] R. Brown and L. Kocarev. A unifying definition of synchronization for dynamical systems. *Chaos*, vol. 10(2), pp. 344-349, (2000).
- [36] M. Adeli and H. Zarabadipoor. Anti-synchronization of discrete-time chaotic systems using optimization algorithms. *International Journal of Electronic Signals and Systems*, pp. 143-147, (2011).
- [37] M. Diao, Y.G. Yu, S. Wang and J.Z. Yu. Hybrid lag function projective synchronization of discrete chaotic systems with different orders. *Inter. J. Nonl. Sci. Num. Simu*, vol. 11(7), pp. 503-508, (2010).
- [38] B. Xin and Z. Wu. Projective synchronization of chaotic discrete dynamical systems via linear state error feedback control. *Entropy*, Vol. 17, pp. 2677-2687, (2015).
- [39] Z. Ma, Z. Liu and G. Zhang. Generalized synchronization of discrete systems. *Appl.Math. Mech*, vol. 28 (5), pp. 609-614, (2007).
- [40] N.F. Rulkov, K.M. Sushchik, L.S. Tsimring and H.D.I. Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, vol. 51, pp. 980-994, (1995).
- [41] L. Kocarev and U. Parlitz. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Phys. Rev. Lett*, vol. 76, pp. 1816-1819, (1996).
- [42] J. Yan and C. Li. Generalized projective synchronization of a unified chaotic system. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 26, pp. 1119-1124, (2005).
- [43] X. He, C. Li, J. Huang and L. Xiao. Generalized synchronization of arbitrary-dimensional chaotic systems. *Optik*, vol. 126(4), pp. 454-459, (2015).
- [44] Hu. Manfeng and Z.A. Xu. General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems. *Nonlinear Analysis*, Vol. 69 (4), pp. 1091-1099, (2008).
- [45] G.P. Jiang, K.S. Tang and G. Chen. A simple global synchronization criterion for coupled chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 15, pp. 925-935, (2003).
- [46] A. Maiti, A.K. Pal and G.P. Samanta. Usefulness of biocontrol of pests in tea : a mathematical model. *Math. Model. Nat. Phenom*, Vol. 3(4), pp. 96-113, (2008).

- [47] E. Venturino. Ecoepidemiology : a more comprehensive view of population interactions. *Math. Model. Nat. Phenom*, Vol. 11(1), pp. 49-90, (2016).
- [48] M. El-Shahed, Juan J. Nieto, A.M. Ahmed and I.M.E. Abdelstar. Fractional-order model for biocontrol of the lesser date moth in palm trees and its discretization. *Advance in Difference Equations*, pp. 2017-2295, (2017).
- [49] E. Bai and K.E. Lonngren. Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control. *Chaos, Solitons Fractals*, Vol. 11, pp. 1041-1044, (2008).
- [50] M.T. Yassen. Chaos synchronization between two different chaotic systems using active control. *Chaos, Solitons Fractals*, Vol. 23 (1), pp. 131–140, (2005).
- [51] M.A. Khan. Synchronization of different 3D chaotic systems by generalized active control. *J. Infor. Comp. Sci*, Vol. 7 (4), pp. 272-283, (2012).
- [52] M. Labid and N. Hamri. Chaos synchronization and anti-synchronization of two fractional-order systems via global synchronization and active control. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, vol. 19(3), pp. 416-426, (2019).
- [53] Y. Li, Y.Q. Chen and I. Podlubny. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, vol. 45, pp. 1965-1969, (2009).
- [54] A.E. Matouk. Chaos, feedback control and synchronization of a fractional-order modified autonomous Van der Pol-Duffing circuit. *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat*, Vol. 16, pp. 975-986, (2011).
- [55] D. Matignon. Stability result on fractional differential equations with applications to control processing. *Computational Engineering in Systems and Application multi-conference, IMACS*, In : *IEEE-SMC Proceedings, Lille, France*, Vol. 2, pp. 963-968, (1996).
- [56] E.W. Bai and K.E. Lonngren. Synchronization of two Lorenz systems using active control. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 9, pp. 1555-1561, (1998).
- [57] H. Targhvafard and G. H. Enjace. Phase and anti-phase synchronization of fractional-order chaotic systems via active control. *Commun Nonlinear Sci Numer.Simul*, Vol. 16, pp. 4079-4408, (2011).

- [58] L. Kocarev and U. Parlitz. General approach for chaotic synchronization with applications to communication. *Phys. Rev. Lett*, Vol. 74, pp. 5028-5030, (1995).
- [59] L.M. Pecora and T.L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett*, Vol. 64, pp. 821-824, (1990).
- [60] S.H. Strogatz. With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books Pub, (1994).
- [61] W.H. Deng and CP. Li. Chaos synchronization of the fractional Lü system. *Physica A*, Vol. 353, pp. 61-72, (2005).
- [62] W. Laouira and N. Hamri. Feedback control of chaotic systems by using jacobian matrix conditions. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Vol. 18 (3), pp. 285-295, (2018).
- [63] S. Kaouache and M.S. Abdelouahab. Generalized synchronization between two chaotic fractional non-commensurate order systems with different dimensions. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Vol. 18 (3), pp. 273–284, (2018).
- [64] S. Kaouache, N. Hamri, A.S. Hacinliyan, E. Kandiran, B. Deruni and A.C. Keles. Increased Order Generalized Combination Synchronization of Non-Identical Dimensional Fractional-Order Systems by Introducing Different Observable Variable Functions. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Vol. 20(3), pp. 307-315, (2020).
- [65] M.S. Thavazoei and M.A. Haeri. note on the stability of fractional order system. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 79 (5), pp. 1566–1576, (2009).
- [66] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego, (1999).
- [67] Tidjani Menacer. *Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires*, Thèse, constantine, mai, (2014).
- [68] Kamel Haouam. *Existence et non-existence de solutions des equations différentielles fractionnaires*. Thèse, constantine, septembre, (2007).
- [69] K.B. Oldham, J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York, (1974).
- [70] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, New Jersey, (2000).

- [71] N. Hamri and R. Ouahabi. Modified projective synchronization of different chaotic systems using adaptive control. *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 36(3), pp. 1315–1332, (2015).
- [72] R. Ouahabi and N. Hamri. Design of new scheme adaptive generalized hybrid projective synchronization for two different chaotic systems with uncertain parameters. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, Vol. 22(11), pp. 67-79, (2017).
- [73] N. Hamri. Chaos in nonlinear fractional systems. *Advanced Synchronization Control and Bifurcation of Chaotic Fractional-Order*, chapter 12, page 71, (2018).