الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Classification et techniques du calcul fractionnaire

Préparé par :

- **Boussaffel Madiha**
- **Lalali Soulaf**

Soutenue devant le jury

Fadel Wahida	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Benauicha Loubna	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Boukaf Samira	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire :2024/2025

Dédicace

À nos familles, sources inépuisables de soutien et d'amour,

À nos enseignants pour leur encadrement et leurs précieux conseils,

Et à toutes les personnes qui nous ont encouragées,

ne serait-ce qu'avec un mot ou un sourire.

Nous vous offrons le fruit de notre effort commun

en signe de profonde reconnaissance. Nous dédions ce modeste travail à tous ceux qui ont cru en nos capacités

et nous ont accompagnées tout au long de notre parcours académique.

A nos familles, sources inépuisables de soutien et d'amour,

À nos enseignants pour leur encadrement et leurs précieux conseils,

Et à toutes les personnes qui nous ont encouragées,

ne sérail-ce qu'avec un met ou un sourire,

Nous vous offrons le fruite de notre effort commun

En signe de profonde reconnaissance.

Remerciements

Louange à Allah,

Seigneur des mondes, par Sa grâce et Son aide que ce travail a été accompli.

Nous exprimons nos profonds remerciements et gratitude à notre superviseure Benaouicha L. Pour ses précieuses orientations,

son suivi minutieux et son soutien continu tout au long de la préparation de cette recherche. Nous témoignons également de notre profonde reconnaissance aux membres respectés du comité pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Nous adressons également nos sincères remerciements à tous ceux qui ont assisté à la soutenance de cette recherche,

ainsi qu'à toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation, que ce soit sur le plan académique ou moral.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude du calcul fractionnaire, une branche de l'analyse mathématique qui étend les notions de dérivation et d'intégration aux ordres non entiers. Il présente un cadre théorique rigoureux basé sur des définitions fondamentales telles que celles de Riemann-Liouville et de Caputo, ainsi que des outils analytiques essentiels comme la transformation de Laplace et les fonctions spéciales. Ces notions sont ensuite appliquées à l'étude des équations différentielles fractionnaires linéaires et non linéaires. Ce travail vise à fournir une présentation claire et structurée des bases et des techniques du calcul fractionnaire..

Abstact

This thesis is devoted to the study of fractional calculus, a branch of mathematical analysis that extends the concepts of differentiation and integration to non-integer orders. It presents a rigorous theoretical framework including key definitions such as those of Riemann-Liouville and Caputo, along with essential analytical tools like the Laplace transform and special functions. These ideas are then applied to the analysis of linear and nonlinear fractional differential equations. The objective is to provide a clear and structured overview of the foundations and techniques of fractional calculus. Chaotic dynamic systems, synchronization, identical synchronization, complete synchronization, Rôssler.

ملخص

هذه المذكرة مخصصة لدراسة الحساب الكسري, و هو فرع من التحليل الرياضي يوسع مفهومي الاشتقاق والتكامل ليشمل الرتب غير الصحيحة . نعرض من خلال هذا العمل إطارا نظريا دقيقا يشمل تعريفات أساسية مثل تعريفي ريمان ليوفيل و كابوتو, إلى جانب أدوات تحليلية مهمة مثل تحويل لابلاس والدوال الخاصة . كما يتم تطبيق هذه المفاهيم على دراسة المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية وغير الخطية . يهذف هذا البحث إلى تقديم عرض منظم وشامل الأساسيات وتقنيات الحساب الكسري.

Table des matières

Notations

- $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{R}$: ensemble des réels
- $\mathbb{R}^+$: ensemble des réels positifs
- $\mathbb{R}^{+*}$: ensemble des réels strictement positifs
- $\mathbb{R}^2$: ensemble des réels à deux dimensions
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: ensemble des suites réelles
- $\mathbb{C}$: ensemble des complexes
- $[0, 1]$: intervalle réel fermé
- $[0, t]$: intervalle réel dépendant du temps
- $C([a, b])$: fonctions continues sur $[a, b]$
- $L^1([a, b])$: fonctions mesurables ou intégrables sur $[a, b]$
- $B(x, y)$: fonction bêta
- $\Gamma(z)$: fonction gamma
- $E_\alpha(z)$: fonction de Mittag-Leffler à un paramètre
- $E_{\alpha,\beta}(z)$: fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres
- $I^\alpha_{a+} f(t)$: intégrale fractionnaire de Riemann–Liouville
- ${}^{RL}D^\alpha f(t)$: dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville
- ${}^{C}D^\alpha f(t)$: dérivée fractionnaire de Caputo
- $\mathcal{L}f(t)$: transformée de Laplace
- $\mathcal{L}^{-1}F(s)$: transformée de Laplace inverse

Introduction générale

Le calcul fractionnaire constitue une extension naturelle des concepts classiques de dérivation et d'intégration, permettant de définir des dérivées et intégrales d'ordres non entiers, qu'ils soient fractionnaires, réels ou même complexes. Les origines théoriques de ce domaine remontent à l'année 1695, lorsque le mathématicien français L'Hôpital posa une question à Leibniz sur la signification de la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$. Ce dernier répondit par une remarque prophétique, suggérant que cette idée, bien que surprenante à l'époque, aurait un jour une grande utilité. Depuis, le concept s'est progressivement développé pour devenir un champ mathématique à part entière.
Ce type de calcul apparaît dans plusieurs domaines d'application tels que la physique, le génie des matériaux, les systèmes biologiques et l'économie. Il permet de modéliser des phénomènes présentant une mémoire ou un comportement non local, grâce aux équations différentielles fractionnaires. Parmi les dérivées les plus utilisées, on trouve celles de Riemann-Liouville et de Caputo, chacune ayant ses propres caractéristiques théoriques et ses avantages selon la nature du problème étudié, notamment en ce qui concerne les conditions initiales et aux limites.
Ce mémoire se compose de trois chapitres, répartis comme suit :
Chapitre I : Nous y présentons les fonctions spéciales liées au calcul fractionnaire, telles que les fonctions Gamma, Bêta et Mittag-Leffler, ainsi que la transformée de Laplace, en mettant en évidence leurs propriétés fondamentales et leur utilité dans les contextes fractionnaires.
Chapitre II : Consacré à l'étude des fondements théoriques de la dérivation et de l'intégration fractionnaires, avec la présentation des définitions de Riemann-Liouville et de Caputo, et une comparaison approfondie de leurs structures et applications, en insistant sur leur impact sur les conditions initiales et aux limites.
Chapitre III : Comporte une étude appliquée des équations différentielles fractionnaires,

à travers l'analyse du problème de Cauchy selon la définition de Riemann-Liouville et du problème aux limites selon la définition de Caputo, dans les cas linéaire et non linéaire, avec un recours essentiel à la transformée de Laplace pour obtenir les solutions et analyser leur comportement.

Chapitre 1

Bases mathématiques du calcul fractionnaire

1.1 Introduction

Ce chapitre introduit les principaux outils mathématiques du calcul fractionnaire. Nous débutons par l'étude des fonctions bêta et gamma, essentielles dans le calcul intégral et les généralisations analytiques. La fonction de Mittag-Leffler, extension de la fonction exponentielle, est ensuite présentée pour son rôle dans les solutions des équations différentielles fractionnaires. Enfin, la transformation de Laplace est étudiée pour son efficacité dans l'analyse et la résolution des équations différentielles à dérivées fractionnaires. Ces concepts forment la base mathématique du calcul fractionnaire.

1.2 Fonction Gamma

1.2.1 Définition de la fonction Gamma

La fonction Gamma est une généralisation de la factorielle (applicable aux nombres non entiers ou complexes). Elle est essentielle en calcul fractionnaire car intervient dans la définition des intégrale et dérivée fractionnaires via les formulation de Riemann-Liouville ou caputo.

Définition 1.2.1. *[2] La fonction Gamma est définie par l'intégrale :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad pour\ R(z) > 0$$

1.2.2 Quelques propriété de la fonction Gamma

Propriétés 1.2.1. *[2] [5] La fonction Gamma a les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(1) = 1$

   Preuve :

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt \\ &= \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

   Preuve :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z+1-1}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z}\, dt\end{aligned}$$

On intègre par parties :

Soit $u = t^z \Rightarrow u' = zt^{z-1}$

et $v' = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t}$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z}\, dt &= \left[-e^{-t} t^z\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} z t^{z-1}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

3). $\Gamma(z+n+1) = z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)\Gamma(z) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Preuve

– *pour* $n = 0$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

La relation est vérifiée.

– *Supposons que la propriété est vraie pour un rang k, c'est-à-dire :*

$$\Gamma(z+k+1) = z(z+1)(z+2)\ldots(z+k)\Gamma(z)$$

Montrons que la formule est vraie au rang $k+1$:

$$\Gamma(z+k+2) = (z+k+1)\Gamma(z+k+1)$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$\Gamma(z+k+2) = z(z+1)(z+2)\dots(z+k+1)\Gamma(z)$$

ce qui donne :

$$\Gamma(z+k+2) = z(z+1)(z+2)\dots(z+k+1)\Gamma(z)$$

Par le principe de récurrence, la formule est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$

4). $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Preuve :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1}\, dt$$

On pose :

$$t = y^2 \Rightarrow dt = 2y\, dy$$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{y} \cdot 2y\, dy \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

5). $\Gamma(n+1) = n!$

Preuve :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad pour z = n$$

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n)\\ &= n\Gamma((n-1)+1)\\ &= n(n-1)\Gamma(n-1)\\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-1)\\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)...\Gamma(1)\\ &= n!\end{aligned}$$

6).

$$\Gamma^n\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\Gamma^n\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma^n\left(n+\frac{1}{2}-1+1\right)\\ &= \Gamma^n\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}\right)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{k}{2}\right)\end{aligned}$$

Si k impaire k=2n-1 :

$$\begin{aligned}\Gamma^n\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\\ &= \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\\ &= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots\sqrt{\pi}}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 1}\\ &= \frac{(2n)!}{2^n 2^n\, n!}\sqrt{\pi}\\ &= \frac{2n!}{2^{2n}\, n!}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

1.2.3 Représentation par limite de la fonction Gamma

[1]

On sait que la fonction Gamma est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \quad \text{pour } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Elle peut aussi être représentée par la limite suivante :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

Pour démontrer cette formule, on introduit une fonction auxiliaire :

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt$$

En effectuant le changement $\tau = \frac{t}{n}$, on a $t = n\tau$, donc :

$$\begin{aligned}
f_n(z) &= n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1}\, d\tau \\
&= \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z\, d\tau \\
&= \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \int_0^1 \tau^{z+n+1}\, d\tau \\
&= \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}
\end{aligned}$$

En utilisant la limite connue :

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} f_n(z) &= \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \\
&= \Gamma(z)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé que :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

1.3 Fonction Bêta

1.3.1 Introduction

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important, elle est combinée à la fonction Gamma.

Définition 1.3.1. *[6] La fonction bêta est définie par :*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad \forall x,y > 0$$

Théorème 1.3.1. *[6] La fonction bêta est raccordée avec la fonction gamma par la relation suivante :*

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \forall x,y > 0;$$

Démonstration 1.3.1. *[7] Soit* $D =]\, x \in [0,+\infty[, y \in [0,+\infty[$*, on a :*

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y}y^{q-1}dy\right)$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy;$$

On pose : $y = u - x$ *et* $dy = u$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty}\int_0^{u} e^{-u}x^{p-1}(u-x)^{q-1}\,dx\,dy;$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-u}\int_0^{u} x^{p-1}(u-x)^{q-1}\,dx\,dy;$$

On pose $x = tx$*, donc* $dx = u\,dt$ *:*

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\int_0^{1} t^{p-1}(u)^{q-1}(1-t)(u)^{q}\,dx\,dy;$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$$

par conséquent :

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Exemple 1.3.1. *Calculons* $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
Selon la propriété de fonction Gamma $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$*, alors :*

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$= \pi$$

1.3.2 Quelques propriétés de la fonction Bêta

Proposition 1.3.1. *[2] Pour tout* $p, q \in \mathbb{C}$, $\Re(p) > 0$ *et* $\Re(q) > 0$ *on a :*

1. $\beta(p, q) = \beta(q, p)$.
2. $\beta(p, q) = \beta(p + 1, q) + \beta(p, q + 1)$.
3. $\beta(p, q + 1) = \frac{q}{p}\beta(p + 1, q) \ = \frac{p}{p+q}\beta(p, q)$.

Démonstration 1.3.2. *1.* $\beta(p, q) = \beta(q, p)$.

$$\begin{aligned}\beta(p, q) &= \int_0^1 \Gamma^{p-1}(1 - \Gamma)^{q-1} d\Gamma \\ &= \int_0^1 (1 - \Gamma)^{p-1}\Gamma^{p} d\Gamma \\ &= \beta(q, p)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\beta(p, q) &= \beta(p + 1, q) + \beta(p, q + 1) \\ \beta(p, q + 1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q + 1)}{\Gamma(p + q + 1)} \\ \beta(p, q + 1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q + 1)} \\ &= \frac{q\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p + q)\Gamma(p + q)} \\ &= \frac{q}{p + q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} \\ &= \frac{q}{p + q}\beta(p, q)\end{aligned}$$

On obtient :

$\beta(p + q)\beta(p, q + 1) = q\beta(p, q)$

et ceci implique :

$$\begin{aligned}\beta(p, q) &= \frac{p}{q}\beta(p, q + 1) + \beta(p, q + 1) \\ &= \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q + 1)}{q\Gamma(p + q + 1)} + \beta(p, q + 1) \\ &= \frac{p\Gamma(p)q\Gamma(q)}{q\Gamma(p + q)} + \beta(p, q + 1) + \frac{\Gamma(p + 1)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q + 1)} + \beta(p, q + 1)\end{aligned}$$

Donc :

$$\beta(p, q) = \beta(p + 1, q) + \beta(p, q + 1)$$

3.

$$\begin{aligned}\beta(p,q+1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}\\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\\ &= \frac{q\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\\ &= \frac{q}{p}\frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\\ &= \frac{q}{p}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(p)}{\Gamma(p+q+1)}\\ &= \frac{q}{p}\beta(p+1,q)\end{aligned}$$

D'où :

$$\beta(p,q+1) = \frac{q}{p+q}\beta(p,q)$$

Proposition 1.3.2. *[6]*

1. *Pour tout* $a, b \in \mathbb{C}$ *:*
$$a\beta(a,b+1) = \beta(a+1,b).$$
2. *Si* $n = b+1$ *est un entier, cela donne une relation de récurrence :*
$$\beta(a,b) = \frac{n-1}{a}\beta(a+1,n-1).$$
3. $$\beta(a,1) = \frac{a}{1}.$$
4. $$\beta(m,n) = \frac{(m-1)(n-1)}{(m+n-1)}.$$

Exemple 1.3.2. *[2] Calculer*

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(\theta)}\,d\theta$
2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

Solution :

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(\theta)}\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(1)}$$

(selon la propriété de la fonction gamma : $(\Gamma(1) = 1)$*alors :*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(\theta)}\, d\theta &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(1)} \\
&= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \quad \textit{(théorème gamma)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{3}} dx$$

Nous changeons la variable en $t = x^3$*. Lorsque* $x = 0$*,* $t = 0$ *et lorsque* $x = 1$*,* $t = 1$ *Également,* $dt = 3x^2dx$*, c'est-à-dire* $dx = \frac{1}{3}t^{-2/3}dt$ *D'où*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{3\sqrt[3]{1-x^3}} &= \int_0^1 (1-t)^{-1/3}\cdot\frac{1}{3}t^{-2/3}\, dt \\
&= \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \quad \textit{(définition (1.3.1))} \\
&= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \quad \textit{(théorème (1.3.1) et proposition (1.3.1))} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/3)} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{(\sqrt{3})/2} \\
&= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

1.4 Fonction Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une fonction spéciale qui généralise la fonction exponentielle. C'est un outil essentiel en calcul fractionnaire pour décrire des systèmes d'ordre non entier, et elle est cruciale pour modéliser des phénomènes complexes comme la diffusion anormale et les processus à mémoire longue, introduite en 1903 par le mathématicien suédois Magnus Mittag-Leffler.

1.4.1 Définition de la fonction Mittag-Leffler

Définition 1.4.1. *[1]*

La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre α*, notée* $E_\alpha(z)$*, est définie par la série suivante :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \qquad (\alpha \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0)$$

où :

- Γ *: fonction Gamma (extension de la factorielle),*
- z *: variable complexe,*
- α *: paramètre complexe avec une partie réelle positive.*

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par La série suivante :

$$\left\{ E_{\alpha,\beta}(z) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \right. \tag{1.1}$$

1.4.2 Propriétés fondamentales de la fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.4.2. *[3]*

- ***Cas particuliers :***
  - *pour* $\alpha = 1$
    $$E_1(z) = e^z$$
  - *pour* $\alpha = 2$
    $$E_2(z) = \cosh(\sqrt{z})$$
- ***Formules de différentiation :***

  pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$
  $$\left(\frac{d}{dz}\right)^n E_n(\lambda z^n) = \lambda E_n(\lambda z^n)); (n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C})$$
- ***Formule complexe :***
  $$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{n-1} E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right)\right] = \frac{(-1)^n \lambda}{z^{n+1}} E_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right) \quad (z \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{C})$$
- ***Représentation intégrale :***

  pour $\alpha = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$
  $$E_{1/n}(z) = e^{z^n} \left[1 + n \int_0^z e^{-t^n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k/n)}\right) dt\right]$$

  en particulier pour $n = 2$*, on a*
  $$E_{1/2}(z) = e^{z^2} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt\right]$$

– ***Comportement asymptotique***

Pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $0 < \alpha < 2$:

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp\left(z^{1/\alpha}\right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right)$$

lorsque $|z| \to \infty$, $|\arg(z)| \leq u$ *et*

$$E_\alpha(z) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right)$$

lorsque $|z| \to \infty$, $u \leq |\arg(z)| \leq \pi$, $\quad \alpha \geq 2$, $\quad$ *pour* $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n} z^{1/\alpha} \exp\left[\exp\left(\frac{2n\pi i}{\alpha}\right) z^{1/\alpha}\right] - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right)$$

lorsque $|z| \to \infty$, $|\arg(z)| \leq \frac{\alpha\pi}{2}$,

$$|\arg(z)| + 2\pi h \leq \frac{\alpha\pi}{2}$$

Exemple 1.4.1. *[3]*

1.

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{e^z - 1}{z} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} \\ &= \frac{e^z(1-z)}{z^2} \end{aligned}$$

eten général

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-2}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}$$

1.5 La transformée de Laplace

1.5.1 Définitions et transformée de Laplace

Définition 1.5.1. *[4] On définit l'intégrale généralisée d'une fonction f à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle $[0, +\infty[$ continue par morceaux sur cet intervalle par :*

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T f(t)\,dt.$$

Quand cette limite existe et est finie, on dit que l'intégrale généralisée converge, sinon diverge.

Définition 1.5.2. *[4] Une fonction f est dite d'ordre exponentiel s'il existe des constantes positives M et T telles que $|f(t)| \leq Me^t$ pour tout $t > T$.*

Définition 1.5.3. *[4] Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors, on appelle la transformée de Laplace de $f(t)$, la fonction :*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

f(t) est appelée l'originale de *F(s)*.

Condition d'existence :

$F(s)$ est définie par une intégrale généralisée, donc il faut que :

1. f soit continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$,
2. $\exists\beta \in [0,1]$ tel que $\lim_{t\to 0^+} t^\beta |f(t)| = 0$,
3. La fonction f est d'ordre exponentiel : $|f(t)e^{-at}| \leq Me^{-(\Re(s)-a)t}$, or

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\Re(s)-a)t}dt \quad \text{converge pour } \Re(s) > a.$$

Remarque 1.5.1. *Certaines fonctions ne possèdent pas de transformée de Laplace, par exemple la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ qui ne respecte pas la deuxième condition d'existence, ou $f(t) = e^{t^2}$ qui n'est pas d'ordre exponentiel.*

Linéarité :

Définition 1.5.4. *Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $F(s)$ et $G(s)$, respectivement et soient α et β deux réels, alors*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha\mathcal{L}(f)(s) + \beta\mathcal{L}(g)(s).$$

Exemple 1.5.1. *Soit la fonction de Heaviside :*

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\varepsilon(t))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s}, \quad \Re(s) > 0.$$

On détermine la transformée de Laplace de sinus et cosinus.

On sait que $\cos(at) = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos(at))(s) &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{iat}) + \mathcal{L}(e^{-iat})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right] \\ &= \frac{s}{s^2+a^2}. \end{aligned}$$

De même $\sin(at) = \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$, donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin(at))(s) &= \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}(e^{iat}) - \mathcal{L}(e^{-iat})\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right] \\ &= \frac{a}{s^2+a^2} \end{aligned}$$

Remarque 1.5.2. *On a :*

(i) Si la fonction f est d'ordre exponentiel, alors la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f(t))(s)$ de $f(t)$ existe.

(ii) On peut reconstituer f à partir de sa transformée F à l'aide de la transformée de Laplace inverse :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)\,ds, \quad c = \Re(s) > c_0.$$

Propriétés 1.5.1. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*$. Alors, la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler est donnée par :*

$$\mathcal{L}\left(t^{\alpha p+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(p)}(\pm\lambda t^{\alpha})\right)(s) = \frac{p!s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}\pm\lambda)^{p+1}}, \quad \Re(s) > |\lambda|^{1/\alpha}.$$

1.5.2 Transformée inverse

Définition 1.5.5. *[4] La transformée de Laplace inverse unilatérale $f(t)$ d'une fonction $F(s)$ est définie par :*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{st}ds$$

Exemple 1.5.2. *[4]*

$$F(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{4}{s-1} - \frac{1}{s+3} \quad \textit{donc} \quad f(t) = \left(4e^{t} - e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

Exemple 1.5.3.

$$F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \quad \textit{donc} \quad f(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

1.5.3 Les propriétés de base de la transformée de Laplace

Lemme 1.5.1. *Supposons que $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions nulles pour $t < 0$ et telles que leur transformées de Laplace $F(s)$ et $G(s)$ existent, alors :*

(a) La transformée de Laplace inverse est linéaire.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\lambda F(s) + G(s)\}(t) = \lambda\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) = \lambda f(t) + g(t)$$

(b) La transformée de Laplace du produit de convolution de $f(t)$ et $g(t)$ est :

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

où la convolution est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

(c) La limite de la fonction $sF(s)$ pour $s \to \infty$ est donnée par :

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$$

(d) La transformée de Laplace de la n-ième dérivée ($n \in \mathbb{N}$) de $f(t)$ est définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(k)} f^{n-k-1}(0)\end{aligned}$$

1.5.4 La transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles

$f(t), t \geq 0$	$t^\alpha, \alpha > -1$	$E_\alpha(\lambda t^\alpha), \lambda \in \mathbb{R}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)$
$F(p)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \ \Re(p) > 0$	$\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda}$	$\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha-\lambda}$

Remarque 1.5.3. *[8] Si f n'est pas continue en $t_0 = 0$, alors on remplace $f(0)$ par $f(0^+)$, surtout lorsqu'on utilise une intégration par parties dans une démonstration.*

Exemple 1.5.4. *[1]*

De la relation (1.1), la fonction Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z)$ est une généralisation de la fonction exponentielle e^z.

Nous expliquons comment obtenir une transformation de Laplace pour la fonction de Mittag-Leffler en utilisant la mesure entre cette fonction et la fonction e^z. Pour cela, obtenons la transformation de Laplace de la fonction $t^k e^{\alpha t}$ de manière non traditionnelle.

Premier, prouvons que :

$$\left\{ \int_0^\infty e^{-t} e^{zt} dt = \frac{1}{1 \pm z}, \quad |z| < 1 \right. \tag{1.2}$$

En utilisant l'extension en série pour (e^z), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t}e^{zt}dt &= \frac{1}{1-z} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm z)^k}{k!} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\pm z)^k \\ &= \frac{1}{1 \pm z}\end{aligned}$$

Deuxièmement, *nous différencions les deux côtés de l'équation (1.2) par rapport à z. Le résultat est :*

$$\int_0^\infty e^{-t} t^k e^{\pm zt} dt = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}}, \quad |z| < 1$$

Et après des substitutions évidentes, nous obtenons la paire bien connue de transformées de Laplace de la fonction $t^k e^{\alpha t}$:

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^k e^{\pm \alpha t} dt = \frac{k!}{(p \pm \alpha)^{k+1}}, \quad \Re(p) > |\alpha|$$

Chapitre 2

Théorie du calcul fractionnaire

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'intégration fractionnaire ainsi qu'aux principales notions et propriétés associées, selon l'approche de Riemann-Liouville. Nous examinerons également la dérivation fractionnaire en présentant les définitions majeures et les conditions nécessaires, conformément aux formulations de Riemann-Liouville et de Caputo. Par ailleurs, nous appliquerons ces concepts à certaines fonctions spéciales importantes, et nous analyserons la relation existante entre les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.

2.1 Intégration de Riemann-Liouville

2.1.1 Intégration fractionnaires à gauche

Fonctions définies sur $[a, b]$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^N$. Commençons par noter ${}_a\mathcal{I}_t^1$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\left\{ \forall t \in [a, b], \quad {}_a\mathcal{I}_t^1 f(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau \right. \tag{2.1}$$

L'intégration de ${}_a\mathcal{I}_t^1$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a. De plus, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{I}_t^1 \circ {}_a\mathcal{I}_t^1 f(t) &= \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau)\, d\tau \right) du \\ &= \int_a^t \left(\int_\tau^t du \right) g(\tau)\, d\tau \\ &= \int_a^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $({}_a\mathcal{I}_t^1)^n$ la n-ième itération de ${}_a\mathcal{I}_t^1$, une récurrence directe montre que :

$$({}_a\mathcal{I}_t^1)^n f(t) = \frac{1}{(n-1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau$$

Si on note $g = ({}_a\mathcal{I}_t^1)^n f$, g est donc l'unique fonction vérifiant :

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, \quad g^{(k)}(a) = 0, \quad g^{(n)} = f$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante :

Définition 2.1.1. *[12] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale à gauche d'ordre n de f, que l'on note ${}_a\mathcal{I}_t^1 f$, est définie par :*

$$\forall t \in [a,b], \quad {}_a\mathcal{I}_t^1 f(t) = \frac{1}{(n-1)} \int_u^t (t-\tau)^{n-1} g(\tau)\, d\tau$$

La dénomination "gauche" provient du fait que l'intégrale est établie à partir des valeurs à gauche ($\tau < t$) de f. Nous voyons alors qu'il est possible d'étendre directement à $n > 0$, et ce grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous définie précédemment.
C'est la propriété :

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

qui permet de généraliser la définition (2.1) de la manière suivante :

Définition 2.1.2. *[12] : L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :*

$$\forall t \in [a,b], {}_aIt^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau)\, d\tau$$

2.1.2 Intégration fractionnaires à droite

Si on remonte à la relation de départ (1.1) pour une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, on p remarquer que l'intégrale

$$ {}_b\mathcal{I}_t^1 f(t) = \int_b^t f(\tau)\,d\tau = -\int_t^b f(\tau)\,d\tau $$

est aussi une primitive de f, qui cette fois s'annule en b et fait intervenir les valeurs à droite de f.

À partir de la relation :

$$ \int_b^t (\tau - t)^{n-1} f(\tau)\,d\tau = (-1)^n \int_t^b (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\,d\tau $$

On pourrait définir de la même manière que précédemment l'intégrale à droite d'ordre n de f par :

$$ \forall t \in [a,b], \quad {}_b\mathcal{I}_t^n f(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau)\,d\tau $$

En notant $h = {}_b\mathcal{I}_t^n f$, h serait l'unique fonction vérifiant :

$$ \forall 0 \leq k \leq n-1, \quad h^{(k)}(b) = 0, \quad h^{(n)} = f $$

On définit alors l'intégrale à droite de la manière suivante :

Définition 2.1.3. *:[12] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale à droite d'ordre n de f, que l'on note ${}_b\mathcal{I}_t^n f$, est définie par :*

$$ \forall t \in [a,b], \quad {}_t\mathcal{I}_b^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau)\,d\tau $$

Elle vérifie ainsi la relation :

$$ \left(-\frac{d}{dt}\right)^n {}_t\mathcal{I}_b^n f(t) = f(t) $$

Là encore, l'extension à un ordre réel positif est immédiate.

Définition 2.1.4. *:[12] L'intégrale fractionnaire de Riemann–Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :*

$$ \forall t \in [a,b], \quad {}_t\mathcal{I}_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,d\tau. $$

L'extension sur$[a,+\infty]$ et $\mathbb{R}$ est notée $\mathcal{I}_-^\alpha$:

$$ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}_-^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{+\infty} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,d\tau. $$

Définition 2.1.5. *:[11] Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann–Liouville (notée par R-L) d'ordre α d'une fonction f est définie par :*

$$ \mathcal{I}_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt, \quad x > a $$

pour $(-\infty \leqslant a < x < \infty)$.

Pour $\alpha = 0$, *on a :*

$$\mathcal{I}_a^0 = I \quad (\textit{l'opérateur identité}).$$

Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{I}_a^\alpha$ *coïncide avec l'intégrale répétée* n *fois de la forme :*

$$(\mathcal{I}_a^\alpha f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n.$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt$$

Exemple 2.1.1. *:[11] Soit* $f(x) = (x-a)^c$ *avec* $c > -1$, *alors*

$$\mathcal{I}_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)}(x-a)^{\alpha+c}$$

En effet :

$$\mathcal{I}_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^c\, dt$$

En utilisant le changement de variable et la fonction Bêta, on obtient :

$$t - a = S(x-a), \quad 0 \leq S \leq 1$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left[(x-a) - S(x-a)\right]^{\alpha-1} S^c (x-a)^{c+1}\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+c} \int_0^1 (1-S)^{\alpha-1} S^c\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+c} \beta(\alpha, c+1)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)}(x-a)^{\alpha+c}$$

Dans le cas $a = 0$ *o na :*

$$\mathcal{I}_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} x^{\alpha+c}$$

Théorème 2.1.1. *[11] Si* $f \in L^1([a,b])$ *et* $\alpha > 0$, *alors* $\mathcal{I}_a^\alpha f(x)$ *existe pour presque tout* $x \in [a,b]$ *et*

$$\mathcal{I}_a^\alpha f \in L^1([a,b])$$

Preuve 2.1.1. *[11] Soit $f \in L^1([a,b])$, on a :*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-t)\varphi_2(t)\, dt$$

avec

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 < u \leq b-a \\ 0, & u \in \mathbb{R} \setminus [0, b-a] \end{cases}$$

et

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} f(u), & a \leq u \leq b \\ 0, & u \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \end{cases}$$

Par construction, $\varphi_j \in L^1(\mathbb{R})$ pour $j \in 1, 2$ et donc $\mathcal{I}_a^\alpha f \in L^1([a,b])$.

Théorème 2.1.2. *[11] Soit $\alpha > 0$ et soit $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite des fonctions continues uniformément convergente sur $[a,b]$, alors on peut interversion de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et de la limite Comme suit :*

$$\left(\mathcal{I}_a^\alpha \lim_{k\to\infty} f_k\right)(x) = \left(\lim_{k\to\infty} \mathcal{I}_a^\alpha f_k\right)(x)$$

En particulier, la suite $(\mathcal{I}_a^\alpha f_k)_{k=1}^{\infty}$ est uniformément convergente.

Preuve 2.1.2. *[11] Soit f la limite de la suite (f_k), il est clair que f est continue et on a l'estimation :*

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_a^\alpha f_k(x) - \mathcal{I}_a^\alpha f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^\alpha (x-t)^{\alpha-1} |f_k(t) - f(t)|\, dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_k - f\|_\infty (b-a)^\alpha \end{aligned}$$

d'où la convergence uniforme lorsque $k \to \infty$, pour $x \in [a,b]$.

Théorème 2.1.3. *[11] Soit $\alpha, \beta > 0$, pour toute fonction $f \in L^1([a,b])$, on a :*

$$\mathcal{I}_a^\alpha \mathcal{I}_a^\beta f(x) = \mathcal{I}_a^{\alpha+\beta} f(x) = \mathcal{I}_a^\beta \mathcal{I}_a^\alpha g(x) \quad (1.3)$$

pour presque tout $x \in [a,b]$, et $f \in C([a,b])$, alors (1.3) est vrai pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve 2.1.3. *[11] Soit $f \in L^1([a,b])$, on a :*

$$\mathcal{I}_a^\alpha \mathcal{I}_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left(\int_\tau^x (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau\right) dt$$

D'après le théorème (1.3), les intégrales existent et par le théorème de Fubini on a :

$$\mathcal{I}_a^{\alpha}\mathcal{I}_a^{\beta}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{\alpha}^{x} f(\tau)\left(\int_{\tau}^{x}(x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}\,dt\right)d\tau$$

En utilisant le changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_a^{\alpha}\mathcal{I}_a^{\beta}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{x} f(\tau)(x-t)^{\alpha+\beta-1}\left(\int_{0}^{1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds\right)d\tau\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{x} f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,d\tau\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{a}^{x} f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}d\tau\\ &= J_a^{\alpha+\beta}f(x)\end{aligned}$$

presque partout sur $[a,b]$.

Si $f \in C([a,b])$ *alors* $\mathcal{I}_a^{\alpha}f \in C([a,b])$ *et par suite* $\mathcal{I}_a^{\alpha}\mathcal{I}_a^{\beta}f \in C([a,b])$ *et aussi* $\mathcal{I}_a^{\alpha+\beta}f \in C([a,b])$.

Lemme 2.1.1. *[11] Soit* $\alpha > 0$, $n = [\alpha]+1$ *et* $f \in L^1(0,b)$ *pour tout* $b > 0$, *alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L est formulée comme suit :*

$$\mathcal{I}\left(\mathcal{I}_a^{\alpha}f\right)(s) = s^{-\alpha}\mathcal{I}f(s)$$

Preuve 2.1.4. *[11] On peut écrire* $\mathcal{I}_a^{\alpha}f$ *comme une convolution de deux fonctions*

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} \quad et \quad f(t)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_a^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt\\ &= \left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) * f(t)\end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{I}\left[\mathcal{I}_0^{\alpha}f\right](s) = \mathcal{I}\left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](s)\cdot\mathcal{I}f(s)$$

Comme

$$\mathcal{I}\left[x^{\alpha-1}\right](s) = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}$$

d'où le résultat.

2.2 Dérivation - Riemann-Liouville

Définition 2.2.1. *[9] : On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] &= \frac{d^n}{dt^n}\left(I_a^{n-\alpha}[f(t)]\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \quad n-1<\alpha<n, \quad n \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

Exemple 2.2.1. *[9] : Calculons la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction :*

$$f(t) = (t-a)^{\beta}, \quad \beta > -1$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}(\tau-a)^{\beta}\, d\tau\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right]\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}(t-a)^{1-\alpha+\beta}\right) \\ &= \frac{(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}(t-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, il vient :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)^{\beta}\, d\tau\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right]\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{\beta}{+}\frac{1}{2}\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)(t-a)^{\beta-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, *on a :*

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)^{\beta}\,d\tau\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)\right]\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right)\\
&= \frac{3}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1. *[9] : La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle. On a :*

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}[C] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}\,d\tau\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}[C]\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{1-\alpha}\,d\tau\right)\\
&= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}
\end{aligned}$$

Pour $C = 1$, *on a :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}[1] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

Proposition 2.2.1. *[9] : Soient* f *et* g *deux fonctions dont les dérivées fractionnaires existent. Alors pour* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on a :*

1.

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\left[\lambda f(t) + \mu g(t)\right] = \lambda\, {}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu\, {}^{RL}D_a^{\alpha}[g(t)]$$

2.

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\left[{}^{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right] \neq {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}[f(t)]$$

3.

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\left[{}^{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right] \neq {}^{RL}D_{\alpha}^{\beta}\left[{}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)]\right]$$

Lemme 2.2.1. *[9] : Soit* f *une fonction définie sur* $[a,b]$ *vérifiant* ${}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] = 0$, $\alpha \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors :

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha-h+i+1)}(t-a)^{\alpha-n+i}, \quad n=[\alpha]+1, \quad b_i \in \mathbb{R}$$

Définition 2.2.2. *[10] pour $\alpha>0$ et $f \in L^1([a,b])$, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et à droite ${}_{a/t}^{\alpha}Df$ et ${}_{t/b}^{\alpha}Df$ d'ordre α sont définies par :*

$$\begin{aligned} {}_{a/t}^{\alpha}D\, f(t) &= D^m\, J_{a/t}^{m-\alpha}\, f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \quad m=[\alpha]+1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}_{t/b}^{\alpha}D\, f(t) &= (-1)^m D^m J_{t/b}^{m-\alpha}\, f(t) \\ &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_t^b (\tau-t)^{m-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \quad m=[\alpha]+1 \end{aligned}$$

respectivement, où $[\alpha]$ est la partie entière de α.

Dans le cas où $0<\alpha<1$ on a :

$${}_{a/t}^{\alpha}D\, f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau,$$

et

$$D_{t/b}^{\alpha} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b (\tau-t)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau,$$

Exemple 2.2.2. *[10] pour $0<\alpha<1$ et $\beta>-1$, on a*

$$D_{a/t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante C est donnée par

$$D_{a/t}^{\alpha} C = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C$$

On voit que la dérivée d'une constante est non nulle.

Corolaire 2.2.1. *[10] pour $\alpha>0$ et $m=[\alpha]+1$, on a :*

$$D_{a/t}^{\alpha} f(t)=0 \Leftrightarrow f(t)=\sum_{j=1}^{m} C_j (t-a)^{\alpha-j}, \quad \forall C_1, \ldots C_m \in \mathbb{R}$$

En particulier, si $0<\alpha<1$, on a

$$D_{a/t}^{\alpha} f(t)=0 \Leftrightarrow f(t)=C(t-a)^{\alpha-1}, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Remarque 2.2.2. *: [10] pour $0 < \alpha < 1$, la fonction $C(t-a)^{\alpha-1}$ joue le même rôle pour la dérivée fractionnaire $D^{\alpha}_{a/t}f$ qu'une constante dans la dérivation usuelle. En ce qui concerne les conditions suffisantes pour l'existence des dérivées fractionnaires, nous énonçons en particulier le cas où $\alpha \in (0,1)$ dans le lemme suivant :*

Lemme 2.2.2. *[10] : Soit $f \in AC([a,b])$, alors $D^{\alpha}_{a/t}f$ et $D^{\alpha}_{t/b}f$ existent presque partout sur $[a,b]$ pour $0 < \alpha < 1$. De plus*

$$D^{\alpha}_{a/t}f,\ D^{\alpha}_{t/b}f \in L_p(a,b), \quad 1 \leq p < \frac{1}{\alpha}, et$$

$$D^{\alpha}_{a/t}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(t-a)^{\alpha}} + \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau)\, d\tau\right],$$

$$D^{\alpha}_{b/t}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-t)^{\alpha}} - \int_t^b (\tau-t)^{-\alpha} f'(\tau)\, d\tau\right].$$

Propriétés 2.2.1. *[10]*

- *Pour $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a,b])$, on a :*

$$D^{\alpha}_{a/t}\, J^{\alpha}_{a/t}f(t) = f(t),$$

  presque partout sur $[a,b]$.
- *Pour $\alpha > \beta > 0$ et $f \in L_1([a,b])$, on a :*

$$D^{\beta}_{a/t}\, J^{\alpha}_{a/t}f(t) = J^{\alpha-\beta}_{a/t}f(t),$$

  presque partout sur $[a,b]$.
- *En particulier, pour $\beta = m \in \mathbb{N}$ et $\alpha > m$, on a :*

$$D^{m}\, J^{\alpha}_{a/t}f(t) = J^{\alpha-m}_{a/t}f(t).$$

- *Pour $\alpha > 0$, $m = [\alpha]+1$, $f_{m-\alpha}(t) = J^{m-\alpha}_{a/t}f(t) et f \in ([a,b])$ telle que $f_{m-\alpha}(t) \in AC^m[a,b]$ alors on a :*

$$J^{\alpha}_{a/t}D^{\alpha}_{a/t}f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{m} \frac{f^{m-j}_{m-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(t-a)^{\alpha-j},$$

  presque partout sur $[a,b]$.
- *En particulier, pour $0 < \alpha < 1$, on a :*

$$J^{\alpha}_{a/t}D^{\alpha}_{a/t}f(t) = f(t) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1},$$

où $f_{1-\alpha}(t) = J_{a/t}^{1-\alpha} f(t)$*, tandis que pour* $\alpha = m \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$J_{a/t}^{m} D_{a/t}^{m} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

– *Si* $\alpha > 0$*,* $m \in \mathbb{N}$ *et les dérivées fractionnaires* $D_{a/t}^{\alpha} f$ *et* $D_{a/t}^{\alpha+m} f$ *existent, alors on a :*

$$D^m D_{a/t}^{\alpha} f(t) = D_{a/t}^{\alpha+m} f(t)$$

mais

$$D_{a/t}^{\alpha} D^m f(t) = D_{a/t}^{\alpha+m} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(1+j-\alpha-m)}(t-a)^{j-\alpha-m}$$

– *Pour* $\alpha > 0$ *et* $f(t), g(t) \in C([a,b])$ *telle que* $D_{a/t}^{\alpha} f(t)$ *et* $D_{t/b}^{\alpha} g(t)$ *existent et elles sont continues, alors la formule d'intégration par parties est donnée par :*

$$\int_a^b g(t) D_{a/t}^{\alpha} f(t) dt = \int_a^b f(t) D_{t/b}^{\alpha} g(t) dt$$

– *La transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann–Liouville est donnée par :*

$$\mathcal{L}\left\{D_{0/t}^{\alpha} f(t)\right\} = s^{\alpha} \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha} \left[D_{0/t}^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0}, \quad m-1 < \alpha \leq m$$

Définition 2.2.3. *[13] La dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha > 0$ *au sens de Riemann–Liouville d'une fonction* f *continue sur l'intervalle* $[a,b]$ *est donnée par :*

$${}^{RL}D_{a/t}^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I_a^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds$$

avec $n = [\alpha] + 1$*,* $t > a$*, où* $[\alpha]$ *désigne la partie entière de* α*.*

En particulier, si $\alpha = 0$*, alors :*

$${}^{RL}D^0 f(t) = f(t)$$

et si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$*, alors :*

$${}^{RL}D^n f(t) = f^{(n)}(t)$$

De plus, si $0 < \alpha < 1$*, alors* $n = 1$ *et :*

$${}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)\, ds, \quad t > a$$

Remarque 2.2.3. *[13] La dérivée fractionnaire au sens de Riemann–Liouville d'ordre* $\alpha \in]n-1, n]$*,* $n \in \mathbb{N}$*, s'obtient par une application de l'opérateur de dérivation classique d'ordre* n *suivie d'une intégration fractionnaire au sens de Riemann–Liouville d'ordre* $(n-\alpha)$*.*

Exemple 2.2.3. *[13] Soit* $0 \leqslant n-1 < \alpha \leqslant n$, $m > -1$, *et* $f(t) = (t-a)^m$, *alors on a :*

$$^{RL}D^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(t-a)^{m-\alpha}$$

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann–Liouville d'une constante k *:*

$$\begin{aligned} ^{RL}D^{\alpha}(k) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{-\alpha} k\, ds \\ &= \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{-\alpha} ds \\ &= \frac{d}{dt} I_a^{1-\alpha}(k) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{k(t-a)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\right) \\ &= \frac{(1-\alpha)k(1-\alpha)^{-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \end{aligned}$$

$$^{RL}D^{\alpha}(k) = \frac{k(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Remarque 2.2.4. *[13] La dérivée fractionnaire au sens de Riemann–Liouville d'une constante n'est pas nulle. L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann–Liouville a les propriétés suivantes :*

Proposition 2.2.2. *[13]Soient* f *et* g *deux fonctions dont les dérivées fractionnaires au sens de Riemann–Liouville existent,* $\alpha, \beta > 0$ *et* $\lambda, u \in \mathbb{R}$, *alors :*

a) $^{RL}D^{\alpha}(\lambda f(t) + ug(t)) = {}^{RL}D^{\alpha} f(t) + u^{RL}D^{\alpha} g(t)$

b) $^{RL}D^{\alpha}(I^{\beta} f(t)) = {}^{RL}D^{\alpha-\beta} f(t)$

b) l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann–Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann–Liouville ,

$$^{RL}D^{\alpha}\left(I^{\alpha} f(t)\right) = f(t)$$

Proposition 2.2.3. *[13] Soient* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $m-1 \leqslant \alpha < m$, $f \in C([a,b])$.

Si $^{RL}D^{\alpha}(f(t)) = 0$, *alors*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m}, \quad C_j \in \mathbb{R}$$

Remarque 2.2.5. *[13] : En général, la dérivation fractionnaire au sens de Riemann–Liouville ne commute pas :*

$$^{RL}D^{\alpha}\left(^{RL}D^{\beta} f(t)\right) \neq {}^{RL}D^{\beta}\left(^{RL}D^{\alpha} f(t)\right)$$

Dérivée fractionnaire des fonctions spéciales au sens de Riemann–Liouville

1) Dérivée fractionnaire de la fonction $(t-a)^\beta$:

$$\left(D^\alpha_{a+}(x-a)^\beta\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

$$D^\alpha_{a-}(x-a)^\beta(x)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(b-x)^{\beta-\alpha}$$

2) On a dérivée fractionnaire de la fonction constante :

$$(D^\alpha_{b-}C)(x)=\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$$

et

$$\left(D^\alpha_{b-}C\right)(x)=\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}$$

Démonstration 2.2.1. *[14]*

- *1). On pose :*
  - $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
  - $x\mapsto f(x)=(x-a)^\beta, \quad \beta>0$

  En effet, d'après la définition de D^α_{a+} on a :

$$\left(D^\alpha_{a_+}f\right)(x)=\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(I^{n-\alpha}_{a^+}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt$$

$$\left(I^{n-\alpha}_{a_+}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x(t-a)^\beta(x-t)^{-\alpha+n-1}dt$$

Par le changement de variable $t=x-n(x-a)$, on a $dt=-(x-a)dn$

Et alors :

$$\begin{aligned}\left(I^{n-\alpha}_{a^+}f\right)(x)&=\frac{(x-a)^{-\alpha+n-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1 n^{-\alpha+n-1}(1-n)^\beta(x-a)^\beta(x-a)dn\\&=\frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1(1-n)^\beta n^{-\alpha+n-1}\\&=\frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha}\beta(\beta+1,n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)}\\&=\frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha}\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha+n)\Gamma(n-\alpha)}\\&=\frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha+n)}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a_+}^{n-\alpha} f\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)(n+\beta-\alpha)(n+\beta-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+h-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

$$\Gamma(\beta-\alpha+n) = (\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)\cdots(\beta-\alpha+n-1)\Gamma(\beta-\alpha)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta-\alpha+n)(\beta-\alpha+n)}{(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\end{aligned}$$

D'où

$$\left(D_{a_+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

2).

$$\begin{aligned}\left(D_{a_+}^{\alpha} c\right) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a^+}^{n-\alpha} c\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{c}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt\\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt\\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{(x-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right]\\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha}\end{aligned}$$

Et d après lemme suivants :

Lemme 2.2.3. *[14] Soit $\alpha > 0$, et soit $n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{d}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha} = (n-\alpha)(n-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)(x-a)^{-\alpha}$$

on trouve

$$(D_{a^+}^{\alpha} C) = \frac{C(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Lemme 2.2.4. *: Soient $\alpha \in \mathbb{R}+$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $[\alpha] = n + t$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. Supposons que $D^{\alpha}_{a^+} f = 0$. Alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+t+\alpha-n)} (x-a)^{k+\alpha-n}$$

où les C_k sont des constantes quelconques.

Démonstration 2.2.2. *[14] comme $(D^{\alpha}_{a^+} f)(x) = 0$, alors...*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_a^{n-\alpha} f\right)(x) = 0 \Rightarrow \left(I_a^{n-\alpha} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k (x-a)^k$$

Par composition avec I^{α}_{a+} on obtient :

$$\begin{aligned}\left(I^{\alpha}_{a+} f\right)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k I^{\alpha}_{a+} \left((x-a)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (x-a)^{k+\alpha}\end{aligned}$$

En remplaçant $(I^{n}_{a+} f)(x)$ par son expression, on obtient :

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (x-a)^{k+\alpha}$$

Puis, par dérivation classique, on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{k+\alpha-n}$$

Lemme 2.2.5. *[14] soit $\alpha \geqslant 0$ et $n = [\alpha] + 1$*

Si $y(x) \in AC^n([a, b])$ alors les dérivées fractionnaires $D^{\alpha}_{a+} y$ et $D^{\alpha}_{b-} y$ existent presque partout sur $[a, b]$ et peuvent être représentées sous les formes :

$$(D^{\alpha}_{a+} y)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

et

$$(D^{\alpha}_{b-} y)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (b-x)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt$$

Corolaire 2.2.2. *[14] si* $0 \leqslant \alpha < 1$ $(\alpha \neq 0)$ *et* $y(x) \in AC[a,b]$*, alors*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{y(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{y'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right]$$

et

$$(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{y(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_x^b \frac{y'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right]$$

2.3 Dérivation au sens Caputo

[13]

L'intégrale fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle fondamental dans le développement de la théorie des dérivées fractionnaires et ses applications en mathématiques pures.

Cependant, elle présentait des difficultés dans le traitement des conditions initiales, ce qui a conduit à l'émergence de la dérivée de type Caputo comme solution alternative. Cette dernière préserve efficacement les conditions initiales des fonctions, offre une plus grande stabilité numérique et s'adapte parfaitement aux applications pratiques.

Définition 2.3.1. *: Pour une fonction* $f \in C^n([0,b])$*,* $n \in \mathbb{N}^*$*, la dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha > 0$ *au sens Caputo de* f *est définie par :*

$${}^{C}D^{\alpha}_{a}f(t) = I^{n-\alpha}_{a}\left[f^{(n)}(t)\right] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)\,ds, & n-1<\alpha<n,\ t>a \\ f^{(n)}(t), & \alpha = n \end{cases}$$

Remarque 2.3.1. *: La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre* $\alpha \in]n-1,n]$ *s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $(n-\alpha)$ *suivie d'une dérivation classique d'ordre* n*.*

Exemple 2.3.1. *1.Soit* $0 < n-1 < \alpha$*,* $m > -1$ *et* $f(x) = (x-a)^m$*, alors on a :*

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}_{a}(x-a)^m &= I^{n-\alpha}_{a}\left[\left(\frac{d^n}{dx^n}\right)(x-a)^m\right] \\
&= I^{n-\alpha}_{a}\left[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}(x-a)^{m-n}\right] \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)} I^{n-\alpha}_{a}(x-a)^{m-n} \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}\frac{\Gamma(m+1-n+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)}(x-a)^{m-\alpha}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$^{C}D^{\alpha}(x-a)^{m} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(x-a)^{m-\alpha}$$

2. La dérivée d'une fonction constante K au sens de Caputo

$$\begin{aligned} ^{C}D^{\alpha}(K) &= I^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d^{n}}{dx^{n}}\right)(K)\right] \\ &= I^{n-\alpha}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarque 2.3.2. *: La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.*

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo possède les propriétés suivantes :

Proposition 2.3.1. *{Linéarité}*
Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo existent, pour $\alpha, \beta > 0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :
a).

$$^{C}D_{a}^{\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda ^{C}D_{a}^{\alpha}[f(t)] + \mu ^{C}D_{a}^{\alpha}[g(t)]$$

Preuve 2.3.1. *On a :*

$$^{C}D_{a}^{\alpha}[f(t)] = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} {}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}([f(t)])$$

Alors :

$$^{C}D_{a}^{\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} ({}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)])$$

Comme la dérivée n-ième et l'intégrale sont linéaires, alors :

$$^{C}D_{a}^{\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} {}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}([f(t)]) + \mu \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} {}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}([g(t)])$$

$$= \lambda ^{C}D_{a}^{\alpha}[f(t)] + \mu ^{C}D_{a}^{\alpha}[g(t)]$$

Proposition 2.3.2. *Soit $\alpha \in]n-1, n[$ et $f \in C^{n}[a,b]$. Alors :*

$${}_{RL}I_{a}^{\alpha}\left[^{C}D_{a}^{\alpha}[f(t)]\right] = f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^{i}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\quad n = [\alpha] + 1$

b).

Proposition 2.3.3. *{Non commutativité}*

Lemme 2.3.1. *On suppose que* $n-1<\alpha<n$, $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ *et soit la fonction* $f(t)$ *telle que* ${}^cD^\alpha f(t)$ *existe, alors*

$$ {}^cD^\alpha D^m f(t) = {}^cD^{\alpha+m} f(t) \neq D^{m\,c}D^\alpha f(t). $$

Corolaire 2.3.1. *Supposons que* $n-1<\alpha<n$, $\beta=\alpha-(n-1)$, $0<\beta<1$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *et soit la fonction* $g(t)$ *telle que*

$$ \Big\{\ {}^cD^\alpha f(t). = {}^cD^\beta D^{n-1} f(t) \tag{2.2} $$

Preuve 2.3.2. *On remplace* β *par* α *et* $n-1$ *par* m *dans* (2.2)*, alors :*

$$ \begin{aligned} {}^cD^\beta D^{n-1} f(t) &= {}^cD^{\beta+n-1} f(t) \\ &= {}^cD^{\alpha-n-1+n-1} f(t) \\ &= {}^cD^\alpha f(t). \end{aligned} $$

Proposition 2.3.4. *[15] Si* $0\leq\alpha,\beta\leq 1$ *avec* $\alpha+\beta\leq 1$ *et* f *de classe* C^1*. Alors :*

$$ {}^cD_a^\alpha\left[cD_a^\beta[f(t)]\right] = cD_a^{\alpha+\beta} f(t) = cD_a^\beta\left[cD_a^\alpha f(t)\right]. $$

Preuve 2.3.3. *En utilisant la règle de composition des opérateurs* R_a^α *et* D_a^α*, on peut écrire :*

$$ \begin{aligned} cD_a^\alpha\left[cD_a^\beta[f(t)]\right] &= R_a^{1-\alpha}\left[cD_a^{1-\alpha}\left(R_a^{1-\beta}\left(cD_a^{1-\beta}[f(t)]\right)\right)\right] \\ &= R_a^{1-\alpha-\beta}\left[cD_a^{1-\alpha}\left(cD_a^{1-\beta}[f(t)]\right)\right] \\ &= R_a^{1-\alpha-\beta}\left[cD_a^{2-\alpha-\beta}[f(t)]\right] \\ &= cD_a^{\alpha+\beta}[f(t)]. \end{aligned} $$

Donc

$$ cD_a^\alpha\left[cD_a^\beta[f(t)]\right] = cD_a^{\alpha+\beta}[f(t)]. \tag{2.3} $$

En utilisant (2.3), on obtient :

$$ \begin{aligned} cD_a^\alpha\left[cD_a^\beta[f(t)]\right] &= cD_a^{\alpha+\beta}[f(t)] \\ &= cD_a^{\beta+\alpha}[f(t)] \\ &= cD_a^\beta\left[cD_a^\alpha[f(t)]\right] \end{aligned} $$

Proposition 2.3.5. *[15]*
Soit $\alpha \in]n-1, n]$ *et* $f \in C^n([a,b])$. *Alors*

$$nI_a^\alpha \left[cD_a^\alpha[f(t)]\right] = f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i$$

où $c_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, ..., n-1,\ n = \lfloor \alpha \rfloor + 1.$

Preuve 2.3.4. *On montre la relation de dérivation classique :*

$$I_a^n \left[f^{(n)}(t)\right] = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i.$$

Pour $n = 1$, *on a :*

$$\begin{aligned} f(t) - \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(t-a)^0 &= f(t) - f(a) \\ &= I_a^1 \left[f'(t)\right]. \end{aligned}$$

Aussi, on montre qu'elle est vraie pour $n+1$, *on pose* $h = f'$, *on aura :*

$$\begin{aligned} I_a^{n+1}\left[f^{(n+1)}(t)\right] &= I_a^1\left[I_a^n\left[h^{(n)}(t)\right]\right] \\ &= I_a^1\left[h(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i\right] \\ &= \int_a^t h(s)\,ds - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^{(j)}(a)}{(j+1)!}(t-a)^{j+1} \\ &= \int_a^t f'(s)\,ds - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(a)}{(i+1)!}(t-a)^{i+1} \\ &= f(t) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i \\ &= f(t) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i. \end{aligned}$$

En appliquant cette relation, on peut écrire :

$$\begin{aligned} nI_a^\alpha \left[cD_a^\alpha[f(t)]\right] &= nI_a^\alpha \left[I_a^{n-\alpha}[f^{(n)}(t)]\right] \\ &= I^n[f^{(n)}(t)]. \end{aligned}$$

2.3.1 Comparaison avec l'opérateur de Riemann-Liouville

Dans cette sous-section, une comparaison entre les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo sont données :

Lemme 2.3.2. *[4] : Soit $f(t)$ est une fonction telle que les deux opérateurs $D^\alpha f(t)$ et ${}^C D^\alpha f(t)$ existent, avec $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$, alors on a :*

$$D^\alpha f(t) \neq {}^C D^\alpha f(t)$$

Exemple 2.3.2. *[4] : La différentiation de la fonction constante pour l'opérateur de Caputo est :*

$${}^C D^\alpha c = 0, \quad c = const$$

$${}^C D^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} C^{(n)}(x)\, dx = 0$$

Et pour Riemann-Liouville :

$$D^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0, \quad c = const$$

Proposition 2.3.6. *[4] : Soient $n-1<\alpha<n$, alors :*

$$\lim_{\alpha\to n} D^\alpha f(t) = \lim_{\alpha\to n} {}^c D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t)$$

Remarque 2.3.3. *[4] : (commutativité) :*
Soit la fonction $f(t)$ telle que $f^{(s)}(0)=0,1,2,\ldots,m$, alors les deux dérivées fractionnaires de Riemann–Liouville et de Caputo sont commutatives avec la dérivée d'ordre m, $m\in\mathbb{N}$:

$$D^m D^\alpha f(t) = D^{\alpha+m} f(t) = D^\alpha D^m f(t)$$

$${}^C D^\alpha D^m f(t) = {}^C D^{\alpha+m} f(t) = D^m\, {}^C D^\alpha f(t)$$

Proposition 2.3.7. *[4] : Soit $f(t)$ une fonction telle que $f^{(s)}(0)=0,1,2,\ldots,n-1$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville et de Caputo coïncident, i.e. :*

$${}^C D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t)$$

2.3.2 Relation avec l'opérateur de Riemann–Liouville

Théorème 2.3.1. *[4] Soient $t>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, avec $n-1<\alpha<n\in\mathbb{N}$, alors la relation entre l'opérateur de Riemann–Liouville et de Caputo est :*

$${}^C D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0)$$

Preuve 2.3.5. *[4]*

On considère le DL en série de Taylor de la fonction f au point $t = 0$:

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{t^2}{2!}f^{(2)}(0) + \frac{t^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_{n-1}$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1}$$

avec

$$R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1}dx$$

En utilisant les propriétés d'intégration d'ordre n, on a :

$$R_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f^{(n)}(x)(t-x)^{n-1}dx = I^n f^{(n)}(t)$$

D'où, en utilisant la linéarité de l'opérateur de Riemann–Liouville :

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(t) &= D^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^\alpha t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D^\alpha R_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D^\alpha I^n f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + {}^cD^\alpha f(t)
\end{aligned}$$

Donc :

$${}^cD^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0)$$

Remarque 2.3.4. *[4] Cette formule implique que les opérateurs fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville coïncident si et seulement si $f(t)$ et en même temps que les premiers $n-1$ dérivées sont nulles au point $t = 0$.*

De même, on a le résultat suivant :

Corolaire 2.3.2. *La relation entre les dérivées fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville définie par la formule suivante :*

$$^{c}D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0)\right)$$

Preuve 2.3.6. *[4] Pour démontrer la formule, on utilise la relation de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la propriété de linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville, i.e :*

$$\begin{aligned} ^{c}D^{\alpha}f(t) &= D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}f^{(k)}(0) \\ &= D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{D^{\alpha}t^k}{k+1}f^{(k)}(0) \\ &= D^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0)\right) \end{aligned}$$

La formule de Leibniz pour les dérivées de Caputo est peu discutée dans la littérature, la corollaire suivant découle du théorème (2.3.1).

Corolaire 2.3.3. *[4] Soient $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$, si $f(t)$, $g(t)$ et toutes ses dérivées sont continues sur $[0, t]$, alors*

$$^{c}D^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(D^{\alpha-k}f(t))g^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}(f(t)g(t))^{(k)}(0)$$

Preuve 2.3.7. *[4]*

On applique consécutivement la relation :

$$^{c}D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}f^{(k)}(0)$$

et la règle de Leibniz pour la dérivée de Riemann-Liouville :

$$D^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(D^{\alpha-k}f(t))g^{(k)}(t)$$

Après, la règle de Leibniz pour les dérivées de Caputo est obtenue :

$$\begin{aligned} ^{c}D^{\alpha}(f(t)g(t)) &= D^{\alpha}(f(t)g(t)) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\left((f(t)g(t))^{(k)}(0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\left(D^{\alpha-k}f(t)\right)g^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\left((f(t)g(t))^{(k)}(0)\right) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Étude de quelques types d'équation différentielles fractionnaires

3.1 Introduction

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre les équations différentielles fractionnaires, telles que la méthode du point fixe et la transformation de Laplace. Dans ce travail, nous nous intéressons particulièrement à la méthode de la transformation de Laplace, en raison de son efficacité dans la résolution des équations linéaires et non linéaires.

3.2 Équation différentielles fractionnaires (EDF)

[17]

Définition 3.2.1. *Soit* $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ *et* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *alors :*

$$D^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \tag{3.1}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville.
De la même manière

$$^{C}D^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \tag{3.2}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo.

3.2.1 Équation différentielles fractionnaires de type Riemann-Liouville

Lemme 3.2.1. *[17] Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $y \in \mathcal{C}(0,1) \cap \mathcal{L}(0,1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville :*

$$D_{0+}^{\alpha} y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3.3}$$

admet une solution unique

$$y(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n},$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$.

Preuve 3.2.1. *Soit $\alpha > 0$. on a :*

$$D_{0+}^{\alpha} t^{\alpha-m} = 0, \quad \text{avec } m = 1, 2, \ldots, n.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (3.3), admet une solution particulière, comme

$$y(t) = C_m t^{\alpha-m}, \quad \text{avec } m = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.

Donc la solution générale de (3.3), donnée comme une somme des solutions particulières (3.4), c.-à-d.

$$y(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n},$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$.

Lemme 3.2.2. *[17] Supposons que*

$y \in \mathcal{C}(0,1) \cap \mathcal{L}(0,1)$ et $D_{0+}^{\alpha} y \in \mathcal{C}(0,1) \cap \mathcal{L}(0,1)$.

Alors :

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} y(t) = y(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}, \tag{3.5}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$.

Preuve 3.2.2. *[17]*

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $y \in \mathcal{C}(0,1) \cap \mathcal{L}(0,1)$ (Proposition 2.2.3) on a

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} y(t) = y(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(I_{0+}^{n-\alpha} y^{(n-k)})(0)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} x^{\alpha - k}$$

$$= y(t) - \left[\frac{(I_{0+}^{n-\alpha} y^{(n-1)})(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{(I_{0+}^{n-\alpha} u^{(n-2)})(0)}{\Gamma(\alpha-1)} t^{\alpha-2} + \cdots + \frac{(I_{0+}^{n-\alpha} u)(0)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} t^{\alpha - n} \right]$$

On pose

$$C_m = - \frac{(I_{0+}^{n-\alpha} y^{(n-m)})(0)}{\Gamma(\alpha - m + 1)} \in \mathbb{R}, \quad \text{pour chaque } m = 1, 2, \ldots, n,$$

on trouve l'égalité (3.5).

3.2.2 Problème de cauchy

Dans cette partie, nous discutons sur l'existence et l'unicité de solutions de problèmes de type Cauchy pour des équations différentielles fractionnaires linéaires et non linéaires au sens de Riemann-Liouville.

Problème linéaire

$$\begin{cases} D_0^{\alpha} y(t) = f(t), & \alpha > 0, \ 0 < t < T < \infty \\ (D_0^{\alpha-k} y)(0) = b_k, & b_k \in \mathbb{R}, \ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{3.6}$$

où $f(t) \in L^1(0,T)$, i.e.

$$\int_0^T |f(t)|\, dt < \infty$$

Théorème 3.2.1. *[20] Si $f(t) \in L^1(0,T)$, alors le problème (3.6) admet une solution unique $y(t) \in L^1(0,T)$.*

Preuve 3.2.3. *[20] Construisons donc une solution du problème considéré. En appliquant, à la première équation de (3.6), la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, telle que définie dans la proposition suivante :*

Proposition 3.2.1. *[20] La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :*

$$\mathcal{L}\left\{D_{0+}^{\alpha} f(t); s\right\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} D^{\alpha-k} f(0); (n-1 < \alpha < n)$$

On obtient :

$$\mathcal{L}\left\{D_{0+}^{\alpha} y\right\} = s^{\alpha} Y(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{j-1} y(0) = F(s) \tag{3.7}$$

Au $y(s)$ et $F(s)$ désignent les transformées de Laplace de $y(t)$ et $F(t)$. En s'aidant de la condition initiale introduite dans (3.6), on peut écrire :

$$y(s) = s^{-\alpha} F(s) + \sum_{j=1}^{n} s^{j-\alpha-1} b_j \tag{3.8}$$

Et la transformée de Laplace inverse donne :

$$\mathcal{L}^{-1}[y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[s^{-\alpha} F(s)] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n} s^{j-\alpha-1} b_j\right] \tag{3.9}$$

On a la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens Riemann-Liouville suivant :

$$\mathcal{L}\left[I_{0+}^{\alpha} f\right](s) = s^{-\alpha} F(s) \tag{3.10}$$

Alors :

$$y(t) = I_{0+}^{\alpha} f(t) + \sum_{j=1}^{n} b_j \mathcal{L}^{-1}\left(s^{j-\alpha-1}\right) \tag{3.11}$$

Et on a :

$$\mathcal{L}[t^{\alpha-1}](s) = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \quad (\text{notation } \mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}) \tag{3.12}$$

En utilisant la formule (3.12), on a :

$$y(t) = I_{0+}^{\alpha} f(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \tag{3.13}$$

En utilisant la règle de la différentiation fractionnaire au sens de Riemann–Liouville du fonction polynôme

$$(I_{a+}^{\alpha} t^{\alpha-j} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta})$$

on obtient :

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha} t^{\alpha-j} &= D_{a^+}^{n} I_{a^+}^{n-\alpha} t^{\alpha-j} \\ &= D_{a^+}^{n} \left(\frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(n-j+\alpha)} t^{n-2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On aura :

$$D_{a^+}^{\alpha} y(t) = D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f(t) = f(t) \tag{3.14}$$

Ce qui veut dire que notre $y(t)$ défini par (3.13) est bien solution, dans $L^1[0,T]$, de la première équation de (3.6)

Par ailleurs :

$$D_{a^+}^{\alpha-k} t^{\alpha-j} = \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(k-j+1)} t^{k-j}$$

Alors, de (3.13) on a :

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha-k} y(t) &= D_{a^+}^{\alpha-k} I_{0^+}^{\alpha} f(t) + D_{a^+}^{\alpha-k} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j t^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \\ &= I_{0^+}^{k} f(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j t^{k-j}}{\Gamma(k-j)} \\ &= I_{0^+}^{k} f(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j t^{k-j}}{(k-j)!} \end{aligned}$$

D'où

$$\left[D_{a^+}^{\alpha-k} y(t) \right]_{t=0} = b_k,$$

c'est-à-dire que les conditions initiales introduites dans (3.6) est bien vérifiée. Par conséquent la fonction construite $y(t)$ est solution du problème (3.6). Reste à montrer l'unicité de cette dernière. Pour cela, posons :

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions dans $L^1(0,T)$ du problème (3.6), et donc $z(t)$ sera solution du problème suivant :

$$\begin{cases} D_0^{\alpha} z(t) = 0 \\ \left[D_0^{\alpha-k} z\right](0) = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

En appliquant la transformée de Laplace dans les deux membres de la première équation (3.15) on obtient :

$$z(s) = \mathcal{L}\left\{z(t)\right\}(s) = 0$$

et donc $z(t) = 0$ pour presque tout $t \in (0, T)$, ce qui prouve que la solution $y(t)$ est l'unique solution dans $L^1(0, T)$ du problème (3.6).

Problème non linéaire

Le Modèle non linéaire d'équation différentielle d'ordre fractionnaire α, ($\mathrm{Re}(\alpha) > 0$) sur un intervalle fini $[a, b]$ de l'axe réel $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ est de la forme :

$$D_{a^+}^{\alpha} y(t) = f\left(t, y(t)\right), \tag{3.16}$$

Avec les conditions initiales :

$$\left[D_{a^+}^{\alpha-k} y\right](a^+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.17}$$

Dans l'espace $L^{\alpha}(a, b)$ défini pour $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\mathrm{Re}(\alpha) > 0$) par :

$$L^{\alpha}(a, b) = \left\{f \in L^1(a, b)\,;\, D_{a^+}^{\alpha} y \in L^1(a, b)\right\} \tag{3.18}$$

où $n = [\alpha] + 1$ pour $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$. La notation

$$\left(D_{0^+}^{\alpha-k} y\right)(a^+)$$

signifie que la limite est prise à presque tous les points du voisinage de côté droit de $(a, a + \varepsilon)(\varepsilon > 0)$ comme suit :

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(a^+) = \lim_{t \to a^+} \left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(t), \quad (1 \leq k \leq n - 1) \tag{3.19}$$

$$(D_{a^+}^{\alpha-n} y)(a^+) = \lim_{t \to a^+} \left(I_{a^+}^{n-\alpha} y\right)(t), \quad (\alpha \in n); \quad (D_{a^+}^{0} y)(a^+) = y(a), \quad (\alpha = n) \tag{3.20}$$

En particulier.

Si $\alpha = n$ puis, conformément aux (3.20) le problème dans (3.10) - (3.11) est réduit au problème usuel de Cauchy pour l'équation différentielle ordinaire d'ordre $n \in \mathbb{N}$.

$$D^{\alpha}y(t) = f\left[t, y(t)\right], \quad y^{(n-k)}(a) = b_k$$

$$b_k \in \mathbb{C} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Quand $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$, le problème (3.16) -(3.17) prend la forme

$$D^{\alpha}_{a+}y(t) = f\left[t, y(t)\right], \quad \left(I^{n-\alpha}_{a+}y\right)[a] = b, \quad (b \in \mathbb{C})$$

Et aussi on peut écrivez un problème de type Cauchy sous la forme

$$D^{\alpha}_{a+}y(t) = f[t, y(t)], \quad \lim_{t \to a^+}(t-a)^{1-\alpha}y(t) = c \quad (c \in \mathbb{C})$$

3.2.3 Équation différentielles fractionnaires de type caputo

Lemme 3.2.3. *[17] Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $y \in C(0,1) \cap L(0,1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo :*

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}y(t) = 0, \tag{3.21}$$

admet une solution unique

$$y(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1}t^{n-1},$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Preuve 3.2.4. *[17] Soit $\alpha > 0$, on a :*

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}t^m = 0, \quad pour\ m = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (3.21), admet une solution particulière, comme

$$y(t) = C_m t^m, \quad pour\ m = 0, 1, 2, \dots, n-1. \tag{3.22}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.

Donc la solution générale de (3.21), donnée comme une somme des solutions particulières (3.22), c.-à-d.

$$y(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1}t^{n-1}. \tag{3.23}$$

Lemme 3.2.4. *[17] Supposons que $y \in C^n([0,1])$. Alors :*

$$\mathbb{I}^{\alpha}_{0+}\,{}^{C}D^{\alpha}_{0+}y(t) = y(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1}t^{n-1},$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

3.2.4 Problème aux limites

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires sont devenues incontournables dans la modélisation des systèmes physiques à mémoire ou à dynamique complexe. Parmi les définitions courantes des dérivées fractionnaires, celle de Caputo est particulièrement utile lorsque les conditions initiales ou aux limites sont exprimées sous une forme classique.

Dans cette section, nous nous intéressons à un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire d'ordre $\alpha \in (1, 2)$, au sens de Caputo, que nous étudions dans deux cas :

- Problème linéaire
- Problème non linéaire

L'étude repose exclusivement sur la transformée de Laplace.

Problème linéaire

[18]

Formulation du problème

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} y(t) = f(t), \quad t \in (0, T), \quad 1 < \alpha < 2 \\ y(0) = 0, \\ y(T) = 0 \end{cases}$$

Théorème 3.2.2. *[18] [19]*

Si $f \in L^1(0, T)$, alors le problème admet une solution unique donnée par :

$$y(t) = I^{\alpha} f(t) - \frac{I^{\alpha} f(T)}{T} \cdot t$$

Preuve 3.2.5. *[18] On applique la transformée de Laplace comme dans :*

$$\mathcal{L}({}^C D^{\alpha} y(t))(s) = s^{\alpha} Y(s) - s^{\alpha-1} y(0) - s^{\alpha-2} y'(0)$$

Avec $y(0) = 0$, on obtient :

$$Y(s) = \frac{F(s) + s^{\alpha-2} y'(0)}{s^{\alpha}}$$

Par transformée inverse comme dans :

$$y(t) = I^{\alpha} f(t) + y'(0) \cdot t$$

Et avec $y(T) = 0$, on a :

$$y'(0) = -\frac{I^{\alpha} f(T)}{T} \Rightarrow y(t) = I^{\alpha} f(t) - \frac{I^{\alpha} f(T)}{T} \cdot t$$

Problème non linéaire

[16] [19]

Formulation du problème

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0+} y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (0, T), \quad 1 < \alpha < 2 \\ y(0) = 0, \quad y(T) = 0 \end{cases}$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Théorème 3.2.3. *[16] [19]*

Si $f(t, y) \in C([0, T] \times \mathbb{R})$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est bornée, alors le problème admet une solution unique :

$$y(t) = I^{\alpha} f(t, y(t)) - \frac{I^{\alpha} f(T, y(T))}{T} \cdot t$$

Preuve 3.2.6. *Même principe que le cas linéaire :*

$$s^{\alpha} Y(s) - s^{\alpha-2} y'(0) = \mathcal{L}\{f(t, y(t))\} \Rightarrow Y(s) = \frac{F(s) + s^{\alpha-2} y'(0)}{s^{\alpha}}$$

Par transformée inverse :

$$y(t) = I^{\alpha} f(x, y(x)) + y'(0) \cdot x$$

Avec $y(T) = 0$:

$$y'(0) = -\frac{I^{\alpha} f(T, y(T))}{T} \Rightarrow y(x) = I^{\alpha} f(x, y(x)) - \frac{I^{\alpha} f(T, y(T))}{T} \cdot x$$

D'après ce qui précède, nous en déduisons que

- **Dans le cas linéaire** :
  l'équation fractionnaire est de la forme
  $$D^{\alpha}y = f(t)$$
  et sa solution explicite est :
  $$y(t) = I^{\alpha}f(t) - \frac{I^{\alpha}f(T)}{T}x$$
- **Dans le cas non linéaire** :
  l'équation est de la forme
  $$D^{\alpha}y = f(t, y(t))$$
  et sa solution explicite est :
  $$y(t) = I^{\alpha}f(t, y(t)) - \frac{I^{\alpha}f(T, y(T))}{T}t$$

3.3 Exemple d'application

3.3.1 Résolution d'un équation différentielle fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Dans cette sous-section, nous allons explorer quelques exemples d'équations différentielles fractionnaires simples de Riemann-Liouville.

Exemple 3.3.1. *[21]*

Considérons le problème de Riemann-Liouville suivant :

$$\begin{cases} D^{2}y(t) + D^{\frac{2}{3}}y(t) = 1 + t, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Laplace on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + \frac{p^2Y(p) - py(0) - y'(0)}{p^{\frac{1}{2}}} + Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \\
&\Rightarrow \quad p^2Y(p) - p - 1 + \frac{p^2Y(p) - p - 1}{p^{\frac{1}{2}}} + Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \\
&\Rightarrow \quad p^2Y(p) - y'(0) - py(0) - py(0) + p^{\frac{3}{2}}Y(p) - p^{\frac{1}{2}}y(0) - p^{-}\frac{1}{2}y(0) + Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \\
&\Rightarrow \quad p^2Y(p) - 1 - p + p^{\frac{3}{2}}Y(p) - p^{\frac{1}{2}} - p^{-}\frac{1}{2} + Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \\
&\Rightarrow \quad Y(p)(p^2 + p^{\frac{3}{2}} + 1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + 1 + p^{\frac{1}{2}} + p^{-}\frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \quad Y(p)(p^2 + p^{\frac{3}{2}} + 1) = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)(p^2 + p^{\frac{3}{2}} + 1) \\
&\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}
\end{aligned}$$

En utilisant la transformée inverse des deux côtés, on obtient la solution :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(p)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)](x) = 1 + t.$$

3.3.2 Résolution d'un équation différentielle fractionnaire au sens caputo

Dans cette sous-section, nous allons explorer deux exemples d'équations différentielles fractionnaires de Caputo.

Exemple 3.3.2. *Soit l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$${}^{c}D_0^{\frac{2}{3}}y(t) = cy(t)$$

c étant une constante réelle.

En appliquant la transformée de Laplace, on aura :

$$\mathcal{L}[D_0^{\frac{2}{3}}y(t)] = \mathcal{L}[cy(t)]$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow p^{\frac{2}{3}}Y(p) - p^{\frac{2}{3}-0-1}y^{(0)}(0) = cY(p) \\
&\Rightarrow p^{\frac{2}{3}}Y(p) - p^{-\frac{1}{3}}y(0) = cY(p) \\
&\Rightarrow Y(p)(p^{\frac{2}{3}} - c) = p^{-\frac{1}{3}}y(0) \\
&\Rightarrow Y(p) = y(0)\frac{p^{-\frac{1}{3}}}{p^{\frac{2}{3}} - c}
\end{aligned}$$

En appliquant la transformée inverse pour trouver la solution finale :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[y(0)\frac{p^{-\frac{1}{3}}}{p^{\frac{2}{3}} - c}\right]$$

Avec $(\alpha = \frac{2}{3}, \alpha - \beta = -\frac{1}{3}, \beta = 1)$*, d'après le tableau on obtient :*

$$y(t) = y(0)E_{\frac{2}{3}},(cx^{\frac{2}{3}})$$

Exemple 3.3.3. *On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$${}^{c}D^{\frac{4}{3}}y(t) = 0$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$y(0) = y'(0) = 1.$$

En appliquant la transformée de Laplace, on obtient :

$$\mathcal{L}\left[{}^{c}D^{\frac{4}{3}}y(t)\right] = 0$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow p^{\frac{4}{3}}Y(p) - p^{\frac{4}{3}-0-1}y^{(0)}(0) - p^{\frac{4}{3}-1-1}y^{(1)}(0) = 0 \\
&\Rightarrow p^{\frac{4}{3}}Y(p) - p^{\frac{1}{3}}y(0) - p^{-\frac{2}{3}}y'(0) = 0 \\
&\Rightarrow Y(p) = \frac{p^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{4}{3}}} + \frac{p^{-\frac{2}{3}}}{p^{\frac{4}{3}}} \\
&\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}
\end{aligned}$$

En appliquant la transformée inverse, on aura :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = \frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{t}{\Gamma(2)} = 1 + t.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons abordé certaines notions fondamentales du calcul fractionnaire, notamment les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo. Nous avons appliqué la transformée de Laplace pour résoudre des équations différentielles fractionnaires associées au problème de Cauchy et au problème aux limites, dans les cas linéaire et non linéaire. Cette étude nous a permis d'analyser l'existence et l'unicité des solutions, et a mis en évidence l'importance de cette approche dans le traitement des équations à caractère fractionnaire.

Références

[1] PODLUBNY, Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications, vol. 198. Elsevier, 1998.

[2] BELL, W. W. Special Functions for Scientists and Engineers. Dover Publications, 2004.

[3] KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. M., and TRUJILLO, J. J . Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[4] BENAISSA, A. Quelques propriétés et applications de l'opérateur fractionnaire de Caputo [Mémoire de Master]. Spécialité Géométrie Différentielle, Université Tahar Moulay, Saïda, 2017.

[5] WAFFI, M. K. Gamma (Γ) and Beta (β) Functions. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2020.

[6] MERZOUG, I. Sur des problèmes aux limites avec des dérivées fractionnaires mixtes [Thèse de Doctorat]. Université Badji Mokhtar, Annaba, 2020.

[7] MILICI, C., Di PAOLA, M., et PIRRTOTTA, A. Introduction to Fractional Differential Equations. Springer, 2019.

[8] SPIGEL, M.R.Theory and Problems of Laplace Transformes. Schaum Publishing Co, NEW YORK, 1965, Vi+261 pp.

[9] BENKAHLA, C. Équations différentielles au sens de Caputo-Hadamard. Mémoire de Master, Spécialité Modélisation, Contrôle et Optimisation, Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem, 2022.

[10] BEXKAI, A.Étude de quelques types d'équations différentielles fractionnaires. Thèse de Doctorat, Option Mathématiques Appliquées, Université Larbi Tébessi - Tébessa, s.d.

[11] HAMMADI, D. Calcul fractionnaire et ses applications aux problèmes aux limites. Mémoire de Master, Option Modélisation et Analyse Numérique, Université Kasdi Merbah - Ouargla, 2017.

[12] HOUMOR, T. Analyse du chaos dans un système d'équations différentielles fractionnaires. Thèse de Doctorat, Département de Mathématiques, Université Constantine 1, 2014.

[13] TABLENNEHAS, K. Équations différentielles fractionnaires selon Caputo et Hadamard : existence, unicité et UH-stabilité. Thèse de Doctorat, Option Calcul Fractionnaire, Université Abdelhamid Ben Badis - Mostaganem, 2023.

[14] TILLOULINI, A. Sur la dérivée fractionnaire du Caputo et application sur les équations différentielles fractionnaires. Mémoire de Master, Spécialité Analyse Fonctionnelle et Applications, Université d'Adrar, s.d.

[15] UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAAMA KHÉMIS-MILIANA. Calcul fractionnaire (M) : dérivées fractionnaires au sens de Caputo, dérivées à gauche/droite, opérations et composition. Cours en ligne, Plateforme Moodle UDBKM, 2024.

[16] Agarwal, R. P., & O'Regan, D. A survey on fractional boundary value problems for Caputo derivatives. Advances in Difference Equations, **1**, 60. (2014).

[17] Arioua, Y. Introduction au calcul fractionnaire et application, [Mémoire de Master, Université Mohamed Boudiaf de M'Sila]. Université Mohamed Boudiaf de M'Sila, Algérie.(2022).

[18] El-Sayed, A. M. A., Soleiman, N., & Al-Dweikat, T. Existence and uniqueness results for fractional boundary value problems with Caputo derivatives. Journal of Mathematical Analysis and Applications, **449**(1), 536–548.(2017).

[19] Jleli, M., & Samet, B. Caputo fractional BVPs : Linear and nonlinear cases using Laplace transform. Fractional Calculus and Applied Analysis, **19**(6), 1503–1520.(2016).

[20] Medjenouine, C. Transformée de Laplace de l'intégrale et la dérivée fractionnaire et applications, [Mémoire de Master, Université de Aïn Témouchent]. Université de Aïn Témouchent, Algérie.(2022).

[21] Toumi, N. Existence et unicité de la solution d'une équation fractionnaire [Mémoire de Master, Université Abbès Laghrour de Khenchela]. Université Abbès Laghrour de Khenchela, Algérie. Dirigé par Hakkar, N.(2023).