

---

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Centre universitaire Abdelhafidh Boussouf, Mila  
Institut de Mathématiques et informatique

---

# Histoire des Mathématiques

---

## Support de Cours

**Enseignant :**

Dr. Allal Mehazzem

Département de Mathématiques  
Centre universitaire Abdelhafidh  
Boussouf, Mila

**Année Universitaire :**

2024-2025

**Niveau :**

2eme année Mathématique

**Spécialité :**

Mathématiques et Mathématiques  
Appliquée

---

# TABLE DES MATIÈRES

|   |                                                                     |    |
|---|---------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Introduction                                                        | 3  |
| 2 | Les origines                                                        | 5  |
| 3 | Les Mathématiques de l’Egypte ancienne.                             | 11 |
| 4 | Mathématiques grecques                                              | 17 |
| 5 | Les Mathématiques en orient musulman et en occident musulman.       | 24 |
| 6 | La transmission du savoir mathématique vers l’Europe et renaissance | 30 |
| 7 | La révolution industrielle et ses conséquences                      | 33 |
| 8 | Le 19ème siècle et la crise des fondements.                         | 37 |
| 9 | Le 20ème siècle et l’élargissement du champ d’application           | 41 |

---

# TABLE DES FIGURES

|     |                                                        |    |
|-----|--------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Tablette Babylonienne . . . . .                        | 8  |
| 2.2 | Pythagorean-triples-composition . . . . .              | 9  |
| 3.1 | Chiffres de l'Égypte ancienne . . . . .                | 12 |
| 3.2 | Chiffres de l'Égypte ancienne . . . . .                | 12 |
| 3.3 | Table-multiples . . . . .                              | 13 |
| 3.4 | Sekeds et la géométrie de la Grande Pyramide . . . . . | 15 |
| 4.1 | Thales . . . . .                                       | 19 |
| 4.2 | Phytgore . . . . .                                     | 19 |
| 4.3 | Formule Herons . . . . .                               | 22 |

---

# CHAPITRE 1

---

## INTRODUCTION

Les mathématiques sont la science de la structure, de l'ordre et de la relation qui a évolué à partir des pratiques élémentaires de comptage, de mesure et de description de la forme des objets. Elles traitent du raisonnement logique et du calcul quantitatif, et leur développement a impliqué un degré croissant d'idéalisation et d'abstraction de leur objet. Dans de nombreuses cultures, sous l'impulsion des besoins des activités pratiques, telles que le commerce et l'agriculture, les mathématiques se sont développées bien au-delà du simple comptage. Ce développement a été le plus important dans les sociétés suffisamment complexes pour soutenir ces activités et offrir des loisirs pour la contemplation et la possibilité de s'appuyer sur les réalisations des mathématiciens antérieurs.

Ce cours présente l'histoire des mathématiques depuis l'Antiquité jusqu'à aujourd'hui. Il est nécessaire de connaître son histoire au moins dans la Mésopotamie et l'Égypte antiques, dans la Grèce antique et dans la civilisation islamique du 9<sup>e</sup> au 15<sup>e</sup> siècle. La manière dont ces civilisations se sont influencées mutuellement et les contributions directes importantes de la Grèce et de l'Islam aux développements ultérieurs sont examinées dans les premières parties de ce cours.

En conséquence de la croissance exponentielle de la science, la plupart des mathématiques se sont développées depuis le 15<sup>e</sup> siècle de notre ère, et c'est un fait historique que, du

15e siècle à la fin du 20e siècle, les nouveaux développements en mathématiques ont été largement concentrés en Europe et en Amérique du Nord.

---

## CHAPITRE 2

---

### LES ORIGINES

Il est important de connaître la nature des sources pour l'étude de l'histoire des mathématiques. L'histoire des mathématiques mésopotamiennes et égyptiennes est basée sur les documents originaux écrits par des scribes. Bien que, dans le cas de l'Égypte, ces documents soient peu nombreux, ils sont tous du même type et ne laissent guère de doute sur le fait que les mathématiques égyptiennes étaient, dans l'ensemble, élémentaires et profondément pratiques dans leur orientation. Pour les mathématiques mésopotamiennes, en revanche, il existe un grand nombre de tablettes d'argile qui révèlent des réalisations mathématiques d'un ordre beaucoup plus élevé que celles des Égyptiens. Les tablettes indiquent que les Mésopotamiens disposaient d'un grand nombre de connaissances mathématiques remarquables, bien qu'elles n'offrent aucune preuve que ces connaissances étaient organisées en un système déductif. Les recherches futures permettront peut-être d'en savoir plus sur les débuts des mathématiques en Mésopotamie ou sur leur influence sur les mathématiques grecques, mais il est probable que cette image des mathématiques mésopotamiennes restera inchangée.

De la période antérieure à Alexandre le Grand, aucun document mathématique grec n'a été conservé, à l'exception de paraphrases fragmentaires, et, même pour la période postérieure, il est bon de rappeler que les plus anciennes copies des *Éléments* d'Euclide se trouvent dans des manuscrits byzantins datant du Xe siècle de notre ère. Cette situation contraste totalement avec celle décrite ci-dessus pour les documents égyptiens et babyloniens. Bien que, dans ses grandes lignes, la description actuelle des mathématiques grecques soit sûre, dans des domaines aussi importants que l'origine de la méthode axiomatique, la théorie pré-euclidienne des rapports et la découverte des sections coniques, les historiens ont donné des comptes rendus contradictoires basés sur des textes fragmentaires, des citations d'écrits anciens tirés de sources non mathématiques, et une quantité considérable de conjectures.

De nombreux traités importants de la première période des mathématiques islamiques n'ont pas survécu ou n'ont survécu que dans des traductions latines, de sorte que de nombreuses questions restent sans réponse quant à la relation entre les premières mathématiques islamiques et les mathématiques de la Grèce et de l'Inde. En outre, la quantité de

matériel survivant des siècles suivants est si importante par rapport à ce qui a été étudié qu'il n'est pas encore possible de porter un jugement sûr sur ce que les mathématiques islamiques ultérieures ne contenaient pas, et il n'est donc pas encore possible d'évaluer avec certitude ce qui était original dans les mathématiques européennes du 11<sup>e</sup> au 15<sup>e</sup> siècle.

A l'époque moderne, l'invention de l'imprimerie a largement résolu le problème de l'obtention de textes sûrs et a permis aux historiens des mathématiques de concentrer leurs efforts éditoriaux sur la correspondance ou les œuvres inédites des mathématiciens. Cependant, la croissance exponentielle des mathématiques fait que, pour la période à partir du 19<sup>e</sup> siècle, les historiens ne peuvent traiter en détail que les grandes figures. A cela s'ajoute, au fur et à mesure que l'on se rapproche de la période actuelle, le problème de la perspective. Les mathématiques, comme toute autre activité humaine, ont leurs modes, et plus on se rapproche d'une période donnée, plus ces modes risquent de ressembler à la vague de l'avenir. C'est pourquoi le présent article ne tente pas d'évaluer les développements les plus récents en la matière.

### **Les mathématiques dans l'ancienne Mésopotamie**

Jusque dans les années 1920, on supposait généralement que les mathématiques étaient nées chez les Grecs de l'Antiquité. Ce que l'on savait des traditions antérieures, comme la tradition égyptienne représentée par le papyrus Rhind (édité pour la première fois en 1877), constituait au mieux un maigre précédent. Cette impression a fait place à une vision très différente lorsque les historiens ont réussi à déchiffrer et à interpréter les matériaux techniques de l'ancienne Mésopotamie.

Grâce à la durabilité des tablettes d'argile des scribes mésopotamiens, les témoignages de cette culture sont nombreux. Les spécimens de mathématiques existants représentent toutes les grandes époques : les royaumes sumériens du troisième millénaire avant notre ère, les régimes akkadien et babylonien (deuxième millénaire) et les empires assyrien (début du premier millénaire), perse (du sixième au quatrième siècle avant notre ère) et grec (du troisième siècle avant notre ère au premier siècle de notre ère). Le niveau de compétence était déjà élevé sous l'ancienne dynastie babylonienne, à l'époque du roi législateur Hammourabi (vers le 18<sup>e</sup> siècle avant notre ère), mais il y a eu peu de progrès notables par la suite. L'application des mathématiques à l'astronomie s'est toutefois développée pendant les périodes perse et séleucide (grecque).

### **Le système numérique et les opérations arithmétiques**

Contrairement aux Égyptiens, les mathématiciens de l'ancienne Babylonie sont allés bien au-delà des défis immédiats liés à leurs fonctions comptables officielles. Par exemple, ils ont introduit un système numéral polyvalent qui, comme le système moderne, exploite la notion de valeur de place, et ils ont développé des méthodes de calcul qui tirent parti de ce moyen d'expression des nombres ; ils ont résolu des problèmes linéaires et quadratiques par des méthodes très proches de celles utilisées aujourd'hui en algèbre ; leur succès dans l'étude de ce que l'on appelle aujourd'hui les triples nombres pythagoriciens a constitué une prouesse remarquable dans la théorie des nombres. Les scribes qui ont fait de telles découvertes ont dû penser que les mathématiques méritaient d'être étudiées en tant que telles, et pas seulement en tant qu'outil pratique.

L'ancien système numérique sumérien suivait un principe décimal additif (base 10) simi-

laire à celui des Égyptiens. Mais l'ancien système babylonien l'a converti en un système de valeurs de place avec une base de 60 (sexagésimale). Les raisons du choix de 60 sont obscures, mais une bonne raison mathématique pourrait être l'existence d'un grand nombre de diviseurs (2, 3, 4 et 5, et quelques multiples) de la base, ce qui aurait grandement facilité l'opération de division.

Au 3<sup>e</sup> siècle avant notre ère, les Babyloniens semblent avoir mis au point un symbole de remplacement qui faisait office de zéro, mais sa signification et son utilisation précises restent incertaines. En outre, ils ne disposaient d'aucune marque pour séparer les nombres en parties intégrales et fractionnaires (comme c'est le cas avec la virgule moderne). Ainsi, le chiffre à trois places 3 7 30 pouvait représenter  $31/8$  (soit  $3 + 7/60 + 30/60^2$ ),  $1871/2$  (soit  $3 \times 60 + 7 + 30/60$ ), 11 250 (soit  $3 \times 60^2 + 7 \times 60 + 30$ ), ou un multiple de ces nombres par n'importe quelle puissance de 60.

Les quatre opérations arithmétiques étaient effectuées de la même manière que dans le système décimal moderne, à ceci près que le report avait lieu chaque fois qu'une somme atteignait 60 au lieu de 10. La multiplication était facilitée par des tables ; une tablette typique énumère les multiples d'un nombre par 1, 2, 3, ..., 19, 20, 30, 40 et 50. Pour multiplier deux nombres de plusieurs places, le scribe décomposait d'abord le problème en plusieurs multiplications, chacune par un nombre d'une place, puis il cherchait la valeur de chaque produit dans les tables appropriées. Il trouvait la réponse au problème en additionnant ces résultats intermédiaires. Ces tables l'aidaient également à effectuer des divisions, car les valeurs qui y figuraient étaient toutes des réciproques de nombres réguliers.

Les nombres réguliers sont ceux dont les facteurs premiers divisent la base ; les réciproques de ces nombres n'ont donc qu'un nombre fini de places (par contraste, les réciproques des nombres non réguliers produisent un chiffre se répétant à l'infini). En base 10, par exemple, seuls les nombres avec des facteurs de 2 et 5 (par exemple, 8 ou 50) sont réguliers, et les réciproques ( $1/8 = 0,125$ ,  $1/50 = 0,02$ ) ont des expressions finies ; mais les réciproques d'autres nombres (tels que 3 et 7) se répètent à l'infini (la barre indique les chiffres qui se répètent continuellement). En base 60, seuls les nombres dont les facteurs sont 2, 3 et 5 sont réguliers ; par exemple, 6 et 54 sont réguliers, de sorte que leurs réciproques (10 et 1 6 40) sont finies. Les entrées de la table de multiplication de 1 6 40 sont donc simultanément des multiples de sa réciproque  $1/54$ . Pour diviser un nombre par n'importe quel nombre régulier, on peut donc consulter la table des multiples de sa réciproque.

### Problèmes géométriques et algébriques

Sur une tablette babylonienne conservée à Berlin, la diagonale d'un rectangle de 40 et 10 côtés est résolue par  $40 + 10^2/(2 \times 40)$ . Une règle d'approximation très efficace est utilisée ici (la racine carrée de la somme de  $a^2 + b^2$  peut être estimée comme  $a + b^2/2a$ ), la même règle que l'on retrouve fréquemment dans les écrits géométriques grecs ultérieurs. Ces deux exemples de racines illustrent l'approche arithmétique des Babyloniens en géométrie. Ils montrent également que les Babyloniens connaissaient la relation entre l'hypoténuse et les deux branches d'un triangle rectangle (aujourd'hui communément appelée théorème de Pythagore) plus de mille ans avant que les Grecs ne l'utilisent.

Un type de problème fréquemment rencontré dans les tablettes babyloniennes concerne la base et la hauteur d'un rectangle, dont le produit et la somme ont des valeurs précises.

À partir des informations données, le scribe a calculé la différence, puisque  $(b - h)^2 = (b + h)^2 - 4bh$ . De la même manière, si le produit et la différence sont donnés, la somme peut être trouvée. Et, une fois la somme et la différence connues, chaque côté peut être déterminé, car  $2b = (b + h) + (b - h)$  et  $2h = (b + h) - (b - h)$ . Cette procédure équivaut à une solution de la quadratique générale à une inconnue. En certains endroits, cependant, les scribes babyloniens résolvaient les problèmes quadratiques en termes d'une seule inconnue, comme on le ferait aujourd'hui à l'aide de la formule quadratique.

Bien que ces procédures quadratiques babyloniennes aient souvent été décrites comme la première apparition de l'algèbre, il existe des distinctions importantes. Les scribes n'avaient pas de symbolisme algébrique ; bien qu'ils aient certainement compris que leurs procédures de résolution étaient générales, ils les présentaient toujours en termes de cas particuliers, plutôt que comme l'application de formules et d'identités générales. Ils n'avaient donc pas les moyens de présenter des dérivations et des preuves générales de leurs procédures de résolution. Leur utilisation de procédures séquentielles plutôt que de formules est cependant moins susceptible de nuire à l'évaluation de leurs efforts, maintenant que des méthodes algorithmiques très semblables aux leurs sont devenues courantes grâce au développement des ordinateurs.

Comme mentionné ci-dessus, les scribes babyloniens savaient que la base ( $b$ ), la hauteur ( $h$ ) et la diagonale ( $d$ ) d'un rectangle satisfont à la relation  $b^2 + h^2 = d^2$ . Si l'on choisit des valeurs au hasard pour deux des termes, le troisième sera généralement irrationnel, mais il est possible de trouver des cas où les trois termes sont des entiers : par exemple, 3, 4, 5 et 5, 12, 13. (De telles solutions sont parfois appelées triples de Pythagore.) Une



FIGURE 2.1 – Tablette Babylonienne

tablette de la Columbia University Collection présente une liste de 15 triples de ce type (les équivalents décimaux sont indiqués entre parenthèses à droite ; les espaces dans les expressions pour h, b et d séparent les valeurs de place dans les nombres sexagésimaux) :

| $h$   | $b$     | $d$     |         |        |         |
|-------|---------|---------|---------|--------|---------|
| 2     | 1 59    | 2 49    | (120    | 119    | 169)    |
| 57 36 | 56 7    | 1 20 45 | (3,456  | 3,367  | 4,825)  |
| 1 20  | 1 16 41 | 1 50 49 | (4,800  | 4,601  | 6,649)  |
| 3 45  | 3 31 49 | 5 9 1   | (13,500 | 12,709 | 18,541) |
| 1 12  | 1 5     | 1 37    | (72     | 65     | 97)     |
| ...   | ...     | ...     | ...     | ...    | ...     |
| 1 30  | 56      | 1 46    | (90     | 56     | 106)    |

FIGURE 2.2 – Pythagorean-triples-composition

(Les entrées dans la colonne pour h doivent être calculées à partir des valeurs pour b et d, car elles n'apparaissent pas sur la tablette ; mais elles ont dû exister autrefois sur une partie aujourd'hui manquante). L'ordre des lignes apparaît clairement dans une autre colonne, qui énumère les valeurs de  $d^2/h^2$  (les parenthèses indiquent les chiffres perdus ou illisibles), qui forment une séquence continuellement décroissante : [1 59 0] 15, [1 56 56] 58 14 50 6 15,..., [1] 23 13 46 40. En conséquence, l'angle formé entre la diagonale et la base dans cette séquence augmente continuellement d'un peu plus de  $45^\circ$  à un peu moins de  $60^\circ$ . D'autres propriétés de la séquence suggèrent que le scribe connaissait la procédure générale pour trouver tous ces nombres triples, à savoir que pour tout entier p et q,  $2d/h = p/q + q/p$  et  $2b/h = p/q - q/p$ . (Dans le tableau, les valeurs implicites de p/q et q/p sont les mêmes). (Dans le tableau, les valeurs implicites p et q s'avèrent être des nombres réguliers appartenant à l'ensemble standard des réciproques, comme nous l'avons mentionné plus haut à propos des tables de multiplication). Les érudits débattent encore des nuances de la construction et de l'utilisation prévue de cette table, mais personne ne remet en question le haut niveau d'expertise qu'elle implique.

### Astronomie mathématique

La méthode sexagésimale développée par les Babyloniens a un potentiel de calcul bien plus important que ce qui était réellement nécessaire pour les anciens textes problématiques. Avec le développement de l'astronomie mathématique à l'époque séleucide, elle est cependant devenue indispensable. Les astronomes cherchaient à prédire les occurrences futures de phénomènes importants, tels que les éclipses de lune et les points critiques des cycles planétaires (conjonctions, oppositions, points stationnaires, première et dernière visibilité). Ils ont mis au point une technique pour calculer ces positions (exprimées en termes de degrés de latitude et de longitude, mesurés par rapport à la trajectoire du mouvement annuel apparent du Soleil) en ajoutant successivement les termes appropriés selon une progression arithmétique. Les résultats étaient ensuite organisés en un tableau énumérant les positions aussi loin que le scribe le souhaitait. (Bien que la méthode soit purement arithmétique, on peut l'interpréter graphiquement : les valeurs tabulées forment une approximation linéaire « en zigzag » de ce qui est en réalité une variation sinusoidale). Si des observations s'étalant sur des siècles sont nécessaires pour trouver les paramètres

requis (par exemple, les périodes, l'écart angulaire entre les valeurs maximales et minimales, etc.), seul l'appareil de calcul à leur disposition a permis aux astronomes de réaliser leurs prévisions.

Dans un laps de temps relativement court (peut-être un siècle ou moins), les éléments de ce système sont parvenus aux mains des Grecs. Bien qu'Hipparque (II<sup>e</sup> siècle avant notre ère) ait préféré l'approche géométrique de ses prédécesseurs grecs, il a repris les paramètres des Mésopotamiens et adopté leur style de calcul sexagésimal. Par l'intermédiaire des Grecs, cette méthode a été transmise aux scientifiques arabes au Moyen Âge, puis à l'Europe, où elle est restée au premier plan de l'astronomie mathématique pendant la Renaissance et le début de la période moderne. Aujourd'hui encore, elle persiste dans l'utilisation des minutes et des secondes pour mesurer le temps et les angles.

Certains aspects des mathématiques de l'ancienne Babylone sont peut-être parvenus aux Grecs encore plus tôt, peut-être au Ve siècle avant notre ère, période de formation de la géométrie grecque. Les chercheurs ont relevé un certain nombre de parallèles. Par exemple, la technique grecque de « l'application de l'aire » (voir ci-dessous les mathématiques grecques) correspondait aux méthodes quadratiques babyloniennes (bien que sous une forme géométrique et non arithmétique). En outre, la règle babylonienne d'estimation des racines carrées était largement utilisée dans les calculs géométriques grecs, et il est possible que certaines nuances de la terminologie technique aient été partagées. Bien que les détails concernant le moment et la manière dont cette transmission s'est effectuée soient obscurs en raison de l'absence de documentation explicite, il semble que les mathématiques occidentales, bien qu'issues en grande partie des Grecs, soient considérablement redevables aux anciens Mésopotamiens.

---

## CHAPITRE 3

---

# LES MATHÉMATIQUES DE L'EGYPTE ANCIENNE.

L'introduction de l'écriture en Égypte au cours de la période prédynastique (vers 3000 avant notre ère) a entraîné la formation d'une classe spéciale de professionnels lettrés, les scribes. Grâce à leur maîtrise de l'écriture, les scribes ont assumé toutes les fonctions d'un service civil : tenue des registres, comptabilité des impôts, gestion des travaux publics (projets de construction, etc.), et même poursuite de la guerre en supervisant les fournitures militaires et les salaires. Les jeunes gens s'inscrivent dans des écoles de scribes pour apprendre l'essentiel du métier, qui comprend non seulement la lecture et l'écriture, mais aussi les bases des mathématiques.

L'un des textes les plus populaires comme exercice de copie dans les écoles du Nouvel Empire (13e siècle avant notre ère) est une lettre satirique dans laquelle un scribe, Hori, se moque de son rival, Amen-em-opet, pour son incompetence en tant que conseiller et gestionnaire. « Tu es le scribe intelligent à la tête des troupes », lance Hori à un moment donné. Une rampe doit être construite, longue de 730 coudées, large de 55 coudées, avec 120 compartiments - elle est haute de 60 coudées, 30 coudées au milieu... et les généraux et les scribes se tournent vers toi et te disent : "Tu es un scribe intelligent, ton nom est célèbre. Y a-t-il quelque chose que tu ne saches pas ? Réponds-nous : combien faut-il de briques ?" Que chaque compartiment mesure 30 coudées sur 7 coudées.

Ce problème, et trois autres semblables dans la même lettre, ne peuvent être résolus sans données supplémentaires. Mais le but de l'humour est clair : Hori défie son rival avec ces tâches difficiles, mais typiques.

Ce que l'on sait des mathématiques égyptiennes correspond bien aux tests posés par le scribe Hori. Les informations proviennent principalement de deux longs papyrus qui servaient autrefois de manuels dans les écoles de scribes. Le papyrus Rhind (conservé au British Museum) est une copie réalisée au 17e siècle avant notre ère d'un texte datant de deux siècles plus tôt. On y trouve une longue table de fractions pour aider à la division, suivie des solutions de 84 problèmes spécifiques d'arithmétique et de géométrie. Le papyrus Golenishchev (Musée des Beaux-Arts de Moscou), datant du 19e siècle avant notre ère, présente 25 problèmes du même type. Ces problèmes reflètent bien les fonctions qu'exerçaient les scribes, puisqu'ils traitent, par exemple, de la manière de distribuer la

bière et le pain en guise de salaire, et de mesurer les surfaces des champs ainsi que les volumes des pyramides et d'autres solides.

Les Égyptiens, comme les Romains après eux, exprimaient les nombres selon un système décimal, en utilisant des symboles distincts pour 1, 10, 100, 1 000, et ainsi de suite ; chaque symbole apparaissait dans l'expression d'un nombre autant de fois que la valeur qu'il représentait apparaissait dans le nombre lui-même. Par exemple, les mathématiques représentent 24. Cette notation plutôt lourde était utilisée dans l'écriture hiéroglyphique que l'on trouve dans les inscriptions sur pierre et autres textes officiels, mais dans

|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1                                                                                 | 10                                                                                | 100                                                                               | 1000                                                                              | 10000                                                                             | 100000                                                                             | $10^6$                                                                              |
| Egyptian numeral hieroglyphs                                                      |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |

FIGURE 3.1 – Chiffres de l'Égypte ancienne



FIGURE 3.2 – Chiffres de l'Égypte ancienne

Dans un tel système, l'addition et la soustraction reviennent à compter le nombre de symboles de chaque type dans les expressions numériques, puis à les réécrire avec le

nombre de symboles obtenu. Les textes qui nous sont parvenus ne révèlent pas quelles procédures spéciales les scribes utilisaient, le cas échéant, pour les aider dans cette tâche. Mais pour la multiplication, ils ont introduit une méthode de doublement successif. Par exemple, pour multiplier 28 par 11, on construit une table de multiples de 28 comme la suivante :

|     |     |
|-----|-----|
| 1   | 28  |
| 2   | 56  |
| 4   | 112 |
| 8   | 224 |
| 16  | 448 |
| ... | ... |

FIGURE 3.3 – Table-multiples

Les différents éléments de la première colonne dont la somme est égale à 11 (c'est-à-dire 8, 2 et 1) sont cochés. Le produit est alors trouvé en additionnant les multiples correspondant à ces entrées ; ainsi,  $224 + 56 + 28 = 308$ , le produit désiré.

Pour diviser 308 par 28, les Égyptiens appliquaient la même procédure à l'envers. En utilisant la même table que dans le problème de la multiplication, on constate que 8 produit le plus grand multiple de 28 inférieur à 308 (car l'entrée à 16 est déjà 448), et on coche 8. Le processus est ensuite répété, cette fois pour le reste (84) obtenu en soustrayant l'entrée à 8 (224) du nombre original (308). Cependant, ce chiffre est déjà plus petit que l'entrée à 4, qui est donc ignorée, mais il est plus grand que l'entrée à 2 (56), qui est alors cochée. Le processus est répété pour le reste obtenu en soustrayant 56 du reste précédent de 84, soit 28, qui est également exactement égal à l'entrée à 1 et qui est alors coché. Les entrées cochées sont additionnées, ce qui donne le quotient :  $8 + 2 + 1 = 11$  (dans la plupart des cas, bien sûr, il y a un reste inférieur au diviseur).

Pour les nombres plus grands, cette procédure peut être améliorée en considérant les multiples de l'un des facteurs par 10, 20,... ou même par des ordres de grandeur plus élevés (100, 1 000,...), si nécessaire (dans la notation décimale égyptienne, ces multiples sont faciles à calculer). Ainsi, on peut trouver le produit de 28 par 27 en établissant les multiples de 28 par 1, 2, 4, 8, 10 et 20. Comme la somme des entrées 1, 2, 4 et 20 est égale à 27, il suffit d'additionner les multiples correspondants pour trouver la réponse.

Les calculs impliquant des fractions sont effectués en se limitant aux parties unitaires (c'est-à-dire aux fractions qui, en notation moderne, s'écrivent avec 1 comme numérateur). Pour exprimer le résultat de la division de 4 par 7, par exemple, qui en notation moderne est simplement  $4/7$ , le scribe écrivait  $1/2 + 1/14$ . La procédure pour trouver les quotients sous cette forme ne fait qu'étendre la méthode habituelle pour la division des

entiers, où l'on inspecte maintenant les entrées pour  $2/3$ ,  $1/3$ ,  $1/6$ , etc., et  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ , etc., jusqu'à ce que les multiples correspondants du diviseur s'additionnent pour donner le dividende. jusqu'à ce que la somme des multiples correspondants du diviseur corresponde au dividende. (Les scribes ont inclus  $2/3$ , comme on peut le constater, même s'il ne s'agit pas d'une fraction unitaire). Dans la pratique, la procédure peut parfois devenir assez compliquée (par exemple, la valeur de  $2/29$  est donnée dans le papyrus Rhind comme  $1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232$ ) et peut être calculée de différentes manières (par exemple, le même  $2/29$  peut être trouvé comme  $1/15 + 1/435$  ou comme  $1/16 + 1/232 + 1/464$ , etc.) Une partie considérable des textes du papyrus est consacrée à des tableaux destinés à faciliter la recherche de ces valeurs de fractions unitaires.

Ces opérations élémentaires suffisent pour résoudre les problèmes arithmétiques des papyrus. Par exemple, « pour diviser 6 pains entre 10 hommes » (papyrus Rhind, problème 3), il suffit de diviser pour obtenir la réponse  $1/2 + 1/10$ . Dans un groupe de problèmes, une astuce intéressante est utilisée : "Une quantité (aha) et son 7e font ensemble 19 - qu'est-ce que c'est ? (papyrus Rhind, problème 24). Ici, on suppose d'abord que la quantité est 7 : comme  $11/7$  de cette quantité donne 8, et non 19, on prend  $19/8$  (c'est-à-dire  $2 + 1/4 + 1/8$ ), et son multiple par 7 ( $16 + 1/2 + 1/8$ ) devient la réponse demandée. Ce type de procédure (parfois appelée méthode de la « fausse position » ou de la « fausse hypothèse ») est connu dans de nombreuses autres traditions arithmétiques (chinoises, hindoues, musulmanes et européennes de la Renaissance, par exemple), bien qu'elles ne semblent pas avoir de lien direct avec la tradition égyptienne de l'arithmétique.

### Géométrie

Les problèmes géométriques des papyrus cherchent à mesurer des figures, comme des rectangles et des triangles d'une base et d'une hauteur données, au moyen d'opérations arithmétiques appropriées. Dans un problème plus compliqué, on cherche un rectangle dont l'aire est 12 et dont la hauteur est  $1/2 + 1/4$  fois sa base (papyrus Golenishchev, problème 6). Pour résoudre le problème, le rapport est inversé et multiplié par l'aire, ce qui donne 16 ; la racine carrée du résultat (4) est la base du rectangle, et  $1/2 + 1/4$  fois 4, soit 3, est la hauteur. L'ensemble du processus est analogue à la résolution de l'équation algébrique du problème ( $x \times 3/4x = 12$ ), mais sans l'utilisation d'une lettre pour l'inconnue. Une procédure intéressante est utilisée pour trouver l'aire du cercle (papyrus Rhind, problème 50) :  $1/9$  du diamètre est éliminé et le résultat est élevé au carré. Par exemple, si le diamètre est de 9, l'aire est égale à 64. Le scribe a reconnu que l'aire d'un cercle est proportionnelle au carré du diamètre et a supposé pour la constante de proportionnalité (c'est-à-dire  $\pi/4$ ) la valeur  $64/81$ . Il s'agit d'une assez bonne estimation, avec une surestimation d'environ 0,6 . (Elle n'est cependant pas aussi proche de l'estimation aujourd'hui courante de  $31/7$ , proposée pour la première fois par Archimède, qui n'est trop grande que d'environ 0,04 ). Mais rien dans les papyrus n'indique que les scribes savaient que cette règle n'était qu'approximative plutôt qu'exacte.

Un résultat remarquable est la règle du volume de la pyramide tronquée (papyrus Golenishchev, problème 14). Le scribe suppose que la hauteur est de 6, que la base est un carré de côté 4 et que le sommet est un carré de côté 2. Il multiplie le tiers de la hauteur par 28, ce qui donne un volume de 56 ; ici, 28 est calculé à partir de  $2 \times 2 + 2 \times 4 + 4 \times 4$ . Comme c'est correct, on peut supposer que le scribe connaissait également la règle générale :  $A = (h/3)(a^2 + ab + b^2)$ . La manière dont les scribes ont effectivement dérivé

cette règle est sujette à débat, mais il est raisonnable de supposer qu'ils connaissaient des règles apparentées, telles que celle concernant le volume d'une pyramide : un tiers de la hauteur multiplié par l'aire de la base.

Les Égyptiens utilisaient l'équivalent de triangles semblables pour mesurer les distances. Par exemple, le *seked* d'une pyramide est indiqué comme le nombre de palmes à l'horizontale correspondant à une élévation d'une coudée (sept palmes). Ainsi, si le *seked* est de  $5\frac{1}{4}$  et que la base est de 140 coudées, la hauteur devient  $93\frac{1}{3}$  coudées (papyrus Rhind, problème 57). Le sage grec Thalès de Milet (VI<sup>e</sup> siècle avant notre ère) aurait mesuré la hauteur des pyramides à l'aide de leurs ombres (le rapport provient de Hieronymus, un disciple d'Aristote au IV<sup>e</sup> siècle avant notre ère). Cependant, à la lumière des calculs du *seked*, ce rapport doit indiquer un aspect de l'arpentage égyptien qui remonte à au moins 1 000 ans avant l'époque de Thalès.

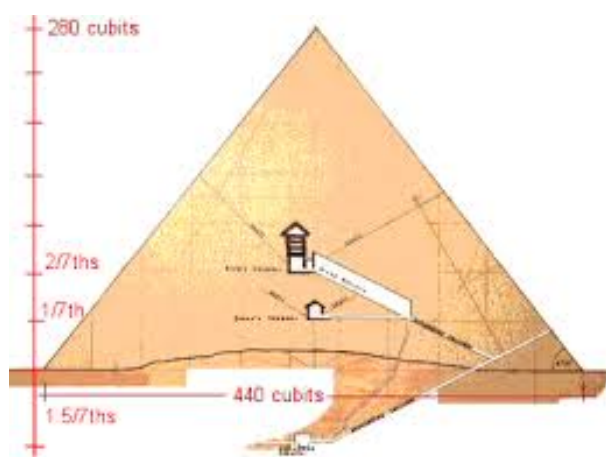


FIGURE 3.4 – Sekeds et la géométrie de la Grande Pyramide

### Évaluation des mathématiques égyptiennes

Les papyrus témoignent donc d'une tradition mathématique étroitement liée aux activités pratiques de comptabilité et d'arpentage des scribes. Occasionnellement, les scribes se sont un peu relâchés : un problème (papyrus Rhind, problème 79), par exemple, cherche le total de sept maisons, sept chats par maison, sept souris par chat, sept épis de blé par souris, et sept hekat de grain par épi (résultat : 19.607). L'intérêt du scribe pour les progressions (pour lesquelles il semble avoir une règle) dépasse certainement les considérations pratiques. Pour le reste, cependant, les mathématiques égyptiennes s'inscrivent résolument dans le cadre de la pratique.

Même en tenant compte de l'insuffisance de la documentation qui nous est parvenue, les réalisations égyptiennes en mathématiques doivent être considérées comme modestes. Ses caractéristiques les plus frappantes sont la compétence et la continuité. Les scribes sont parvenus à élaborer les bases de l'arithmétique et de la géométrie nécessaires à l'exercice de leurs fonctions officielles d'administrateurs civils, et leurs méthodes ont perduré sans grand changement apparent pendant au moins un millénaire, voire deux. En effet, lorsque l'Égypte est passée sous domination grecque à l'époque hellénistique (à partir du III<sup>e</sup> siècle avant notre ère), les anciennes méthodes scolaires ont été maintenues. Fait remarquable, les anciennes méthodes d'unités et de fractions sont toujours présentes dans les papyrus

scolaires égyptiens rédigés en démotique (égyptien) et en grec jusqu'au 7e siècle de notre ère, par exemple.

Dans la mesure où les mathématiques égyptiennes ont laissé un héritage, c'est par leur impact sur la tradition mathématique grecque émergente entre le 6e et le 4e siècle avant notre ère. La documentation de cette période étant limitée, on ne peut que conjecturer la manière et l'importance de cette influence. Mais le récit de Thalès mesurant la hauteur des pyramides n'est qu'un exemple parmi d'autres d'intellectuels grecs apprenant des Égyptiens; Hérodote et Platon décrivent avec approbation les pratiques égyptiennes en matière d'enseignement et d'application des mathématiques. Ces preuves littéraires sont étayées par l'histoire, puisque les Grecs ont continué à mener des opérations commerciales et militaires en Égypte à partir du VIIe siècle avant notre ère. Il est donc plausible que les précédents fondamentaux des premiers efforts mathématiques des Grecs - la manière dont ils traitaient les parties fractionnaires ou mesuraient les surfaces et les volumes, ou leur utilisation des ratios en relation avec des figures similaires - proviennent de l'apprentissage des scribes égyptiens de l'Antiquité.

---

## CHAPITRE 4

---

# MATHÉMATIQUES GRECQUES

Les mathématiques grecques désignent l'étude systématique des mathématiques qui a vu le jour dans la Grèce antique au cours de la seconde moitié du premier millénaire avant notre ère, marquée par l'accent mis sur les mathématiques pures et la recherche de la beauté mathématique. Cette période a vu le passage des applications pratiques des mathématiques, principalement utilisées pour la survie dans les économies de subsistance, à une exploration plus approfondie des concepts mathématiques, grâce à la prospérité des cités-États grecques et à l'échange d'idées par le biais du commerce. Des pionniers comme Thalès de Milet ont introduit le raisonnement déductif en géométrie, tandis que Pythagore et ses disciples ont lié les mathématiques à la musique et à la philosophie, établissant des concepts fondamentaux dans la théorie des nombres.

L'ouvrage fondateur d'Euclide, « Les éléments », a établi une approche structurée de la géométrie, influençant les mathématiques pour les siècles à venir. Archimède a fait progresser les mathématiques pures et appliquées, apportant des contributions significatives qui ont précédé le calcul. L'héritage des mathématiques grecques comprend également des figures notables telles qu'Ératosthène, qui a calculé la circonférence de la Terre, et Hypatie, l'une des premières femmes mathématiciennes répertoriées. Malgré le déclin de la civilisation grecque, les principes mathématiques élaborés à cette époque ont jeté les bases des progrès futurs, faisant des mathématiques grecques une pierre angulaire de la pensée occidentale.

Les historiens des mathématiques et les ethnomathématiciens ont noté que nous ne savons pas ce que les premières civilisations ont fait en mathématiques. Toutefois, d'après les éléments dont nous disposons, il semble que la Grèce antique, dans la seconde moitié du premier millénaire avant notre ère, ait été la première civilisation connue à étudier spécifiquement les mathématiques pures, c'est-à-dire les mathématiques pour elles-mêmes, les mathématiques en tant qu'esthétiquement belles. Il existe des exemples occasionnels de mathématiques pures dans les civilisations antérieures, notamment les proportions mathématiques dans l'art et le design en Égypte et ailleurs, mais les peuples antérieurs utilisaient les mathématiques principalement pour des applications pratiques, même si ces applications étaient liées à la religion et à l'art.

La plupart des civilisations antérieures avaient des économies de subsistance, où la réussite

de la vie dépendait de la production de nourriture et d'un abri, et la pensée mathématique était donc utilisée pour contribuer à ces fins. La vie était difficile pour la plupart des gens et exigeait une concentration de tous les instants, de sorte qu'il y avait peu de temps pour la détente qui aurait permis de contempler les relations mathématiques comme de la beauté. Cependant, en 600 et 500 avant J.-C., la Grèce était devenue prospère, avec de solides marchés et des liens commerciaux autour de la Méditerranée orientale. Il y avait des travaux de subsistance à effectuer, mais l'élite de la classe supérieure n'avait pas ces responsabilités et pouvait consacrer du temps à la philosophie et à l'apprentissage pour eux-mêmes. Le commerce apportait également des idées d'autres régions, et les places de marché ouvertes encourageaient l'échange d'idées et la défense des siennes. Ces rencontres ont ouvert la voie à l'étude des mathématiques au-delà de leur utilisation quotidienne, ainsi qu'à l'idée de déduction pour prouver des affirmations.

### Les premiers mathématiciens grecs

L'un des premiers mathématiciens connus par son nom est Thalès de Milet (624-547 av. J.-C.), dans l'actuelle Turquie. Il a été l'un des premiers à utiliser la déduction formelle en géométrie et il est connu pour avoir démontré plusieurs propriétés géométriques de base : qu'un diamètre coupe un cercle, que les angles de base d'un triangle isocèle sont égaux et que les angles verticaux formés par l'intersection de lignes sont égaux. Il a également utilisé les congruences angle-côté-angle et angle-côté-triangle et a montré qu'un angle inscrit dans un demi-cercle est toujours un angle droit. En géométrie pratique, il a reconnu que l'étoile polaire (Polaris) pouvait être utilisée pour la navigation et, plus impressionnant encore, on dit qu'il a prédit une éclipse de soleil en 585 avant notre ère (bien que certains en doutent). Il était également homme d'affaires et achetait des moulins à huile lorsque ses prédictions annonçaient une bonne année pour les olives.

Pythagore (572-497 av. J.-C.) est plus célèbre et, pour beaucoup, plus intéressant. Après avoir voyagé dans sa jeunesse, il s'est installé à Crotone (dans ce qui est aujourd'hui le sud-est de l'Italie) et a rassemblé des adeptes au sein d'une organisation secrète, semblable à une secte, d'adorateurs des nombres. Ils croyaient que les nombres entiers et les rapports de nombres entiers étaient au cœur de tout - les nombres régissent l'univers ! Ils étudiaient la géométrie, l'astronomie et la musique, mais reliaient tout aux nombres (notamment en remarquant qu'une corde pincée sonne une octave plus haut lorsqu'elle est deux fois plus longue, et que d'autres fractions courantes de la longueur produisent également des sons harmoniques). Leur culte les a conduits aux prémices de la théorie des nombres en étudiant les nombres pairs et impairs, les nombres premiers et les nombres figurés (nombres d'objets disposés en carrés, en triangles ou en d'autres formes). Certaines des questions de la théorie des nombres qu'ils ont étudiées restent des problèmes non résolus, même au début du XXI<sup>e</sup> siècle.

Les mathématiques les plus célèbres liées à Pythagore et à son groupe sont le théorème de la relation entre les longueurs des côtés et de l'hypoténuse des triangles rectangles. D'autres, notamment les Égyptiens et les Babyloniens, ont également reconnu cette relation, au moins dans des cas simples tels que le triangle 3-4-5 pour les Égyptiens, d'autres triangles de ce type pour les Babyloniens et, indépendamment, les Chinois. Cependant, les Pythagoriciens ont probablement été les premiers à prouver la relation en général, et c'est pourquoi, dans les mathématiques occidentales, on l'appelle le théorème de Pytha-

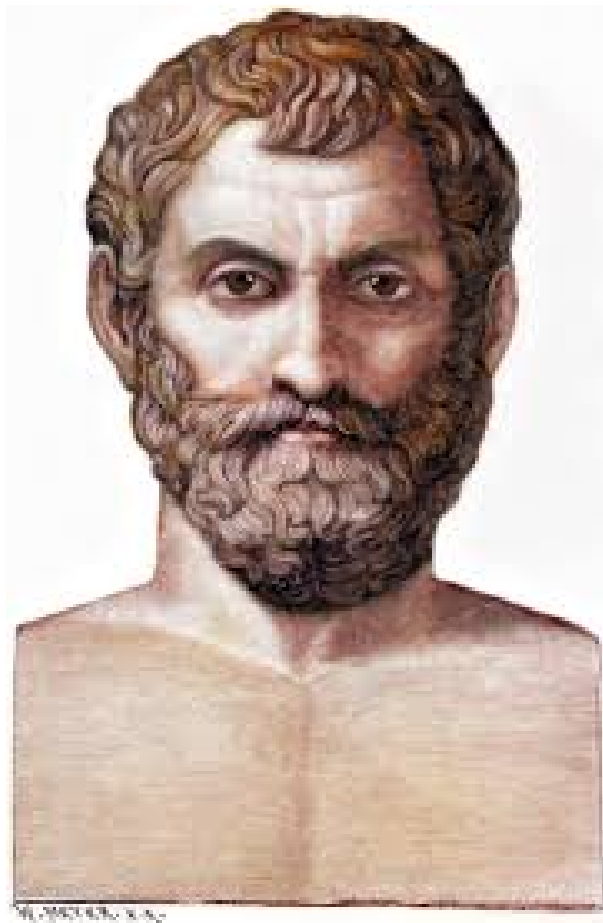


FIGURE 4.1 – Thales

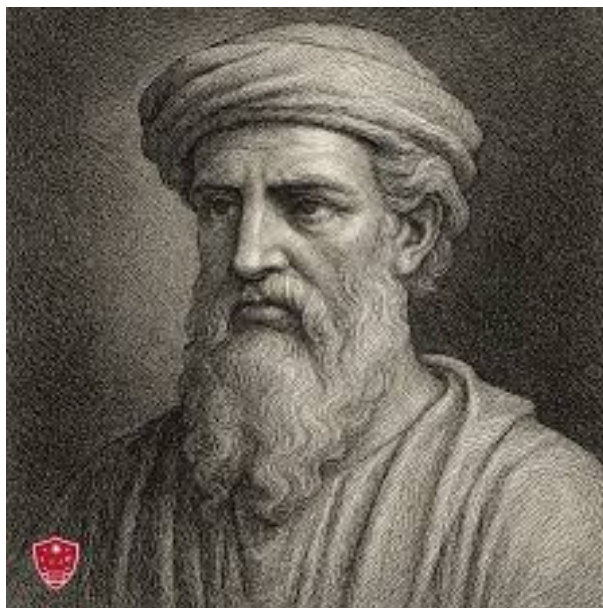


FIGURE 4.2 – Pythagore

gore  $a^2 + b^2 = h^2$ , où  $a$  et  $b$  sont les longueurs des jambes du triangle droit avec l'angle droit entre elles, et  $h$  est la longueur de l'hypoténuse de l'autre côté de l'angle droit. Ce théorème a été décrit comme le premier théorème non évident des mathématiques.

L'exemple le plus simple du théorème de Pythagore est un triangle droit dont chaque pied mesure une unité. Malheureusement pour les pythagoriciens qui adorent les nombres entiers, la racine carrée de 2 ne peut jamais être exprimée comme le rapport de deux nombres entiers. Aujourd'hui, on l'appelle un « nombre irrationnel », avec une expansion décimale infinie et non répétitive. Un nombre irrationnel est contraire aux croyances des pythagoriciens - une contradiction si grave qu'ils ont gardé ce résultat secret. Plus généralement, la question des nombres irrationnels a provoqué une crise dans les mathématiques grecques. Certains ont même attribué ce problème à l'évolution générale des mathématiques grecques, qui sont passées des nombres à une géométrie de base n'utilisant pas de mesures. La géométrie des Grecs est devenue une géométrie qui permettait de construire des figures en utilisant uniquement un compas et une règle non marquée.

### Trois problèmes de construction

Trois problèmes de construction ont posé un défi aux Grecs et à beaucoup d'autres au cours des siècles suivants. Le premier consistait à construire un carré ayant exactement la même surface qu'un cercle donné, dans l'espoir de trouver les surfaces des formes rondes. Pour ce faire, il fallait trouver un moyen de construire une ligne de unités de long. Un autre problème consistait à construire un cube de volume double de celui d'un cube donné, ce qui nécessitait une ligne de longueur égale à la racine cubique de 2. Le troisième problème demandait une trisection d'un angle donné - la trisection d'un angle était facile, mais ce problème demandait que l'angle soit coupé en trois. Les Grecs n'ont jamais résolu ces problèmes, mais leurs efforts ont abouti à des découvertes intéressantes en géométrie. Les mathématiciens grecs ont été rachetés au dix-neuvième siècle lorsqu'il a été prouvé que les trois constructions étaient impossibles, mais il existe encore des sceptiques qui prétendent à tort avoir produit des preuves pour ces constructions.

### Le raisonnement déductif et Euclide

Cette géométrie et l'utilisation d'arguments déductifs sont devenues la norme non seulement des mathématiques, mais aussi de la pensée claire et de la logique. L'Académie de Platon affichait un panneau indiquant que seuls ceux qui connaissaient la géométrie pouvaient entrer - la géométrie déductive était la connaissance préalable à la philosophie, au gouvernement et à la pensée critique dans tous les domaines. La civilisation grecque s'est considérablement développée sous Alexandre le Grand à la fin du quatrième siècle avant notre ère, atteignant l'Afghanistan moderne à l'est et l'Égypte au sud. La ville d'Alexandrie s'est établie à l'embouchure du Nil et est devenue un centre de commerce et un centre d'érudition avec la construction de la bibliothèque (également appelée musée) d'Alexandrie.

L'un des premiers responsables de la bibliothèque fut Euclide (vers 300 av. J.-C.), un mathématicien dont la vie est peu connue, mais dont l'œuvre est l'une des plus publiées de toutes les mathématiques. S'appuyant probablement sur les travaux d'érudits antérieurs, il a mis en place une structure axiomatique et déductive de la géométrie qui est devenue la base de la plupart des recherches mathématiques futures. Il a commencé par cinq postulats qui s'appuient principalement sur les règles de la construction géométrique, plus

quelques vérités évidentes fondamentales et quelques définitions de base. À partir de ces postulats, il a élaboré des preuves déductives de propriétés géométriques supplémentaires.

À partir de ces premiers théorèmes, d'autres déductions ont finalement abouti à un « arbre » d'énoncés prouvés, chacun pouvant être retracé jusqu'aux théorèmes d'origine. Son livre, *Les Éléments*, aurait été publié plus souvent que n'importe quel autre livre, à l'exception de la Bible, et reste encore aujourd'hui le cadre d'introduction à l'étude de la géométrie formelle. Son cinquième postulat ne provenait pas de constructions et définissait les lignes parallèles, ce qui a conduit à l'utilisation difficile de l'infini - notant que les lignes parallèles ne se rencontreraient même pas, quelle que soit la distance à laquelle on les étendrait. Il semble qu'Euclide lui-même ait été préoccupé par la question de l'infini et qu'il ait hésité à utiliser ce postulat aussi longtemps que possible. Deux mille ans plus tard, les remises en question et les modifications du cinquième postulat allaient conduire au développement de géométries non euclidiennes au XIX<sup>e</sup> siècle.

### Archimède

Archimède (287-212 av. J.-C.) est souvent considéré comme le plus grand des mathématiciens grecs de l'Antiquité et l'un des plus grands de toute l'histoire. Contrairement à de nombreux mathématiciens, il a été reconnu de son vivant. Ses réalisations sont d'autant plus remarquables qu'il a travaillé à la fois dans le domaine des mathématiques pures et dans celui des mathématiques appliquées. Dans le domaine des mathématiques pures, Archimède a failli développer le calcul intégral plus de 1800 ans avant Newton et Leibniz. Il voulait trouver des moyens de calculer les surfaces et les volumes de formes rondes et a utilisé l'idée de diviser les formes en très petites tranches, un peu comme les tranches similaires utilisées pour intégrer les surfaces et les volumes dans le calcul. Il a trouvé les volumes de sphères, de cônes et de cylindres et a découvert une relation intéressante lorsque ces formes ont le même diamètre et la même hauteur : les volumes de ces cônes, sphères et cylindres spéciaux forment un rapport de 1 :2 :3.

Utilisant également des techniques proches du calcul, il a trouvé la valeur de  $\pi$  en inscrivant et en circonscrivant des polygones réguliers à l'intérieur et à l'extérieur d'un cercle, puis en augmentant le nombre de côtés des polygones de manière à ce qu'ils se rapprochent et à ce qu'ils évaluent la circonférence du cercle. Il a calculé que la valeur de  $\pi$  était comprise entre  $3 \frac{1}{7}$  et  $3 \frac{10}{71}$ . Pour faciliter le traitement des grands nombres, il a considérablement élargi le système de numération.

Archimède a vécu à Syracuse, sur l'île de Sicile, et ses travaux appliqués étaient souvent liés à sa vie dans cette ville. Il a étudié la mécanique des machines simples telles que les leviers, les poulies et les vis. Il est réputé avoir utilisé certaines de ses connaissances pour aider le roi à repousser une invasion romaine. Un jour, le roi lui a demandé de vérifier l'authenticité de l'or d'une couronne. Il savait qu'il pouvait comparer les densités de l'or pur et d'un alliage, mais pour ce faire, il devait connaître le volume de la couronne de forme très irrégulière. En entrant dans son bain, il a remarqué que le niveau de l'eau montait pour compenser son propre volume ; il a alors compris qu'il pouvait mesurer le volume de la couronne à partir de la quantité d'eau qu'elle déplaçait. L'histoire raconte qu'il sauta hors du bain et courut nu à travers la ville en criant « Eureka ! » (je l'ai trouvé !), excité par sa découverte.

Bien qu'Archimède ait aidé à repousser les Romains, ceux-ci revinrent lorsqu'il fut un vieil homme. La légende raconte qu'il refusa de quitter la géométrie qu'il écrivait dans le sable lorsqu'un soldat romain lui demanda de partir. Face à son refus, le soldat l'a tué. Dans un certain sens, cela est symbolique, car non seulement Archimède est mort de la main d'un soldat romain, mais une grande partie de la civilisation grecque est tombée aux mains de l'Empire romain en pleine expansion. Les Romains étaient de bons ingénieurs et ont construit un réseau de routes et d'aqueducs, mais ils ont surtout utilisé les mathématiques existantes et n'ont pas apporté grand-chose de plus que les travaux des Grecs.

### Autres mathématiciens grecs

Cependant, de l'autre côté de la Méditerranée, Alexandrie et sa bibliothèque ne sont pas tombées. À la suite d'Euclide, la bibliothèque d'Alexandrie est restée un centre de mathématiques grecques qui a perduré plusieurs siècles après le déclin de la civilisation grecque dans son ensemble. Une partie des travaux portait sur l'astronomie. Dès 200 avant J.-C., Ératosthène calcule assez précisément la circonférence de la Terre (ce qui indique d'ailleurs qu'il savait que la Terre était ronde) en comparant l'angle du soleil à midi à Alexandrie et à Cyrène et en utilisant des comparaisons géométriques pour effectuer le calcul.

Plus tard, d'autres astronomes grecs, notamment Ptolémée (100-178 av. J.-C.), ont trouvé d'autres mesures des mouvements des planètes. Certains de leurs travaux ont conduit à la croyance erronée que la Terre était le centre du système solaire, mais d'autres études ont fourni une base mathématique solide pour les premières recherches astronomiques.

Trois autres noms de mathématiciens viennent clore l'histoire des mathématiques de la Grèce antique dans les premiers siècles de l'ère commune. Au premier siècle, Hero (également appelé Heron) a conçu un dispositif qui, s'il avait été construit, aurait pu être la première machine à vapeur, mais il n'a pas vu le jour. Il a également trouvé une formule remarquable pour calculer l'aire d'un triangle aléatoire lorsque seules les longueurs des trois côtés ( $a$ ,  $b$  et  $c$ ) sont données :

$$Area = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$\text{where } s = \frac{a+b+c}{2}$$

FIGURE 4.3 – Formule Herons

le semi-périmètre. Comme le théorème de Pythagore, cette formule est considérée comme l'un des premiers théorèmes non évidents importants et est également utile dans des applications pratiques.

Diophantes, qui a vécu au milieu du troisième siècle, a parfois été appelé le « père de l'algèbre ». Il a rompu avec l'intérêt des Grecs pour la géométrie et a étudié les problèmes numériques avec des techniques qui ressemblent aux méthodes algébriques ultérieures. Il s'est particulièrement intéressé aux problèmes dont les énoncés et les résultats étaient tous des nombres entiers, ce qui restreignait l'éventail des solutions mais offrait des défis qui conduisaient à un travail créatif.

Hypatie (370-415) était célèbre en tant que chercheuse et enseignante en mathématiques à Alexandrie. Hypatie est notamment l'une des premières femmes mathématiciennes importantes connues dans l'histoire. Enseignée à l'origine par son père, qui était également mathématicien, Hypatie a écrit des commentaires et des développements sur des travaux grecs antérieurs, un type courant de recherche mathématique à l'époque. Elle s'est également distinguée en tant qu'enseignante. Cependant, elle fut involontairement prise dans la politique religieuse de son époque et fut capturée et tuée par une foule. Ainsi, deux phases des mathématiques grecques se sont terminées par une mort tragique : Archimède, tué par des soldats romains, a marqué la fin de l'âge d'or des mathématiques grecques, tandis que le meurtre d'Hypatie par la foule a marqué la fin des travaux mathématiques grecs.

Dans l'ensemble, les mathématiques grecques se sont poursuivies pendant près de 1000 ans, offrant un exemple inégalé pour les travaux mathématiques futurs. Les Grecs ont réalisé d'importants travaux dans les domaines appliqués, mais ils sont surtout reconnus pour avoir jeté les bases des mathématiques pures.

---

## CHAPITRE 5

---

# LES MATHÉMATIQUES EN ORIENT MUSULMAN ET EN OCCIDENT MUSULMAN.

Les mathématiques de l'âge d'or de l'islam, en particulier aux 9e et 10e siècles, ont été construites à partir de synthèses des mathématiques grecques (Euclide, Archimède, Apollonius) et indiennes (Aryabhata, Brahmagupta). Parmi les développements importants de cette période, on peut citer l'extension du système des valeurs de place aux fractions décimales, l'étude systématisée de l'algèbre et les progrès de la géométrie et de la trigonométrie[1].

Le monde islamique médiéval a connu d'importants développements en mathématiques. Muhammad ibn Musa al-Khwārizmī a joué un rôle clé dans cette transformation, en introduisant l'algèbre en tant que domaine distinct au 9e siècle. L'approche d'Al-Khwārizmī, qui s'écarte des traditions arithmétiques antérieures, a jeté les bases de l'arithmétisation de l'algèbre, influençant la pensée mathématique pendant une longue période. Des successeurs comme Al-Karaji ont développé son travail, contribuant à des avancées dans divers domaines mathématiques. Le caractère pratique et la large applicabilité de ces méthodes mathématiques ont facilité la diffusion des mathématiques arabes en Occident, contribuant ainsi de manière substantielle à l'évolution des mathématiques occidentales[2].

Le savoir mathématique arabe s'est répandu par divers canaux au cours de l'ère médiévale, sous l'impulsion des applications pratiques des méthodes d'Al-Khwārizmī. Cette diffusion a été influencée non seulement par des facteurs économiques et politiques, mais aussi par des échanges culturels, illustrés par des événements tels que les croisades et le mouvement de traduction. L'âge d'or islamique, qui s'étend du VIIIe au XIVe siècle, a marqué une période de progrès considérables dans diverses disciplines scientifiques, attirant des savants de l'Europe médiévale désireux d'accéder à ces connaissances. Les routes commerciales et les interactions culturelles ont joué un rôle crucial dans l'introduction des idées mathématiques arabes en Occident. La traduction de textes mathématiques arabes, ainsi que d'ouvrages grecs et romains, entre le 14e et le 17e siècle, a joué un rôle essentiel dans la formation du paysage intellectuel de la Renaissance.

### Origine et diffusion des mathématiques arabo-islamiques

Les mathématiques arabes, en particulier l'algèbre, se sont considérablement développées au cours de la période médiévale. Les travaux de Muhammad ibn Musa al-Khwārizmī (arabe :  ; v. 780 - v. 850) entre 813 et 833 ap. J.-C. à Bagdad ont marqué un tournant. Il introduit le terme "algèbre" dans le titre de son livre, "Kitab al-jabr wa al-muqabala", marquant ainsi l'existence d'une discipline distincte. Il considérait son ouvrage comme "un court travail sur le calcul par (les règles de) la complétion et de la réduction, se limitant à ce qui est le plus facile et le plus utile dans l'arithmétique"[3] Plus tard, les gens ont fait remarquer que son travail n'était pas seulement un traité théorique mais aussi pratique, visant à résoudre des problèmes dans des domaines tels que le commerce et la mesure de la terre.

L'approche d'Al-Khwārizmī était novatrice en ce sens qu'elle ne découlait d'aucune tradition "arithmétique" antérieure, y compris celle de Diophante. Il a développé un nouveau vocabulaire pour l'algèbre, faisant la distinction entre les termes purement algébriques et ceux partagés avec l'arithmétique. Al-Khwārizmī a remarqué que la représentation des nombres est cruciale dans la vie quotidienne. Il a donc voulu trouver ou résumer un moyen de simplifier l'opération mathématique, appelée plus tard l'algèbre[3]. Son algèbre s'est d'abord concentrée sur les équations linéaires et quadratiques et sur l'arithmétique élémentaire des binômes et des trinômes. Cette approche, qui consistait à résoudre des équations à l'aide de radicaux et de calculs algébriques connexes, a influencé la pensée mathématique longtemps après sa mort.

La démonstration par Al-Khwārizmī de la règle de résolution des équations quadratiques de la forme  $(ax^2 + bx = c)$ , communément appelée « le carré plus la racine égale le nombre », est une réalisation monumentale dans l'histoire de l'algèbre. Cette percée a jeté les bases de l'approche systématique de la résolution des équations quadratiques, qui est devenue un aspect fondamental de l'algèbre telle qu'elle s'est développée dans le monde occidental[4]. La méthode d'Al-Khwārizmī, qui consiste à compléter le carré, a non seulement fourni une solution pratique pour les équations de ce type, mais a également introduit une approche abstraite et généralisée des problèmes mathématiques. Son travail, résumé dans son texte fondateur « Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala » (Le livre compendieux sur le calcul par complétion et équilibrage), a été traduit en latin au 12e siècle. Cette traduction a joué un rôle essentiel dans la transmission des connaissances algébriques à l'Europe, influençant considérablement les mathématiciens de la Renaissance et façonnant l'évolution des mathématiques modernes[4]. Les contributions d'Al-Khwārizmī, en particulier sa preuve pour les équations quadratiques, témoignent du riche patrimoine mathématique du monde islamique et de son impact durable sur les mathématiques occidentales.

La diffusion des mathématiques arabes en Occident a été facilitée par plusieurs facteurs. Le caractère pratique et l'applicabilité générale des méthodes d'al-Khwārizmī étaient importants. Elles étaient conçues pour convertir des problèmes numériques ou géométriques en équations de forme normale, conduisant à des formules de solutions canoniques. Ses travaux et ceux de ses successeurs comme al-Karaji ont jeté les bases de progrès dans divers domaines mathématiques, notamment la théorie des nombres, l'analyse numérique et l'analyse diophantienne rationnelle.

L'algèbre d'Al-Khwārizmī était une discipline autonome avec sa propre perspective historique, conduisant finalement à l'« arithmétisation de l'algèbre ». Ses successeurs ont

développé son travail, l'adaptant à de nouveaux défis théoriques et techniques et le réorientant vers une direction plus arithmétique pour le calcul algébrique abstrait.

Les mathématiques arabes, incarnées par les travaux d'al-Khwārizmī, ont joué un rôle crucial dans la formation du paysage mathématique. Leur diffusion en Occident a été favorisée par leurs applications pratiques, l'expansion des concepts mathématiques par ses successeurs, ainsi que la traduction et l'adaptation de ces idées dans le contexte occidental. Cette diffusion a été un processus complexe impliquant l'économie, la politique et les échanges culturels, qui a grandement influencé les mathématiques occidentales.

La période connue sous le nom d'âge d'or islamique (du 8<sup>e</sup> au 14<sup>e</sup> siècle) a été caractérisée par des avancées significatives dans divers domaines, dont les mathématiques. Les savants du monde islamique ont apporté des contributions substantielles aux mathématiques, à l'astronomie, à la médecine et à d'autres sciences. En conséquence, les réalisations intellectuelles des savants islamiques ont attiré l'attention des savants de l'Europe médiévale qui cherchaient à accéder à cette richesse de connaissances. Les routes commerciales, telles que la route de la soie, ont facilité la circulation des marchandises, des idées et des connaissances entre l'Orient et l'Occident. Des villes comme Bagdad, Le Caire et Cordoue sont devenues des centres d'apprentissage et ont attiré des savants d'horizons culturels différents. C'est ainsi que les connaissances mathématiques du monde islamique sont arrivées en Europe par différents canaux. Parallèlement, les croisades ont permis aux Européens de l'Ouest d'entrer en contact avec le monde islamique. Si l'objectif premier des croisades était militaire, elles ont également donné lieu à des échanges culturels et à une exposition aux connaissances islamiques, y compris les mathématiques. Les érudits européens qui se sont rendus en Terre sainte et dans d'autres parties du monde islamique ont eu accès à des manuscrits arabes et à des traités de mathématiques. Entre le 14<sup>e</sup> et le 17<sup>e</sup> siècle, la traduction de textes mathématiques arabes, ainsi que de textes grecs et romains, a joué un rôle crucial dans la formation du paysage intellectuel de la Renaissance. Des personnages comme Fibonacci, qui ont étudié en Afrique du Nord et au Moyen-Orient, ont contribué à introduire et à populariser les chiffres arabes et les concepts mathématiques en Europe.

### Concepts

Les équations cubiques et les intersections de sections coniques" d'Omar Khayyām, première page du manuscrit à deux chapitres conservé à l'université de Téhéran.

### Algèbre

L'étude de l'algèbre, dont le nom est dérivé du mot arabe signifiant "achèvement" ou "réunion de parties brisées"[6], a prospéré pendant l'âge d'or islamique. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, un érudit persan de la Maison de la sagesse de Bagdad, a été le fondateur de l'algèbre et est, avec le mathématicien grec Diophante, connu comme le père de l'algèbre. Dans son ouvrage intitulé *The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing*, Al-Khwarizmi traite des moyens de résoudre les racines positives des équations polynomiales du premier et du second degré (linéaires et quadratiques). Il introduit la méthode de réduction et, contrairement à Diophante, donne également des solutions générales pour les équations qu'il traite.

L'algèbre d'Al-Khwarizmi est rhétorique, ce qui signifie que les équations sont écrites en phrases complètes. Elle se distingue de l'algèbre de Diophante, qui est syncopée, c'est-à-dire qu'elle fait appel à un certain symbolisme. La transition vers l'algèbre symbolique, où seuls des symboles sont utilisés, peut être observée dans les travaux d'Ibn al-Banna'

al-Marrakushi et d'Abū al-āsan ibn Alī al-Qalaāādī.

Plusieurs autres mathématiciens de cette époque ont développé l'algèbre d'Al-Khwarizmi. Abu Kamil Shuja' a écrit un livre d'algèbre accompagné d'illustrations géométriques et de preuves. Il a également énuméré toutes les solutions possibles à certains de ses problèmes. Abu al-Jud, Omar Khayyam et Sharaf al-Dīn al-Tūsī ont trouvé plusieurs solutions à l'équation cubique. Omar Khayyam a trouvé la solution géométrique générale d'une équation cubique[citation nécessaire].

### Equations cubiques

Pour résoudre l'équation du troisième degré  $x^3 + a^2x = b$ , Khayyám a construit la parabole  $x^2 = ay$ , un cercle de diamètre  $b/a^2$  et une ligne verticale passant par le point d'intersection. La solution est donnée par la longueur du segment de droite horizontale allant de l'origine à l'intersection de la droite verticale et de l'axe des x. Plus d'informations : Équation cubique Omar Khayyam (v. 1038/48 en Iran - 1123/24) a écrit le Traité de démonstration des problèmes d'algèbre contenant la solution systématique d'équations cubiques ou du troisième ordre, allant au-delà de l'algèbre d'al-Khwārizmī. Khayyám a obtenu les solutions de ces équations en trouvant les points d'intersection de deux sections coniques. Cette méthode avait été utilisée par les Grecs, mais ils ne l'avaient pas généralisée pour couvrir toutes les équations à racines positives.

Sharaf al-Dīn al-Tusi ( de Tus, Iran - 1213/4) a mis au point une nouvelle approche de l'étude des équations cubiques, qui consiste à trouver le point où un polynôme cubique obtient sa valeur maximale. Par exemple, pour résoudre l'équation

$x = \sqrt{\frac{b}{3}}$ , et que l'équation n'aurait aucune solution, une solution ou deux solutions, selon que la hauteur de la courbe en ce point était inférieure, égale ou supérieure à a. Les travaux qu'il a conservés ne donnent aucune indication sur la manière dont il a découvert ses formules pour les maxima de ces courbes. Diverses conjectures ont été proposées pour expliquer sa découverte.

### Induction

Les premières traces implicites de l'induction mathématique se trouvent dans la preuve d'Euclide que le nombre de nombres premiers est infini (vers 300 avant notre ère). La première formulation explicite du principe d'induction a été donnée par Pascal dans son Traité du triangle arithmétique (1665). Entre-temps, la preuve implicite par induction pour les séquences arithmétiques a été introduite par al-Karaji (vers l'an 1000) et poursuivie par al-Samaw'al, qui l'a utilisée pour démontrer que le nombre de nombres premiers est infini. 1000) et poursuivie par al-Samaw'al, qui l'a utilisée pour des cas particuliers du théorème binomial et des propriétés du triangle de Pascal.

### Nombres irrationnels

Les Grecs avaient découvert les nombres irrationnels, mais ils n'en étaient pas satisfaits et n'ont pu s'en sortir qu'en établissant une distinction entre la magnitude et le nombre. Pour les Grecs, les grandeurs varient continuellement et peuvent être utilisées pour des entités telles que les segments de ligne, alors que les nombres sont discrets. Par conséquent, les irrationnels ne pouvaient être traités que géométriquement ; et de fait, les mathématiques grecques étaient principalement géométriques. Les mathématiciens islamiques, dont Abū Kāmil Shujā ibn Aslam et Ibn Tahir al-Baghdadi, ont peu à peu supprimé la distinction entre grandeur et nombre, permettant aux quantités irrationnelles d'apparaître comme coefficients dans des équations et d'être des solutions d'équations algébriques. Ils ont travaillé librement avec les irrationnels en tant qu'objets mathématiques, mais ils n'ont pas

examiné de près leur nature.

Au XII<sup>e</sup> siècle, les traductions latines de l'Arithmétique d'Al-Khwarizmi sur les chiffres indiens ont introduit dans le monde occidental le système de numération décimale de position ; son *Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing* a présenté la première solution systématique des équations linéaires et quadratiques. Dans l'Europe de la Renaissance, il a été considéré comme l'inventeur original de l'algèbre, bien que l'on sache aujourd'hui que son travail est basé sur des sources indiennes ou grecques plus anciennes. Il a révisé la Géographie de Ptolémée et a écrit sur l'astronomie et l'astrologie. Cependant, C.A. Nallino suggère que l'œuvre originale d'al-Khwarizmi n'était pas basée sur Ptolémée mais sur une carte du monde dérivée, probablement en syriaque ou en arabe.

### Trigonométrie sphérique

La loi des sinus sphériques a été découverte au 10<sup>e</sup> siècle : elle a été attribuée à Abu-Mahmud Khojandi, Nasir al-Din al-Tusi et Abu Nasr Mansur, avec Abu al-Wafa' Buzjani comme contributeur. [Le livre d'Ibn Muādh al-Jayyānī, *Le livre des arcs inconnus d'une sphère*, publié au XI<sup>e</sup> siècle, introduit la loi générale des sinus. La loi plane des sinus a été décrite au XIII<sup>e</sup> siècle par Nasir al-Din al-Tusi. Dans son ouvrage intitulé *Sur la figure du secteur*, il énonce la loi des sinus pour les triangles plans et sphériques et fournit des preuves de cette loi.

### Nombres négatifs

Au 9<sup>e</sup> siècle, les mathématiciens islamiques connaissaient les nombres négatifs grâce aux travaux des mathématiciens indiens, mais la reconnaissance et l'utilisation des nombres négatifs à cette époque sont restées timides. Al-Khwarizmi n'a pas utilisé de nombres négatifs ou de coefficients négatifs. Mais en l'espace de cinquante ans, Abu Kamil a illustré les règles de signes pour l'expansion de la multiplication  $(a \pm b)(c \pm d)$ . Al-Karaji a écrit dans son livre *al-Fakhrī* que "les quantités négatives doivent être comptées comme des termes". [Au 10<sup>e</sup> siècle, Abū al-Wafā' al-Būzjānī considérait les dettes comme des nombres négatifs dans *A Book on What Is Necessary from the Science of Arithmetic for Scribes and Businessmen* (Livre sur ce qui est nécessaire à la science de l'arithmétique pour les scribes et les hommes d'affaires).

Au 12<sup>e</sup> siècle, les successeurs d'al-Karaji devaient énoncer les règles générales des signes et les utiliser pour résoudre les divisions polynomiales. Comme l'écrit al-Samaw'al, "le produit d'un nombre négatif - al-nāqīā - par un nombre positif - al-zāid - est négatif :

le produit d'un nombre négatif - al-nāqīs - par un nombre positif - al-zāid - est négatif, et par un nombre négatif est positif. Si l'on soustrait un nombre négatif d'un nombre négatif supérieur, le reste est leur différence négative. La différence reste positive si l'on soustrait un nombre négatif d'un nombre négatif inférieur. Si l'on soustrait un nombre négatif d'un nombre positif, le reste est leur somme positive. Si l'on soustrait un nombre positif d'une puissance vide (martaba khāliyya), le reste est le même négatif, et si l'on soustrait un nombre négatif d'une puissance vide, le reste est le même positif.

### Double fausse position

Entre le 9<sup>e</sup> et le 10<sup>e</sup> siècle, le mathématicien égyptien Abu Kamil a écrit un traité, aujourd'hui perdu, sur l'utilisation de la double fausse position, connu sous le nom de *Livre des deux erreurs* (Kitāb al-khaāāayn). Le plus ancien écrit du Moyen-Orient sur la double fausse position est celui de Qusta ibn Luqa (Xe siècle), un mathématicien arabe de Baalbek, au Liban. Il justifie la technique par une preuve géométrique formelle de type

euclidien. Dans la tradition des mathématiques musulmanes de l'âge d'or, la double fausse position était connue sous le nom de *hisāb al-khaāāayn* ("calcul par deux erreurs"). Il a été utilisé pendant des siècles pour résoudre des problèmes pratiques tels que des questions commerciales et juridiques (partage des biens selon les règles de l'héritage coranique), ainsi que des problèmes purement récréatifs. L'algorithme était souvent mémorisé à l'aide de moyens mnémotechniques, comme un verset attribué à Ibn al-Yasamin et des diagrammes de balance expliqués par al-Hassar et Ibn al-Banna, tous deux mathématiciens d'origine marocaine.

**Conclusion** Le monde arabo-musulman médiéval a joué un rôle crucial dans la trajectoire des mathématiques, les innovations algébriques d'al-Khwārizmī servant de pierre angulaire. La diffusion des mathématiques grecques en Occident pendant l'âge d'or islamique, facilitée par les échanges culturels et les traductions, a laissé un impact durable sur la pensée mathématique occidentale. Des mathématiciens comme Al-Battānī, Al-Khayyām et Abū Kāmil, avec leurs contributions à la trigonométrie, à l'algèbre et à la géométrie, ont étendu leur influence au-delà de leur époque. Malgré les contributions fondamentales des mathématiciens arabes, les historiens occidentaux du XVIIIe siècle et du début du XIXe siècle, influencés par des points de vue orientalistes, ont parfois marginalisé ces réalisations. L'Orient manquant de rationalité et d'esprit scientifique a perpétué une perspective biaisée, empêchant la reconnaissance du rôle significatif joué par les mathématiques arabes dans le développement de l'algèbre et d'autres disciplines mathématiques. Pour réévaluer l'histoire des mathématiques, il faut reconnaître l'interconnexion des diverses traditions mathématiques et dissiper l'idée d'un héritage mathématique uniquement européen. Les contributions des mathématiciens arabes, marquées par des applications pratiques et des innovations théoriques, font partie intégrante de la riche tapisserie de l'histoire des mathématiques et méritent d'être reconnues.

---

## CHAPITRE 6

---

# LA TRANSMISSION DU SAVOIR MATHÉMATIQUE VERS L'EUROPE ET RENAISSANCE

Au XI<sup>e</sup> siècle, une nouvelle phase des mathématiques a commencé avec les traductions de l'arabe. Des érudits de toute l'Europe se sont rendus à Tolède, à Cordoue et ailleurs en Espagne pour traduire en latin le savoir accumulé par les musulmans. Outre la philosophie, l'astronomie, l'astrologie et la médecine, d'importantes réalisations mathématiques des civilisations grecque, indienne et islamique ont été mises à la disposition de l'Occident. Les éléments d'Euclide, les travaux d'Archimède et les traités d'arithmétique et d'algèbre d'al-Khwārizmī sont particulièrement importants. Les textes occidentaux appelés algorithme (forme latine du nom al-Khwārizmī) ont introduit les chiffres hindous-arabes et les ont appliqués aux calculs. Ainsi, les chiffres modernes ont d'abord été utilisés dans les universités, puis sont devenus courants chez les marchands et autres profanes. Il convient de noter que, jusqu'au XV<sup>e</sup> siècle, les calculs étaient souvent effectués à l'aide d'un tableau et de compteurs. Le calcul en chiffres hindous-arabes est utilisé par les marchands au moins depuis Léonard de Pise (début du XIII<sup>e</sup> siècle), d'abord en Italie, puis dans les villes marchandes du sud de l'Allemagne et de la France, où des maestri d'abbaco ou des Rechenmeister enseignent l'arithmétique commerciale dans les différentes langues vernaculaires. Certaines écoles étaient privées, d'autres gérées par la communauté.

### **Les universités**

Les mathématiques ont été étudiées d'un point de vue théorique dans les universités. Les universités de Paris et d'Oxford, fondées relativement tôt (vers 1200), étaient des centres de mathématiques et de philosophie. Les versions arabes d'Euclide, au nombre d'au moins quatre au 12<sup>e</sup> siècle, revêtaient une importance particulière dans ces universités. Parmi les nombreuses rédactions et compendiums réalisés, celui de Johannes Campanus (vers 1250 ; imprimé pour la première fois en 1482) était de loin le plus populaire, servant de manuel à de nombreuses générations. Ces rédactions des Éléments avaient pour but d'aider les étudiants non seulement à comprendre le manuel d'Euclide, mais aussi à traiter d'autres questions, particulièrement philosophiques, suggérées par des passages d'Aristote. La théorie des rapports des Éléments permettait d'exprimer les diverses relations

entre les quantités associées aux corps en mouvement, relations qui seraient désormais exprimées par des formules. On trouve également chez Euclide des méthodes d'analyse de l'infini et de la continuité (paradoxalement, car Euclide a toujours évité l'infini).

L'étude de ces questions a conduit non seulement à de nouveaux résultats, mais aussi à une nouvelle approche de ce que l'on appelle aujourd'hui la physique. Thomas Bradwardine, qui travaillait au Merton College d'Oxford dans la première moitié du XIV<sup>e</sup> siècle, a été l'un des premiers érudits médiévaux à se demander si le continuum pouvait être divisé à l'infini ou s'il existait des parties plus petites (indivisibles). Il a notamment comparé différentes formes géométriques en fonction de la multitude de points supposés les composer, ce qui a donné lieu à des paradoxes qui n'ont pas été résolus pendant des siècles. Une autre question féconde issue d'Euclide concerne l'angle entre un cercle et une droite tangente à celui-ci (appelé angle de corne) : si cet angle n'est pas nul, une contradiction s'ensuit rapidement, mais s'il est nul, alors, par définition, il ne peut y avoir d'angle. Pour la relation entre la force, la résistance et la vitesse du corps mû par cette force, Bradwardine a proposé une loi exponentielle. Nicholas Oresme (mort en 1382) a étendu les idées de Bradwardine aux exposants fractionnaires.

Une autre question liée à la quantification des qualités, la soi-disant latitude des formes, a commencé à être discutée à peu près à la même époque à Paris et au Merton College. Diverses qualités aristotéliciennes (par exemple, la chaleur, la densité et la vitesse) se voyaient attribuer une intensité et une extension, parfois représentées par la hauteur et la base (respectivement) d'une figure géométrique. La surface de la figure était alors considérée comme représentant la quantité de la qualité. Dans le cas important où la qualité est le mouvement d'un corps, l'intensité sa vitesse et l'extension son temps, l'aire de la figure est considérée comme représentant la distance parcourue par le corps. Un mouvement uniformément accéléré partant d'une vitesse nulle donne lieu à une figure triangulaire (voir la figure). L'école de Merton a prouvé que la quantité de mouvement dans ce cas est égale à la quantité d'un mouvement uniforme à la vitesse atteinte à mi-chemin du mouvement accéléré ; dans la formulation moderne,  $s = 1/2at^2$  (règle de Merton). Des discussions de ce type ont certainement influencé Galilée de manière indirecte et pourraient avoir influencé la fondation de la géométrie des coordonnées au 17<sup>e</sup> siècle. Un autre développement important des « calculs » scolastiques a été la sommation des séries infinies.

S'appuyant sur des traductions de sources grecques, le mathématicien et astronome allemand Regiomontanus écrivit vers 1464 le premier livre (imprimé en 1533) en Occident sur la trigonométrie plane et sphérique indépendante de l'astronomie. Il a également publié des tables de sinus et de tangentes qui ont été constamment utilisées pendant plus de deux siècles.

### **La renaissance**

Les artistes et marchands italiens ont influencé les mathématiques de la fin du Moyen Âge et de la Renaissance de plusieurs manières. Au XV<sup>e</sup> siècle, un groupe d'artistes toscans, dont Filippo Brunelleschi, Leon Battista Alberti et Leonardo da Vinci, ont intégré la perspective linéaire dans leur pratique et leur enseignement, environ un siècle avant que le sujet ne soit formellement traité par les mathématiciens. Les maestri d'abbaco italiens ont tenté, en vain, de résoudre des équations cubiques non triviales. En fait, la première solution générale a été trouvée par Scipione del Ferro au début du XVI<sup>e</sup> siècle et redécouverte par Niccolò Tartaglia quelques années plus tard. La solution a été publiée par Gerolamo Cardano dans son *Ars magna* (*Ars Magna* ou *Règles d'algèbre*) en 1545, en

même temps que la solution de l'équation quartique de Lodovico Ferrari.

En 1380, un symbolisme algébrique avait été développé en Italie, dans lequel des lettres étaient utilisées pour l'inconnue, pour son carré et pour les constantes. Les symboles utilisés aujourd'hui pour l'inconnue (par exemple,  $x$ ), le signe de la racine carrée et les signes  $+$  et  $-$  se sont généralisés dans le sud de l'Allemagne à partir de 1450 environ. Ils ont été utilisés par Regiomontanus et Fridericus Gerhart et ont reçu une impulsion vers 1486 à l'université de Leipzig par Johann Widman. L'idée de distinguer les quantités connues et inconnues en algèbre a été appliquée pour la première fois de manière cohérente par François Viète, avec des voyelles pour les quantités inconnues et des consonnes pour les quantités connues. Viète a trouvé des relations entre les coefficients d'une équation et ses racines. Cela suggère l'idée, explicitement énoncée par Albert Girard en 1629 et prouvée par Carl Friedrich Gauss en 1799, qu'une équation de degré  $n$  a  $n$  racines. Les nombres complexes, qui sont implicites dans de telles idées, ont été progressivement acceptés à l'époque de Rafael Bombelli (mort en 1572), qui les a utilisés en relation avec la cubique. Les Coniques d'Apollonius et les recherches sur les aires (quadratures) et les volumes (cubatures) d'Archimède faisaient partie de l'enseignement humaniste du 16<sup>e</sup> siècle. Ces études ont fortement influencé les développements ultérieurs de la géométrie analytique, du calcul infinitésimal et de la théorie des fonctions, sujets qui ont été développés au 17<sup>e</sup> siècle.

---

## CHAPITRE 7

---

# LA RÉVOLUTION INDUSTRIELLE ET SES CONSÉQUENCES

Les mathématiques ont joué un rôle important au cours de la révolution industrielle, qui a débuté au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle et a marqué le passage de l'agriculture à l'industrie manufacturière en tant que principal mode de production. Cette période de transformation a été caractérisée par des innovations technologiques, telles que la machine à vapeur et, plus tard, l'énergie électrique, qui s'appuyaient fortement sur des principes mathématiques. L'essor des usines et l'organisation du travail ont posé de nouveaux défis mathématiques, en particulier dans les domaines de la transmission de l'énergie et de la division du travail, ce qui a conduit à l'élaboration de théories mathématiques telles que les liens.

Les mathématiques n'ont pas seulement soutenu les technologies émergentes, elles ont également stimulé l'évolution de concepts et de méthodes mathématiques plus abstraits. Des personnalités telles que James Watt et Charles Babbage ont contribué à jeter des ponts entre les mathématiques et l'industrie, les travaux pionniers de Babbage sur les machines à calculer mettant en évidence l'intersection de ces domaines. La création d'institutions telles que l'École polytechnique en France a également joué un rôle dans l'avancement des connaissances techniques, en associant encore davantage les progrès mathématiques au progrès industriel.

Dans ce contexte, la révolution industrielle a catalysé une période de développement rapide des mathématiques, influençant à la fois les applications pratiques et l'exploration théorique. Les innovations mathématiques qui en ont résulté ont permis de résoudre des problèmes complexes liés à l'industrialisation et ont jeté les bases de futures avancées dans divers domaines scientifiques.

Le terme « révolution industrielle » fait référence à la grande transformation sociale qui a débuté au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle et au cours de laquelle l'industrie manufacturière a remplacé l'agriculture en tant que centre de l'activité productive. Cette transition a eu de profondes répercussions sur les institutions économiques et politiques et les relations internationales, ainsi que sur le paysage et l'environnement, la famille, l'éducation et la culture. Ses deux principales dimensions étaient l'innovation technologique et l'organi-

sation sociale de la production. La révolution industrielle a été facilitée par l'utilisation accrue de perspectives réalistes dans la peinture et le dessin qui ont fleuri à la Renaissance, ainsi que par l'invention de la presse à imprimer au XVe siècle, qui a stimulé le développement intellectuel dans de nombreux domaines, y compris les mathématiques. Ces développements ont permis une meilleure représentation visuelle et la diffusion des idées et des inventions mathématiques à un public beaucoup plus large que les anciens modèles maître-apprenti.

### Caractéristiques

Certains historiens remettent en question l'utilisation du terme « révolution », étant donné que ces développements se sont incontestablement produits progressivement sur une période d'un siècle ou plus. Néanmoins, leur impact cumulatif a modifié de façon spectaculaire pratiquement tous les aspects de la vie, d'abord en Grande-Bretagne, puis dans le monde entier. Les nouvelles technologies se sont appuyées sur les mathématiques existantes et ont encouragé leur développement. Les nouvelles institutions de la vie intellectuelle ont également favorisé l'émergence de mathématiques de plus en plus abstraites.

La principale caractéristique technologique de la révolution industrielle a été l'utilisation de nouvelles sources d'énergie : d'abord la machine à vapeur (fin du XVIIIe siècle), puis l'électricité et le moteur à combustion interne (fin du XIXe siècle). À mesure que la révolution industrielle s'est étendue à la fin du XXe siècle, l'énergie nucléaire et les nouvelles sources d'énergie « verte » ont été développées. L'un des problèmes cruciaux des débuts de la révolution industrielle était la transmission de l'énergie de la machine à vapeur aux machines utilisées pour la production elle-même. Ce problème a donné naissance à la théorie mathématique des liaisons.

L'organisation à grande échelle de la main-d'œuvre a joué un rôle tout aussi important dans la révolution industrielle. En Angleterre, les lois sur les enclos (1760-1845) ont contraint les petits agriculteurs à s'installer dans les zones urbaines, tandis que les lois sur le vagabondage, les lois sur les pauvres et les workhouses (lieux où les personnes incapables de subvenir à leurs besoins pouvaient trouver un abri et un emploi) ont inculqué une discipline de travail. Un vaste réservoir de main-d'œuvre a ainsi été créé pour les nouvelles usines. La concurrence du marché a poussé les propriétaires d'usines à utiliser la main-d'œuvre la moins chère possible - des enfants dès l'âge de 5 ans ainsi que des femmes et des hommes adultes - et à maximiser les profits en allongeant la journée de travail à 14 heures ou plus par jour, sept jours sur sept.

L'augmentation considérable de l'échelle de production rendue possible par la mécanisation et la machine à vapeur a créé une organisation industrielle du travail qualitativement distincte. Elle a intensifié la division du travail, déqualifiant certains emplois et créant de nouvelles formes de spécialisation.

La révolution industrielle a donc entraîné de profonds changements dans le travail, les modes de résidence, les relations familiales et la vie urbaine. Cette évolution a suscité l'intérêt pour les statistiques sociales. Edwin Chadwick (1800-1890) et Friedrich Engels (1820-1895) ont été les premiers à utiliser des mesures quantitatives pour décrire les problèmes sociaux. Le mathématicien belge Adolphe Quetelet a appliqué les techniques

statistiques précédemment utilisées en astronomie aux problèmes sociaux, les développant davantage et contribuant à institutionnaliser la discipline statistique.

### **James Watt et la machine à vapeur**

James Watt (1736-1819), petit-fils d'un professeur de mathématiques, possédait à la fois une dextérité manuelle et une aptitude pour les mathématiques. Il a suivi une formation de fabricant d'instruments mathématiques et a obtenu un poste à l'université de Glasgow, l'un des principaux centres de la révolution industrielle britannique, où il a rencontré pour la première fois la machine à vapeur de Newcomen, inventive mais inefficace. Alors que la machine de Newcomen servait à pomper l'eau des mines de charbon, les améliorations apportées par Watt ont fait de la machine à vapeur un moyen pratique d'alimenter les usines en énergie et de transporter les produits manufacturés vers le marché.

Le mécanisme à mouvement parallèle de James Watt (1804), en particulier, permettait à la force d'un moteur d'agir à la fois dans le sens de la poussée et dans le sens de la traction, convertissant un mouvement rotatif en un mouvement linéaire. Ce mécanisme a apporté une solution empirique, bien qu'imprécise, au problème géométrique de la construction d'une ligne droite sans tracer de ligne droite. En géométrie euclidienne, il est axiomatique de produire une ligne droite, mais, contrairement au cercle, il n'existe aucune méthode pour le faire.

À la suite de Watt, un lien spatial permettant de tracer des lignes droites exactes a été créé par le mathématicien Pierre-Frédéric Sarrus en 1853 et prouvé géométriquement par Charles-Nicolas Peaucellier en 1864. La théorie mathématique des liaisons a été développée par Pafnuty Chebyshev, James Joseph Sylvester, Alfred Kempe et Arthur Cayley.

### **Les mathématiques et la révolution industrielle**

La fin du dix-huitième et le début du dix-neuvième siècle ont été extrêmement fructueux pour le développement des mathématiques modernes. Toutefois, les liens entre ces travaux et la révolution industrielle sont essentiellement indirects.

Charles Babbage (1791-1891) et ses travaux sur certaines des premières machines à calculer constituent une exception notable. Les tables numériques utilisées en mathématiques appliquées étaient calculées à la main et contenaient souvent de nombreuses erreurs. Babbage a cherché à remplacer ces « ordinateurs » humains par des machines, alors que de nombreux emplois manufacturiers étaient mécanisés. Il a commencé à travailler sur son premier « moteur de différences » en 1822, est passé à un « moteur analytique » programmable et a continué à expérimenter des machines informatiques à vapeur pendant une grande partie du reste de sa vie. Ada Lovelace, généralement considérée comme le premier programmeur informatique, a créé un programme qui aurait pu fonctionner sur la machine de Babbage, si elle avait été construite.

Certains problèmes techniques liés à la révolution industrielle ont pu être résolus grâce aux mathématiques abstraites développées dans d'autres contextes. Par exemple, l'analyse des circuits électriques, des ondes et des oscillations est simplifiée par l'utilisation de nombres complexes, explorés à l'origine dans le cadre de la résolution d'équations algébriques.

En France, l'École polytechnique, fondée par les mathématiciens Lazare Carnot et Gaspard Monge en 1794 pour former des ingénieurs militaires, a fourni une formation technique et une expertise aux industries françaises naissantes. Son corps professoral, ses étudiants et ses examinateurs comptaient un grand nombre des mathématiciens français les plus influents du XIXe siècle, et ses manuels, tels que les ouvrages de calcul d'Adrien-Marie Legendre et de Sylvestre-François Lacroix, ont influencé l'enseignement des mathématiques à l'échelle internationale.

---

## CHAPITRE 8

---

# LE 19ÈME SIÈCLE ET LA CRISE DES FONDEMENTS.

La crise des fondements des mathématiques, qui a affecté la discipline au tournant du 20e siècle, est le résultat de tentatives visant à placer la théorie des ensembles, et donc l'arithmétique et les mathématiques, sur des fondements non contradictoires. Les solutions concurrentes proposées ont abouti à une impasse.

Le début du XIXe siècle a été touché par la recherche d'une axiomatique réduite de la géométrie euclidienne : G. Saccheri puis A.-M. Legendre tentent, en vain, de déduire le cinquième postulat (dit postulat des parallèles) des quatre autres postulats par un raisonnement par l'absurde. Puis Gauss, Bolyai (1832) et Lobatchevski (1839), en adoptant un postulat différent, ont formé un système d'énoncés géométriques non contradictoires : les géométries non euclidiennes .

Cependant, ces découvertes n'ont pas réellement remis en cause la démarche hypothético-déductive en mathématiques, dans la mesure où, comme l'ont montré Gauss puis Riemann, la géométrie des surfaces à courbure constante constitue un modèle de géométrie non euclidienne.

Mais au même moment, de nouvelles difficultés apparaissaient. Jusque-là, les courbes planes que l'on considérait en géométrie analytique étaient des courbes définies par une équation reliant les coordonnées de leurs points :

$F(x, y) = 0$  où  $F$  était une fonction supposée implicitement dérivable. Il était admis qu'une courbe était un lacet continu dépourvu de point anguleux : en chacun de leurs points, ces courbes n'avaient qu'une seule tangente. Or, en cherchant à donner une définition logique de ce qu'est une fonction continue, Bolzano avait formé vers 1830 une courbe continue possédant une infinité de points anguleux (donc une infinité de points où elle n'est pas dérivable).

D'autre part, dans la continuité des recherches de Fourier en analyse harmonique, Dirichlet et Riemann montrèrent qu'une somme infinie de sinusôides peut converger vers une fonction localement discontinue. Vingt ans plus tard, Weierstrass fit connaître une fonction continue et nulle part dérivable. À son tour, Peano donna la définition récursive

d'une courbe continue passant par tous les points intérieurs d'un carré.

Ces exemples montraient la distance entre l'intuition géométrique que l'on peut avoir de certaines figures, et les figures qu'autorisent des axiomes d'apparence évidente. L'adoption d'un axiome n'est donc pas nécessairement conditionnée par sa conformité avec notre intuition, mais d'abord par le fait qu'il n'est pas contradictoire avec d'autres axiomes.

### Les fondements de l'arithmétique

Au début des années 1870, le mathématicien allemand Georg Cantor recherche les conditions sur les coefficients de Fourier

$a_n$  et  $b_n$  tels que la somme  $\sum_{n>0} a_n \cos nx + b_n \sin nx$  converge vers une fonction  $f(x)$  partout nulle : il trouve qu'il suffit que

$f$  soit nulle sauf en certains points isolés, pour pouvoir conclure que tous les coefficients sont nuls. L'étude de la répartition de ces ensembles de point isolés de  $\mathbb{R}$  l'amène à comparer ces ensembles, qui peuvent compter une infinité de points.

Après sa rencontre avec Dedekind (1872), lui aussi préoccupé par la rigueur logique des principes de l'analyse mathématique, il montre par un argument célèbre qu'il y a « autant » de fractions rationnelles que d'entiers, c'est-à-dire que l'on peut numérotter toutes les fractions. Deux ans plus tard, il établit, par les raisonnements admis de l'analyse (en particulier le théorème des segments emboîtés), qu'il n'y a en revanche pas de bijection entre les fractions rationnelles et les nombres réels, c'est-à-dire que l'ensemble des rationnels est strictement inclus dans l'ensemble des nombres réels. Par là, il montrait la nécessité de distinguer dans les raisonnements plusieurs « infinis », irréductibles les uns aux autres ; autrement dit, que bon nombre de paradoxes mathématiques passés venaient d'une conception simpliste (moniste) de la notion d'infini.

Dedekind, de son côté, venait de publier une monographie où il s'attachait à définir les nombres irrationnels, sans toutefois ressentir la nécessité de définir axiomatiquement les nombres entiers. C'est en tâchant de fonder en logique le raisonnement par récurrence (qu'il utilise pour définir les quantités irrationnelles), qu'il en vient à donner une définition des ensembles infinis dont les éléments peuvent être numérotés un par un. Son mémoire, qui ne sera publié qu'en 1888, inspira l'année suivante à Peano sa définition axiomatique des nombres entiers.

En 1879, Frege énonce trois caractéristiques qu'une théorie mathématique devrait avoir :

- cohérence : impossibilité de démontrer une proposition et son contraire ;
- complétude : pour tout énoncé, ou bien il est démontrable, ou bien son opposé est démontrable à l'intérieur de la théorie ;
- décidabilité : il existe une procédure de décision permettant de tester tout énoncé de la théorie.

En 1893, dans un essai intitulé *Lois fondamentales de l'arithmétique* (Die Grundgesetze der Arithmetik), il tente de formaliser la définition des entiers naturels. Dans l'axiomatique qu'il propose apparaît notamment la définition des ensembles par abstraction :

*Pour toute propriété, il existe un ensemble dont les éléments sont tous les éléments possédant cette propriété.*

Or, quelques années plus tard (1900), un jeune étudiant anglais, Russell, signale que cet axiome autorise l'existence d'un ensemble paradoxal : « l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas inclus dans eux-mêmes. »

### **Quelles opérations pour les ensembles infinis ?**

Dedekind et Peano n'avaient, eux, pas donné de définition très précise de la notion d'ensemble qu'ils utilisaient ; toutefois, à l'examen de leurs démonstrations, il est clair qu'ils ont utilisé implicitement les trois règles suivantes :

Axiome d'extensionnalité. — Deux ensembles sont identiques s'ils ont exactement les mêmes éléments.

Axiome d'abstraction. — Pour toute propriété, il existe un ensemble dont les éléments sont tous les éléments possédant cette propriété.

Axiome du choix. — Étant données des suites d'éléments d'un ensemble, il est possible de sélectionner un élément de chacune de ces suites pour former une nouvelle suite.

Les difficultés de l'analyse paraissaient finalement venir de l'extension aux ensembles infinis des opérations (réunion, intersection, inclusion) et raisonnements courants avec les ensembles finis.

Jusque-là, la logique était depuis Aristote considérée comme une branche de la philosophie, avec ses sorites et syllogismes. L'enseignement de la logique reposait sur l'idée que toutes les propositions vraies découlaient de l'utilisation de règles précises à partir de prémisses vraies. Par une notation abstraite de ces règles, Boole (1847) avait jeté les bases d'une algèbre logique[9], et simultanément De Morgan avait publié ses lois : la logique propositionnelle devenait une branche à part entière de l'algèbre.

Mais le paradoxe de Russell montrait qu'en admettant l'axiome naïf d'abstraction, on accordait trop ; si donc on voulait conserver les opérations de la logique, cet axiome devait être remplacé par quelque chose de plus subtil.

Une des premières solutions a été proposée par Ernst Zermelo : le schéma d'axiomes de compréhension (Aussonderung Axiom, 1908). Le principe est de n'autoriser la définition d'un « ensemble d'éléments ayant une propriété commune », que si ces éléments appartiennent eux-mêmes à un ensemble. Plus généralement, Zermelo pensait que pour fonder les raisonnements, il convenait de traiter les ensembles eux-mêmes comme des objets mathématiques. L'axiomatique proposée par Zermelo, qui a notamment mis en relief l'axiome du choix, éliminait le paradoxe de Russell, tout en permettant de définir les nombres comme l'avait fait Peano. Il n'était toutefois pas clair que cette nouvelle axiomatique était en elle-même non-contradictoire, ou exempte de paradoxes à venir.

### **Logique mathématique et indécidabilité**

David Hilbert se propose en 1898 de poursuivre le projet de Dedekind et Peano : fonder l'arithmétique et les nombres en logique par un système d'axiomes non-contradictaires.

Il précise son projet en 1922 en posant l'Entscheidungsproblem (problème de la décidabilité). Il demande s'il existe une procédure (un algorithme) permettant de vérifier si une expression formelle peut se déduire d'un système d'axiomes donnés. Cela aboutit en 1928 à un programme de recherche qui s'articule autour des trois questions énoncées par G. Frege : les mathématiques sont-elles complètes, cohérentes, et décidables ?

Trois écoles se forment au début du xxe siècle pour tenter de formaliser la logique et la métamathématique :

**logiciste** : menée par Russell et Whitehead (à partir de 1903) ;

**formaliste** : menée par David Hilbert (1904-) ;

**intuitionniste** : menée par Brouwer (1907-).

Russell et Whitehead, s'appuyant sur la logique et plusieurs axiomes, tentent de construire de façon cohérente les mathématiques. Leur travail, complexe et incomplet, culmine avec Principia Mathematica (1910-1913).

Kurt Gödel avec ses théorèmes d'incomplétude (1931) a démontré que dès qu'une théorie est assez riche pour rendre compte de l'arithmétique, elle ne peut à la fois être complète, décidable et cohérente.

Son théorème d'incomplétude montre qu'il n'est pas possible, par les procédés de la logique mathématique, d'établir que les axiomes de Zermelo (qui permettent de fonder l'arithmétique de Peano) ne sont pas contradictoires. Cette situation d'incertitude a déclenché la crise des fondements des mathématiques. Crise qui atteint donc son paroxysme avec la sortie des théorèmes de Gödel.

---

## CHAPITRE 9

---

# LE 20ÈME SIÈCLE ET L'ÉLARGISSEMENT DU CHAMP D'APPLICATION

Le 20e siècle a été une période de progrès et d'innovation dans le domaine des mathématiques. Au cours de cette période, les mathématiciens ont apporté des contributions significatives à des domaines tels que la géométrie algébrique, la théorie des nombres, la topologie et la physique mathématique. Voici un aperçu de quelques-uns des principaux développements des mathématiques au cours du 20e siècle.

### Géométrie algébrique moderne

L'émergence de la géométrie algébrique moderne est l'un des développements les plus importants des mathématiques au cours du 20e siècle. La géométrie algébrique est l'étude des objets géométriques définis par des équations algébriques. Elle trouve son origine dans les travaux de mathématiciens tels que René Descartes et Pierre de Fermat au XVIIe siècle. Cependant, c'est au 20e siècle que la géométrie algébrique s'est vraiment imposée, avec le développement de nouvelles techniques telles que la théorie des gerbes et l'introduction des schémas par des mathématiciens tels qu'Alexander Grothendieck.

### Théorie des nombres

La théorie des nombres est un autre domaine important des mathématiques qui a connu un développement significatif au cours du 20e siècle. La théorie des nombres est l'étude des nombres entiers et de leurs propriétés, et constitue un domaine important des mathématiques depuis l'Antiquité. Au XXe siècle, des mathématiciens tels qu'André Weil, Harold Davenport et John Tate ont apporté des contributions significatives à ce domaine, notamment en développant la théorie algébrique des nombres et en démontrant le dernier théorème de Fermat par Andrew Wiles.

### Topologie

La topologie, l'étude des propriétés géométriques qui sont préservées par des déformations

continues, a également connu un développement important au cours du 20e siècle. Au début du siècle, des mathématiciens tels que Poincaré et Brouwer ont apporté d'importantes contributions au domaine, jetant les bases du développement de la topologie algébrique par des mathématiciens tels qu'Emmy Noether et Henri Cartan.

### **Mathematical Physics**

Mathematical physics also saw significant progress during the 20th century. The development of quantum mechanics in the early part of the century led to the development of new areas of mathematics such as functional analysis and the theory of distributions. Later, the development of general relativity by Albert Einstein and the emergence of quantum field theory led to new developments in geometry and topology, such as the study of gauge theory and the Atiyah-Singer index theorem.

### **Computational Mathematics**

Computational mathematics also emerged as an important area of mathematics during the 20th century, with the development of electronic computers making it possible to perform calculations that were previously impossible by hand. This led to the development of numerical analysis, the study of algorithms for performing numerical calculations, and the emergence of computer science as a discipline in its own right.

In conclusion, the 20th century was a period of great progress and innovation in the field of mathematics. Developments in areas such as algebraic geometry, number theory, topology, and mathematical physics led to new insights and techniques that continue to shape the field today. The contributions of mathematicians such as Alexander Grothendieck, André Weil, Emmy Noether, John Tate, and many others have had a profound impact on mathematics and continue to influence the field in the 21st century.

## Références Bibliographiques

### Ouvrages généraux sur l'histoire des mathématiques

- Burton, David M. *The History of Mathematics : An Introduction*. New York : McGraw-Hill, 2005.
- Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York : Saunders College Publishing, 1990.
- Katz, Victor. *A History of Mathematics : An Introduction*. New York : Addison-Wesley, 2008.

### Mathématiques arabes et islamiques

- Hogendijk, J.P. (ed. and trans.). *Ibn Al-Haytham's Completion of the Conics*. Translated from Arabic, 1985.
- Levey, Martin, and Marvin Petruck (eds. and trans.). *Principles of Hindu Reckoning*. Translated from Arabic, 1965.
- Levey, Martin (ed. and trans.). *The Algebra of Abū Kāmil*. Translated from Arabic and Hebrew, 1966.
- Kasir, Daoud S. (ed. and trans.). *The Algebra of Omar Khayyam*. Translated from Arabic, 1931 (reprinted 1972).
- Rosen, Frederic (ed. and trans.). *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Translated from Arabic, 1831 (reprinted 1986).
- Saidan, A.S. (ed. and trans.). *The Arithmetic of al-Uqlīdisī*. Translated from Arabic, 1978.

### Études sur les mathématiques islamiques

- Berggren, J.L. *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. 1986.
- Kennedy, E.S. *Studies in the Islamic Exact Sciences*. 1983.
- Rashid, Rushdi (Roshdi Rashed). *The Development of Arabic Mathematics : Between Arithmetic and Algebra*. Translated by A.F.W. Armstrong, 1994 (originally published in French, 1984).

### Mathématiques égyptiennes

- Peet, T. Eric (ed. and trans.). *The Rhind Mathematical Papyrus : British Museum 10057 and 10058*. 1923 (reprinted 1970).
- Chace, Arnold Buffam, and Henry Parker Manning (trans.). *The Rhind Mathematical Papyrus*. 2 vols., 1927–29 (reprinted 2 vols. in 1, 1979).
- Toomer, G.J. “Mathematics and Astronomy.” Chapter 2 in *The Legacy of Egypt*, 2nd ed., edited by J.R. Harris, 1971, pp. 27–54.
- Gillings, Richard J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. 1972 (reprinted 1982).

## Mathématiques babyloniennes

Neugebauer, O., and A. Sachs. *Mathematical Cuneiform Texts*. 1945 (reissued 1986).

Aaboe, Asger. *Episodes from the Early History of Mathematics*. 1964 (reissued 1998), pp. 5–31.

## Mathématiques modernes (XIXe–XXe siècles)

### Surveys et analyses générales

Mehrtens, Herbert, Henk Bos, and Ivo Schneider (eds.). *Social History of Nineteenth Century Mathematics*. 1981.

Aspray, William, and Philip Kitcher (eds.). *History and Philosophy of Modern Mathematics*. 1988.

Devlin, Keith. *Mathematics : The New Golden Age*. New and rev. ed., 1999.

### Études spécialisées

Bottazzini, Umberto. *The Higher Calculus : A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Translated by Warren Van Egmond, 1986 (originally published in Italian, 1981).

Coolidge, Julian Lowell. *A History of Geometrical Methods*. 1940 (reissued 2003).

Dauben, Joseph Warren. *Georg Cantor : His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. 1979 (reprinted 1990).

Edwards, Harold M. *Fermat's Last Theorem : A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. 1977 (reissued 2000).

Grattan-Guinness, I. (ed.). *From the Calculus to Set Theory, 1630–1910 : An Introductory History*. 1980 (reissued 2000).

Gray, Jeremy. *Ideas of Space : Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*. 2nd ed., 1989.

Hawkins, Thomas. *Lebesgue's Theory of Integration : Its Origins and Development*. 3rd ed., 1979 (reissued 2001).

Lützen, Jesper. *The Prehistory of the Theory of Distributions*. 1982.

Monastyrsky, Michael. *Riemann, Topology, and Physics*. Translated from Russian by Roger Cooke, James King, and Victoria King, 2nd ed., 1987.