الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالــي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf Mila

المركـز الجامعي
عبد الحفيظ بوالصوف ميلـة

Institut des Mathématiques et Informatique
Numéro de série : …………………
Numéro d'inscription : M140/2022

Département de Mathématiques
Filière : ***Mathématiques***
Spécialité : Mathématiques appliquées

www.centre-univ-mila.dz

Thèse

présentée pour l'obtention du Diplôme de

Doctorat

troisième cycle (LMD)

Analyse dynamique et numérique d'un système non linéaire chaotique

Présentée par: Daas Khadidja

Encadré par: Hamri Nasr-eddine

Jury :

N°	Nom & Prénom	Grade	Université	Désignation
1	Kaouache Smail	M.C.A.	Centre universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila	Président
2	Hamri Nasr-eddine	Professeur	Centre universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila	Rapporteur
3	Dalah Mohamed	Professeur	Université des frères Mentouri Constantine 1	Examinateur
4	Benkara Mostefa Mohamed Cherif	M.C.A.	Université des frères Mentouri Constantine 1	Examinateur
5	Laouira Widad	M.C.A	Centre universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila	Examinateur

Année universitaire : 2024 /2025

Dédicace

Je souhaite dédier ce travail à :

Mes chers parents

Ma chère famille, mon époux et mes enfants adorés

Mes sœurs et frères bien-aimés

La famille de mon mari

Et tous ceux qui ont une position particulière dans mon cœur

Remerciements

Grâce à la volonté d'Allah, le Tout-Puissant et Miséricordieux, et par Sa grâce, ce travail a été accompli.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à M. Hamri Nasreddine, professeur au Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila, sous la direction duquel j'ai eu l'honneur de travailler. Il m'a proposé ce sujet et m'a offert sa confiance et son soutien à chaque étape. Ses précieux conseils et sa bienveillance au cours de ces années m'ont permis de mener ce travail dans les meilleures conditions.

Je souhaite également exprimer ma sincère gratitude à Dr. Ait Kaki Leila, pour son soutien indéfectible, ses encouragements et sa foi en mes capacités, ce qui a renforcé ma détermination à poursuivre mes recherches scientifiques. Ces quelques mots ne suffisent pas à exprimer toute ma reconnaissance.

Je remercie profondément Dr. Kaouache Smail, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Mes remerciements vont aussi aux membres du jury : Pr. Dalah Mohamed, Dr. Benkara Mostefa Mohamed Cherif, et Dr. Laouira Widad, qui ont bien voulu examiner mon travail et participer à cette évaluation.

Je tient à remercier tous les enseignants du département de mathématiques du Centre Universitaire - Mila, ainsi que ceux de l'École Normale Supérieure Assia Djebar - Constantine, pour leurs efforts précieux.

Je tiens également à remercier mon cher mari, dont le soutien et l'encouragement ont eu un impact considérable sur ma motivation et mon parcours tout au long de cette période. Ses encouragements ont toujours été une source de force pour moi.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à mes chers parents, car aucune phrase de remerciement ne saurait exprimer toute ma reconnaissance envers eux. Je ne peux pleinement mesurer l'ampleur de leur soutien, qui a été essentiel à la réussite de cette thèse.

Enfin, je remercie également tous les membres de ma famille, mes amis et mes collègues, qui m'ont soutenue et encouragée sans exception tout au long de ce travail.

ملخص

تتناول هذه الأطروحة دراسة شاملة للأنظمة الديناميكية الفوضوية وتطبيقاتها في مجالي الأمن السيبراني والتفاعلات البيولوجية. تهدف الدراسة إلى استغلال خصائص الفوضى في توليد الأعداد العشوائية وتطبيقها في تقنيات التشفير الحديثة، مما يسهم في تعزيز حماية البيانات الرقمية والاتصالات السرية، بالإضافة إلى تحليل تأثير تغيرات المقياس الزمني على استقرار النظم البيئية.

في مجال الأمن السيبراني، تمت دراسة نموذج لتشفير الصور يعتمد على نظامي لورنز وروسلر لتوليد أعداد صحيحة عشوائية فوضوية (CRINs) ، مع استخدام عملية XOR لتحقيق تشفير فعال. كما تتضمن الأطروحة ابتكار نظام لتشفير وفك تشفير الاتصالات الصوتية باستخدام نظام فوضوي رباعي اللوالب، مبرمج بلغة Python، يمكن تثبيته على أجهزة متعددة للتواصل الآمن، مما يمثل تطورا مهما في تأمين الاتصالات.

أما في مجال التفاعلات البيولوجية، تركز الأطروحة على دراسة ديناميكيات النظم البيئية المكونة من ثلاث مستويات غذائية (فريسة - مفترس - مفترس أعلى). تم تحليل تأثير تغيرات المقياس الزمني على استقرار النظام، حيث أظهرت النتائج أن وجود مدارات هوموكلينية في النظام الفرعي (فريسة - مفترس) يؤدي إلى مضاعفة الدورة وظهور سلوك فوضوي في النظام الكامل.

تجمع الأطروحة بين الجوانب النظرية والتطبيقية للأنظمة الفوضوية، مما يساهم في تحسين الأمن السيبراني وفهم أعمق للظواهر البيولوجية.

الكلمات المفتاحية: الأنظمة الديناميكية الفوضوية، التشفير، توليد الأعداد العشوائية، النظم البيئية.

Abstract

This thesis provides an in-depth study of chaotic dynamic systems and their applications in the fields of cybersecurity and biological interactions. The study aims to exploit the properties of chaos to generate random numbers and apply them in modern encryption techniques, thereby enhancing the protection of digital data and secure communications, while also analyzing the impact of temporal scale variations on the stability of ecological systems.

In the field of cybersecurity, a model for image encryption has been studied using the Lorenz and Rössler systems to generate chaotic random integer numbers (CRINs), with the use of the XOR operation to achieve effective encryption. The thesis also includes the innovation of a system for encrypting and decrypting voice communications using a four-loop chaotic system, programmed in Python, which can be installed on multiple devices for secure communication, representing a significant advancement in communication security.

In the field of biological interactions, the thesis focuses on studying the dynamics of ecosystems consisting of three trophic levels (prey - predator - super-predator). The impact of temporal scale variations on system stability was analyzed, showing that the presence of homoclinic orbits in the prey-predator subsystem leads to period doubling and the emergence of chaotic behavior in the overall system.

This thesis combines both theoretical and applied aspects of chaotic systems, contributing to improving cybersecurity and providing a deeper understanding of biological phenomena.
Keywords: Chaotic dynamical systems, encryption, random number generation, ecosystem.

Résumé

Cette thèse présente une étude approfondie des systèmes dynamiques chaotiques et de leurs applications dans les domaines de la cybersécurité et des interactions biologiques. L'objectif de l'étude est d'exploiter les propriétés du chaos pour générer des nombres aléatoires et les appliquer dans les techniques de cryptage modernes, contribuant ainsi à renforcer la protection des données numériques et des communications secrètes, tout en analysant l'impact des variations de l'échelle temporelle sur la stabilité des systèmes écologiques.

Dans le domaine de la cybersécurité, un modèle de chiffrement d'images a été étudié utilisant les systèmes de Lorenz et de Rössler pour générer des nombres entiers aléatoires chaotiques (CRINs), avec l'utilisation de l'opération XOR pour assurer un cryptage efficace. La thèse inclut également le développement d'un système de chiffrement et de déchiffrement des communications vocales utilisant un système chaotique à quatre-scroll, programmé en Python, qui peut être installé sur plusieurs appareils pour une communication sécurisée, représentant ainsi une avancée importante dans la sécurisation des communications.

Dans le domaine des interactions biologiques, la thèse se concentre sur l'étude de la dynamique des écosystèmes composés de trois niveaux alimentaires (proie - prédateur - super-prédateur). L'impact des variations de l'échelle temporelle sur la stabilité du système a été analysé, montrant que la présence d'orbites homoclines dans le sous-système (proie-prédateur) conduit à un doublement de la période et à l'émergence d'un comportement chaotique dans le système global.

Cette thèse combine les aspects théoriques et appliqués des systèmes chaotiques, contribuant à améliorer la cybersécurité et à offrir une compréhension plus approfondie des phénomènes biologiques.

Mots Clée : Systèmes dynamiques chaotiques, cryptage, génération de nombres aléatoires, écosystèmes.

Table des matières

Table des figures i

Liste des tableaux iv

Introduction Générale 1

1 Concepts fondamentaux sur les systèmes dynamiques 4

1.1 Introduction 4
1.2 Définition d'un système dynamique 4
1.2.1 Système autonome 5
1.2.2 Système non autonome 6
1.3 Evolution d'un système dynamique 7
1.3.1 L'espace de phase 7
1.3.2 Points d'équilibre 7
1.3.3 Catégorisation des points d'équilibres 8
1.4 Analyse des systèmes dynamiques 14
1.4.1 Systèmes dynamiques linéaires 14
1.4.2 Linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires 15
1.4.3 Systèmes dissipatifs 17
1.4.4 Systèmes conservatifs 18
1.4.5 Conséquence des systèmes dissipatifs 19
1.5 Stabilité aux sens Lyapunov 19
1.5.1 Les principes fondamentaux 19
1.5.2 Méthode indirecte de Lyapunov 21
1.5.3 Méthode directe de Lyapunov 22
1.6 Bifurcation 23
1.6.1 Introduction aux bifurcations 23
1.6.2 Bifurcations dans les modèles continus 24
1.6.3 Bifurcations de Hopf dans les modèles continu 30

1.7 Conclusion 31

2 Théorie du chaos **33**

2.1 Introduction 33

2.2 Définitions et théorèmes 33

2.3 Types d'attracteur 34

2.3.1 les attracteurs réguliers 34

2.3.2 Les attracteurs étranges 36

2.4 Caractéristique de la dynamique des systèmes chaotiques 37

2.5 Identification du chaos 38

2.5.1 Les exposants de Lyapunov 38

2.5.2 Conclusion 40

2.6 Les transitions vers le chaos 40

2.6.1 Cascade de doublements de période 41

2.6.2 L'intermittence 41

2.6.3 La quasi-périodicité 41

2.7 Conclusion 42

3 Étude dynamique des systèmes dynamiques chaotiques **43**

3.1 Introduction 43

3.2 Systeme de Lorenz 44

3.2.1 Formulation 44

3.2.2 Points Fixes 47

3.2.3 Analyse de la stabilité 47

3.2.4 Bifurcations 50

3.2.5 Ensembles d'attraction étranges 53

3.2.6 Remarques 56

3.2.7 Simulations numériques 57

3.3 Système de Rössler 61

3.3.1 Présentation du modèle 61

3.3.2 Calcul des points d'équilibres 63

3.3.3 Stabilité des points d'équilibres 64

3.3.4 Bifurcation 66

3.3.5 Projection $x - y$ du système de Rössler 67

3.3.6 L'attracteur de Rössler 68

3.4 Système chaotique à quatre-scroll 69

3.4.1 Structure algébrique du système 70

3.4.2 Analyse dynamique du système . . . 70
3.5 Conclusion . . . 73

4 Applications du cryptage utilisant les systèmes dynamiques 75
4.1 Introduction . . . 75
4.2 Cryptage d'images en utilisant deux systèmes chaotiques : Lorenz et Rössler 76
4.2.1 Concepts de base en informatique . . . 76
4.2.2 Génération de nombres aléatoires en utilisant les systèmes de Rössler et de Lorenz . . . 78
4.2.3 Le modèle de cryptage proposé . . . 80
4.2.4 Résultats de la simulation . . . 81
4.3 Cryptage des communications . . . 83
4.3.1 Défis de la cybersécurité . . . 83
4.3.2 Développement d'un système de chiffrement audio utilisant un système chaotique à quatre-scroll . . . 84
4.3.3 Application pratique du programme de cryptage et décryptage audio 86
4.4 Conclusion . . . 87

5 Utilisation de la segmentation temporelle pour mettre en évidence le chaos dans les systèmes dynamiques 89
5.1 Introduction . . . 89
5.2 Modèle de réseau alimentaire à trois niveaux . . . 90
5.2.1 Modèle sans dimension . . . 90
5.2.2 Reformulation du modèle à trois espèces . . . 91
5.3 Analyse linéaire et caractéristiques dynamiques . . . 92
5.3.1 Points d'équilibre . . . 92
5.3.2 Analyse de la stabilité . . . 92
5.4 Comportement des sous-systèmes . . . 95
5.5 Analyse Dynamique du Chaos . . . 99
5.5.1 Exposants de Lyapunov . . . 99
5.5.2 Transition progressive vers le chaos . . . 99
5.6 Conclusion . . . 100

Conclusion Générale 102

Bibliographie 104

Table des figures

1.1 Trajectoire et espace de phase d'un nœud stable, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase. 9
1.2 Trajectoire et espace de phase du nœud stable pour l'exemple 1, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase. 10
1.3 (a) Nœud étoile, (b) Nœud dégénéré stable. 11
1.4 Représentation graphique d'un foyer stable et d'un foyer instable. 12
1.5 Espace de phase d'un foyer stable. 12
1.6 Représentation graphique de la trajectoire et de l'espace de phase du foyer stable pour l'exemple 3, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase. 13
1.7 Représentation graphique de la trajectoire et de l'espace de phase d'un point selle, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase. 14
1.8 Représentation graphique de la trajectoire et de l'espace de phase de point selle pour l'exemple 4, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase. 15
1.9 Représentation graphique de la trajectoire et de l'espace de phase d'un point centre (a) Trajectoire, (b) Espace de phase. 16
1.10 Représentation graphique de la trajectoire et de l'espace de phase de point centre pour l'exemple 5, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase. 17
1.11 Diagramme de bifurcation d'un point selle 26
1.12 Interprétation du diagramme de bifurcation, chaque tranche verticale du diagramme représente l'espace des phases du système pour une valeur particulière du paramètre. 27
1.13 Diagramme d'une bifurcation transcritique. 27
1.14 Diagramme d'une bifurcation en fourche supercritique. 28
1.15 Diagramme d'une bifurcation en fourche sous critique. 28
1.16 Diagramme de bifurcation montrant l'hystérésis 29

3.1 Comportement stable du système pour différentes valeurs des paramètres et des conditions initiales , (a) : Stable, $\gamma = (9/10, 10, 8/3)$, $x_0 = (-10, 10, 5)$, (b) : Stable, $\gamma = (9/10, 10, 8/3)$, $x_0 = (2, 3, -4)$, (c) : Stable, $\gamma = (9/10, 1, 100)$, $x_0 = (2, 3, -4)$, (d) : Stable, $\gamma = (9/10, 30, 100)$, $x_0 = (100, -200, 50)$. . . . 58

3.2 $x_0 = (1.e - 4, 0, 1)$, (a) : $\gamma = (9/10, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (99/100, 10, 8/3))$. . . 59

3.3 $x_0 = (1.01, 0, 1)$, (a) : $\gamma = (9/10, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (1.2, 10, 8/3))$. 59

3.4 Courbes rouges avec des points : $x_0 = (1 \times 10^{-16}, 1 \times 10^{-16}, 1 \times 10^{-16})$. Courbe bleue continue : $x_0 = (1 \times 10^{-16}, -1 \times 10^{-16}, 1 \times 10^{-16})$, (a) : $\gamma = (13.92655741, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (13.92655742, 10, 8/3)$ 60

3.5 Graphiques de la coordonnée y en fonction du temps : Vert en tirets : $x_0 = (10^{-16}, -10^{-16}, 10^{-16})$, Bleu continu : $x_0 = (10^{16}, 10^{-16}, 10^{-16})$. (a) : $\gamma = (13.92655741, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (13.92655742, 10, 8/3)$. 60

3.6 $\gamma = (13.92655741, 10, 8/3)$, (a) : $x_0 = (-10, 0, 0)$, (b) : $x_0 = (0, 0, 10)$. . . . 61

3.7 $x_0 = (1, 2, -4)$, (a) : $\gamma = (15, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (24, 10, 8/3)$. 61

3.8 $x_0 = (1, 2, -4)$, (a) : $\gamma = (15, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (24, 10, 8/3)$. 62

3.9 Mettre en évidence la grande sensibilité aux conditions initiales dans le système de Lorenz, (a) Avec deux conditions initiales différentes, y en fonction du temps sur l'intervalle de 0 à 30, (b) Avec deux conditions initiales différentes, y en fonction du temps sur l'intervalle de 100 à 200. 62

3.10 Mettre en évidence le comportement chaotique du système de Lorenz avec deux conditions initiales différentes, (a) $x_0 = (1, 1, 1)$, (b) $x_0 = (30, -25, 1)$. 63

3.11 Diagrammes de bifurcation du système de Rössler, (a) Pour a varié, (b) Pour b varié, (c) Pour c varié. 67

3.12 Projection du système de Rössler sur le plan $x - y$ pour différents paramètres c. 68

3.13 Représentation des projections de l'attracteur chaotique de Rossler sur les trois plans 69

3.14 Représentation 3D de l'attracteur chaotique de Rössler 69

3.15 Analyse des exposants de Lyapunov et de la sensibilité aux conditions initiales dans le système chaotique à quatre-scroll, (a) Exposants du Lyapunov, (b) Séries temporelles de la variable x pour $x_0 = 1$ (Bleu) et $x_0 = 1.00001$ (Rouge). 72

3.16 Représentation des projections de l'attracteur chaotique à quatre-scroll sur les trois plans 73

3.17 Représentation 3D de l'attracteur chaotique à quatre-scroll 73

4.1 Le schéma-bloc proposé pour le cryptage des images en couleur. 80

4.2 Comparaison entre l'image originale et l'image cryptée. (a) : Image originale, (b) : Histogramme de l'image originale, (c) : Corrélation verticale de l'image originale, (d) : Image cryptée, (e) : Histogramme de l'image cryptée, (f) : Corrélation verticale de l'image cryptée 82
4.3 Le signal sonore d'origine 86
4.4 Le signal sonore crypté 87
4.5 Le signal sonore décrypté 87

5.1 Deux trajectoires convergeant vers des attracteurs périodiques différents, (a) Trajectoire pour $\beta_1 = 0.7$, $\beta_2 = 0.49$, point initial $=(0.2, 0.1, 0)$, (b) Trajectoire pour $\beta_1 = 0.7$, $\beta_2 = 0.49$, point initial $=(0.3, 0.1, 0.001)$. 95
5.2 Les fréquences de x_1, x_2, et x_3 en fonction du temps 96
5.3 (a) Projection de la trajectoire dans le plan x_1x_2, (b) Projection de la trajectoire dans le plan x_2x_3, (c) Projection de la trajectoire dans le plan x_1x_3. 96
5.4 Les dynamiques des sous-systèmes : (a) Une représentation schématique du cycle lent-intermédiaire-rapide pour $\beta_1 = 0.005$ et $\beta_2 = 0.0035$, (b) La dynamique des systèmes intermédiaires pour $c = 0.1$, $\beta_1 = 0.1$ et $\beta_2 = 0$. . . 98
5.5 (a) Exposants de Lyapunov pour $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, (b) Exposants de Lyapunov pour $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.05$. 99
5.6 La bifurcation par doublement de période en fonction des variations de β_1 et β_2 : (a) Période 1 pour $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = 1$, (b) Période 2 pour $\beta_1 = 0.25$ et $\beta_2 = 0.125$, (c) Période 4 pour $\beta_1 = 0.2$ et $\beta_2 = 0.1$, (d) Chaos pour $\beta_1 = 0.1$ et $\beta_2 = 0.05$. 100

Liste des tableaux

1.1 Nature des points d'équilibre en fonction des valeurs propres 8

1.2 Résumé de l'analyse de bifurcation de $\frac{dx}{dt} = r - x^2$. 25

5.1 Variables et paramètres sans dimensions. 90

5.2 Tableau des points d'équilibre, matrices jacobiennes et valeurs propres. . . 93

5.3 Valeurs des paramètres. 93

5.4 Résultats de l'étude de stabilité pour le système dynamique pour deux valeurs de c_5. 94

Introduction Générale

L'étude des systèmes dynamiques a connu une évolution significative au fil du temps, avec des scientifiques cherchant à comprendre des phénomènes naturels complexes et apparemment imprévisibles. Ce domaine a pris un tournant majeur avec la découverte d'Edward Lorenz en 1963, lors de ses recherches sur les systèmes météorologiques. Lorenz a observé que des variations infimes des conditions initiales pouvaient entraîner des divergences importantes dans les résultats, donnant naissance au concept de « l'effet papillon », devenu un symbole du chaos. Dès lors, la théorie du chaos est apparue comme une branche des mathématiques étudiant les systèmes dynamiques non linéaires qui exhibent un comportement complexe et imprévisible mais régi par des lois déterministes [23, 32].

L'une des caractéristiques fondamentales des systèmes chaotiques est leur sensibilité extrême aux conditions initiales, ce qui les rend particulièrement adaptés à l'analyse de phénomènes non prédictibles. Cette propriété a conduit à des applications variées, notamment dans le domaine de la cryptographie. Avec l'évolution technologique et l'importance croissante des données numériques, assurer la sécurité des informations est devenu primordial. Grâce à leur complexité et leur comportement imprévisible, les systèmes chaotiques sont utilisés pour générer des nombres pseudo-aléatoires essentiels dans la conception de systèmes de cryptage modernes [4, 62]. Ces dernières décennies, l'utilisation des systèmes chaotiques dans la cryptographie a progressé rapidement, intégrant des algorithmes capables de protéger efficacement les données sensibles, en particulier dans le chiffrement d'images et de fichiers confidentiels [13, 15].

En outre, les modèles chaotiques trouvent des applications dans l'étude des systèmes écologiques, comme les chaînes alimentaires. Ces systèmes présentent des interactions complexes entre les différentes espèces d'un écosystème, influencées par des facteurs comme les changements climatiques et l'activité humaine. Les modèles chaotiques permettent d'analyser la dynamique de ces systèmes, d'évaluer leur stabilité et de prédire les effets des perturbations. Cette analyse joue un rôle crucial dans la gestion durable des ressources naturelles [32].

Cette thèse porte sur l'étude des systèmes dynamiques chaotiques, tant sur le plan théorique qu'applicatif, avec un accent particulier sur leur rôle dans la cryptographie et l'étude des chaînes alimentaires. Elle est structurée en cinq chapitres interconnectés.

Le premier chapitre traite des concepts fondamentaux des systèmes dynamiques. Il introduit les systèmes dynamiques et leur rôle dans la compréhension des phénomènes naturels, tout en explorant l'évolution des systèmes dans le temps à travers l'espace des phases. Ce chapitre met en avant les points fixes, les cycles limites et les bifurcations, tout en examinant la stabilité des systèmes via l'indicateur de Lyapunov. Il différencie également les systèmes linéaires et non linéaires, en soulignant leurs comportements ordonnés ou chaotiques [44].

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie du chaos, en examinant les caractéristiques des systèmes chaotiques telles que la sensibilité aux conditions initiales, l'absence de périodicité et les attracteurs étranges (Strange Attractors). Les bases mathématiques des systèmes chaotiques y sont abordées, avec des exemples emblématiques comme les systèmes de Lorenz et de Rössler, tout en explorant leurs applications pratiques [34, 43, 59].

Le troisième chapitre offre une analyse approfondie des systèmes chaotiques. Il explore des modèles mathématiques particuliers présentant un comportement chaotique, en étudiant leurs points fixes et bifurcations à l'aide de méthodes mathématiques rigoureuses [6, 25]. Des représentations tridimensionnelles de l'espace des phases sont également présentées pour illustrer la dynamique des systèmes [8].

Le quatrième chapitre se concentre sur les applications pratiques du chaos dans le domaine de la cryptographie. Il explique comment les systèmes chaotiques peuvent générer des nombres pseudo-aléatoires pour les algorithmes de chiffrement [5, 29, 33]. Les systèmes de Lorenz, Rössler, et le système de quatre-scroll sont analysés comme modèles clés pour ces applications. Des exemples pratiques de chiffrement des données et des images sont fournis, avec une évaluation de l'efficacité de ces systèmes face aux tentatives de décryptage. En complément, un programme en Python a été développé pour chiffrer les messages vocaux entre deux appareils, exploitant la dynamique des systèmes chaotiques pour générer des signaux sécurisés. Les détails de cet algorithme et du fonctionnement du programme sont présentés.

Enfin, le cinquième chapitre explore l'utilisation de techniques de partition temporelle dans l'étude du chaos [11]. Ces techniques permettent d'identifier les régions chaotiques dans les systèmes dynamiques, facilitant ainsi la compréhension des transitions entre les comportements ordonnés et chaotiques. Elles sont appliquées à des modèles mathématiques pour évaluer leurs propriétés et leur performance dans la détection du chaos [9, 32, 63].

Cette thèse vise à fournir une compréhension globale des systèmes dynamiques chaotiques, tant au niveau théorique que pratique. En combinant analyse théorique et étude expérimentale, elle apporte une contribution scientifique à l'étude du chaos et à ses applications en cryptographie et en écologie.

Chapitre 1

Concepts fondamentaux sur les systèmes dynamiques

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre consiste à présenter les principaux éléments essentiels pour analyser le comportement d'un système dynamique, en mettant l'accent sur le temps continu. Les concepts tels que la trajectoire, l'orbite, etc. sont introduits. Par la suite, les questions qualitatives sont étudiées : elles offrent la possibilité d'observer le comportement des solutions sans avoir à résoudre l'équation différentielle du système [61]. Quelques concepts concernant la stabilité des systèmes dynamiques sont rappelés, notamment dans le cadre de la théorie de Lyapunov [46]. La méthode d'analyse d'une bifurcation consiste à étudier les valeurs des paramètres qui influencent le comportement du système en jeu. À la fin du chapitre, nous abordons les diverses formes de bifurcations en utilisant des illustrations graphiques.

1.2 Définition d'un système dynamique

Définition 1.1. Un système dynamique est un modèle qui décrit l'évolution temporelle d'un ensemble d'objets en interaction. Il est défini par un triplet (X, T, f) :

— **Espace d'état** X : Représente l'ensemble des états possibles du système. Chaque état est une configuration complète des variables décrivant le système à un instant donné.

— **Domaine temporel** T : Indique la dimension temporelle le long de laquelle le système évolue. Il peut être continu (temps réel) ou discret (temps échantillonné).

— **Application de transition d'état** $f : X \times T \to X$: C'est une fonction qui décrit comment l'état du système change au cours du temps. À partir d'un vecteur de conditions initiales, cette fonction permet de déterminer l'état du système à tout instant futur.

La dynamique du système peut être soit **continue** soit **discrète** :

— **Système continu** : Le système évolue de manière continue au fil du temps. Les équations différentielles sont souvent utilisées pour modéliser ces systèmes. Par exemple, le mouvement d'un pendule est décrit par des équations différentielles qui prennent en compte les forces agissant sur le pendule à chaque instant. Par exemple : **Mouvement d'un projectile**.
  - Espace d'état X : Position et vitesse du projectile.
  - Domaine temporel T : Continu.
  - Application de transition f : Les équations de la cinématique et de la dynamique.

— **Système discret** : Le système évolue à des intervalles de temps distincts. Les équations en différences ou les fonctions de transition discrètes sont utilisées pour modéliser ces systèmes. Un exemple typique est la croissance d'une population où les changements sont calculés à des intervalles de temps spécifiques, comme chaque année ou chaque mois. Par exemple : **Système de files d'attente** :
  - Espace d'état X : Nombre de personnes dans la file.
  - Domaine temporel T : Discret (par exemple, les minutes ou les secondes).
  - Application de transition f : Règles de transition basées sur les arrivées et les départs des personnes.

Les systèmes dynamiques sont utilisés dans de nombreux domaines pour modéliser et comprendre le comportement de systèmes complexes au fil du temps, permettant ainsi de prédire leur évolution future et de prendre des décisions éclairées.

Définition 1.2. Un système dynamique est une application continue $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :

1. $f(\cdot, x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue,
2. $f(t, \cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ est continue,
3. $f(0, x) = x$,
4. $f(t+s, x) = f(t, f(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

1.2.1 Système autonome

1.2.1.1 Définition du système autonome

Définition 1.3. Un système autonome est un système dynamique où les lois du mouvement ou de la transformation ne dépendent pas directement du temps. En d'autres termes, le système est entièrement défini par son état actuel sans référence à un instant spécifique. L'équation différentielle décrivant un système autonome peut être écrite comme suit :

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

où :

— x est la variable représentant l'état.

— $f(x)$ est une fonction qui dépend uniquement de l'état actuel x.

1.2.1.2 Caractéristiques du système autonome

— **Indépendance temporelle** : La fonction de transformation f ne dépend pas du temps t.

— **Comportement indépendant du temps** : Le comportement du système dépend uniquement de l'état actuel et non du temps.

— **Stabilité** : L'analyse de la stabilité peut être effectuée sans prendre en compte les variations temporelles.

Par exemple : L'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = -kx$, où k est une constante, est un système autonome car $f(x) = -kx$ ne dépend pas du temps.

1.2.2 Système non autonome

1.2.2.1 Définition du système non autonome

Définition 1.4. Un système non autonome est un système dynamique où les lois du mouvement ou de la transformation dépendent directement du temps. En d'autres termes, les transformations et les changements dans le système dépendent du temps ainsi que de l'état actuel. L'équation différentielle décrivant un système non autonome peut être écrite comme suit :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

où :

— x est la variable représentant l'état.

— $f(x, t)$ est une fonction qui dépend de l'état actuel x et du temps t.

1.2.2.2 Caractéristiques du système non autonome

— **Dépendance temporelle** : La fonction de transformation f dépend du temps t.

— **Comportement variable dans le temps** : Le comportement du système peut changer avec le temps, même si l'état actuel reste constant.
— **Complexité de l'analyse** : L'analyse et la stabilité sont plus complexes en raison de la dépendance temporelle.

Par exemple : L'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = -kx + \cos(t)$ est un système non autonome car $f(x,t) = -kx + \cos(t)$ dépend du temps.

1.3 Evolution d'un système dynamique

1.3.1 L'espace de phase

L'espace de phase constitue un outil graphique fréquemment employé en dynamique des systèmes afin de dépeindre l'évolution d'un système en fonction de ses variables d'état. Chaque point à l'intérieur de cet espace symbolise un état spécifique du système, caractérisé par un ensemble de coordonnées représentant les valeurs des variables d'état à un moment précis. Pour un système dynamique avec n variables d'état, l'espace de phase est un espace de dimension n. Par exemple, dans le cas d'un système à deux variables d'état x et y, l'espace de phase peut être défini comme un plan à deux dimensions où chaque point (x, y) correspond à un état spécifique du système. La progression du système au fil du temps peut être représentée sous forme d'une trajectoire dans l'espace des phases. Les trajectoires illustrent l'évolution des variables d'état au cours du temps, offrant ainsi une représentation visuelle des différents scénarios comportementaux du système. Pour conclure, l'utilisation de l'espace de phase s'avère être un instrument efficace dans l'analyse et la représentation du comportement des systèmes dynamiques, permettant ainsi d'obtenir des informations précieuses sur la stabilité et les différents modes de fonctionnement envisageables [43].

1.3.2 Points d'équilibre

Définition 1.5. Un point fixe dans l'espace de phase est un état où le système reste indéfiniment s'il commence dans cet état. Mathématiquement, un point fixe x^* satisfait $f(x^*) = 0$, où f est la fonction définissant le système dynamique. L'étude des points fixes et de leur stabilité est cruciale pour comprendre le comportement à long terme du système.

1.3.3 Catégorisation des points d'équilibres

Penchons-nous sur le système linéaire d'ordre deux $\dot{X} = AX$ dans le cas où le système linéaire possède un unique point d'équilibre. Par conséquent, il est possible de catégoriser ces systèmes en se basant sur deux critères :

1. En termes de stabilité, on distingue : les attracteurs ou les points stables, les répulseurs ou les points instables, les points selles ou les cols.
2. En se basant sur les oscillations, on peut distinguer les éléments suivants : les foyers, les centres et les cycles limites, les nœuds.

Pour résoudre le système $\dot{X} = AX$, nous commençons par déterminer le point critique en résolvant l'équation $\dot{X} = 0$. Ensuite, nous calculons les valeurs propres de la matrice A afin d'identifier la nature et la classification de ce point critique. Les résultats sont résumés dans le tableau 1.1.

Valeurs propres	Condition	Nature de l'origine
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$	$\lambda_0 > 0$	Étoile ou nœud dégénéré instable
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$	$\lambda_0 < 0$	Étoile ou nœud dégénéré stable
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	–	Point selle
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	–	Nœud instable
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	–	Nœud stable
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$\alpha < 0$	Foyer stable
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$\alpha > 0$	Foyer instable
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$\alpha = 0$	Centre

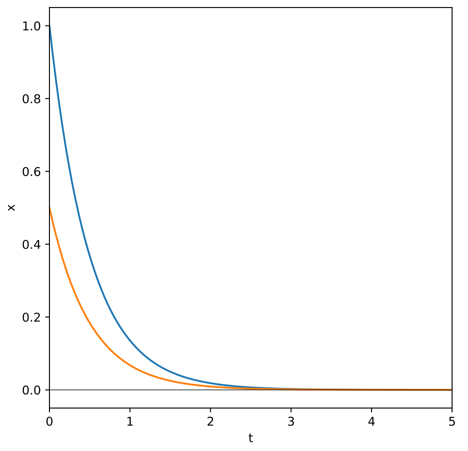
Tableau 1.1: Nature des points d'équilibre en fonction des valeurs propres

1.3.3.1 Nœud stable

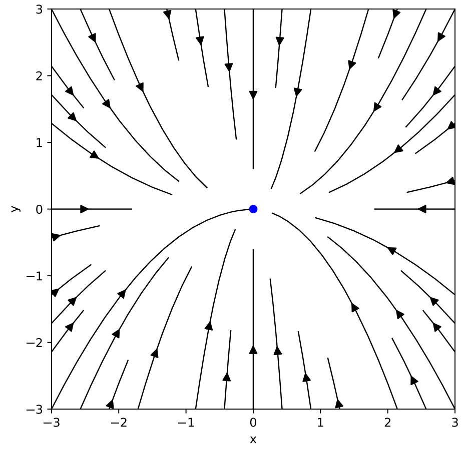
La figure 1.1 représente la structure globale d'un nœud stable. Il est observé que, à partir de divers états initiaux, la trajectoire converge vers le point d'équilibre (x, y). Ainsi, il est affirmé que ce point constitue un nœud stable. Lorsque toutes les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre, on qualifie ce dernier de nœud instable.

Exemple 1. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$



(a)



(b)

Figure 1.1: Trajectoire et espace de phase d'un nœud stable, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase.

Le point fixe de ce système est caractérisé par une dynamique nulle :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x = 0 \\ \dot{y} = -2y = 0 \end{cases}$$

Cela implique :

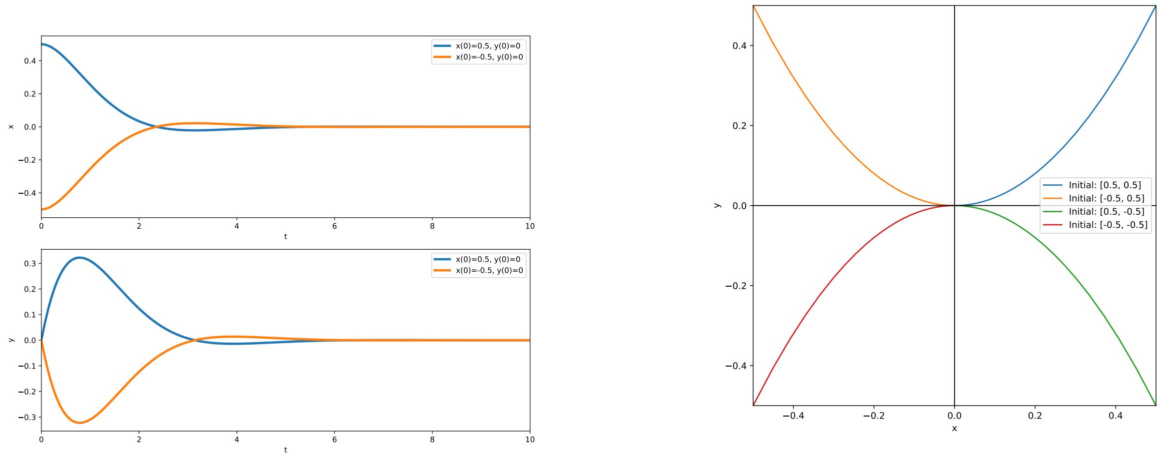
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi, le point d'équilibre est défini par $(x^*, y^*) = (0, 0)$. Les valeurs propres de la matrice du système sont réelles et négatives, avec $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2$. Nous étudions les trajectoires et le portrait de phase de l'espace (x, y) en considérant quatre conditions initiales : Les points de coordonnées $(x(0), y(0))$ sont donnés par les paires suivantes : $(0.5, 0.5); (-0.5, -0.5); (-0.5, 0.5); (0.5, -0.5)$. Il est observé que la trajectoire de chaque cas converge systématiquement vers le point d'équilibre $(x^*, y^*) = (0, 0)$, indiquant ainsi la stabilité de ce point, les résultats sont illustrés dans la figure 1.2.

1.3.3.2 Nœud stable dégénéré et nœud en étoile

Les valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ (où $\lambda_0 < 0$) signalent la présence d'un nœud étoile ou d'un nœud dégénéré stable.

- **Nœud étoile**



(a) **(b)**

Figure 1.2: Trajectoire et espace de phase du nœud stable pour l'exemple 1, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase.

Un nœud étoile apparaît dans le cas où la matrice A est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2. soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

Par conséquent,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Alors $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

- **Nœud stable dégénéré**

  Un nœud stable dégénéré apparaît dans le cas où la matrice A n'est pas diagonale. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

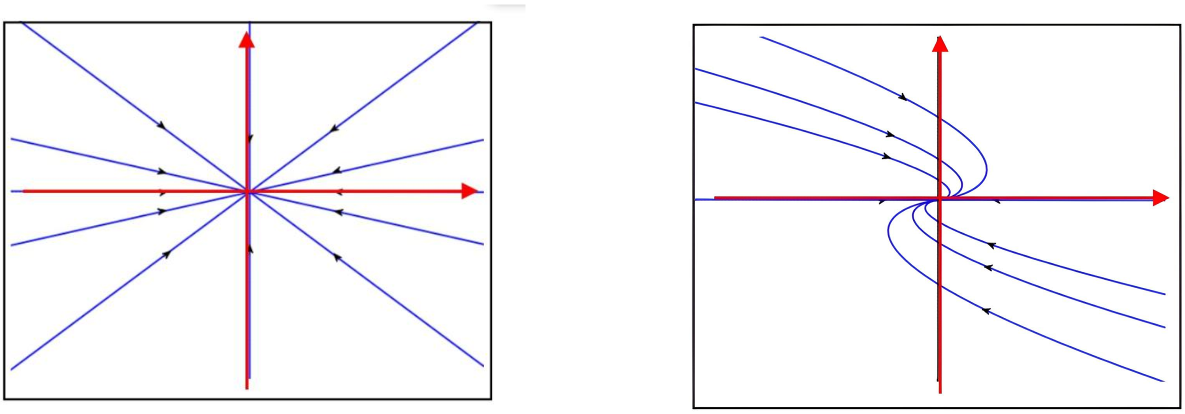
Dans cette situation, bien que les valeurs propres restent identiques, la structure de la matrice influence le comportement du système dynamique, transformant un nœud étoile en un nœud dégénéré stable. Analysons alors le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

Par conséquent,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Alors $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.
La figure 1.3 illustre la représentation graphique d'un nœud stable et d'un nœud dégénéré stable.



(a) **(b)**

Figure 1.3: (a) Nœud étoile, (b) Nœud dégénéré stable.

1.3.3.3 Foyer stable

Dans les figures 1.4 et 1.5, les solutions se manifestent sous forme de spirales qui s'éloignent du point d'équilibre (l'origine étant un foyer instable, également appelé spirale répulsive) ou qui convergent vers le point d'équilibre (l'origine étant un foyer stable, également appelé spirale attractive).

Exemple 3. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$$

Le même point d'équilibre que dans l'exemple précédent est obtenu. En utilisant les mêmes conditions initiales, les résultats (portrait de phase et trajectoires) sont obtenus dans les figures 1.6. Les valeurs propres sont imaginaires avec des parties réelles négatives : $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i$.

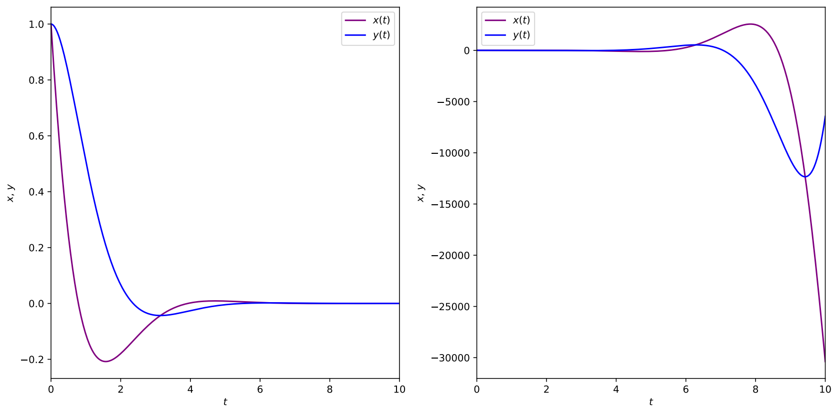


Figure 1.4: Représentation graphique d'un foyer stable et d'un foyer instable.

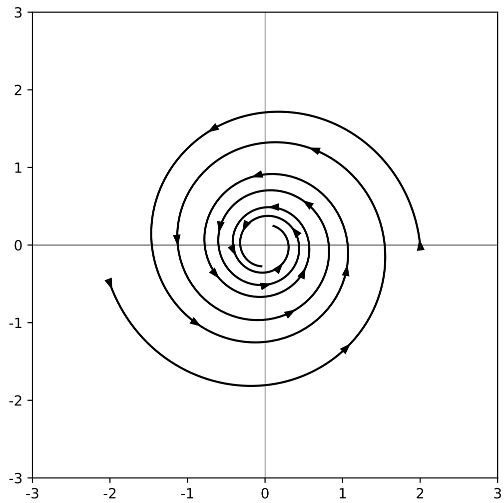


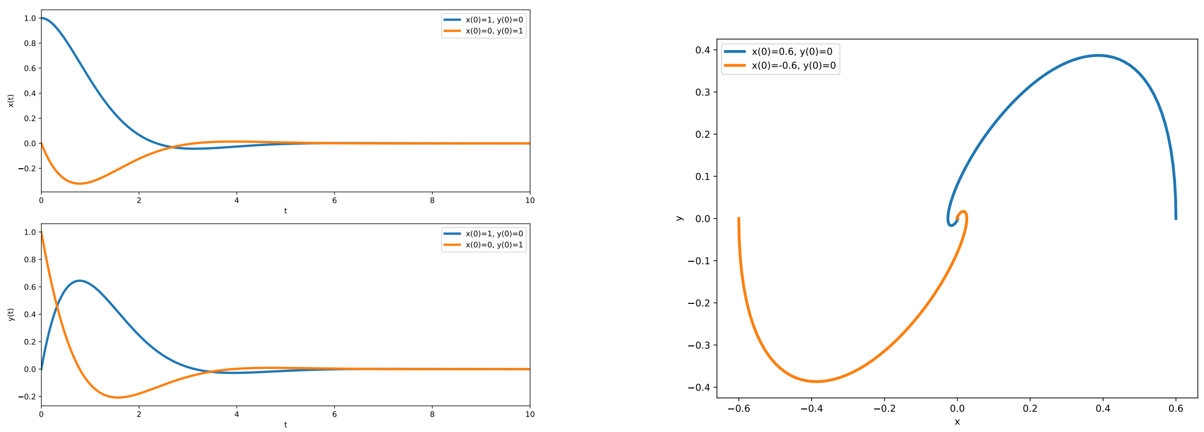
Figure 1.5: Espace de phase d'un foyer stable.

1.3.3.4 Point selle

Un point-selle est caractérisé par deux axes distincts, appelés séparatrices, qui divisent le plan en quatre régions présentant des dynamiques de trajectoires différentes. La figure 1.7 montre une représentation graphique de la trajectoire et de l'espace de phase associés à un point-selle. Le point rouge indique la position correspondante sur le graphe de la fonction liée à ce point-selle unique.

Exemple 4. Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$



(a) **(b)**

Figure 1.6: Représentation graphique de la trajectoire et de l'espace de phase du foyer stable pour l'exemple 3, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase.

Le point d'équilibre $(x^*, y^*) = (0, 0)$ est classé comme un point selle. Les trajectoires proches de cet équilibre dessinent une forme semblable à une selle de cheval (voir la figure 1.8). La matrice associée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

possède des valeurs propres réelles, distinctes et de signes opposés ($\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$).

1.3.3.5 Point centre

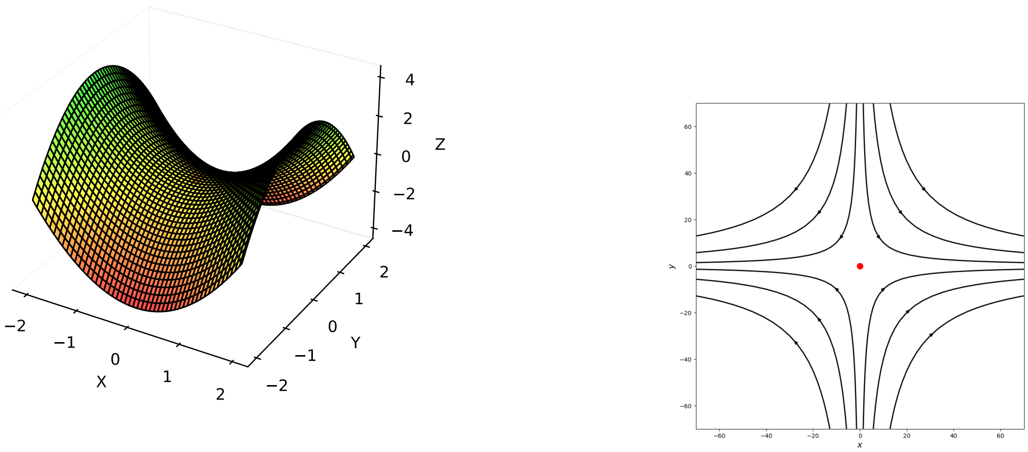
Dans cette situation, les trajectoires correspondant à différentes conditions initiales présentent des oscillations autour du point d'équilibre. De même, dans l'espace de phase, on observe des trajectoires formant des cercles concentriques autour de ce point, comme l'illustre la figure 1.9. Dans ce cas,on dit que l'origine est un centre.

Exemple 5. considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Les conditions initiales restent identiques à celles des exemples précédents. Dans ce cas, l'espace de phase se compose de cercles superposés en raison de la linéarité du système, et les trajectoires décrivent des oscillations sinusoïdales autour du point d'équilibre, comme indiqué dans la figure 1.10.

Les valeurs propres sont exclusivement imaginaires, les valeurs propres sont $\lambda = 1 \pm j$.



(a) (b)

Figure 1.7: Représentation graphique de la trajectoire et de l'espace de phase d'un point selle, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase.

1.4 Analyse des systèmes dynamiques

1.4.1 Systèmes dynamiques linéaires

Considérons le système dynamique linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n$$

où A est une matrice constante. La solution de cette équation différentielle peut être trouvée en utilisant la fonction exponentielle matricielle, et la solution est donnée par :

$$x(t) = e^{At}x_0$$

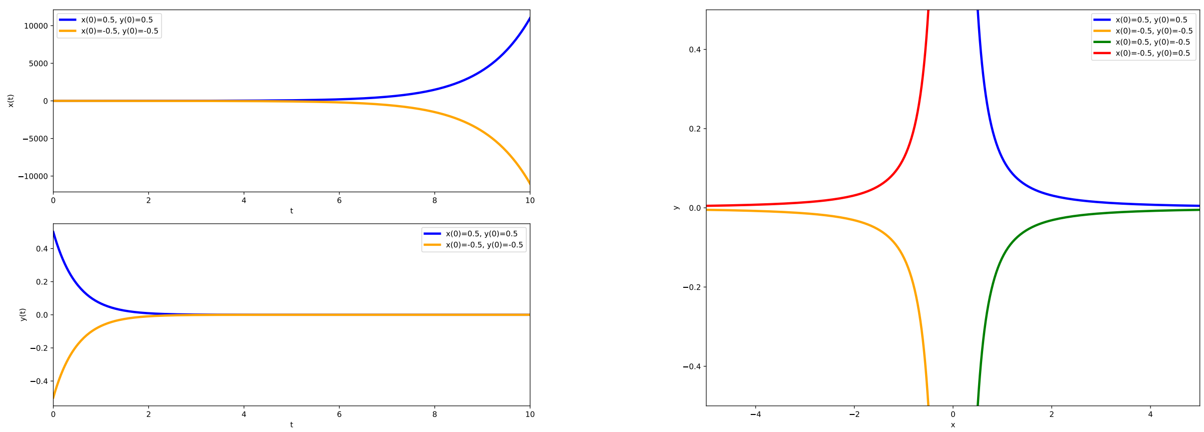
Ce système définit une application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui associe à chaque $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$ la relation suivante :

$$f(t, x) = e^{At}x$$

Cette application vérifie les quatre propriétés requises pour un système dynamique.



(a) **(b)**

Figure 1.8: Représentation graphique de la trajectoire et de l'espace de phase de point selle pour l'exemple 4, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase.

1.4.2 Linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires

Pour les systèmes dynamiques non linéaires, il est possible de les approcher par des systèmes linéaires autour des points d'équilibre afin de mieux comprendre leur comportement dans ces régions. Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x), \quad x(0) = x_0$$

Un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre du système si $f(x^*) = 0$. À ce point, le système reste au repos en l'absence de perturbations.

Pour obtenir une approximation linéaire de ce système autour d'un point d'équilibre x_0, où $f(x_0) = 0$, nous effectuons un développement en série de Taylor de $f(x)$ autour de x_0 :

$$f(x) \approx f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

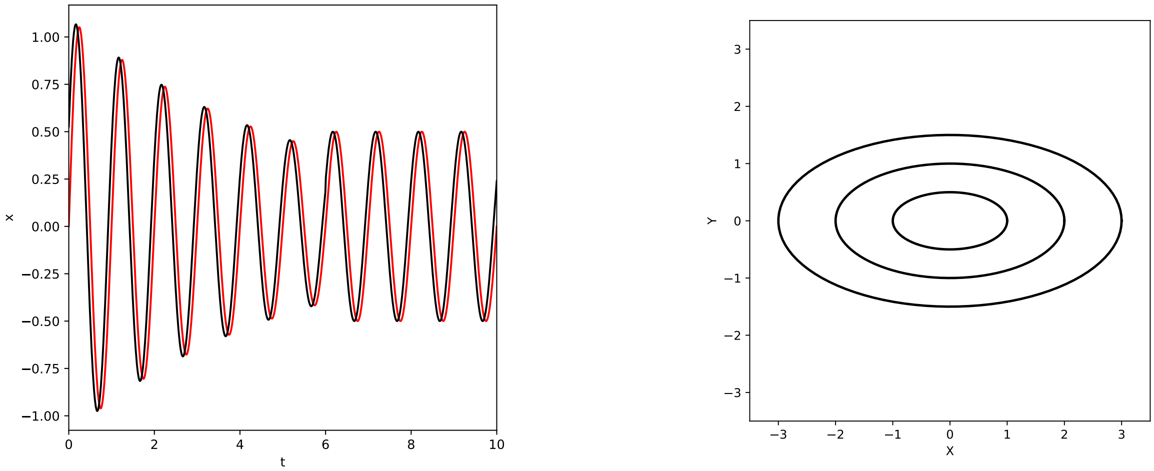
Puisque $f(x_0) = 0$, nous obtenons le système linéaire approximatif :

$$\dot{x}(t) \approx Df(x_0)(x - x_0)$$

où $Df(x_0)$ est la matrice jacobienne de la fonction f au point x_0. Cette matrice A est définie par $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)$, où $1 \leq i, j \leq n$. Le système linéaire résultant est :

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

. Cette approximation permet d'étudier la stabilité du système non linéaire et son com-



(a) **(b)**

Figure 1.9: Représentation graphique de la trajectoire et de l'espace de phase d'un point centre (a) Trajectoire, (b) Espace de phase.

portement à proximité des points d'équilibre en utilisant les outils mathématiques des systèmes linéaires.

1.4.2.1 Variété stable

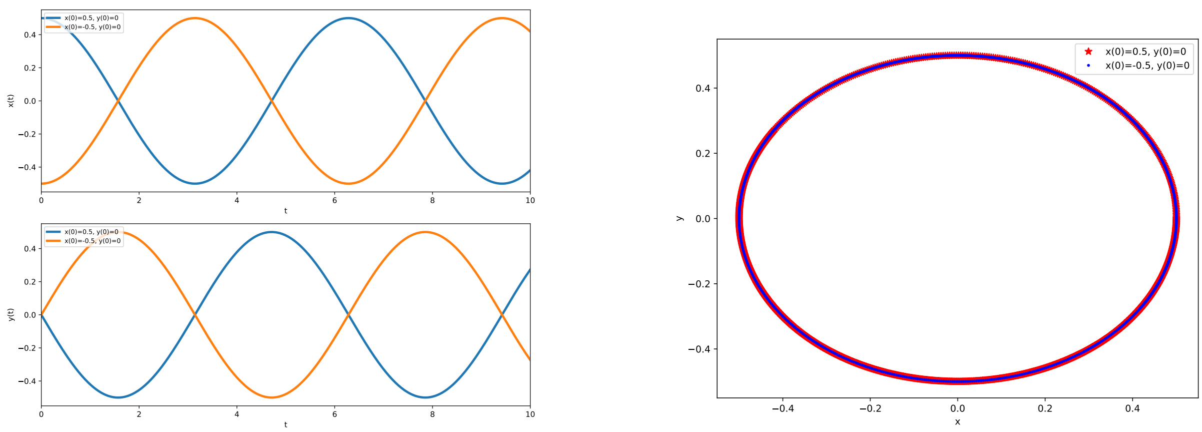
Lorsque la partie réelle d'une valeur propre λ du Jacobien est négative ($\mathrm{Re}(\lambda) < 0$), les perturbations dans la direction du vecteur propre correspondant diminuent de manière exponentielle au fil du temps. La variété stable représente l'ensemble des directions selon lesquelles les perturbations s'atténuent progressivement avec le temps.

1.4.2.2 Variété instable

Lorsqu'une valeur propre λ du Jacobien présente une partie réelle positive ($\mathrm{Re}(\lambda) > 0$), les perturbations dans la direction du vecteur propre correspondant connaissent une croissance exponentielle au fil du temps. La variabilité instable se réfère à l'ensemble des orientations où les perturbations croissent progressivement.

Exemple 6. Prenons en considération le système :

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + ay.$$



(a) **(b)**

Figure 1.10: Représentation graphique de la trajectoire et de l'espace de phase de point centre pour l'exemple 5, (a) Trajectoire, (b) Espace de phase.

Le point fixe est $(0, 0)$. La matrice jacobienne au point fixe est :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice J sont déterminées par les racines de l'équation caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 - a\lambda + 1 = 0.$$

Les solutions sont :

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

En fonction de a, nous pouvons déterminer les variétés stables et instables.

1.4.3 Systèmes dissipatifs

Les systèmes dissipatifs sont définis par la présence de forces dissipatives, telles que la friction ou la résistance de l'air, entraînant une dissipation d'énergie progressive. Au sein de ces systèmes, il y a une diminution progressive de l'énergie totale, ce qui indique une conversion de l'énergie mécanique en chaleur ou en d'autres formes d'énergie non mécanique. Ainsi, il est courant que le flux ne soit pas bijectif, ce qui entraîne la présence fréquente d'un ou de plusieurs attracteurs dans l'espace des phases du système. Un exemple classique d'un système dissipatif est représenté par le pendule amorti, dans lequel la force de frottement diminue graduellement l'amplitude des oscillations jusqu'à ce que le pendule atteigne un état d'immobilité. Un exemple supplémentaire est représenté par le circuit électrique RLC, comprenant une résistance R, une inductance L et un condensateur C, où l'énergie électrique est convertie en chaleur et dissipée à travers la résistance. Dans un système dissipatif, l'équation du mouvement comporte un terme de dissipation. À titre d'exemple, dans le cas d'une particule de masse m soumise à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse (avec un coefficient de frottement γ), l'équation de Newton peut être exprimée comme suit :

$$m\ddot{x} = -\nabla V(x) - \gamma\dot{x}$$

Les systèmes dissipatifs sont pertinents pour modéliser les phénomènes physiques impliquant des mécanismes de dissipation d'énergie, tels que le frottement. Ils jouent un rôle essentiel dans l'analyse des processus irréversibles et des dynamiques de relaxation vers l'état d'équilibre.

1.4.4 Systèmes conservatifs

La particularité des systèmes conservatifs réside dans la présence d'une quantité, qui varie en fonction des variables du système, qui reste constante dans le temps. L'énergie totale du système est souvent représentée par cette quantité conservée. Par exemple, les systèmes Hamiltoniens sont des systèmes conservatifs. En réalité, hormis quelques systèmes spécifiques, ce sont les seuls systèmes conservatifs généralement pris en compte.

L'énergie mécanique totale (la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle) est constante dans un système conservatif. L'oscillateur harmonique simple, tel qu'un ressort-masse sans frottement, est un exemple de système conservatif où l'énergie oscille entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Le système planétaire est un autre exemple, où les orbites des planètes autour du Soleil maintiennent l'énergie gravitationnelle et cinétique dans un vide approximatif. Il est fréquent de dériver les équations du mouvement d'un système conservatif à partir d'un potentiel scalaire, connu sous le nom d'énergie potentielle, V. L'équation de Newton pour une particule de masse m dans un potentiel V est :

$$m\ddot{x} = -\nabla V(x)$$

Si la dynamique liée à chaque condition initiale x_0 conduit à un seul état final $x(t)$, on considère qu'un système est conservatif. Cela signifie que l'espace des phases est utilisé de manière bijective φ :

$$\varphi : X \times \mathbb{R}^+ \to X, \quad (x,t) \mapsto \varphi_t(x) = \varphi(x,t)$$

Cette application, connue sous le nom de flot, répond aux caractéristiques suivantes :

$$x_0 = \varphi_0(x_0), \quad \varphi_t(\varphi_s(x_0)) = \varphi_{t+s}(x_0) \textbf{ pour tout } [t, s \in \mathbb{R}^+$$

Il est essentiel de distinguer les systèmes conservatifs et dissipatifs afin de saisir différents phénomènes physiques. La mécanique classique et la mécanique statistique reposent sur les systèmes conservatifs, tandis que les systèmes dissipatifs permettent de représenter les phénomènes physiques en utilisant la dissipation d'énergie [33].

1.4.5 Conséquence des systèmes dissipatifs

Si un système est dissipatif, alors le flot associé n'est pas bijectif, ce qui signifie qu'il n'existe pas de correspondance univoque entre les états initiaux et finaux du système. En effet, dans un système dissipatif, l'énergie se dissipe au fil du temps, ce qui entraîne une perte d'information sur les conditions initiales à mesure que le système évolue. Cette dissipation d'énergie conduit souvent à l'apparition d'attracteurs dans l'espace des phases. Un attracteur est un ensemble vers lequel le système évolue au fil du temps, indépendamment des conditions initiales exactes.

Les attracteurs peuvent prendre plusieurs formes, telles que des points fixes, des cycles limites ou des attracteurs étranges. Ils représentent des états d'équilibre ou des comportements dynamiques stables vers lesquels le système tend à converger. Par exemple, un pendule amorti finira par s'arrêter en un point fixe (l'attracteur) où toute l'énergie cinétique et potentielle a été dissipée. De même, dans un circuit RLC, l'énergie initialement stockée dans l'inductance et le condensateur sera dissipée par la résistance, et le système atteindra un état de repos où l'énergie est minimale.

En résumé, la présence d'attracteurs dans les systèmes dissipatifs illustre la tendance de ces systèmes à évoluer vers des états de moindre énergie et à perdre leur dépendance aux conditions initiales spécifiques, ce qui les distingue fondamentalement des systèmes conservatifs.

1.5 Stabilité aux sens Lyapunov

1.5.1 Les principes fondamentaux

Prenons un exemple de la catégorie des systèmes non linéaires définis par le système dynamique :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ sont continues. Nous appelons $x^\star$ un point d'équilibre du système 1.1 $f(x^\star, t) = 0 \, \forall t \geq t_0$, et f une fonction non linéaire, et $x(t; t_0; x_0)$ la solution du système 1.1 où x_0 est la valeur initiale à l'instant t_0,

Définition 1.6. (Stabilité) Le point d'équilibre $x^\star$ est dit stable au sens de Lyapunov pour le système 1.1, si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \|x(t_0) - x^\star\| < \delta \implies \|x(t; x(t_0)) - x^\star\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Définition 1.7. (Stabilité uniforme) Le point d'équilibre $x^\star$ est considéré uniformément stable au sens de Lyapunov pour le système 1.1, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^\star\| < \delta \implies \|x(t; x(t_0)) - x^\star\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Définition 1.8. (Attractivité) Le point , qui représente un équilibre du système défini par l'équation 1.1, est qualifié d'attractif si les conditions suivantes sont remplies :

$$\exists \delta = \delta(t_0) > 0 : \|x(t_0) - x^\star\| < \delta \implies \lim_{t \to +\infty} x(t; t_0; x_0) = x^*, \forall t \geq t_0.$$

Si $\delta(t_0) = +\infty$, l'origine est dite globalement attractive.

Définition 1.9. (Stabilité asymptotique) Le point d'équilibre $x^\star$ est qualifié de stable asymptotiquement (ou globalement asymptotiquement) du système 1.1 s'il est à la fois stable et attractif (ou globalement attractif), autrement dit :

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^\star\| < \delta \implies \lim_{t \to +\infty} \|x(t; x(t_0)) - x^\star\| = 0.$$

Ainsi, la stabilité asymptotique se réfère à la capacité de définir un voisinage du point d'équilibre dans lequel toute trajectoire, initiée à partir d'un point $x(0)$ situé dans ce voisinage de $x^\star$, converge vers $x^\star$ lorsque $t \to +\infty$.

Définition 1.10. (Stabilité exponentielle) L'origine est considérée comme un point d'équilibre $x^\star$ localement stable de manière exponentielle pour le système 1.1 si l'existence de deux constantes strictement positives a, b est vérifiée, comme telles :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^\star\| < \delta \implies \|x(t; x(t_0)) - x^\star\| < a\|x(t_0) - x^\star\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0, \forall x \in B_r.$$

Lorsque $B_r = \mathbb{R}^n$, on qualifie le point d'équilibre $x^\star$ de stable de manière exponentielle globale.

Définition 1.11. (Instabilité) Le point d'équilibre $x^\star$ est qualifié d'instable s'il ne satisfait pas la condition de stabilité de Lyapunov.

Définition 1.12. (Stabilité au sens Lyapunov) Une solution $_i(t)$ du système 1.1, avec $\xi(t_0) = \xi_0$, est considérée stable selon la définition de Lyapunov si pour toute solution $x(t)$ du système 1.1, la condition suivante est vérifiée pour la valeur initiale $x(t_0)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - \xi_0\| < \delta \implies \|x(t) - \xi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

En outre de cette définition, si l'on considère :

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \xi(t)\| = 0,$$

Ainsi, la solution $\xi(t)$ est qualifiée de stable asymptotiquement.

1.5.2 Méthode indirecte de Lyapunov

La première approche de Lyapunov repose sur l'analyse de la linéarisation au voisinage du point d'équilibre x^* du système 1.1. De manière plus spécifique, les valeurs propres λ_i de la matrice jacobienne calculée au point d'équilibre sont analysées. D'après cette approche, les caractéristiques de stabilité de x^* sont formulées de la manière suivante : Lorsque toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative, on peut conclure que l'état d'équilibre x^* est exponentiellement stable. Il convient de noter que l'instabilité du point d'équilibre x^* est garantie lorsque la matrice jacobienne présente au moins une valeur propre avec une partie réelle strictement positive.

Exemple 7. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = x^2 - y - xz \\ \dot{z} = -z + xy \end{cases} \tag{1.2}$$

Le point d'équilibre est l'origine $(0, 0, 0)$, et la linéarisation du système 1.2 est :

$$Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne évaluée en 0, notées $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$, sont toutes négatives, ce qui implique que le point d'équilibre en 0 est asymptotiquement stable.

Remarque. Lorsque la matrice jacobienne présente au moins une valeur propre nulle et qu'aucune de ses valeurs propres ne possède une partie réelle strictement positive, cette approche ne permet pas de déterminer si le point d'équilibre est stable ou instable. En effet, dans ce cas particulier, les outils fournis par la méthode ne suffisent pas pour conclure, car la présence de valeurs propres nulles empêche de caractériser le comportement asymptotique des trajectoires autour du point d'équilibre.
Dans une telle situation, les trajectoires du système ne convergent pas nécessairement vers le point d'équilibre lui-même, mais plutôt vers un sous-espace (ou une variété) dont la dimension est déterminée par le nombre de valeurs propres nulles de la matrice jacobienne. Ce sous-espace représente l'ensemble des états du système où la dynamique reste limitée sans s'éloigner ni se stabiliser complètement au point d'équilibre.
Pour étudier la stabilité dans ce contexte, il devient nécessaire de passer à une analyse plus approfondie en utilisant la seconde méthode de Lyapunov. Cette méthode examine le comportement des trajectoires au sein de ce sous-espace, permettant ainsi de déterminer si le point d'équilibre est stable, instable, ou s'il présente des propriétés plus complexes.

1.5.3 Méthode directe de Lyapunov

La première méthode de Lyapunov est une approche simple et facile à utiliser, mais elle se limite à fournir une analyse partielle de la stabilité des points d'équilibre, sans donner d'informations précises sur la taille des bassins d'attraction du système dynamique. En revanche, la seconde méthode, bien que plus complexe et difficile à mettre en œuvre par rapport à la première, se distingue par sa généralité et sa capacité à traiter des problèmes plus complexes. Cette méthode repose sur la définition d'une fonction particulière appelée fonction de Lyapunov, notée $V(x)$, qui décroît le long des trajectoires du système dynamique à l'intérieur du bassin d'attraction. Le théorème suivant expose le cadre théorique de cette méthode et en explique le fonctionnement.

Théorème 1.1. *Soit $x^\star$ le point d'équilibre du système 1.1, s'il existe une fonction $V(x) : D \to \mathbb{R}$ continuellement différentiable qui vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. *D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x^* \in D$.*
2. *$V(x^*) = 0$ et $V(x) > V(x^*)$ pour tout $x \neq x^*$ dans D.*
3. *$\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \neq x^*$ dans D.*

Alors, on dit que $x^\star$ est stable.

- *En outre, si $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq x^*$ dans D, cela implique que x^* est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.*

- *De plus, si $V(x)$ tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, y compris celles qui commencent loin de x^*, convergent vers x^* (ce qui signifie que x^* est globalement asymptotiquement stable).*

Exemple 8. Soit le système :

$$\dot{x} = y + ax(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2).$$

Ce système possède un seul point d'équilibre situé en $(0, 0)$. Supposons que l'équation de Lyapunov soit définie comme suit :

$$V(x, y) = x^2 + y^2.$$

Nous calculons la dérivée de la fonction de Lyapunov supposée, en utilisant l'équation suivante :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}.$$

nous obtenons :

$$\dot{V} = 2x(y + ax(x^2 + y^2)) + 2y(-x + ay(x^2 + y^2)).$$

Alors :

$$\dot{V} = 2a(x^2 + y^2)^2.$$

Selon le théorème de Lyapunov : lorsque $a < 0$, il en découle que la dérivée de V par rapport au temps est strictement négative pour tout $x \neq 0$ et $y \neq 0$, ce qui implique la stabilité asymptotique du point d'équilibre $(0, 0)$. Il est nécessaire de noter que lorsque $a = 0$, il en découle que la dérivée de la fonction de Lyapunov $\dot{V}$ est nulle pour toutes les valeurs de x et y. Ainsi, le point d'équilibre $(0, 0)$ peut être considéré comme étant au moins localement stable selon la théorie de Lyapunov. Il convient de noter que, lorsque $a > 0$, il en découle que $\dot{V} > 0$ pour tout $x \neq 0$ et $y \neq 0$, ce qui implique l'instabilité du système selon le critère de Lyapunov.

1.6 Bifurcation

1.6.1 Introduction aux bifurcations

La bifurcation est un changement topologique qualitatif de l'espace des phases d'un système qui se produit lorsque certains paramètres sont légèrement modifiés au-delà de leurs seuils critiques.

Les bifurcations jouent des rôles importants dans de nombreux systèmes du monde réel en tant que mécanisme de commutation. Des exemples incluent l'excitation des neurones, la formation de motifs en morphogenèse , la transition catastrophique des états des écosystèmes, et le stockage binaire de l'information dans la mémoire d'ordinateur [52].

Il existe deux catégories de bifurcations. L'une est appelée **bifurcation locale**, qui peut être caractérisée par un changement de stabilité des points d'équilibre. Elle est appelée locale car elle peut être détectée et analysée uniquement en utilisant des informations localisées autour du point d'équilibre. L'autre catégorie est appelée **bifurcation globale**, qui se produit lorsque des caractéristiques non locales de l'espace des phases, telles que les cycles limites , entrent en collision avec les points d'équilibre dans un espace des phases. Ce type de bifurcation ne peut pas être caractérisé en utilisant uniquement des informations localisées autour du point d'équilibre. Dans ce travail, nous nous concentrons uniquement sur les bifurcations locales, car elles peuvent être facilement analysées en utilisant les concepts de stabilité linéaire que nous avons discutés dans les sections précédentes.

Les bifurcations locales se produisent lorsque la stabilité d'un point d'équilibre change entre stable et instable. Mathématiquement, cette condition peut être écrite comme suit : Les bifurcations locales se produisent lorsque les valeurs propres λ_i de la matrice Jacobienne à un point d'équilibre satisfont les conditions suivantes :

— Pour les modèles à temps discret : $|\lambda_i| = 1$ pour certains i, tandis que $|\lambda_i| < 1$ pour les autres.

— Pour les modèles à temps continu : $\Re(\lambda_i) = 0$ pour certains i, tandis que $\Re(\lambda_i) < 0$ pour les autres.

Ces conditions décrivent une situation critique où le point d'équilibre est sur le point de changer de stabilité. Nous pouvons formuler ces conditions sous forme d'équations et les résoudre en termes de paramètres, afin d'obtenir leurs seuils critiques. Voyons comment cette analyse peut être réalisée à travers quelques exemples ci-dessous.

1.6.2 Bifurcations dans les modèles continus

Pour l'analyse des bifurcations, les modèles continus sont en fait plus simples que les modèles discrets. Commençons donc par l'exemple le plus simple, un système dynamique autonome d'ordre un, continu, avec une seule variable :

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{1.3}$$

Dans ce cas, la matrice jacobienne est une matrice 1×1 dont la valeur propre est son contenu lui-même (car c'est un scalaire), ce qui est donné par $\frac{dF}{dx}$. Puisqu'il s'agit d'un modèle continu, la condition critique à laquelle une bifurcation se produit dans ce système est donnée par :

$$\Re\left(\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_{\text{eq}}}\right) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_{\text{eq}}} = 0. \tag{1.4}$$

Travaillons sur l'exemple suivant :

$$\frac{dx}{dt} = r - x^2 \tag{1.5}$$

La première chose que nous devons faire est de trouver les points d'équilibre. En posant $\frac{dx}{dt} = 0$, nous obtenons immédiatement :

$$x_{\text{eq}} = \pm\sqrt{r}, \tag{1.6}$$

ce qui signifie que les points d'équilibre n'existent que pour r non négatif. La condition critique à laquelle une bifurcation se produit est donnée comme suit :

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_{\text{eq}}} = -2x \tag{1.7}$$

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=\pm\sqrt{r}} = \pm 2\sqrt{r} = 0 \tag{1.8}$$

$$r = 0 \tag{1.9}$$

Nous savons donc maintenant qu'une bifurcation se produit lorsque $r = 0$. De plus, en insérant chaque solution de l'équation 1.5, nous savons qu'un point d'équilibre est stable tandis que l'autre est instable. Ces résultats sont résumés dans le tableau 1.2.

Point d'équilibre	$r < 0$	$0 < r$
$x_{\text{eq}} = \sqrt{r}$	n'existe pas	stable
$x_{\text{eq}} = -\sqrt{r}$	n'existe pas	instable

Tableau 1.2: Résumé de l'analyse de bifurcation de $\frac{dx}{dt} = r - x^2$.

Il existe un moyen plus visuel pour illustrer les résultats. Il s'appelle un **diagramme de bifurcation**. Cela ne fonctionne que pour les systèmes avec une variable et un paramètre, mais c'est toujours conceptuellement utile pour comprendre la nature des bifurcations. Un diagramme de bifurcation peut être dessiné en utilisant le paramètre varié comme l'axe horizontal, tout en utilisant l'emplacement des points d'équilibre du système comme l'axe vertical. Ensuite, vous dessinez comment chaque point d'équilibre dépend du paramètre, en utilisant des couleurs et/ou des styles de ligne différents pour indiquer la stabilité du point.

Le résultat est présenté dans la figure 1.11, où la courbe bleue continue indique un point d'équilibre stable $x = \sqrt{r}$, tandis que la courbe rouge en pointillés indique un point d'équilibre instable $x = -\sqrt{r}$, avec un cercle vert au centre représentant un point d'équilibre neutre. Ce type de bifurcation est appelé *bifurcation selle-nœud*, qui dépend de la direction dans laquelle le paramètre r est modifié.

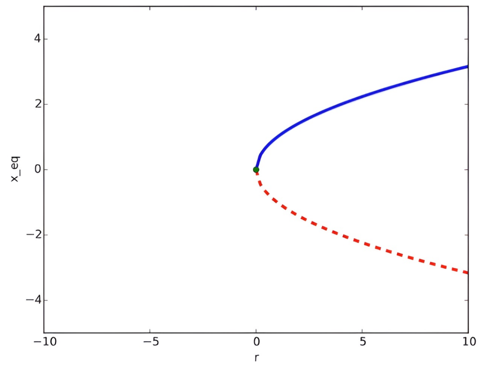


Figure 1.11: Diagramme de bifurcation d'un point selle

Chaque tranche verticale du diagramme de bifurcation pour une valeur de paramètre particulière représente un espace de phase du système dynamique que nous étudions. Par exemple, pour $r = 5$ dans le diagramme ci-dessus, il y a deux points d'équilibre, l'un stable (bleu/solide) et l'autre instable (rouge/pointillé). On peut visualiser les flux de l'état du système en ajoutant une flèche vers le bas au-dessus du point d'équilibre stable, une flèche vers le haut du point instable vers le point stable, puis une autre flèche vers le bas en dessous du point instable. De cette façon, il est clair que l'état du système converge vers le point d'équilibre stable tout en se repoussant du point instable. Si la même opération est effectuée pour plusieurs valeurs différentes de r, on obtient la figure 1.12.

Il existe d'autres types de bifurcations. Une bifurcation transcritique est une bifurcation où un point d'équilibre « traverse » un autre, échangeant ses stabilités. Par exemple :

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^2 \tag{1.10}$$

Ce système dynamique possède toujours les deux points d'équilibre suivants.

$$x = 0, r,$$

À l'exception du cas où ils se rencontrent lorsque $r = 0$, moment où ils échangent leurs stabilités. Son diagramme de bifurcation est présenté dans la figure 1.13.

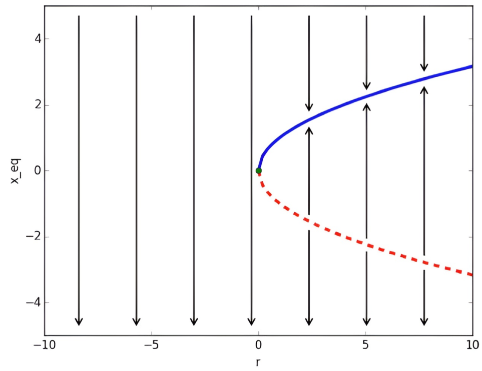


Figure 1.12: Interprétation du diagramme de bifurcation, chaque tranche verticale du diagramme représente l'espace des phases du système pour une valeur particulière du paramètre.

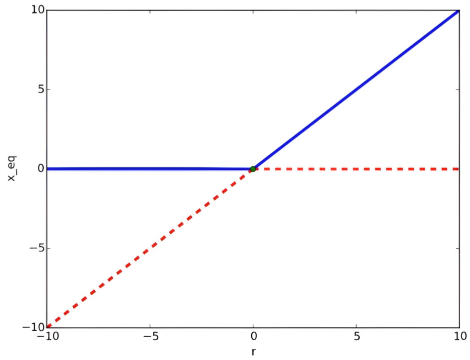


Figure 1.13: Diagramme d'une bifurcation transcritique.

Une autre est une bifurcation en fourche, où un point d'équilibre se divise en trois. Deux de ces points (les deux les plus externes) ont la même stabilité que le point d'équilibre original, tandis que celui entre eux a une stabilité opposée à celle du point original. Il existe deux types de bifurcations en fourche.

Une bifurcation en fourche supercritique rend un point d'équilibre stable se diviser en trois, deux stables et un instable. Par exemple :

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3 \tag{1.11}$$

Ce système dynamique a les trois points d'équilibre suivants, mais les deux derniers n'existent que pour

$$x = 0, \pm\sqrt{r},$$

mais les deux derniers n'existent que pour

$r \geq 0$. On peut montrer que $x = 0$ est stable pour $r < 0$ et instable pour $r > 0$, tandis que $x = \pm\sqrt{r}$ sont toujours stables s'ils existent. Son diagramme de bifurcation est montré dans la figure

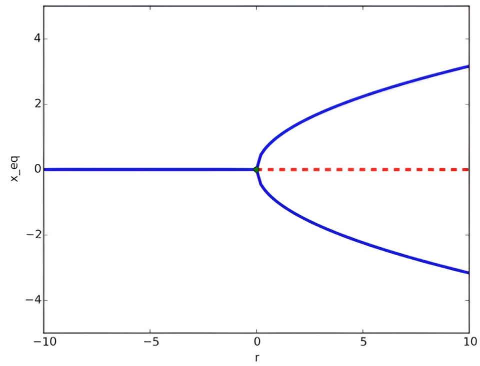


Figure 1.14: Diagramme d'une bifurcation en fourche supercritique.

En attendant, une bifurcation en fourche sous-critique rend un point d'équilibre instable se diviser en trois, dont deux instables et un stable. Par exemple :

$$\frac{dx}{dt} = rx + x^3 \tag{1.12}$$

Ce système dynamique possède les trois points d'équilibre suivants

$$x = 0, \pm\sqrt{-r},$$

mais les deux derniers n'existent que pour $r \leq 0$

Son diagramme de bifurcation est montré dans la figure 1.15

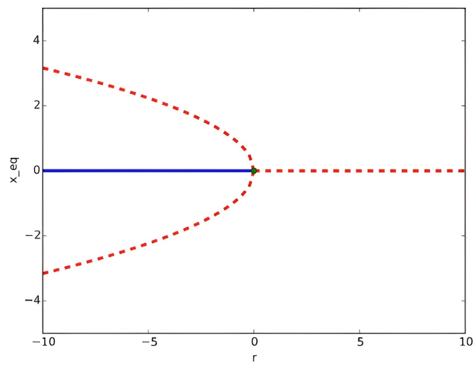


Figure 1.15: Diagramme d'une bifurcation en fourche sous critique.

Ces bifurcations peuvent également se manifester sous des formes combinées.

Exemple 9.

$$\frac{dx}{dt} = r + x - x^3 \tag{1.13}$$

Ce système dynamique a trois points d'équilibre, dont le calcul direct est assez compliqué. Cependant, si nous résolvons :

$\frac{dx}{dt} = 0$

en termes de r, nous obtenons facilement :

$$r = -x + x^3$$

ce qui est suffisant pour tracer le diagramme de bifurcation. Nous pouvons également connaître la stabilité de chaque point d'équilibre en calculant :

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_{\text{eq}}} = 1 - 3x_{\text{eq}}^2$$

c'est-à-dire, lorsque $x > \sqrt{\frac{1}{3}}$, les points d'équilibre sont stables, sinon ils sont instables. Le diagramme de bifurcation de ce système est montré dans la Figure 1.16

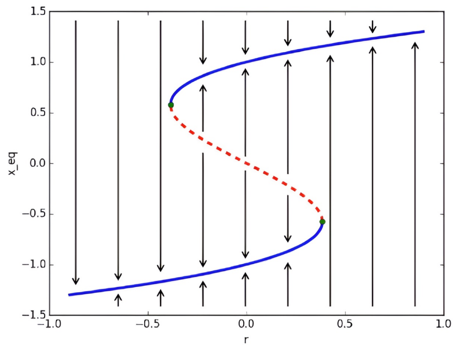


Figure 1.16: Diagramme de bifurcation montrant l'hystérésis

Ce diagramme est une combinaison de deux bifurcations selle-nœud, montrant que ce système a l'hystérésis comme propriété dynamique. L'hystérésis est la dépendance de la sortie d'un système (l'état asymptotique dans ce cas) non seulement sur l'entrée (le paramètre r dans ce cas) mais aussi sur son histoire. Pour comprendre ce que cela signifie, imaginez que vous changez lentement r vers le haut. Initialement, l'état du système reste à l'équilibre stable en bas du diagramme, ce qui continue jusqu'à ce que vous atteigniez un seuil critique à $r \approx 0.4$. Dès que vous franchissez ce seuil, l'état du système saute soudainement à un autre point d'équilibre stable en haut du diagramme. Un tel saut soudain de l'état du système est souvent appelé une catastrophe. Vous vous énervez et essayez de ramener l'état du système à ce qu'il était en réduisant r. Cependant, contrairement à vos attentes, l'état du système reste élevé même après avoir réduit r en dessous de 0.4. C'est l'hystérésis. L'état asymptotique du système dépend non seulement de r, mais aussi de l'endroit où se trouvait son état dans le passé immédiat. En d'autres mots, l'état du système fonctionne comme une mémoire de son histoire. Pour ramener l'état du système à la valeur initiale, vous devez dépenser un effort supplémentaire pour réduire r bien en dessous d'un autre seuil critique, $r \approx -0.4$.

Une telle hystérésis pourrait être utile, chaque bit (chiffre binaire) de mémoire d'ordinateur possède cette sorte de dynamique de bifurcation, c'est pourquoi nous pouvons y stocker des informations. Mais dans d'autres contextes, l'hystérésis pourrait être dévastatrice, si l'état d'un écosystème a cette propriété (de nombreuses études indiquent que c'est le cas), il faut une énorme quantité d'efforts et de ressources pour rétablir un écosystème déserté en un habitat avec de la flore.

1.6.3 Bifurcations de Hopf dans les modèles continu

Pour les systèmes dynamiques avec deux variables ou plus, les valeurs propres dominantes de la matrice jacobienne en un point d'équilibre peuvent être des conjugués complexes. Si un tel point d'équilibre montre un comportement oscillatoire autour de lui, change sa stabilité, la bifurcation résultante est appelée une *bifurcation de Hopf*. Une bifurcation de Hopf provoque typiquement l'apparition (ou la disparition) d'un cycle limite autour du point d'équilibre. Un cycle limite est une trajectoire fermée et cyclique dans l'espace des phases qui est définie comme une limite asymptotique des autres trajectoires oscillatoires voisines. Vous pouvez vérifier si la bifurcation est de type Hopf ou non en regardant les composantes imaginaires des valeurs propres dominantes dont les parties réelles sont à une valeur critique (zéro) ; s'il n'y a pas de composantes imaginaires non nulles, il doit s'agir d'une bifurcation de Hopf.

Exemple 10. Un modèle dynamique d'un oscillateur non linéaire, appelé oscillateur de Van der Pol :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + r(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1.14}$$

C'est une équation différentielle d'ordre 2, nous devrions donc introduire une variable supplémentaire $y = \frac{dx}{dt}$ pour la transformer en un système d'ordre 2 :

$$\frac{dx}{dt} = y \tag{1.15}$$

$$\frac{dy}{dt} = r(x^2 - 1)y - x \tag{1.16}$$

À partir de là, nous pouvons facilement montrer que l'origine, $(x, y) = (0, 0)$, est le seul point d'équilibre de ce système. La matrice jacobienne de ce système à l'origine est donnée comme suit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2rxy - 1 & -r(x^2 - 1) \end{pmatrix} \Bigg|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -r \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Les valeurs propres de cette matrice peuvent être calculées comme suit :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -r - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.18}$$

$$-\lambda(-r - \lambda) = 1 \tag{1.19}$$

$$\lambda = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4}}{2} \tag{1.20}$$

La condition critique pour qu'une bifurcation se produise est :

$$\Re(\lambda) = 0 \tag{1.21}$$

dont le côté gauche peut être détaillé comme suit :

$$\Re(\lambda) = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4}}{2} \tag{1.22}$$

Le premier cas ne peut pas être zéro, donc la seule condition critique pour qu'une bifurcation se produise est le second cas, c'est-à-dire :

$$r = 0, \text{ quand } \Re(\lambda) = 0 \text{ et } \Im(\lambda) = \pm i \tag{1.23}$$

C'est une bifurcation de Hopf parce que les valeurs propres ont des parties imaginaires non nulles lorsque le changement de stabilité se produit.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les concepts fondamentaux des systèmes dynamiques, incluant leurs classifications, l'espace de phase, les orbites, les trajectoires, et les variétés stables. Ces notions constituent la base de l'étude des systèmes dynamiques. Nous avons ensuite exploré les différentes définitions relatives à la stabilité, en mettant en avant son importance pour l'analyse des systèmes dynamiques. Les différents types de stabilité, ainsi que les théorèmes et critères associés, ont été abordés. De plus, nous avons expliqué les deux principales méthodes d'étude de la stabilité, basées sur l'approche de

Lyapunov, tout en illustrant ces concepts avec plusieurs exemples pratiques pour faciliter la compréhension.

Par ailleurs, la théorie des bifurcations a été introduite, en définissant les notions clés et en présentant les différents types de bifurcations. Nous avons souligné que l'analyse des bifurcations constitue un outil essentiel pour comprendre les changements brusques dans le comportement des systèmes dynamiques.

Ce chapitre établit ainsi une base théorique solide pour la compréhension des systèmes dynamiques et de leur stabilité, ouvrant la voie à une analyse approfondie des dynamiques chaotiques et de leurs applications dans les chapitres suivants.

Chapitre 2

Théorie du chaos

2.1 Introduction

La théorie du chaos représente un domaine fascinant de la science qui explore des phénomènes apparemment aléatoires mais gouvernés par des lois déterministes. Ce chapitre se concentre sur l'étude des systèmes dynamiques chaotiques et de leurs propriétés, en mettant en lumière les caractéristiques fondamentales du chaos, ainsi que les types d'attracteurs qui en résultent. Nous examinerons les concepts clés comme les attracteurs réguliers et étranges, et la manière dont la dynamique chaotique peut être caractérisée. L'un des objectifs majeurs de ce chapitre est également d'explorer les méthodes utilisées pour détecter le chaos, notamment à travers les exposants de Lyapunov [20, 42]. Nous aborderons également les transitions vers le chaos, un aspect crucial pour comprendre les processus chaotiques dans divers systèmes complexes [67]. Ce chapitre mettra en lumière l'importance de la théorie du chaos dans différents domaines scientifiques et son rôle dans la compréhension de phénomènes naturels complexes.

2.2 Définitions et théorèmes

Définition 2.1. La sensibilité aux conditions initiales d'une fonction $f : X \to X$ est définie par l'existence d'un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in X$ et $\epsilon > 0$, il existe un point $y_0 \in X$ et un entier $j \geq 0$ tels que : Si la distance entre x_0 et y_0 est inférieure à ϵ, alors la distance entre $f^{(j)}(x_0)$ et $f^{(j)}(y_0)$ est supérieure à δ, où d désigne la distance et $f^{(j)}(x_0)$ représente la j-ième itération de f.

Définition 2.2. En considérant un ensemble X et un sous-ensemble Y de X tel que $Y \subset X$, on peut définir la densité de Y dans X comme suit : Y est dit être dense dans X si, pour tout élément $x \in X$, il existe un élément $y \in Y$ qui est arbitrairement proche de x. Autrement dit, Y est considéré comme dense dans X si, pour tout $x \in X$, il est possible de trouver une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y qui converge vers x.

Définition 2.3. Une fonction f est dite topologiquement transitive si, pour tout couple d'ensembles ouverts non vides U et V de l'espace topologique X, il existe un point $x_0 \in U$ et un entier $j > 0$ tels que $f^{(j)}(x_0) \in V$, ou de manière équivalente, s'il existe un entier $j > 0$ tel que $f^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Définition 2.4. Considérons (X, f) un système dynamique discret, soit A un sous-espace de X, soient les conditions suivantes :

1. A est fermée,
2. A est positivement invariante,
3. A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que :
   (1) U est positivement invariant,
   (2) U est attiré par A ; $\forall u \in U, \lim_{t\to+\infty} d(f^t(u), A) = 0$.

On dit que A est un attracteur si et seulement si les conditions mentionnées sont réalisées.

Théorème 2.1. *Considérons un sous-ensemble V de X, la fonction $f : X \to X$ est qualifiée de chaotique sur V si :*

1. *La fonction f est sensible aux conditions initiales.*
2. *La fonction f est dite topologiquement transitive, ce qui signifie que pour tout couple d'ensembles ouverts $U, V \subset X$, il existe un entier $j > 0$ tel que l'intersection de $f^{(j)}(U)$ avec V n'est pas vide.*
3. *Tous les points périodiques de la fonction f forment un ensemble dense dans X.*

2.3 Types d'attracteur

2.3.1 les attracteurs réguliers

qui décrivent l'évolution d'un système non chaotique, se présentent sous trois formes différentes :

2.3.1.1 Point fixe

C'est le cas le plus courant et le plus simple d'attracteurs, dans lequel le système évolue vers un état de repos (point). Le point d'équilibre unique d'un pendule amorti est l'exemple classique de ce type d'attracteur.

2.3.1.2 Orbites périodiques

Définition 2.5. Une solution $X(t)$ d'un système dynamique, qu'il soit autonome ou non, est qualifiée de périodique lorsqu'il existe un entier T tel que : Pour tout t, si $X(t+T) = X(t)$ et $X(t+T) = X(t)$ pour $0 < T < T$, alors T est défini comme étant la période de la solution.

De manière générale, il existe trois catégories de cycles limites : les cycles limites stables, les cycles limites instables et les cycles limites semi-stables.

Définition 2.6. Le cycle-limite, désigné par C_L, est considéré comme stable lorsque toute trajectoire débutant à proximité suffisante de C_L converge vers ce dernier lorsque $t \to +\infty$, c'est-à-dire qu'elle se rapproche progressivement du cycle-limite C_L. Un cycle limite stable est communément désigné sous le terme d'attracteur périodique.

Définition 2.7. Le cycle-limite, désigné par C_L, est considéré comme instable lorsque toute trajectoire débutant à proximité de C_L s'en éloigne lorsque $t \to -\infty$, c'est-à-dire, s'éloigne de C_L.

Définition 2.8. Lorsque les trajectoires convergent vers C_L d'un côté et s'en éloignent de l'autre, on qualifie C_L de semi-stable.

2.3.1.3 Cycle-limite pseudo périodique

Dans un attracteur quasi-périodique, les trajectoires ne se répètent jamais exactement de la même manière. Contrairement aux attracteurs périodiques, qui se caractérisent par des trajectoires revenant au même point après une période définie, les attracteurs quasi-périodiques montrent des oscillations qui semblent régulières sur une courte période, mais ne reviennent jamais exactement au point de départ. Cela conduit à une trajectoire qui remplit une région de l'espace des phases sans se fermer sur elle-même.

Les attracteurs quasi-périodiques se manifestent souvent dans l'espace des phases sous forme de tores, des structures en forme d'anneau, où chaque point sur le tore représente un état possible du système. Ces tores résultent de l'interaction entre plusieurs mouvements oscillatoires à des fréquences incommensurables. Les systèmes présentant de tels attracteurs peuvent être extrêmement sensibles aux conditions initiales et peuvent montrer des comportements qui semblent chaotiques sur le long terme, malgré une apparence de régularité sur le court terme.

Un exemple classique d'un système présentant un attracteur quasi-périodique est le système de Rössler, où l'on peut observer la transition d'un comportement périodique à un comportement quasi-périodique, puis à un comportement chaotique.

En résumé, les attracteurs quasi-périodiques représentent un état intermédiaire fascinant entre le comportement périodique régulier et le chaos, et sont une expression clé de la complexité dans les systèmes dynamiques.

2.3.2 Les attracteurs étranges

Un système chaotique dissipatif est caractérisé par la présence d'au moins un attracteur d'un type spécifique connu sous le nom d'attracteur étrange. Les attracteurs étranges sont des éléments distinctifs du développement des systèmes chaotiques. Après un laps de temps donné, tous les points de l'espace des phases, appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur, suivent des trajectoires convergentes vers la formation de l'attracteur étrange. Un des aspects remarquables d'un attracteur chaotique est que la trajectoire ne revisite jamais un état précédemment rencontré. Cela implique, notamment, que cette trajectoire traverse un grand nombre d'états. Il convient de souligner qu'il peut être intéressant, pour étudier les trajectoires d'un attracteur, de procéder à une réduction de la dimension de l'espace des phases.

Définition 2.9. Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est considéré comme un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T si, pour tout voisinage V de A, il existe une boule contenant tout point de A et incluse dans V, vérifiant les propriétés suivantes :
— La région V est définie comme une zone de capture, ce qui implique que toute trajectoire T dont le point initial se trouve dans V reste entièrement incluse dans V. De plus, toute orbite de cette nature peut être rendue aussi proche de A que souhaité, et y rester.
— L'attracteur A est situé à l'intérieur d'un espace limité. Son volume est nul, et sa dimension est de nature fractale, mais non entière.
— Pratiquement chaque trajectoire sur l'attracteur est apériodique, ce qui signifie qu'il est presque certain qu'aucune trajectoire ne traverse deux fois le même point.
— À un instant donné t, deux trajectoires voisines voient leur distance locale augmenter de manière exponentielle, ce phénomène étant dû à leur sensibilité aux conditions initiales.

2.4 Caractéristique de la dynamique des systèmes chaotiques

1. **Sensibilité aux conditions initiales** : Même de petites différences dans les valeurs initiales peuvent conduire à des résultats complètement différents. Cette propriété est également connue sous le nom d'effet papillon, où le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut provoquer un ouragan au Texas.
   Mathématiquement, si $\mathbf{x}(0)$ et $\mathbf{x}'(0)$ sont deux conditions initiales proches, alors la distance $d(t) = \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'(t)\|$ peut croître exponentiellement avec le temps, i.e.,
   $$d(t) \approx d(0)e^{\lambda t}$$
   où λ est un exposant de Lyapunov positif.
2. **Imprévisibilité à long terme** : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, prévoir le comportement des systèmes chaotiques à long terme est pratiquement impossible, bien que leur comportement à court terme puisse être prévisible.
   Mathématiquement, cela signifie que l'horizon de prévisibilité est limité par les exposants de Lyapunov. Si λ est l'exposant de Lyapunov, le temps de prévisibilité T est donné par
   $$T \approx \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)$$
   où δ est la précision initiale des mesures.
3. **Périodicité et apériodicité** : Les systèmes chaotiques peuvent montrer un comportement périodique sur de courtes périodes, mais en général, ce sont des systèmes apériodiques, où le comportement ne se répète pas de la même manière.
   Cela se traduit mathématiquement par le fait que les solutions des équations différentielles ne reviennent pas exactement à leur état initial après une période T, i.e.,
   $$\mathbf{x}(t+T) \neq \mathbf{x}(t) \text{ pour tout } t \text{ et tout } T > 0.$$
4. **Structures complexes dans le chaos** : Malgré le chaos apparent, les systèmes chaotiques peuvent contenir des structures organisées et complexes, telles que les attracteurs étranges qui montrent une géométrie complexe de manière inattendue.
5. **Multistabilité** : Les systèmes chaotiques peuvent contenir plusieurs points fixes ou cycles périodiques qui peuvent attirer ou repousser la trajectoire du système.
   Mathématiquement, cela signifie que le système peut avoir plusieurs solutions stables

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ telles que

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = 0 \text{ ou } \mathbf{x}_i(t+T_i) = \mathbf{x}_i(t) \text{ pour un } T_i > 0.$$

2.5 Identification du chaos

La détection du chaos dans les systèmes non linéaires repose sur l'utilisation de diverses approches analytiques et numériques. Ces méthodes permettent d'évaluer si un système présente un comportement chaotique, caractérisé par une sensibilité extrême aux conditions initiales et une dynamique complexe. Cependant, il est souvent difficile d'obtenir des données suffisamment longues et représentatives à l'échelle du système étudié, ce qui complique l'analyse.

Parmi les méthodes disponibles, les exposants de Lyapunov constituent l'une des techniques les plus répandues et efficaces pour identifier le chaos. Ces exposants mesurent le taux moyen de divergence exponentielle des trajectoires voisines dans l'espace des phases. En particulier, un exposant de Lyapunov positif est généralement considéré comme un indicateur fiable de la présence de chaos.

Dans cette section, nous avons choisi de mettre en œuvre cette méthode, en raison de sa robustesse et de son aptitude à révéler les dynamiques chaotiques dans une large variété de systèmes. L'analyse des exposants de Lyapunov offre également une perspective quantitative sur le degré de chaos et permet une comparaison précise entre différents systèmes ou paramètres.

2.5.1 Les exposants de Lyapunov

L'évolution chaotique se caractérise par une divergence rapide des trajectoires sur l'attracteur, ce qui rend son analyse complexe. Cette divergence, qui croît de manière exponentielle avec le temps pour presque toutes les conditions initiales proches d'un même point, reflète la sensibilité aux conditions initiales. Ce phénomène est quantifié à l'aide des exposants de Lyapunov, qui mesurent l'amplitude de cette divergence locale et évaluent ainsi le niveau de sensibilité d'un système dynamique. Examinons tout d'abord la formule associée à ces exposants et analysons le raisonnement qui a conduit Lyapunov à la développer :

$$\lambda = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln |f'(x_{i-1})| \quad (2.2)$$

Prenons en considération un système dynamique arbitraire pour lequel la condition initiale x_0 est perturbée par une erreur infinitésimale E_0. Après n itérations, l'erreur initiale E_0 sera donc multipliée par le rapport $\frac{E_n}{E_0}$. Il est à noter que l'erreur décroît lorsque le facteur est inférieur à 1 et croît lorsqu'il est supérieur à 1. Étant donné que

$$\left|\frac{E_n}{E_0}\right| = \left|\frac{E_n}{E_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{E_{n-1}}{E_{n-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{E_2}{E_1}\right| \cdot \left|\frac{E_1}{E_0}\right|,$$

En introduisant le logarithme.

$$\ln\left|\frac{E_n}{E_0}\right| = \ln\left(\left|\frac{E_n}{E_{n-1}} \cdot \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \cdot \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \cdot \ldots \cdot \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{E_1}{E_0}\right|\right)$$

$$= \ln\left|\frac{E_n}{E_{n-1}}\right| + \ln\left|\frac{E_{n-1}}{E_{n-2}}\right| + \ln\left|\frac{E_{n-2}}{E_{n-3}}\right| + \ldots + \ln\left|\frac{E_2}{E_1}\right| + \ln\left|\frac{E_1}{E_0}\right| = \sum_{i=1}^{n} \ln\left|\frac{E_i}{E_{i-1}}\right|$$

Après avoir calculé la moyenne de la somme obtenue, nous faisons tendre cette quantité vers l'infini.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\left|\frac{E_i}{E_{i-1}}\right|$$

Étant donné que E_i et E_{i-1} sont des valeurs très petites, le rapport représente la dérivée de la fonction associée à l'équation utilisée, sous réserve que la fonction soit dérivable. En d'autres termes, considérons la fonction $f(x_i)$:

$$E_i = f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})$$

et

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}}$$

Étant donné que :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Ainsi, si la fonction f est dérivable, on a :

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} = f'(x_{i-1}) \quad \text{lorsque} \quad E_{i-1} \to 0.$$

par conséquent :

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln |f'(x_{i-1})| \,.$$

Quand l'exposant de Lyapunov est positif :

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0.$$

et par conséquent :

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1.$$

2.5.2 Conclusion

Un attracteur étrange possède toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont au moins un est positif. En revanche, pour un attracteur non chaotique, tous les exposants de Lyapunov sont inférieurs ou égaux à zéro, et leur somme est négative. Les exposants de Lyapunov constituent une généralisation des valeurs propres pour les points fixes et des multiplicateurs caractéristiques pour les solutions périodiques. On peut résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et le signe des exposants de Lyapunov comme suit :

- Attracteur ponctuel (point fixe) : Les trois exposants de Lyapunov sont négatifs $(-,-,-)$.
- Cycle limite périodique : Un des exposants est nul, les deux autres sont négatifs $(0,-,-)$.
- Cycle limite quasi-périodique : Deux exposants sont nuls, le dernier est négatif $(0,0,-)$.
- Attracteur chaotique (étrange) : Un exposant est positif, un autre est nul, et le dernier est négatif $(+,0,-)$.

2.6 Les transitions vers le chaos

Le passage d'un système dynamique d'un état régulier à un état chaotique se produit selon plusieurs scénarios distincts. Contrairement à une évolution progressive, cette transition est caractérisée par des changements soudains et discontinus, appelés bifurcations. Ces bifurcations signalent des altérations fondamentales dans la nature du système, qui passent d'une dynamique régulière et prévisible à un comportement imprévisible et complexe. Parmi les scénarios les plus courants de transition vers le chaos lors de la variation d'un paramètre de contrôle, on distingue principalement trois mécanismes :

2.6.1 Cascade de doublements de période

Ce mécanisme apparaît typiquement dans des systèmes oscillatoires soumis à une force externe. Lorsque l'intensité de cette force augmente, le système commence à subir une série de doublements de période. Initialement, le système oscille avec une certaine période bien définie. Avec une augmentation progressive de la contrainte, la période se double, passant à 2 fois sa valeur initiale, puis à 4 fois, à 8 fois, et ainsi de suite. Ces doublements successifs deviennent de plus en plus rapprochés à mesure que le paramètre de contrôle s'approche d'une valeur critique. Une fois que la période devient infinie, le système entre dans un régime chaotique, marqué par un comportement hautement imprévisible. Ce scénario est l'un des plus étudiés et représente une transition universelle vers le chaos.

2.6.2 L'intermittence

L'intermittence est un phénomène transitoire où un système dynamique alterne entre des phases de mouvement régulier et des bouffées de turbulence. Initialement, le système présente un comportement périodique stable, mais à mesure que le paramètre de contrôle est ajusté, des épisodes de turbulence commencent à apparaître. Ces épisodes irréguliers deviennent de plus en plus fréquents à mesure que le paramètre continue d'augmenter, jusqu'à ce que la turbulence devienne dominante. À ce stade, le système atteint un état chaotique. Ce type de transition est fréquemment observé dans des systèmes naturels où de petites perturbations peuvent provoquer des changements importants dans la dynamique globale.

2.6.3 La quasi-périodicité

La quasi-périodicité se produit lorsqu'un système dynamique, initialement périodique, est perturbé par l'ajout d'un deuxième oscillateur. Le comportement du système dépend du rapport entre les périodes des deux oscillateurs. Si ce rapport est irrationnel, le système exhibe une dynamique quasi-périodique, caractérisée par des oscillations complexes qui ne se répètent jamais exactement. En revanche, si le rapport des périodes est rationnel, le système conserve un comportement strictement périodique. Lorsque l'intensité de l'interaction entre les oscillateurs augmente, le système peut évoluer vers un état chaotique. Ce phénomène est souvent observé dans des systèmes physiques et biologiques où plusieurs cycles interactifs influencent la dynamique globale.

2.7 Conclusion

La théorie du chaos a permis de révolutionner notre manière de comprendre les systèmes dynamiques complexes. À travers l'étude des attracteurs, des exposants de Lyapunov et des transitions vers le chaos, nous avons pu mieux appréhender les mécanismes qui sous-tendent ces comportements apparemment erratiques mais régis par des lois déterministes. Les systèmes chaotiques sont omniprésents, de la physique à la biologie, et leur étude continue d'apporter de nouvelles perspectives sur des phénomènes aussi divers que les fluctuations économiques ou les modèles climatiques. Les concepts abordés dans ce chapitre constituent la base nécessaire pour explorer plus en profondeur la dynamique des systèmes chaotiques et hyperchaotiques, tout en offrant un cadre théorique pour les applications pratiques dans diverses branches des sciences.

Chapitre 3

Étude dynamique des systèmes dynamiques chaotiques

3.1 Introduction

De nombreuses études précédentes ont mené des analyses dynamiques sur des systèmes dynamiques chaotiques [5], [6], [29], [11].

Ce chapitre se concentre sur l'analyse de trois systèmes bien connus représentant des modèles fondamentaux dans la théorie du chaos. Nous commençons par discuter du système de Lorenz, considéré comme l'un des systèmes chaotiques les plus étudiés, en présentant sa formulation mathématique, l'analyse de la stabilité de ses points d'équilibre, ainsi que l'étude des bifurcations et des attracteurs étranges. Ce système est essentiel dans la compréhension des dynamiques chaotiques complexes, comme l'illustrent des travaux récents [19, 36, 47].

Ensuite, nous abordons le système de Rössler, qui présente des dynamiques chaotiques distinctes de celles du système de Lorenz, en se focalisant sur le calcul des points d'équilibre, leur stabilité, et des simulations numériques mettant en évidence le comportement chaotique de ce système. Enfin, nous discutons du système chaotique à quatre-scroll, en présentant sa structure algébrique et une analyse de ses dynamiques. Cette analyse s'appuie sur les avancées récentes dans la théorie du chaos, comme mentionné dans [64].

À travers ces systèmes, nous explorons les comportements imprévisibles qui définissent le cœur du chaos, mettant en lumière leurs applications potentielles dans des domaines scientifiques et industriels variés.

3.2 Systeme de Lorenz

3.2.1 Formulation

Le système de Lorenz a été initialement dérivé d'une approximation d'Oberbeck-Boussinesq. Cette approximation est un couplage des équations de Navier-Stokes avec la convection thermique. Le problème original était un problème en 2D considérant la convection thermique entre deux plaques horizontales parallèles. Le système de Lorenz découle de l'utilisation d'une expansion de Fourier-Galerkin tronquée. Pour des raisons de complétude, le système sera dérivé de ses équations de gouvernance. L'équation de la quantité de mouvement est

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{F} \tag{3.1}$$

où p est la pression, Δ est le Laplacien vectoriel, ρ est la densité, ν est la viscosité cinématique et $\mathbf{F}$ représente les forces externes. En général, l'équation de continuité est

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{3.2}$$

La constance de ρ révèle la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. On note la température des plaques par T_0 et T_1. Dans ce cas, la force $\mathbf{F} = \alpha g (T - T_0) \mathbf{k}$, où α est la constante d'expansion thermique et $\mathbf{k}$ est un vecteur unitaire dans la direction z. La température est modélisée par l'équation

$$T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T \tag{3.3}$$

avec κ étant la constante de diffusivité. En convertissant en équations sans dimensions :

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \sigma \Delta \mathbf{u} + r \sigma \phi \mathbf{k} \tag{3.4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3.5}$$

$$\phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = v_3 + \Delta \phi \tag{3.6}$$

où σ est le nombre de Prandtl, r est le nombre de Rayleigh, $\mathbf{v}$ est la vitesse donnée composante par composante par v_i. En utilisant la fonction de courant $\psi(y, z, t)$, la formulation avec $v_1 = 0$, $v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial z}$, $v_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ est satisfaite. Comme le problème est mis en place, la seule composante non nulle de la vorticité est dans la direction x, appelons-la ξ

$$\xi = \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\Delta\psi \tag{3.7}$$

En prenant le rotationnel de l'équation de la quantité de mouvement et en projetant dans la direction x, la pression p disparaît de l'équation et nous avons l'équation pour la vorticité ξ.

$$\xi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\xi = \sigma\Delta\xi + r\sigma\phi_y \tag{3.8}$$

En utilisant la règle de la chaîne, nous pouvons écrire le système :

$$\begin{cases} \xi_t + \left|\partial(\xi,\psi)/\partial(y,z)\right| & = \sigma\Delta\xi + r\sigma\phi_y \\ \phi_t + \left|\partial(\xi,\psi)/\partial(y,z)\right| & = \Delta\phi - \psi_y \\ \xi & = -\Delta\psi \end{cases} \tag{3.9}$$

Notez que $\left|\partial(\xi,\psi)/\partial(y,z)\right|$ est simplement le Jacobien de (ξ,ψ) par rapport à (y,z). Considérons maintenant l'expansion de Fourier-Galerkin en forme complexe :

$$\psi(y,z,t) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{n,m} \exp(in\pi z)\exp(im\pi y) \tag{3.10}$$

$$\phi(y,z,t) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} b_{n,m} \exp(in\pi z)\exp(im\pi y) \tag{3.11}$$

Une expansion à terme unique pour la fonction de courant est

$$\psi(y,z,t) = a(t)\sin(\pi z)\sin(k\pi y) \tag{3.12}$$

où $a(t)$ représente des rouleaux de convection avec nombre d'onde k dans la direction y. Une expansion à deux termes pour la température est

$$\phi(y,z,t) = b(t)\sin(\pi z)\cos(k\pi y) + c(t)\sin(2\pi z) \tag{3.13}$$

où $b(t)$ représente des rouleaux de convection avec nombre d'onde k dans la direction y et $c(t)$ approximativement le profil moyen de température dû à la convection. Les Jacobiennes sont données par

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial(\xi,\psi)}{\partial(y,z)}\right| & = \frac{k\pi^2}{4}a^2(t)(1+k^2)\left(\sin(2\pi z)\sin(2k\pi y) - \sin(2\pi z)\sin(2k\pi y)\right) \\ \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(y,z)}\right| & = \frac{-k\pi^2}{2}a(t)b(t)\left(\sin(2\pi z)\sin^2(2k\pi y) - \sin(2\pi z)\cos^2(k\pi y)\right) \\ \left|\frac{\partial(\phi,\xi)}{\partial(y,z)}\right| & = -2k\pi^2 a(t)c(t)\left(\sin(\pi z)\cos(2\pi z)\cos(k\pi y)\right) \end{cases} \tag{3.14}$$

Si la projection de l'erreur sur les fonctions de base de Fourier est nulle, l'erreur résiduelle dans la troncature est minimisée. En multipliant l'équation de la vorticité par $\sin(\pi z)\sin(k\pi y)$ et en intégrant en z de 0 à 1, la distance entre les deux plaques, et en intégrant en y de 0 à $2/k$, on obtient :

$$a_t = -\sigma\pi(1+k^2)a(t) - \frac{k\pi}{1+k^2}\sigma r b(t) \tag{3.15}$$

En multipliant l'équation pour la température par $\sin(\pi z)\sin(k\pi y)$ et en intégrant en z de 0 à 1, la distance entre les deux plaques, et en intégrant en y de 0 à $2/k$, on obtient :

$$b_t + k\pi^2 a(t)c(t) = -\pi(1+k^2)b(t) - k\pi a(t) \tag{3.16}$$

$$c_t - \frac{\pi^2}{k}a(t)b(t) = -\pi^2 c(t) \tag{3.17}$$

En rééchelonnant l'équation comme $\tau = \pi^2(1+k^2)t$ et en définissant

$$\tilde{b}(\tau) = -\frac{\sigma b(t)}{\pi^3(1+k^2)^2}, \quad \tilde{c}(\tau) = -\frac{k^2 r c(t)}{\pi^3(1+k^2)^3} \tag{3.18}$$

nous arrivons au système :

$$\begin{cases} \frac{da}{d\tau} & = -\sigma a(\tau) + \sigma\tilde{b}(\tau) \\ \frac{d\tilde{b}}{d\tau} & = -\tilde{b}(\tau) + \frac{k^2 r}{\pi^4(1+k^2)^3}a(\tau) \\ \frac{d\tilde{c}}{d\tau} & = \frac{k}{1+k^2}c(\tau) + \frac{k^2}{2(1+k^2)^2}ab\tilde{r} \end{cases} \tag{3.19}$$

En rééchelonnant encore une fois, définissons

$$X(\tau) = \frac{k}{\sqrt{2(1+k^2)}}a(\tau), \quad Y(\tau) = \frac{k}{\sqrt{2(1+k^2)}}\tilde{b}(\tau), \quad Z(\tau) = \tilde{c}(\tau) \tag{3.20}$$

Nous arrivons au système de Lorenz :

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} & = \sigma(Y - X) \\ \frac{dY}{d\tau} & = -Y + \rho X - XZ, \rho = \frac{k^2 r}{\pi^4(1+k^2)^3} \\ \frac{dZ}{d\tau} & = -\beta Z + XY, \beta = \frac{k^2}{1+k^2} \end{cases} \tag{3.21}$$

où σ est le nombre de Prandtl, ρ est une réévaluation du nombre de Rayleigh et β est un rapport d'aspect [19].

3.2.2 Points Fixes

Ce qui suit utilise la notation par point pour désigner la dérivée par rapport au temps ; le système est alors écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} . \quad \text{Si} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ \rho x - y - xz \\ -\beta z + xy \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

en forme vectorielle, le système devient $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$. Les points fixes sont donnés par $\mathbf{F} = 0$, résoudre ce système révèle que les points fixes sont

$$p = (0, 0, 0), \quad q_\pm = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1). \tag{3.23}$$

Dénotez l'espace des paramètres par $\Lambda = (\rho, \sigma, \beta)$, pour $\rho, \sigma, \beta > 0$.

3.2.3 Analyse de la stabilité

La linéarisation est donnée par la matrice

$$A(x, y, z) = \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres sont données par l'équation caractéristique, qui est

$$c_A(\lambda) = -\lambda^3 + \mathrm{tr}(A)\lambda^2 - \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A^2) - \mathrm{tr}^2(A)\right)\lambda + \det(A).$$

Les composants nécessaires sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \rho\beta(s - z - 1) - sx(x + y)\\ \operatorname{tr}(A) &= -(\sigma + 1 + \beta)\\ \operatorname{tr}(A^2) &= 2\sigma(\rho - z) - 2sx^2 + \beta^2 + 1 + \sigma^2.\end{aligned}$$

3.2.3.1 Stabilité Locale à l'origine

En calculant les racines de l'équation caractéristique $A(p)$, les valeurs propres sont

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\beta,\\ \lambda_\pm &= \frac{1}{2}\left(-1 - \sigma \pm \sqrt{D}\right)\end{aligned}$$

où D est donné par :

$$D = 4\rho\sigma + \sigma^2 - 2\sigma + 1.$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est en réalité un polynôme du quatrième degré en termes de σ. Comme β n'apparaît pas dans $\lambda_\pm$, la dynamique près de l'origine pour les valeurs propres de $\lambda_\pm$ pour la linéarisation est indépendante du paramètre β. En résolvant D pour σ,

$$\sigma_\pm = -2\rho + 1 \pm 2\sqrt{\rho^2 - \rho}.$$

L'autre racine du discriminant de l'équation caractéristique a une multiplicité algébrique de deux et est,

$$\sigma_1 = \frac{\beta(\beta - 1)}{\beta + \rho - 1}.$$

Comme $\rho > 0$, nous avons 3 cas à analyser ; $0 < \rho < 1$, $\rho = 1$ et $1 < \rho$. Comme $0 < \sigma$ et $\sigma_\pm < 0$, puisque D est toujours positif.

Pour $0 < \rho < 1$, toutes les valeurs propres sont négatives, donc localement l'origine est un puits. À $\rho = 1$, les valeurs propres sont $0, -(\sigma + 1), -\beta$. Comme zéro est une valeur propre, plus de travail est nécessaire pour déterminer la stabilité locale. Pour $1 < \rho$,

$$-1 - \sigma - \sqrt{D} < 0 < -1 - \sigma + \sqrt{D},$$

et donc l'origine est un nœud selle. En calculant les vecteurs propres ;

$$E_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad E_\pm = \begin{pmatrix}\frac{2s}{s-1\pm\sqrt{4ps+s^2-2s+1}}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Où E_1 et $E_\pm$ correspondent respectivement à λ_1 et $\lambda_\pm$. Sauf pour $\rho = 1$, les vecteurs propres pour la linéarisation seront tangents à la trajectoire proche de l'origine. Donc E_1 est toujours un sous-espace stable pour toutes les valeurs de (σ, ρ, β). Pour $p < 1$, les deux $E_\pm$ sont stables. Pour $\rho > 1$, E_- est stable, tandis que E_+ est instable [19].

3.2.3.2 Stabilité globale

Dans cette section, nous considérons le comportement global du système pour des valeurs de $\rho \neq 1$, $0 < \rho < \rho_h$, où ρ_h sera déterminé plus tard.

- $0 < \rho < 1$:
  Considérons la fonction potentielle

$$V(x, y, z) = \frac{x^2}{\sigma} + y^2 + z^2 \geq 0.$$

Calculons $\dot{V}(x)$,

$$\dot{V}(x(t), y(t), z(t)) = \frac{2x\dot{x}}{\sigma} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z}$$

$$= 2(\rho + 1)xy - x^2 - y^2 - \beta z^2$$

$$= -2\left(x - \frac{\rho+1}{2}y\right)^2 - 2\left(1 - \left(\frac{\rho+1}{2}\right)\right)y^2 - 2\beta z^2.$$

Donc, quand $0 < \rho < 1$, nous avons $1 - \left(\frac{\rho+1}{2}\right) > 0$, donc la fonction potentielle diminue strictement pour des valeurs éloignées de p. Par conséquent, à mesure que $t \to \infty$, $V(t) \to 0$ donc $(x(t), y(t), z(t)) \to p$. Ainsi, l'origine est un attracteur global pour $0 < \rho < 1$.

- $1 < \rho < \rho_h$:
  Observons d'abord que le système est symétrique en (x, y), c'est-à-dire que si $(x(t), y(t), z(t))$ est une solution, alors $(-x(t), -y(t), z(t))$ est également une solution. Les points fixes

$$q_\pm = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho - 1).$$

n'existent que pour $\rho > 1$. En raison de la symétrie, il suffit de considérer uniquement l'un d'entre eux, disons q_+. L'équation caractéristique est

$$c_{A(q_+)}(\lambda) = \lambda^3 + (\beta + \sigma + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \rho)\lambda + 2\beta\sigma(\rho - 1).$$

Donc nous avons les quantités suivantes :

$$\det(A(q_+)) = 2\beta\sigma(\rho - 1)$$

$$\operatorname{tr}(A(q_+)) = -(\sigma + 1 + \beta)$$

$$\operatorname{tr}(A(q_+^2) = -2\beta(\sigma + \rho) - (\sigma + 1 + \beta).$$

En général, le discriminant d'une équation caractéristique cubique est donné par :

$$\begin{aligned} D =& 9(\operatorname{tr}(A))(\operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}^2(A)) \det(A) - 4 \operatorname{tr}^3(A) \det(A) \\ &+ \frac{1}{4} \operatorname{tr}^2(A)(\operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}^2(A)) - \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}^2(A)) - 27 \det(A)^2. \end{aligned}$$

Où si $D > 0$, il y a trois racines réelles distinctes, $D = 0$, il y a une racine multiple et toutes ses racines sont réelles. Si $D < 0$, il y a une racine réelle et deux racines conjuguées complexes. Comme cette expression est horrible, elle sera omise. En suivant le texte : si $\sigma - 1 \leq \beta$, alors la linéarisation de $q_\pm$ est stable. Inversement, si $\sigma > 1 + \beta$, alors la linéarisation de $q_\pm$ est stable pour

$$1 < \rho < \rho_h.$$

3.2.4 Bifurcations

Dans cette sous-sous-section, les deux valeurs de $\rho = 1$ et $\rho = \rho_h$ sont analysées. Soit $\gamma \in \Lambda$ et notons $x = \phi(x, \gamma)$, comme une famille à un paramètre. Les conditions nécessaires pour une bifurcation à un point $p \in \mathbb{R}^3$ et $\gamma_0 \in \Lambda$ sont données par :

$$D_x\phi(\rho, 0) = 0, \quad \phi(\rho, \gamma_0) = 0.$$

3.2.4.1 Bifurcation en fourche supercritique $\rho = 1$

Premièrement, nous avons $\det(A(p)) = \beta\sigma(\rho - 1)$, donc un point de bifurcation est à $\rho = 1$. Comme $\rho < 1$ à $\rho > 1$, le portrait de phase gagne deux points fixes, tandis que l'origine passe de stable à instable. Il est facile de voir que $D_x\phi(\rho, 0) = \phi(0, 1) = 0$, et la symétrie locale $D_x^2\phi(\rho, 0) = 0$. C'est une bifurcation en fourche.

Pour déterminer quel type de bifurcation en fourche il s'agit, nous devons étendre le système. Introduisons un nouveau paramètre, $r = \rho - 1$, nous trouvons

$$\dot{y} = (r+1)x - y - xz.$$

La linéarisation et les valeurs propres restent les mêmes. Auparavant, les valeurs propres étaient calculées comme $\lambda_i = 0, -(\sigma+1), -\beta$. Simplifions les vecteurs propres calculés ci-dessus et écrivons-les dans une matrice T :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Où elles sont ordonnées par $\lambda_i = 0, -(\sigma+1), -\beta$, pour $i = 1, 2, 3$. Notons $D = \text{diag}(\lambda_i)$, une matrice diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale, c'est-à-dire $T^{-1}A(p)T = D$. Soit $u = (u, v, w)$, réécrivons le système comme $\mathbf{F}(u)$ avec la linéarisation,

$$\mathbf{F}(u) = Du + T^{-1}R(Tu),$$

où $R(x) = F(x) - A(p)x$. Calculons,

$$R(Tu) = \begin{pmatrix} 0 \\ (r-w)(sv-u) \\ (sv+u)(u-v) \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}R(Tu) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{1+\sigma}(r-w)(u+\sigma v) \\ \frac{1}{1+\sigma}(r-w)(u+\sigma v) \\ (u+\sigma v)(u-v) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le système étendu devient :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\sigma}{1+\sigma}(r-w)(u+\sigma v) \\ \dot{v} &= -(1+\sigma)v - \frac{1}{1+\sigma}(r-w)(u+\sigma v) \\ \dot{w} &= -\beta w + (u+\sigma v)(u-v) \\ \dot{r} &= 0 \end{aligned}$$

La variété centrale sera de la forme

$$W^c = \{(u, v, w, r) : v = h_1(u, r), w = h_2(u, r), h_i(0, 0) = 0, Dh_i(0, 0) = 0\}.$$

Écrivons les séries de puissances pour h_i jusqu'aux termes quadratiques,

$$h_1(u,r) = a_0 + a_{0,1}u + a_{1,0}r + a_{2,0}u^2 + a_{1,1}ur + a_{0,2}r^2 + \mathcal{O}(3)$$
$$h_2(u,r) = b_0 + b_{0,1}u + b_{1,0}r + b_{2,0}u^2 + b_{1,1}ur + b_{0,2}r^2 + \mathcal{O}(3)$$

Appliquons les conditions $h_i(0,0) = 0, Dh_i(0,0) = 0$ et tronquons la série :

$$h_1(u,r) = a_{2,0}u^2 + a_{1,1}ur + a_{0,2}r^2$$
$$h_2(u,r) = b_{2,0}u^2 + b_{1,1}ur + b_{0,2}r^2$$

Prenons la dérivée par rapport à t et utilisons $\dot{r} = 0$:

$$\dot{h}_1(u,r) = 2a_{2,0}u\dot{u} + a_{1,1}u\dot{r},$$
$$\dot{h}_2(u,r) = 2b_{2,0}u\dot{u} + b_{1,1}u\dot{r}.$$

En substituant ces valeurs pour v et w et en faisant correspondre les coefficients révélés,

$$a_{2,0} = a_{1,1} = a_{0,2} = b_{1,1} = b_{0,2} = 0,$$
$$b_{2,0} = \frac{1}{\beta}.$$

Ce qui reste est :

$$\dot{u} = \frac{\sigma}{1+\sigma}\left(ru - \frac{u^3}{\beta}\right), \quad \dot{r} = 0$$

L'équilibre est stable pour $r \leq 0$ et instable pour $r > 0$, ce qui confirme les résultats précédents de $\rho \leq 1$ et $\rho > 1$, respectivement. Le signe devant le terme cubique est négatif, ce qui indique une bifurcation en fourche supercritique [19].

3.2.4.2 Bifurcation de Hopf sous critique $\rho = \rho_h$

Une bifurcation de Hopf se produit lorsqu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées traverse l'axe imaginaire. Cela signifie que lorsque $\rho < \rho_h$ passe à $\rho > \rho_h$, les parties réelles des valeurs propres s'annulent à $\rho = \rho_h$. L'équation caractéristique en $q_\pm$ a été calculée précédemment comme étant :

$$c_{A(q_\pm)}(\lambda) = \lambda^3 + (\beta+\sigma+1)\lambda^2 + \beta(\sigma+\rho)\lambda + 2\beta\sigma(\rho-1)$$

En insérant ρ_h et en résolvant, les valeurs propres sont obtenues,

$$\lambda_1 = -(\beta+\sigma+1), \quad \lambda_\pm = \pm\sqrt{\frac{2\sigma(\sigma+1)}{\sigma-\beta-1}}$$

C'est une bifurcation de Hopf. La valeur de ρ_h peut être facilement déterminée en considérant des racines purement imaginaires. Soit $\lambda = \mu i$, pour $\mu \in \mathbb{R}$, en réinsérant ceci dans l'équation caractéristique,

$$c_{A(q_\pm)}(\mu i) = -\mu^3 - (\beta + \sigma + 1)\mu^2 + \beta(\sigma + \rho)\mu + 2\beta\sigma(\rho - 1) = 0$$

En prenant les parties réelles et imaginaires, cela révèle que

$$\mu^2 = \frac{2\sigma\beta(\rho - 1)}{\sigma + \beta + 1}, \quad \mu^3 = \mu\beta(\sigma + \rho)$$

Comme $\mu \neq 0$, en égalisant les deux expressions et en résolvant pour ρ, ρ_h est trouvé pour être

$$\rho_h = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}$$

Comme les vecteurs propres sont difficiles, ils seront omis. Remarquez plutôt que si $\rho > 1$, l'équation caractéristique $c_{A(q_\pm)}(\lambda)$ n'a que des coefficients positifs. Comme l'origine est instable. Nous pouvons conclure, des polynômes symétriques élémentaires, que si les racines sont réelles, elles doivent être négatives. Ainsi, les points $q_\pm$ sont stables pour les valeurs propres réelles. Cela confirme ce qui est dit dans la section 4.2.2. Après quelques calculs horribles omis, pour $\rho_h < \rho$, les deux points critiques $q_\pm$ ont une variété instable bidimensionnelle et une variété stable bidimensionnelle. À $\rho = \rho_h$, il y a une variété centrale bidimensionnelle. L'algèbre pour cela est très difficile, mais en faisant cela, nous avons que pour $\sigma > \beta + 1$, la bifurcation est subcritique. Les points stables pour $q_\pm$ perdent leur stabilité en absorbant une orbite périodique instable.

3.2.5 Ensembles d'attraction étranges

Un attracteur étrange est une région dans l'espace qui est invariante sous l'évolution du temps et attire la plupart des trajectoires et a une sensibilité élevée aux conditions initiales. Pour $1 < \rho$, il existe une variété stable contenant p qui divise les courbes intégrales. Ces courbes spirales vers $q_\pm$. Lorsque ρ approche ρ_h, les trajectoires deviennent des spirales plus grandes. Comme $\rho > \rho_h$, les trajectoires d'un côté de la variété stable de l'origine traversent et commencent à spiraler vers l'autre côté.

3.2.5.1 Orbites homoclines

Si une trajectoire $\phi(x, \gamma^*)$ commence à un point x_0, non sur la variété stable, et atteint x_1 en un certain temps t_1, on s'attendrait à ce qu'une petite perturbation de la condition initiale $\phi(x, \gamma^*)$ commençant à $x_0 \pm \epsilon$ atteigne un voisinage de x_1 en même temps t_1.

Comme la variété stable inclut l'axe z, s'en écarter enverra une trajectoire vers $q_{\pm}$ en fonction de la direction de la perturbation. Ce qui est inattendu, c'est qu'une petite perturbation dans l'espace paramétrique, $\phi(x, \gamma^* \pm \delta)$, pour des valeurs spécifiques de γ_k provoquera la trajectoire vers un autre point fixe. Par exemple,

$$\phi(x, (\rho^*, \sigma, \beta)) \to q_+,$$

tandis que

$$\phi(x, (\rho^* + \delta, \sigma, \beta)) \to q_-.$$

Le changement de direction après une si petite variation dans l'espace des paramètres peut s'expliquer par une orbite homocline. En raison de la sensibilité aux erreurs d'arrondi et de la limite de précision de la machine, ces orbites sont difficiles à calculer numériquement. Cependant, elles peuvent être observées numériquement avec de petites perturbations dans l'espace paramétrique. Pour cette raison, on peut s'attendre à ce qu'une bifurcation homocline se produise. À ma connaissance, il n'existe pas de preuve analytique sur le moment où des orbites homoclines apparaissent, en général. La preuve pour des cas spécifiques est donnée dans [17], [18].

3.2.5.2 Application de Poincaré

Définition 3.1. L'application de Poincaré est une fonction mathématique utilisée pour transformer un système dynamique continu en un système discret en suivant les points d'intersection des trajectoires avec une surface de section transverse donnée.

L'application de Poincaré P est définie comme la fonction qui prend un point x_0 et le transforme en x_1, où la trajectoire $\Phi_t(x)$ coupe à nouveau la surface transverse S pour la première fois :

$P(x_0) = \Phi_{\tau(x_0)}(x_0)$

où $\tau(x_0)$ est le plus petit temps positif tel que $\Phi_{\tau(x_0)}(x_0) \in S$.

Définition 3.2. Un point périodique de l'application de Poincaré est un point x^* qui satisfait :

$P(x^*) = x^*$

ce qui signifie que l'orbite coupe la surface S au même point à chaque itération, correspondant ainsi à une orbite périodique dans le système d'origine.

Si le point revient à lui-même après k itérations, il est appelé **point périodique d'ordre** k :

$P^k(x_0) = x_0$

Définition 3.3. La stabilité des points périodiques dans l'application de Poincaré est déterminée par le calcul de la **matrice jacobienne** $DP(x^*)$ en x^*.

— Si toutes les valeurs absolues des valeurs propres de $DP(x^*)$ sont inférieures à 1, alors le point périodique est **stable**.

— Si l'une des valeurs propres a une valeur absolue supérieure à 1, alors le point périodique est **instable**.

Définition 3.4. Dans l'application de Poincaré, une orbite homoclinique apparaît comme des points d'intersection entre la **variété stable** et la **variété instable** du système.

Nous pouvons déduire l'existence d'une orbite homocline à partir de l'application de Poincaré. Supposons que pour un ensemble de paramètres, nous puissions construire la surface suivante : Soit S une surface contenant les points fixes q_+ et leur variété stable de telle sorte que S intersecte la variété stable 2D à l'origine le long de certaines courbes $c(t)$. Choisissons S de sorte que toute trajectoire commençant dans S retourne dans S. Cela définit une application de Poincaré, sur $S \setminus c(t)$. Notons $F = P(S) \cap S$ comme l'application de récurrence. Premièrement, la courbe $c(t)$ est transformée en deux points par F, appelons-les $c_\pm$. Par construction, $c_\pm$ sont là où la variété instable de l'origine frappe S pour la première fois. Maintenant, en fixant un système de coordonnées sur S, disons (u, v), et laissons $u = 0$ définir la courbe $c(t)$. Écrivons F comme,

$$F(u, v) = (f(u), g(u, v)).$$

Maintenant, si l'application de récurrence F peut être remplie par un continuum d'arcs, de sorte que chaque arc soit pris par la carte de retour à un autre arc, alors c'est un feuilletage contractant. En supposant ceci, $0 < g_u(u, v) < 1$ pour $u \neq 0$ alors que $g \to 0$ et $u \to 0$. Nous voulons observer le comportement de la solution alors que ρ augmente jusqu'à ρ^* et au-delà, pour certaines valeurs ρ^* [10].

3.2.5.3 Comportement asymptotique

Le chaos disparaît pour ρ assez grand. Posons $\epsilon = \rho^{-1/2}$, et considérons le changement d'échelle.

$$x = u/\epsilon, \quad y = v/(\epsilon^2\sigma), \quad z = (w/\sigma + 1)/\epsilon^2, \quad t = \epsilon\tau.$$

Avec ce changement d'échelle, le système devient :

$$\begin{cases} \dot{u} = v - \sigma\epsilon u, \\ \dot{v} = -uv - \epsilon v, \\ \dot{w} = wv - \beta\epsilon(w + \sigma) \end{cases}$$

En regardant les termes du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -uv, \\ \dot{w} = wv \end{cases}$$

cela conduit à une paire de courbes intégrales

$$u^2 - 2v = 2\alpha_1, \quad v^2 + w^2 = \alpha_2^2.$$

Nous avons donc l'équation différentielle qui représente une intégrale elliptique :

$$\dot{w} = \left(2(\alpha_2 - w)(w + \alpha_2)(w + \alpha_1)\right)^{1/2}.$$

La solution de cette équation est toujours périodique [10], [19].

3.2.6 Remarques

L'ensemble attracteur a une structure de type Cantor. Un attracteur étrange est défini comme ayant une dimension non entière. Pour caractériser un attracteur étrange, on utilise plusieurs notions de dimensions fractales, parmi lesquelles :

3.2.6.1 Dimension de Minkowski–Bouligand d_M

Aussi appelée **dimension de capacité**, elle est basée sur le nombre de cubes ou de boules nécessaires pour recouvrir un ensemble.

$N_\epsilon(S)$ est le nombre minimal de boules de rayon ϵ nécessaires pour recouvrir S.

La **dimension de Minkowski** est donnée par :

$$d_M = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N_\epsilon(S)}{\log(1/\epsilon)}$$

3.2.6.2 Dimension de corrélation d_C

Elle est définie en utilisant la fonction de corrélation $C(\epsilon)$, qui donne la probabilité que deux points aléatoires soient à une distance inférieure à ϵ :

$$C(\epsilon) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \Theta(\epsilon - ||x_i - x_j||)$$

où Θ est la fonction échelon de Heaviside.

La **dimension de corrélation** est alors définie par :

$$d_C = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log C(\epsilon)}{\log \epsilon}$$

3.2.6.3 Dimension de Hausdorff d_H

La dimension de Hausdorff est définie à l'aide de la **mesure de Hausdorff**, qui est donnée par :

$$\mathcal{H}^s(S) = \lim_{\delta\to 0} \inf \sum_i |U_i|^s$$

où $\{U_i\}$ est un recouvrement de S par des boules de diamètre $|U_i| \leq \delta$.

La **dimension de Hausdorff** d_H est la valeur critique s pour laquelle la mesure de Hausdorff passe de ∞ à 0 :

$$d_H = \sup\{s \mid \mathcal{H}^s(S) = \infty\}$$

L'attracteur étrange de Lorenz a une dimension de Hausdorff estimée à environ 2.06, ce qui reflète sa structure fractale et sa dynamique chaotique [16]. Cet attracteur contient une infinité dénombrable d'orbites périodiques non stables ainsi qu'une infinité non dénombrable d'orbites apériodiques et de trajectoires qui se terminent à l'origine. Un résultat intéressant est que chaque "explosion" homoclinique crée un nouvel ensemble invariant étrange, impliquant ainsi l'existence d'un nombre non dénombrable d'attracteurs distincts topologiquement dans n'importe quel voisinage arbitraire d'un donné.

3.2.7 Simulations numériques

Pour toutes les figures, le paramètre sera désigné par un triplet d'ordre $\gamma = (\rho, \sigma, \beta)$. Sauf indication contraire, σ, β seront fixés à $\sigma = 10$, et $\beta = 8/3$. La condition initiale sera désignée par $\mathbf{x_0}$. Comme le système a des paramètres du même ordre de grandeur, il s'agit d'un système non rigide. Les emplacements des conditions initiales dans toutes les figures sont donnés par un point noir. L'intervalle de temps montré pour toutes les figures est $T = [0, 100]$, sauf indication contraire [19].

3.2.7.1 Globalement stable, $0 < \rho < 1$

Plusieurs tests montrent une convergence globale pour diverses valeurs des paramètres avec $0 < \rho < 1$, et diverses conditions initiales, comme illustré dans la figure 3.1.

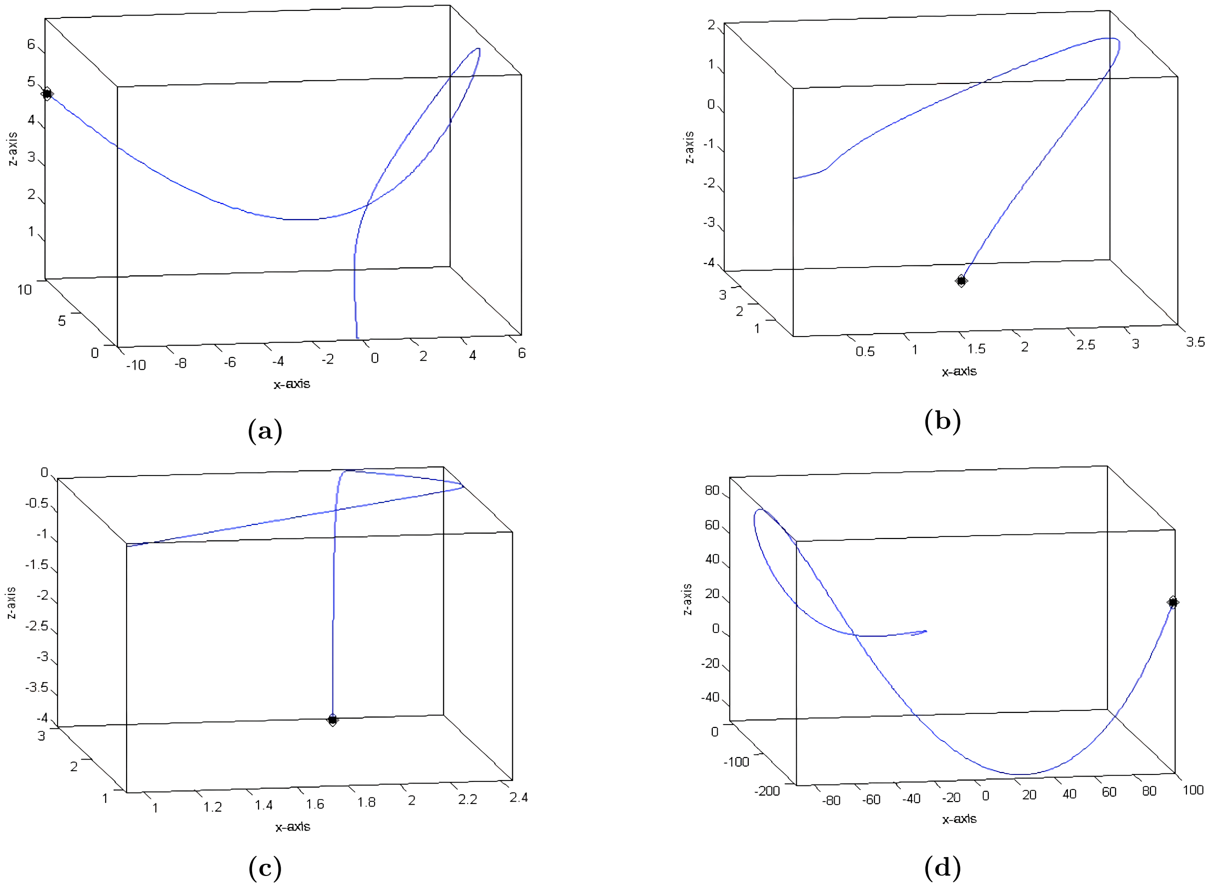
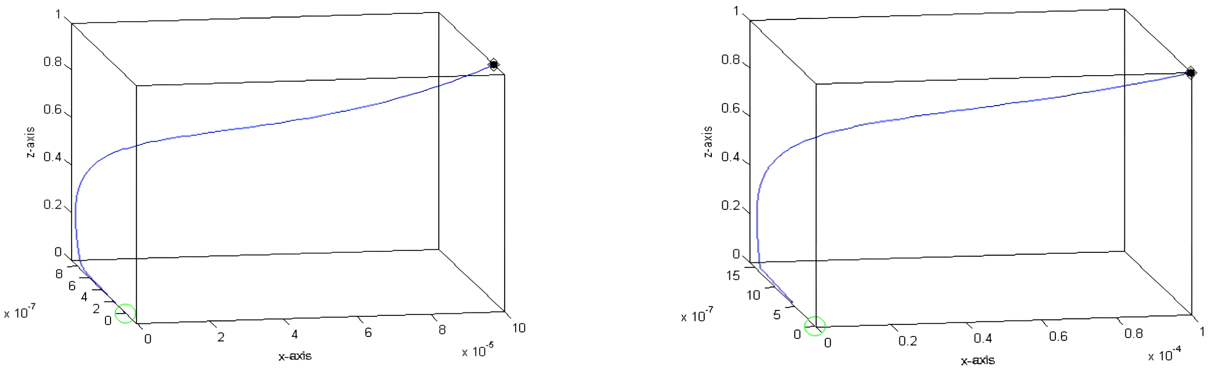


Figure 3.1: Comportement stable du système pour différentes valeurs des paramètres et des conditions initiales , (a) : Stable, $\gamma = (9/10, 10, 8/3)$, $x_0 = (-10, 10, 5)$, (b) : Stable, $\gamma = (9/10, 10, 8/3)$, $x_0 = (2, 3, -4)$, (c) : Stable, $\gamma = (9/10, 1, 100)$, $x_0 = (2, 3, -4)$, (d) : Stable, $\gamma = (9/10, 30, 100)$, $x_0 = (100, -200, 50)$.

3.2.7.2 Bifurcation en fourche, $\rho = 1$

Comme l'axe des z est stable, les conditions initiales sont prises proches. La bifurcation peut être observée lorsque ρ passe de 0.9 à 1.2. L'origine n'est plus stable pour $\rho > 1$. Pour la Figure 3.2, les valeurs pour ρ sont juste en dessous de 1. Bien que difficile à voir, la trajectoire de chaque courbe se courbe encore vers l'origine. Pour la Figure 3.3,

$\rho = 1.01$, la solution se dirige vers l'axe y et vers le plan xy ; lorsqu'elle atteint le plan xy, elle s'éloigne de l'origine. Pour la figure de droite, comme les données initiales sont une petite perturbation hors de l'axe des z, et que l'axe des z est stable, la trajectoire se dirige vers l'origine. Lorsqu'elle s'en approche suffisamment, elle s'éloigne vers le point d'équilibre q_+.

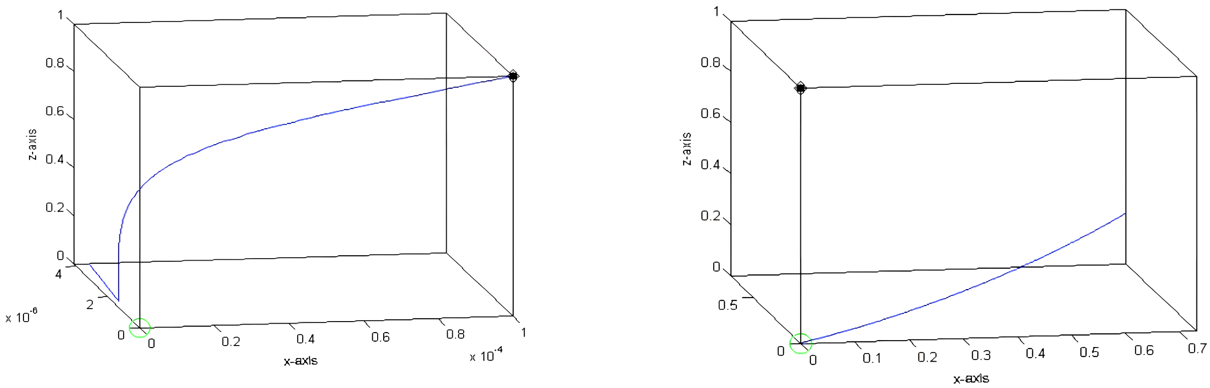


(a) **(b)**

Figure 3.2: $x_0 = (1.e-4, 0, 1)$, (a) : $\gamma = (9/10, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (99/100, 10, 8/3)$).

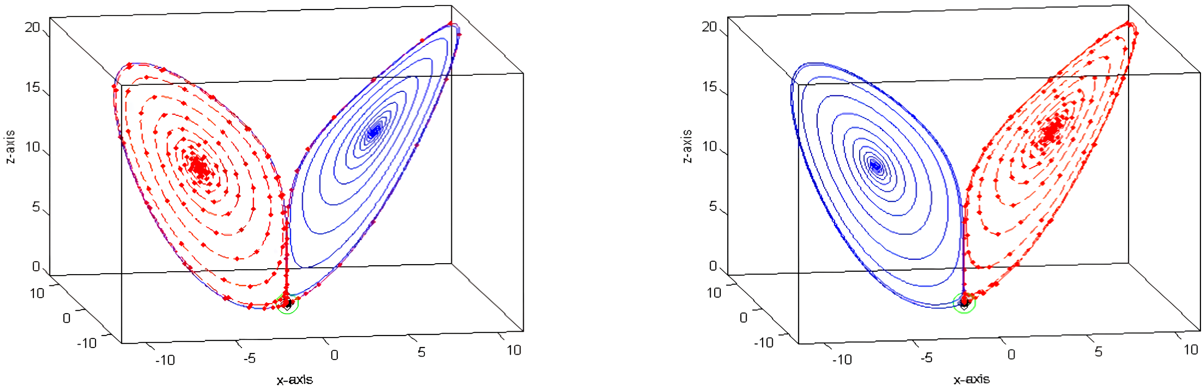
3.2.7.3 Orbite homoclinique

Les Figures 3.4 et 3.5 illustrent la sensibilité aux données initiales et aux paramètres. $\rho = 13.92695741$ à $\rho + 1 = 0.9$, modifie complètement la trajectoire. Cela suggère une orbite homocline. Dans la Figure 3.6a montre une trajectoire sur la variété stable, la figure 3.6b montre la trajectoire se courbant autour de q_-. Ce comportement est étrange, puisque l'analyse montre que les deux points fixes sont stables.



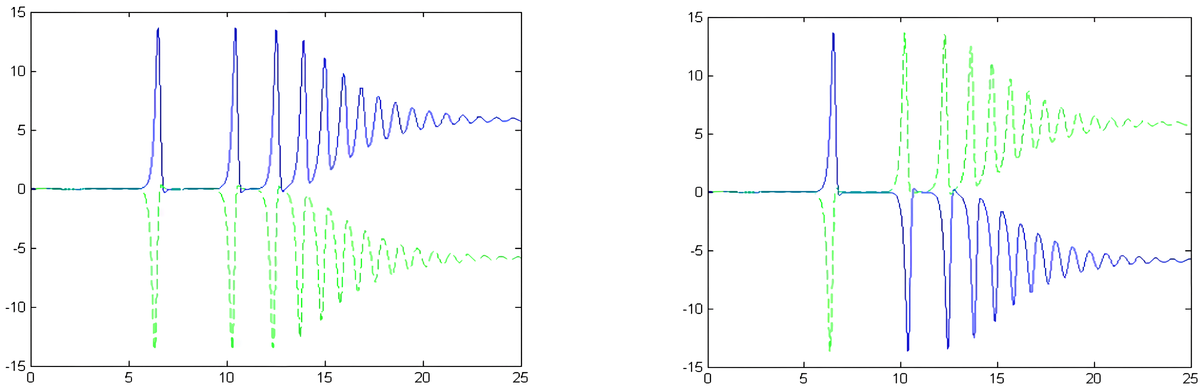
(a) **(b)**

Figure 3.3: $x_0 = (1.01, 0, 1)$, (a) : $\gamma = (9/10, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (1.2, 10, 8/3)$).



(a) **(b)**

Figure 3.4: Courbes rouges avec des points : $x_0 = (1 \times 10^{-16}, 1 \times 10^{-16}, 1 \times 10^{-16})$. Courbe bleue continue : $x_0 = (1 \times 10^{-16}, -1 \times 10^{-16}, 1 \times 10^{-16})$, (a) : $\gamma = (13.92655741, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (13.92655742, 10, 8/3)$

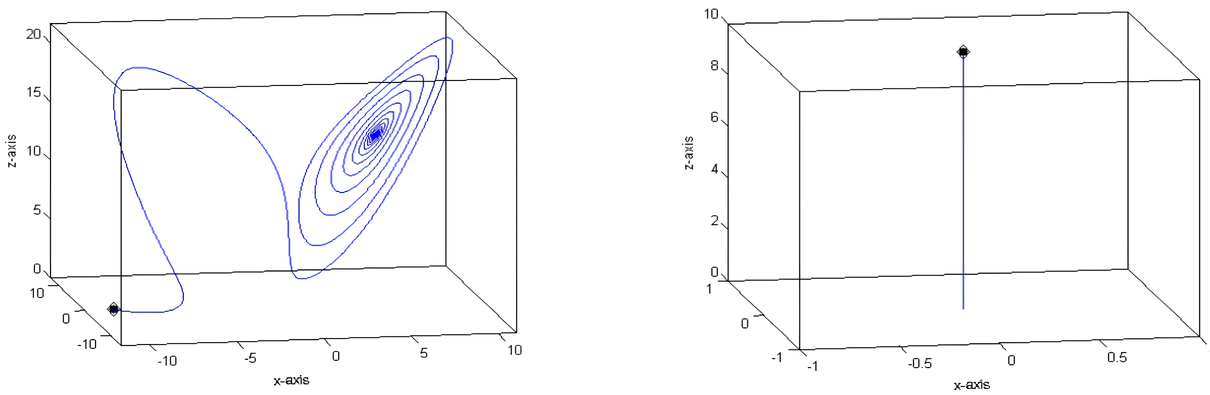


(a) **(b)**

Figure 3.5: Graphiques de la coordonnée y en fonction du temps : Vert en tirets : $x_0 = (10^{-16}, -10^{-16}, 10^{-16})$, Bleu continu : $x_0 = (10^{16}, 10^{-16}, 10^{-16})$. (a) : $\gamma = (13.92655741, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (13.92655742, 10, 8/3)$.

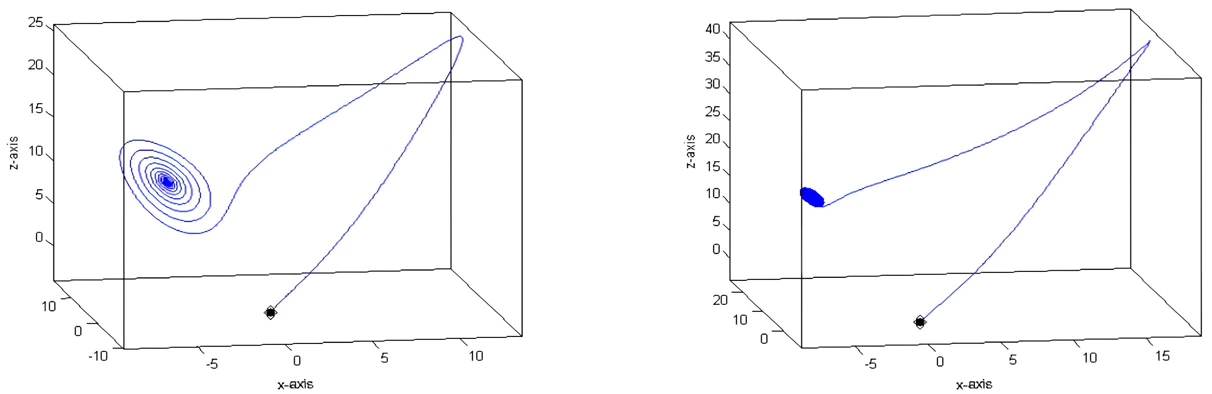
3.2.7.4 Vers le chaos

Deux simulations sont effectuées avec $\rho = 15$ et $\rho = 24$. Pour la Figure 3.7 la condition initiale est fixée à $x_0 = (1, 2, -4)$. À mesure que ρ augmente de 14 à 24, le transitoire met plus de temps à s'enrouler autour de q_1, avant de se poser dans un cycle limite autour de q^-. Pour la Figure 3.8, la condition initiale est fixée à $q^+ + 1.e^{-5}\hat{j}$, où $\hat{j}$ est le vecteur unitaire dans la direction y. À mesure que ρ augmente de 14 à 24, le cycle limite autour de q^- forme des orbites plus grandes.



(a) **(b)**

Figure 3.6: $\gamma = (13.92655741, 10, 8/3)$, (a) : $x_0 = (-10, 0, 0)$, (b) : $x_0 = (0, 0, 10)$.



(a) **(b)**

Figure 3.7: $x_0 = (1, 2, -4)$, (a) : $\gamma = (15, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (24, 10, 8/3)$.

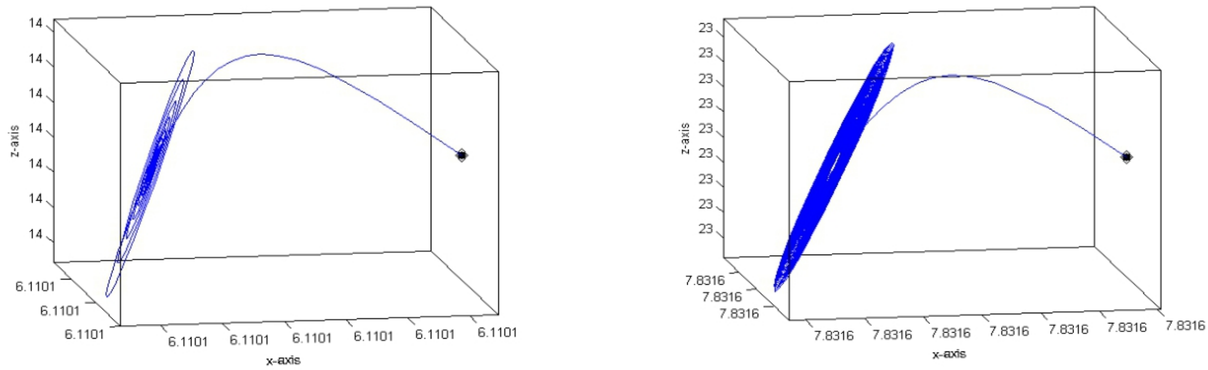
3.2.7.5 Chaos

Pour les Figures 3.9, 3.10, $\rho = 28$. La Figure 3.9 illustre une sensibilité à la condition initiale. La condition initiale $\mathbf{x}_0 = (1, 2, -4)$ est prise, puis perturbée à $\mathbf{x}_n = (1 + 1.e, 7, -2, 4)$. Les trajectoires restent proches pendant un certain temps, puis commencent à exhiber un comportement chaotique. La Figure 3.10 montre un comportement chaotique typique.

3.3 Système de Rössler

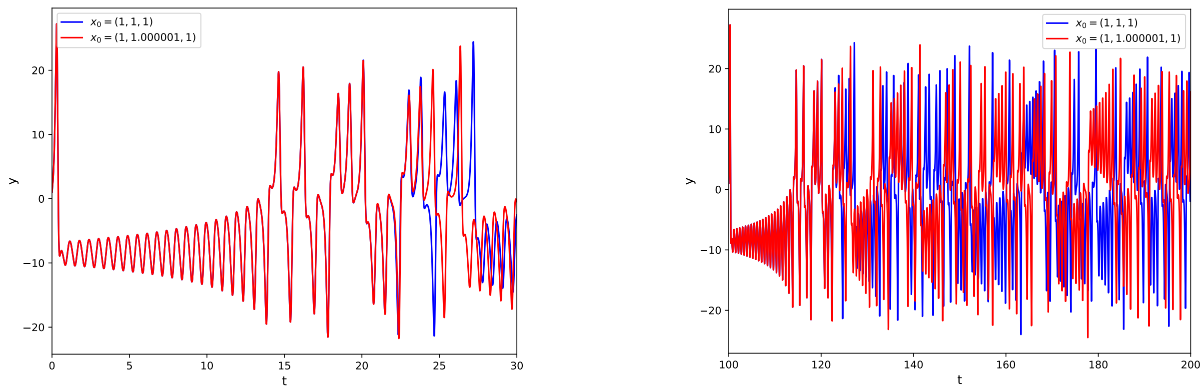
3.3.1 Présentation du modèle

Le système de Rössler est un système dynamique chaotique à trois dimensions découvert par le chimiste allemand Otto Rössler en 1976 [50]. Il s'agit d'un exemple simple



(a) **(b)**

Figure 3.8: $x_0 = (1, 2, -4)$, (a) : $\gamma = (15, 10, 8/3)$, (b) : $\gamma = (24, 10, 8/3)$.



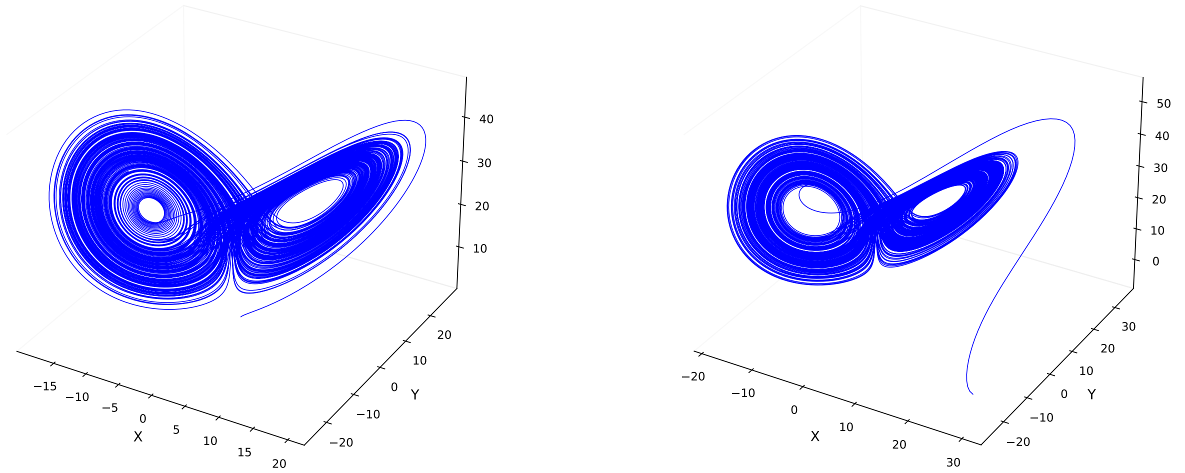
(a) **(b)**

Figure 3.9: Mettre en évidence la grande sensibilité aux conditions initiales dans le système de Lorenz, (a) Avec deux conditions initiales différentes, y en fonction du temps sur l'intervalle de 0 à 30, (b) Avec deux conditions initiales différentes, y en fonction du temps sur l'intervalle de 100 à 200.

de système chaotique et d'attracteur étrange, qui est souvent utilisé comme banc d'essai pour tester les nouvelles techniques d'analyse de la dynamique non linéaire [61]. Le système de Rössler est décrit par trois équations différentielles ordinaires couplées, qui décrivent l'évolution de trois variables d'état x, y et z dans le temps. Ces équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \tag{3.24}$$

où a, b et c sont des paramètres constants qui déterminent la forme de l'attracteur étrange [58].



(a) **(b)**

Figure 3.10: Mettre en évidence le comportement chaotique du système de Lorenz avec deux conditions initiales différentes, (a) $x_0 = (1, 1, 1)$, (b) $x_0 = (30, -25, 1)$.

Le système de Rössler possède des propriétés intéressantes telles que la sensibilité aux conditions initiales, la récurrence, et la topologie de l'attracteur étrange. Les simulations numériques du système de Rössler ont montré que les trajectoires du système peuvent être très complexes et se comporter de manière imprévisible. Cela rend le système de Rössler utile pour étudier les phénomènes chaotiques et les systèmes non linéaires en général [51].

3.3.2 Calcul des points d'équilibres

Pour trouver les points fixes, les trois équations du système de Rössler sont posées égales à zéro, le système est alors résolu et donne le résultat suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) = 0 & (1) \\ \dot{y} = x + ay = 0 & (2) \\ \dot{z} = b + xz - cz = 0 & (3) \end{cases}$$

— (1) donne : $y = -z$.

— en remplace (1) dans (2) donne : $x = -ay = az$.

— (3) donne :

$$az^2 - cz + b = 0 \Rightarrow \Delta = c^2 - 4ab.$$

— Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $c^2 > 4ab$:

$$z_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \\
y_{1,2} &= -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \\
z_{1,2} &= \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a},
\end{aligned}$$

donc Les points fixes P_1 et P_2 sont :

$$P_1 = \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -c, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right),$$

$$P_2 = \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -c, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right).$$

— Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $c^2 = 4ab$:
  il n'y a qu'un seul point d'équilibre :

$$z = \frac{c}{2a}.$$

  Donc :

$$P_3 = \left(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2a}, \frac{c}{2a} \right).$$

— Si $\Delta < 0$: aucun point d'équilibre n'existe.

3.3.3 Stabilité des points d'équilibres

La stabilité des points d'équilibre est évaluée en effectuant une linéarisation du flot dans le voisinage de ces points, puis en déterminant les valeurs propres, désignées par λ_i, de la matrice jacobienne en ces points. L'expression de la matrice jacobienne est la suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix};$$

et $\det(J - \lambda I)$ est donnée par :

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ z & 0 & x-c-\lambda \end{vmatrix};$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + (a + x - c)\lambda^2 + (ac - ax - 1 - z)\lambda + x - c + az = 0.$$

— **Pour** P_1 :
les valeurs propres associées au premier point fixe P_1 des paramètres $a = 0.2$, $b = 0.2$ et $c = 5.7$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0971 + 0.9957i, \\ \lambda_2 &= 0.0971 - 0.9957i, \\ \lambda_3 &= -5.6872. \end{aligned}$$

Les deux paires valeurs propres (λ_1 et λ_2) ont parties réelles positives. Alors, le premier point fixe P_1 est instable.

— **Pour** P_2 :
les valeurs propres associées au deuxième point fixe P_2 des paramètres $a = 0.2$, $b = 0.2$ et $c = 5.7$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.0000046 + 5.4280259i, \\ \lambda_2 &= -0.0000046 - 5.4280259i, \\ \lambda_3 &= 0.1929830. \end{aligned}$$

La troisième valeur propre λ_3 est positive, alors le point P_2 est instable.

— **Pour** P_3 :
la valeur propre associée au troisième point fixe P_3 des paramètres $a = 0.2$, $b = 0.2$: et $c = 5.7$:

$$\lambda = 0$$

la valeur propre λ est nulle, le point P_3 n'est pas hyperbolique, donc ne peut rien dire sur la stabilité.

3.3.4 Bifurcation

Le comportement de l'attracteur de Rössler dépend largement de ses paramètres constants (a, b, c) [27, 37]. En général, la variation de chaque paramètre a un effet comparable en amenant le système à converger vers une orbite périodique, un point fixe ou à s'échapper vers l'infini, mais les comportements spécifiques varient considérablement pour chaque paramètre [35]. Les orbites périodiques, ou "cycles unitaires", du système de Rössler sont définies par le nombre de boucles autour du point central qui se produisent avant que la série de boucles ne commence à se répéter.

3.3.4.1 Changement de la valeur du paramètre *a*

Nous étudions le comportement de l'attracteur de Rössler pour différentes valeurs de (a), tandis que les deux autres paramètres sont fixes ($b = 0.2$ et $c = 5.7$).

- $a \leq 0$: Le système converge vers le point fixe central.
- $a = 0.1$: Une orbite périodique de période 1, également appelée "cycle unitaire".
- $a = 0.2$: Une valeur standard du paramètre sélectionnée par Rössler pour le chaos.
- $a = 0.3$: Un attracteur chaotique, souvent représenté comme une bande de Möbius.
- $a = 0.35$: Le même comportement est observé pour (a) égal à 0.3, mais avec un degré de chaos croissant.
- $a = 0.38$: Le même comportement est observé pour (a) égal à 0.35, mais avec un degré de chaos croissant. Si la valeur de (a) devient même légèrement supérieure à 0.38, cela peut provoquer le blocage de MATLAB. [60]

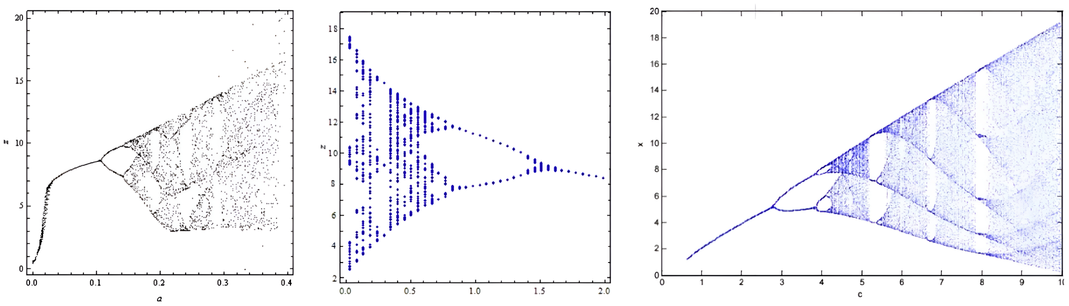
3.3.4.2 Changement de la valeur du paramètre *b*

L'effet de b sur le comportement de l'attracteur de Rössler est mieux illustré à travers un diagramme de bifurcation. Ce diagramme de bifurcation a été créé avec $a = 0.2$ et $c = 5.7$. Comme le montre le diagramme ci-joint, lorsque b approche de 0, l'attracteur approche de l'infini (notez la courbe ascendante pour de très petites valeurs de b). Comparativement aux autres paramètres, la variation de b semble générer une plus grande plage où des orbites périodiques de période 3 et 6 se produiront. Contrairement à a et c, les systèmes de valeurs plus élevées de b convergent vers une orbite de période 1 plutôt que vers des orbites de niveau supérieur ou des attracteurs chaotiques. [60]

3.3.4.3 Changement de la valeur du paramètre *c*

Le diagramme de bifurcation traditionnel pour l'attracteur de Rössler est créé en faisant varier c avec $a = b = 0.2$. Ce diagramme de bifurcation révèle que les faibles valeurs de c sont périodiques mais deviennent rapidement chaotiques lorsque c augmente. Ce modèle se répète à mesure que c augmente - il y a des sections de périodicité entrecoupées de périodes de chaos, bien que la tendance soit à des orbites périodiques d'ordre supérieur dans les sections périodiques à mesure que c augmente. Par exemple, l'orbite de période une n'apparaît que pour des valeurs de c autour de 2.7 et ne se retrouve plus jamais dans le diagramme de bifurcation. Le même phénomène est observé avec la période trois jusqu'à $c = 5.3$, des orbites de période trois peuvent être trouvées, mais par la suite, elles n'apparaissent pas [60].

3.3.4.4 Représentation graphique



(a) (b) (c)

Figure 3.11: Diagrammes de bifurcation du système de Rössler, (a) Pour a varié, (b) Pour b varié, (c) Pour c varié.

3.3.5 Projection $x - y$ du système de Rössler

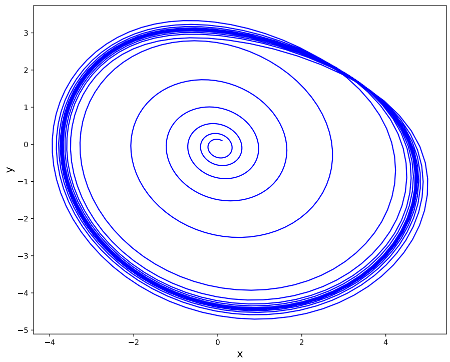
L'ensemble de figures ci-dessus illustre les variations du système de Rössler après le transitoire lorsque c varie. Ces figures ont été générées avec $a = b = 0.2$, où :

— $c = 2.5$: l'attracteur est une cycle limite simple.

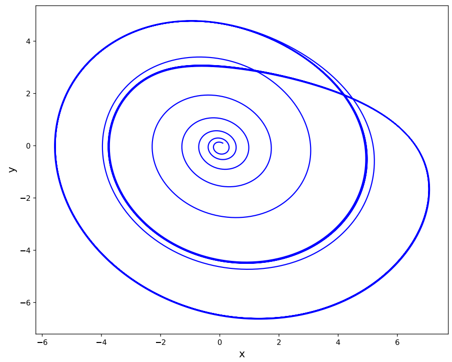
— $c = 3.5$: doublement de période dans un système en temps continu. Ainsi, une bifurcation par doublement de période des cycles doit s'être produite quelque part entre 2.5 et 3.5.

— $c = 4$: une autre bifurcation par doublement de période crée la boucle à 4 lobes représentée à $c = 4$.

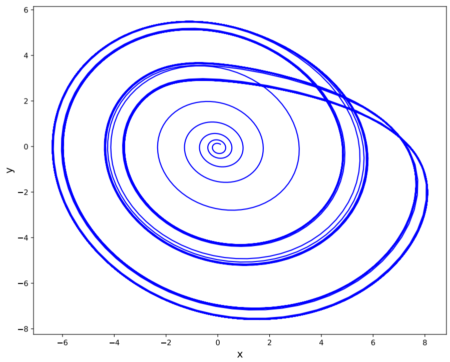
— $c = 5$: après une cascade infinie de nouveaux doublements de période, on obtient l'attracteur étrange représenté à $c = 5$.



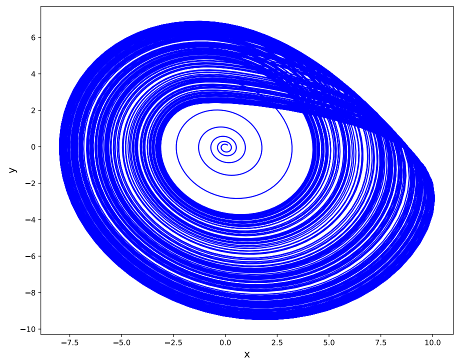
(a)



(b)



(c)



(d)

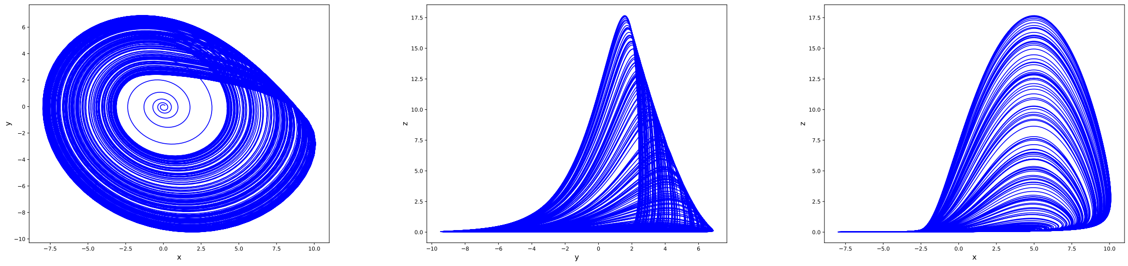
Figure 3.12: Projection du système de Rössler sur le plan $x - y$ pour différents paramètres c.

3.3.6 L'attracteur de Rössler

Le graphe représente l'attracteur du système de Rössler, un système dynamique célèbre qui présente un comportement dynamique complexe, y compris des filaments et des oscillations non régulières. Le graphe montre la propriété attractive de ce système, qui est stable dans l'état initial et devient instable lorsque la valeur du paramètre b est augmentée [51].

À partir du graphe résultant, on peut également observer la caractéristique filamentaire distincte du système de Rössler, qui se manifeste par la déviation angulaire qui apparaît sur la trajectoire tracée par le système dans l'espace tridimensionnel. Cette caractéristique filamentaire est ce qui rend ce système intéressant dans de nombreux domaines, notamment la physique, l'ingénierie, la biologie, la chimie et de nombreux autres domaines [61].

En général, ce graphe est une représentation efficace des caractéristiques dynamiques du système de Rössler et peut être utile pour comprendre le comportement dynamique des systèmes similaires et multidimensionnels [51].



(a) (b) (c)

Figure 3.13: Représentation des projections de l'attracteur chaotique de Rossler sur les trois plans

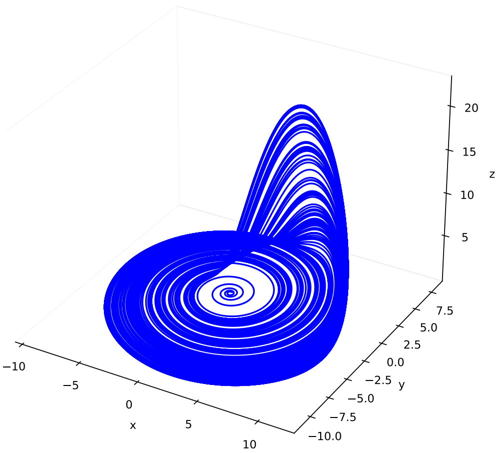


Figure 3.14: Représentation 3D de l'attracteur chaotique de Rössler

3.4 Système chaotique à quatre-scroll

Dans cette section, nous présentons une étude d'un nouveau système chaotique tridimensionnel, caractérisé par la présence de quatre scrolls dans sa structure. Ce système constitue non seulement une contribution qualitative aux systèmes chaotiques quadratiques, mais il offre également un modèle unique pouvant être utilisé pour comprendre les systèmes à équilibres multiples et leurs applications dans le calcul chaotique et les systèmes complexes. Cette recherche discute les propriétés de ce système chaotique, y compris sa structure mathématique et ses comportements dynamiques. Les études récentes ont montré un développement important dans l'analyse des systèmes à attracteurs multiples. Par exemple, Xu et al. (2023) ont proposé un nouveau système chaotique avec des applications telles que la conception de circuits et l'analyse cryptographique [30]. De plus, l'étude de Bao et al. (2023) sur les systèmes à base de memristor a démontré la possibilité de générer des attracteurs multiples en utilisant des équations différentielles simples [41]. En outre, Kengne et al. (2022) ont discuté de l'impact des paramètres initiaux sur la stabilité des équilibres dans les circuits chaotiques [31].

3.4.1 Structure algébrique du système

Le système d'équations différentielles est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - y_1z_1 \\ \dot{y}_1 = -by_1 + x_1z_1 \\ \dot{z}_1 = -cz_1 + x_1y_1 \end{cases} \tag{3.25}$$

où a, b et c sont des constantes réelles, elle a été choisie comme suit : $a = 0.4, b = 12 etc = 5$ [40].

3.4.2 Analyse dynamique du système

3.4.2.1 Dissipativité

Nous calculons la divergence :

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_1}$$

En substituant, nous obtenons

$$\nabla V = a - b - c = 0.4 - 12 - 5 = -16.5$$

Ainsi,

$dV(t) = V(0)e^{-16.5t}$

Donc, le système 3.25 est dissipatif et son volume se réduit à zéro lorsque $t \to \infty$ avec un taux exponentiel de -16.5. Par conséquent, toutes les orbites du système 3.25 sont finalement confinées à un sous-ensemble de volume nul, et le mouvement asymptotique se stabilise sur un attracteur.

3.4.2.2 Points d'équilibre et stabilité

Pour trouver les points d'équilibre, nous posons $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{y}_1 = 0$ et $\dot{z}_1 = 0$ et résolvons le système algébrique résultant :

$$\begin{cases} ax_1 - y_1 z_1 = 0 \\ -by_1 + x_1 z_1 = 0 \\ -cz_1 + x_1 y_1 = 0 \end{cases}$$

En résolvant ces équations, nous trouvons que la seule solution possible dans ce cas est : $P = (0, 0, 0)$.

Pour calculer la matrice jacobienne du système au point d'équilibre, nous calculons les dérivées partielles de chaque équation par rapport aux variables x_1, y_1 et z_1.

La matrice jacobienne est donnée par :

$$J_{x_1,y_1,z_1} = \begin{bmatrix} a & -z_1 & -y_1 \\ z_1 & -b & x_1 \\ y_1 & x_1 & -c \end{bmatrix}$$

Au point d'équilibre P, la matrice jacobienne devient :

$$J_P = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique pour la matrice jacobienne au point d'équilibre est :

$$|J_P - \lambda I| = 0$$

où λ représente les valeurs propres de la matrice. Cela nous donne l'équation suivante :

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = -b, \quad \lambda_3 = -c.$$

Après avoir substitué les valeurs numériques des paramètres choisis, nous trouvons :

- Valeur propre $\lambda_1 = 0.4 > 0$, indiquant que le système est instable dans la direction correspondant à cette valeur propre.
- Valeurs propres $\lambda_2 = -12 < 0$ et $\lambda_3 = -5 < 0$, indiquant la stabilité dans les autres directions.

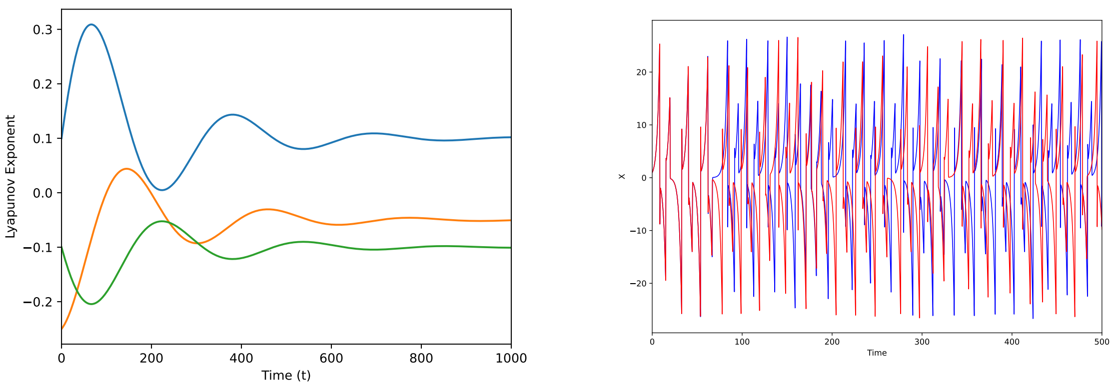
Ainsi, nous pouvons conclure que le point d'équilibre $S = (0, 0, 0)$ est généralement instable en raison de la présence d'une valeur propre positive.

3.4.2.3 Sensibilité aux conditions initiales et exposants de Lyapunov

La sensibilité aux conditions initiales est l'une des caractéristiques fondamentales des systèmes chaotiques et est directement liée aux exposants de Lyapunov.

Si le plus grand exposant de Lyapunov est positif, cela signifie que les trajectoires partant de points initiaux très proches s'éloigneront l'une de l'autre au fil du temps, mettant en évidence la sensibilité du système aux conditions initiales. En d'autres termes, un exposant de Lyapunov positif indique que le système chaotique entraînera une séparation exponentielle des trajectoires voisines, rendant presque impossible la prédiction du comportement du système à long terme en raison des variations rapides des résultats dues aux différences minimes dans les conditions initiales.

Les exposants de Lyapunov du modèle proposé 3.25 sont présentés dans la figure 3.15a, comme le montre la figure 3.15a, il y a un exposant de Lyapunov positif. Par conséquent, le système 3-D proposé 3.25 est chaotique.
La figure 3.15b montre les différents comportements chaotiques que présente le système 3.25 pour des valeurs initiales très proches, en raison de la haute sensibilité du système 3.25 aux conditions initiales.

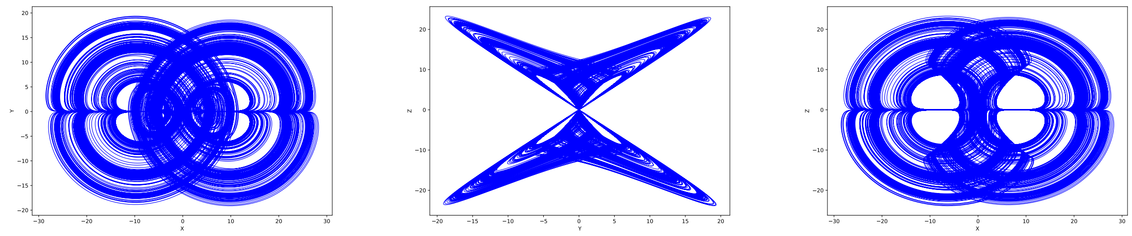


(a) (b)

Figure 3.15: Analyse des exposants de Lyapunov et de la sensibilité aux conditions initiales dans le système chaotique à quatre-scroll, (a) Exposants du Lyapunov, (b) Séries temporelles de la variable x pour $x_0 = 1$ (Bleu) et $x_0 = 1.00001$ (Rouge).

3.4.2.4 Représentation de phase de l'attracteur chaotique

Nous étudions les différentes projections de l'attracteur chaotique à quatre-scroll généré par le système 3.25. En analysant les représentations bidimensionnelles des espaces d'état, à savoir les projections $x - y$, $y - z$, $x - z$, dans les figures 3.16a, 3.16b, et 3.16c, respectivement, et l'attracteur 3D dans la figure 3.17 3D, nous mettons en évidence la complexité et la richesse des trajectoires issues de cette dynamique. Ces représentations révèlent la nature intrinsèquement chaotique du système 3.25.



(a) **(b)** **(c)**

Figure 3.16: Représentation des projections de l'attracteur chaotique à quatre-scroll sur les trois plans

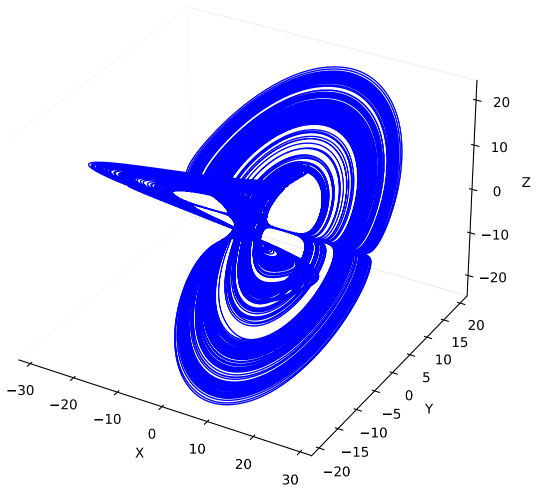


Figure 3.17: Représentation 3D de l'attracteur chaotique à quatre-scroll

3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une analyse exhaustive des systèmes dynamiques chaotiques, en commençant par le célèbre système de Lorenz jusqu'au système chaotique à quatre-scroll. À travers l'étude de ces systèmes, nous avons approfondi notre compréhension de l'impact des bifurcations sur la stabilité des systèmes et de l'évolution des attracteurs étranges dans ces dynamiques. De plus, nous avons exploré les méthodes numériques pour simuler ces systèmes, permettant ainsi de tester la théorie du chaos dans des contextes pratiques. L'étude de ces systèmes chaotiques constitue une pierre angulaire pour comprendre les comportements dynamiques complexes observés dans de nombreux phénomènes naturels et technologiques, offrant des outils analytiques essentiels dans des domaines variés tels que la physique, la biologie, l'économie et la cybersécurité.

Chapitre 4

Applications du cryptage utilisant les systèmes dynamiques

4.1 Introduction

Le cryptage utilisant les systèmes dynamiques chaotiques représente un domaine en constante évolution dans les sciences de l'informatique et la cybersécurité. Ce chapitre explore les applications de ces systèmes chaotiques, tels que les systèmes de Lorenz et de Rössler, pour le cryptage. Nous commençons par présenter les concepts fondamentaux en informatique, qui sont essentiels pour comprendre les mécanismes de cryptage et les méthodes de sécurité modernes [26]. Nous expliquons comment ces systèmes chaotiques sont utilisés pour générer des nombres aléatoires, un élément crucial pour renforcer la sécurité des clés utilisées dans le cryptage [66].

Ensuite, nous proposons un modèle pour le cryptage d'images en utilisant des systèmes chaotiques, en expliquant les algorithmes et les modèles mathématiques qui sous-tendent cette méthode pour offrir une protection efficace des données. Grâce aux résultats des simulations réalisées, nous évaluons l'efficacité de ces systèmes pour résister aux tentatives de décryptage [38].

Le chapitre aborde également le cryptage des communications, en discutant des défis actuels de la cybersécurité et des solutions proposées par les systèmes chaotiques. Cela inclut le développement d'un système de cryptage pour les appels vocaux sensibles entre deux appareils à l'aide de Python, avec des explications sur la création d'algorithmes pour le cryptage et le décryptage [24].

Enfin, nous présentons une application pratique de ce type de cryptage.

4.2 Cryptage d'images en utilisant deux systèmes chaotiques : Lorenz et Rössler

Dans cette section, un cryptage d'image à deux couches a été proposé en utilisant les systèmes chaotiques de Lorenz et de Rössler pour générer des entiers aléatoires chaotiques (CRINs). Ces CRINs sont soumis à une opération XOR avec les bits des valeurs des pixels de l'image. La combinaison des couches cryptées issues des deux systèmes chaotiques produit l'image cryptée [2], [1] Le décryptage reflète ces processus, en commençant par le système de Rössler, suivi par celui de Lorenz.

4.2.1 Concepts de base en informatique

4.2.1.1 Pixel

Le pixel est la plus petite unité contrôlable dans une image numérique. Chaque pixel représente un point dans l'image et est défini par des valeurs de couleur qui se composent généralement de trois canaux de couleur : le rouge, le vert et le bleu, connus sous l'acronyme RGB [55]. En contrôlant l'intensité de chaque canal de couleur dans le pixel, on peut créer une large gamme de couleurs.

Dans les images en couleur, chaque pixel contient des valeurs numériques représentant les intensités des trois couleurs (rouge, vert, bleu). Par exemple, la valeur du pixel rouge peut être de 255, celle du vert de 100, et celle du bleu de 50. Ces valeurs numériques sont celles qui sont cryptées [48].

4.2.1.2 Les nombres entiers aléatoires chaotiques(CRINs)

Sont des nombres entiers générés à l'aide de systèmes chaotiques tels que le système de Lorenz ou le système de Rössler. Ces systèmes sont extrêmement sensibles aux conditions initiales, ce qui rend les nombres générés par eux apparemment très aléatoires, bien qu'ils suivent des règles mathématiques bien définies. Ces nombres entiers aléatoires sont utilisés pour chiffrer des données dans des opérations de cryptage telles que le XOR [21, 28].

4.2.1.3 L'opération XOR

L'opération XOR agit comme une couche de protection qui rend les données (dans ce cas, les valeurs des pixels) illisibles sans connaître les valeurs chaotiques précises utilisées pour le chiffrement [45]. Cette technique contribue de manière significative à renforcer la sécurité des images chiffrées contre diverses attaques [21, 28]. Lorsque nous appliquons l'opération XOR entre la valeur d'un pixel donné et le nombre entier aléatoire chaotique (CRIN), l'opération est effectuée sur chaque bit de la valeur numérique du pixel.

Exemple 11. Supposons que la valeur d'un pixel donné soit 01100110 (en binaire) et que le nombre chaotique que nous voulons utiliser soit 10101010. Si nous appliquons l'opération XOR à ces valeurs :

- 0 XOR 1 = 1
- 1 XOR 0 = 1
- 1 XOR 1 = 0
- 0 XOR 0 = 0
- 0 XOR 1 = 1
- 1 XOR 0 = 1
- 1 XOR 1 = 0
- 0 XOR 0 = 0

Le résultat final de cette opération est une nouvelle séquence binaire : 11001100. Cette séquence représente une nouvelle valeur de pixel chiffrée.

Exemple 12. Supposons que vous vouliez chiffrer une image en utilisant l'algorithme XOR avec un nombre aléatoire. Prenons une image simple contenant un seul pixel, et la valeur de ce pixel est de 200 (dans la plage de 0 à 255 représentant la couleur du pixel en échelle de gris). Supposons que le nombre aléatoire utilisé soit 75. L'opération de chiffrement se déroule comme suit :

1. **Valeur originale du pixel :** 200
2. **Nombre aléatoire (clé de chiffrement) :** 75
3. **Application de l'opération XOR :**
   — 200 (valeur du pixel) en binaire : 11001000
   — 75 (nombre aléatoire) en binaire : 01001011
   — Application de XOR :

```
    11001000
XOR 01001011
Résultat : 10000011
```

La valeur finale en binaire est 10000011, ce qui correspond à 131 en système décimal, représentant la valeur chiffrée du pixel.

4.2.1.4 Graphique de l'histogramme

L'histogramme d'une image est un graphique à barres qui illustre la répartition des valeurs numériques des pixels. Pour empêcher un adversaire de déduire des informations importantes à partir de l'histogramme d'une image cryptée diffusée en continu, une image cryptée idéale doit avoir une distribution uniforme et être totalement différente de l'image originale [56, 65].

4.2.1.5 Corrélation verticale

La corrélation verticale mesure la relation entre les valeurs des pixels adjacents dans la direction verticale.

Représentation graphique de corrélation verticale :

- Axe des abscisses : représente les valeurs des pixels du premier pixel dans chaque paire de pixels adjacents verticalement.
- Axe des ordonnées : représente les valeurs des pixels du deuxième pixel dans chaque paire de pixels adjacents verticalement.

Exemple 13. Si un point dans le graphique est situé à (100, 120), cela signifie que la valeur du pixel supérieur est de 100 et que la valeur du pixel inférieur adjacent est de 120.

4.2.2 Génération de nombres aléatoires en utilisant les systèmes de Rössler et de Lorenz

Les systèmes de Lorenz et de Rössler sont des exemples de systèmes dynamiques chaotiques utilisés pour générer des séries de nombres qui semblent extrêmement aléatoires, mais qui en réalité suivent des équations mathématiques précises et sont sensibles aux conditions initiales. Ces systèmes sont utilisés dans le chiffrement des images en raison de leur capacité à générer des valeurs aléatoires complexes, ce qui rend leur comportement difficile à prévoir ou à inverser sans connaître les conditions initiales et les clés correctes.

Lorsque ces équations sont résolues avec un ensemble spécifique de conditions initiales (valeur initiale de X, Y, Z), les variables X, Y, Z suivent des trajectoires complexes et non répétitives. Ce comportement chaotique les rend excellentes pour générer des valeurs aléatoires utilisées pour le chiffrement des données.
Les valeurs X, Y, Z résultant de ces équations sont des échantillons chaotiques, qui sont utilisés pour générer des nombres entiers aléatoires chaotiques (CRIN) par un processus de normalisation.

Après avoir calculé les valeurs de X, Y, Z à partir des deux systèmes, ces valeurs sont converties en nombres entiers aléatoires chaotiques (CRIN) pour être dans la plage des valeurs pouvant être utilisées dans l'image numérique, c'est-à-dire entre 0 et 255. Cela se fait en utilisant une équation de normalisation telle que :

$$\text{CRIN} = \text{Round}(\text{Échantillon chaotique} \times 10^8)\%255$$

où la valeur chaotique résultante (de X, Y, Z) est multipliée par un grand nombre (comme 10^8) puis réduite en utilisant l'opération % (modulo) par 255 pour garantir que le résultat se situe dans la plage des 8 bits (0-255) qui représente l'intervalle des valeurs de pixel dans les images numériques.

Une fois les CRINs générés à partir des valeurs chaotiques X, Y, Z des deux systèmes, ces valeurs sont utilisées pour chiffrer chaque canal de couleur (rouge, vert, bleu) dans l'image, comme suit :

- On applique l'opération XOR entre CRIN(X) et les valeurs des pixels dans le canal rouge.
- On applique l'opération XOR entre CRIN(Y) et les valeurs des pixels dans le canal vert.
- On applique l'opération XOR entre CRIN(Z) et les valeurs des pixels dans le canal bleu.

De cette manière, l'image est efficacement brouillée à l'aide de ces valeurs aléatoires complexes, ce qui rend son déchiffrement difficile sans connaître le système chaotique et les conditions initiales utilisées.

Exemple 14. Supposons que nous ayons un échantillon chaotique généré à partir du système de Lorenz ou de Rössler, et disons que la valeur de cet échantillon est :

$$\text{Chaotic Sample} = 0.764523$$

Les étapes pour le convertir en CRIN sont :

— **Multiplication par un grand nombre :**
Multiplions la valeur de l'échantillon chaotique par 10^8 pour obtenir un nombre plus grand :

$$0.764523 \times 10^8 = 76452300$$

— **Arrondir le résultat :**
Arrondissons le résultat au nombre entier le plus proche (dans ce cas, il s'agit déjà d'un nombre entier) :

$$\text{round}(76452300) = 76452300$$

— **Obtenir le reste de la division par 255 :**

Divisons le résultat par 255 et prenons le reste :

$$76452300\%255 = 76452300 \div 255 = 299812 \text{ et reste } 240$$

Ainsi, le résultat est :

$$\text{CRIN} = 240$$

En résumé, la valeur de l'échantillon chaotique (0.764523) a été convertie en un nombre entier aléatoire chaotique (CRIN = 240), qui se trouve dans [0 - 255], et peut être utilisée pour chiffrer la valeur d'un pixel dans une image numérique en utilisant l'opération XOR mentionnée dans la sous-sous-section précédente.

4.2.3 Le modèle de cryptage proposé

L'algorithme de cryptage proposé utilise un schéma de chiffrement à deux couches, en employant les systèmes chaotiques de Lorenz et de Rössler pour générer des nombres entiers aléatoires chaotiques (CRINs). Ces CRINs sont ensuite combinés bit à bit avec les valeurs des pixels de l'image à l'aide de l'opérateur XOR afin d'obtenir un brouillage efficace, comme illustré à la Fig 4.1.

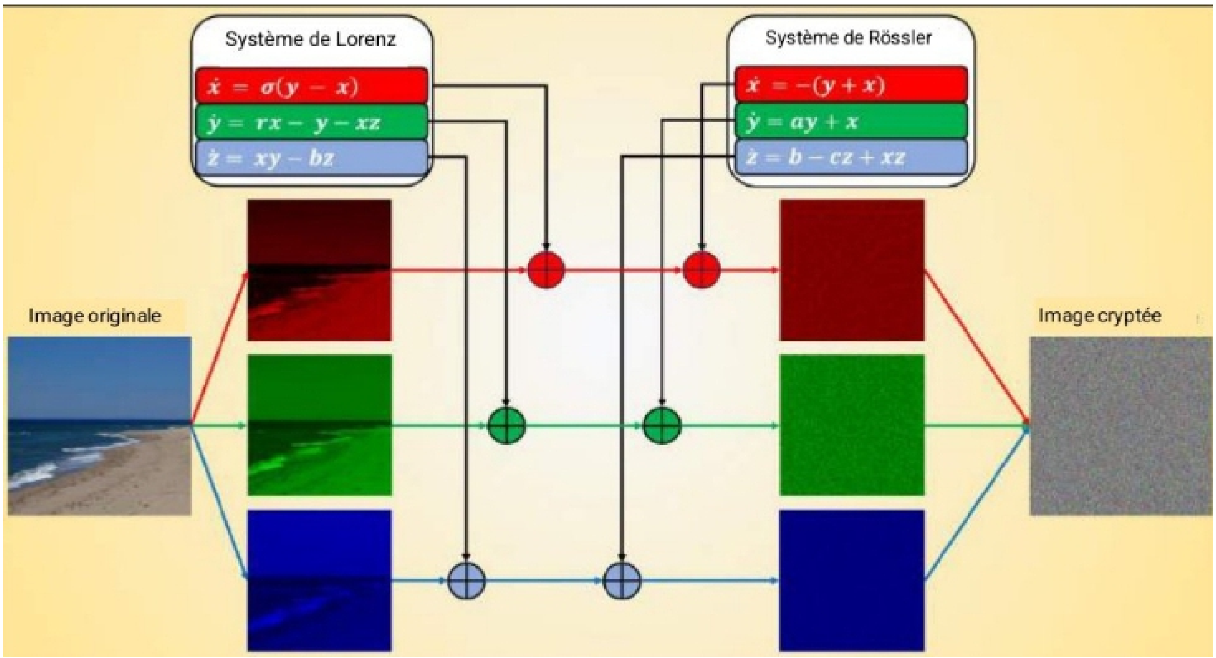


Figure 4.1: Le schéma-bloc proposé pour le cryptage des images en couleur.

Les étapes suivantes de la méthodologie de chiffrement d'image proposée :

1. L'image couleur d'origine est décomposée en ses trois canaux de couleur primaires :

rouge, vert et bleu. Cela permet de chiffrer chaque composant de couleur de manière indépendante.

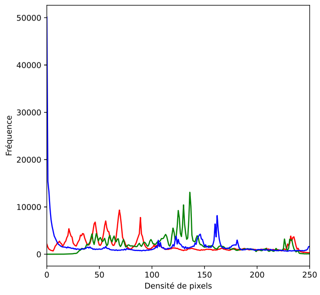
2. Le système de Lorenz, extrêmement sensible aux conditions initiales, est utilisé pour créer des échantillons aléatoires et imprévisibles. Ce comportement aléatoire rend ces échantillons bien adaptés au brouillage des données d'image.
3. Les échantillons chaotiques générés sont convertis en nombres aléatoires compressés (CRINs) variant entre [0 - 255].
4. Les CRINs sont appliqués en utilisant une opération XOR bit à bit avec les canaux de couleur correspondants : CRIN(X) avec le canal rouge, CRIN(Y) avec le canal vert et CRIN(Z) avec le canal bleu.
5. Pour renforcer davantage le processus de chiffrement, le système de Rossler est utilisé en plus du système de Lorenz pour générer des CRINs, ce qui introduit une seconde source de hasard, augmentant la difficulté de déchiffrer l'image sans les clés correctes.
6. Les couches chiffrées obtenues à partir des systèmes de Lorenz et de Rossler sont combinées pour former l'image couleur chiffrée finale.
7. Le processus de déchiffrement implique d'inverser les étapes du processus de chiffrement, en commençant par le système de Rossler puis en passant au système de Lorenz. Les CRINs correspondants sont générés en utilisant les systèmes chaotiques respectifs et appliqués avec une opération XOR bit à bit avec les couches chiffrées pour récupérer les canaux de couleur d'origine.

4.2.4 Résultats de la simulation

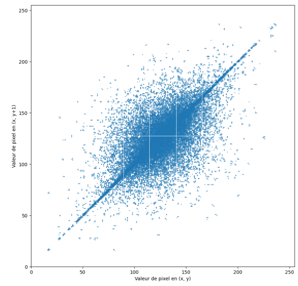
Dans cette sous-section, nous allons effectuer trois tests différents avec une image pour déterminer la sécurité de la méthode cryptographique proposée et l'efficacité du système. Parmi les tests qui peuvent être réalisés, le graphique d'histogramme et la corrélation (Corr). Enfin, le temps du processus de chiffrement (délai par seconde) sera mesuré.

Le langage de programmation Python a été utilisé pour générer des nombres aléatoires à partir de l'exécution des équations différentielles ordinaires associées aux systèmes de Lorenz et Rössler, appliquer l'opération XOR et chiffrer les images. Python a également été utilisé pour calculer les résultats et tracer les diagrammes des tests, à l'aide de bibliothèques scientifiques telles que NumPy et Matplotlib.

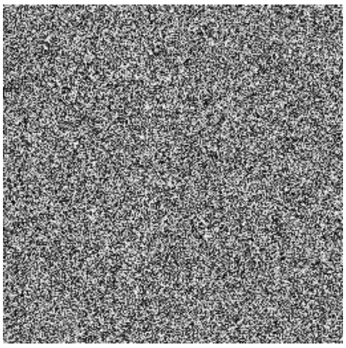
(a)



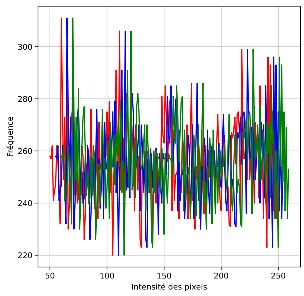
(b)



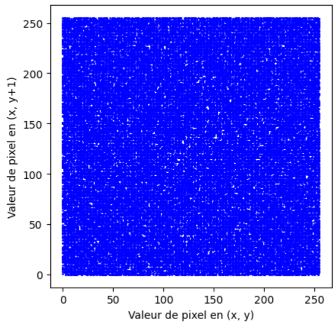
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 4.2: Comparaison entre l'image originale et l'image cryptée. (a) : Image originale, (b) : Histogramme de l'image originale, (c) : Corrélation verticale de l'image originale, (d) : Image cryptée, (e) : Histogramme de l'image cryptée, (f) : Corrélation verticale de l'image cryptée

Les résultats présentés dans les images fournies montrent l'efficacité du processus de cryptage utilisant les systèmes de Lorenz et de Rössler. L'image cryptée présente des différences fondamentales par rapport à l'image originale, comme le montrent les variations dans la distribution statistique des pixels dans l'histogramme et les valeurs de corrélation verticale des pixels. Ces différences indiquent que le cryptage a réussi à réduire la similitude entre les images cryptées et les images originales, reflétant ainsi une haute sécurité de l'algorithme. Une attaque par force brute consiste pour l'attaquant à essayer toutes les combinaisons possibles de clés jusqu'à trouver la clé correcte. Dans la méthode proposée, l'attaquant tenterait toutes les valeurs possibles des paramètres des systèmes de Lorenz et de Rössler, ainsi que les valeurs initiales des systèmes. Le système de Lorenz comporte trois conditions initiales très sensibles et trois paramètres, tout comme le système de Rössler. Tout changement léger dans la valeur de toute condition initiale ou paramètre génère une nouvelle trajectoire, ce qui rend la récupération de l'image originale impossible, rendant ainsi le piratage presque impossible.

4.3 Cryptage des communications

Cette section porte sur l'utilisation des modèles chaotiques dans le domaine des communications sécurisées pour protéger les messages contre l'espionnage ou l'accès non autorisé.

4.3.1 Défis de la cybersécurité

Avec le développement technologique rapide et la prolifération des réseaux sociaux, qui pourraient potentiellement être surveillés par leurs propres créateurs [53], ainsi que l'expansion des réseaux de communication pouvant être espionnés par des pirates expérimentés [57], et dans le contexte des conflits cybernétiques de plus en plus fréquents, la protection des communications personnelles est devenue un défi majeur, voire une tâche presque impossible. Bien que de nombreux logiciels aient été développés pour protéger les communications contre le piratage, les pirates professionnels parviennent toujours à créer des applications pour les contourner.

C'est pour cette raison que nous avons développé un programme spécifique pour un groupe restreint de personnes, leur permettant de communiquer entre eux sans risque d'écoute clandestine. Lors des tentatives de piratage, les logiciels de hacking sont programmés pour essayer toutes les combinaisons possibles de mots de passe utilisés pour le chiffrement [12, 49]. Cependant, en utilisant des systèmes chaotiques complexes, dont les solutions sont imprévisibles et sensibles aux moindres variations des conditions initiales [22], il devient impossible de prédire les trajectoires des signaux audio après chiffrement sans connaître le système utilisé et les solutions spécifiques à ces systèmes. Il existe plusieurs programmes offrant un chiffrement sécurisé des appels audio, en utilisant des méthodes de chiffrement avancées comme AES ou RSA [12, 49]. Cependant, l'idée d'utiliser un système chaotique (tel que le système à quatre-scroll) pour chiffrer les appels audio est récente, et il existe, pour le moment, peu de logiciels publics employant cette technologie de chiffrement [3, 7].

Le chiffrement par systèmes chaotiques représente une solution innovante, avec des avantages majeurs :

- **Grande imprévisibilité :** Les systèmes chaotiques produisent des signaux aléatoires et imprévisibles, ce qui rend leur déchiffrement très difficile à analyser.
- **Faible consommation de ressources :** Les systèmes chaotiques utilisent des opérations mathématiques relativement simples, ce qui contribue à rendre le chiffrement plus rapide.
- **Mise à jour facile :** Le programme peut être facilement mis à jour en modifiant

légèrement les conditions initiales, rendant ainsi la communication plus sécurisée.

4.3.2 Développement d'un système de chiffrement audio utilisant un système chaotique à quatre-scroll

4.3.2.1 Algorithme de chiffrement audio

- **Configuration du système chaotique :** Le système chaotique utilisé dans cet algorithme est le système tridimensionnel 3.32, avec le choix des valeurs des paramètres comme suit : $a = 0.4$, $b = 12$, et $c = 5$.
  Ces équations sont définies dans la fonction `chaotic_system()`, qui calcule les taux de changement de x, y, et z. Pour créer les signaux chaotiques utilisés dans le chiffrement, le code génère deux trajectoires chaotiques distinctes basées sur des conditions initiales différentes. Cela est réalisé en :
  — Utilisant la fonction `generate_chaotic_signal()` qui s'appuie sur `solve_ivp` pour résoudre le système chaotique sur une période donnée.
  — La période est définie de 0 à 2 secondes, et les valeurs sont calculées à 100 points temporels sur cet intervalle grâce à `t_eval`.
  Deux trajectoires chaotiques sont générées :
  — La première trajectoire démarre avec la condition initiale $[0.1, 0, 0]$ notée S_1.
  — La seconde trajectoire démarre avec la condition initiale $[0.101, 0, 0]$ notée S_2.
- **Chargement du fichier audio :** Le programme demande à l'utilisateur de télécharger un fichier audio au format (WAV) ou (AAC) en utilisant la bibliothèque `librosa`. Le fichier audio est chargé et les données d'échantillonnage, ainsi que la fréquence d'échantillonnage sr, sont extraites.
- **Chiffrement de l'audio avec les signaux chaotiques :** Le code effectue le chiffrement en ajoutant des signaux chaotiques au signal audio original. Chaque échantillon du signal audio est modifié en ajoutant une portion du signal chaotique, en fonction du signe de l'échantillon (positif ou négatif) :
  — Si l'échantillon y_i est positif, on ajoute une portion du premier signal chaotique S_1.
  — Si l'échantillon y_i est négatif, on ajoute une portion du second signal chaotique S_2.
  La formule de chiffrement pour chaque échantillon du signal audio y_i est donnée par :

$$y'_i = \begin{cases} y_i + k \cdot S_1 & \text{si } y_i \geq 0 \\ y_i + k \cdot S_2 & \text{si } y_i < 0 \end{cases}$$

  où :
  — k est un facteur d'amplification (dans ce programme, il est fixé à 10).

— S_1 et S_2 sont les signaux chaotiques générés.

- **Affichage des courbes du signal audio :** Le programme affiche les courbes du signal audio original et du signal chiffré en utilisant la bibliothèque `matplotlib`, l'intervalle de temps affiché est limité entre 0 et 1,5 secondes pour analyser une partie spécifique du signal.
- **Sauvegarde et téléchargement du signal chiffré :** Une fois le chiffrement terminé, le signal chiffré est sauvegardé dans un fichier WAV nommé `encrypted_output.wav`. Le fichier est ensuite téléchargé automatiquement sur l'appareil de l'utilisateur à l'aide de `files.download()`, permettant à l'utilisateur d'écouter le fichier chiffré.

4.3.2.2 Algorithme de déchiffrement audio

Dans cet algorithme, on utilise le même système chaotique que celui employé dans l'algorithme de chiffrement, mais dans le but de déchiffrer et de récupérer le signal original. Le système chaotique généré permet de reconstituer le signal d'origine avant le chiffrement en supprimant le bruit ajouté, en appliquant les étapes suivantes :

- **Déchiffrement par inversion des signaux chaotiques :** À cette étape, on soustrait le bruit chaotique ajouté lors du chiffrement du signal chiffré. Les deux équations suivantes sont utilisées :
  — Si la valeur de l'échantillon est positive `encoded_signal[i]` > 0, le bruit est supprimé en utilisant le premier signal chaotique `chaotic_signal_1` et le même coefficient multiplicatif (10) comme suit :

$$\texttt{decoded\_signal[i]} = \texttt{encoded\_signal[i]} - 10 \cdot \texttt{chaotic\_signal\_1[i]}$$

  — Si la valeur de l'échantillon est négative `encoded_signal[i]` < 0, le bruit est supprimé en utilisant le second signal chaotique `chaotic_signal_2` :

$$\texttt{decoded\_signal[i]} = \texttt{encoded\_signal[i]} - 10 \cdot \texttt{chaotic\_signal\_2[i]}$$

  Cette opération retire le bruit chaotique de chaque échantillon de manière séquentielle, permettant de retrouver une approximation du signal original.
- **Sauvegarde et téléchargement direct du signal récupéré sur l'apparail de communication :** Le signal déchiffré est sauvegardé sous forme d'un nouveau fichier audio `approx_original_output.wav` qui est téléchargé directement sur l'appareil de communication pour l'écoute.

4.3.3 Application pratique du programme de cryptage et décryptage audio

Dans cette subsection, nous allons appliquer le programme de cryptage et de décryptage sur un fichier audio pour illustrer l'effet du cryptage chaotique et la récupération du son d'origine. Nous présenterons les résultats en détail afin de mettre en évidence les différences dans le son et dans l'onde sonore (courbe graphique) avant et après le cryptage.

4.3.3.1 Présentation du son original

Tout d'abord, nous chargeons le son original et l'écoutons pour identifier ses caractéristiques avant le cryptage. Le programme affiche l'onde sonore du son original pour que nous puissions observer les détails de l'onde avec précision.

Son original :

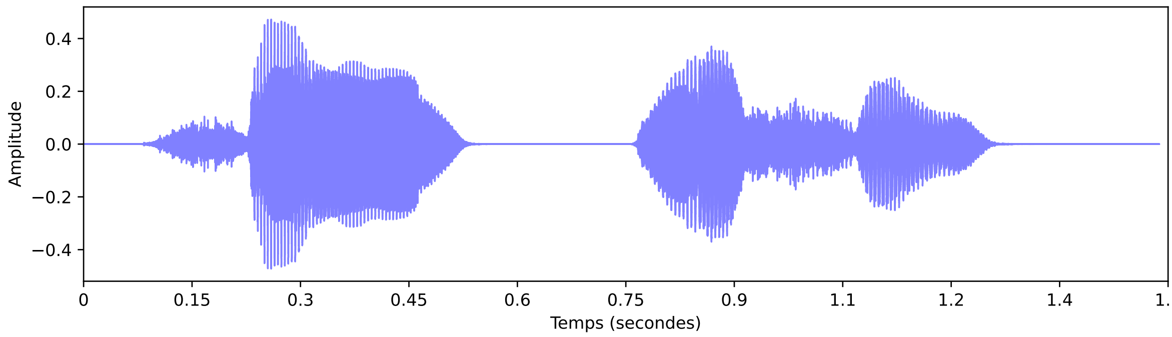


Figure 4.3: Le signal sonore d'origine

4.3.3.2 Cryptage du Son

Une fois le son original chargé, le système de cryptage chaotique est appliqué, modifiant ainsi le signal audio de manière à le rendre méconnaissable à l'écoute ou à l'analyse visuelle. Nous écoutons alors le son crypté et observons les changements apportés par le cryptage.

Son crypté :

4.3.3.3 Décryptage et Récupération du Son

Après le cryptage, l'algorithme de décryptage est appliqué au signal crypté dans le but de retrouver le son original. Nous écoutons alors le son décrypté, qui doit être similaire

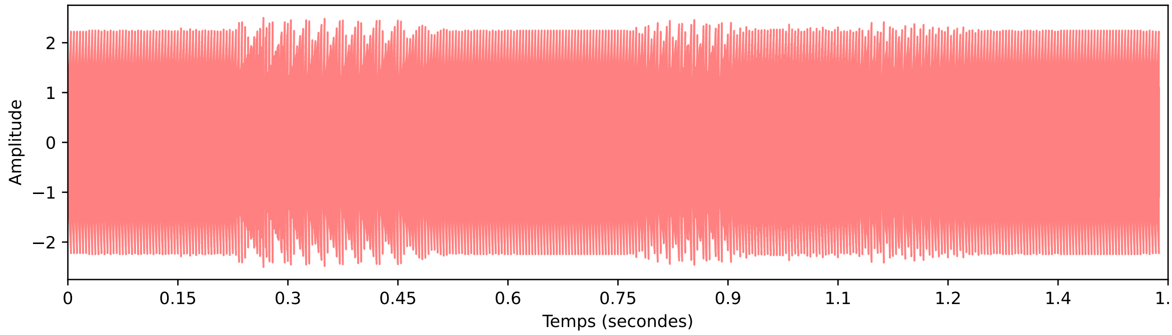
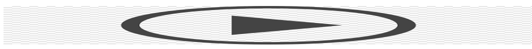


Figure 4.4: Le signal sonore crypté

au son original. De plus, l'onde sonore du signal après décryptage est affichée afin de la comparer à celle du signal d'origine.

Son après le décryptage : 

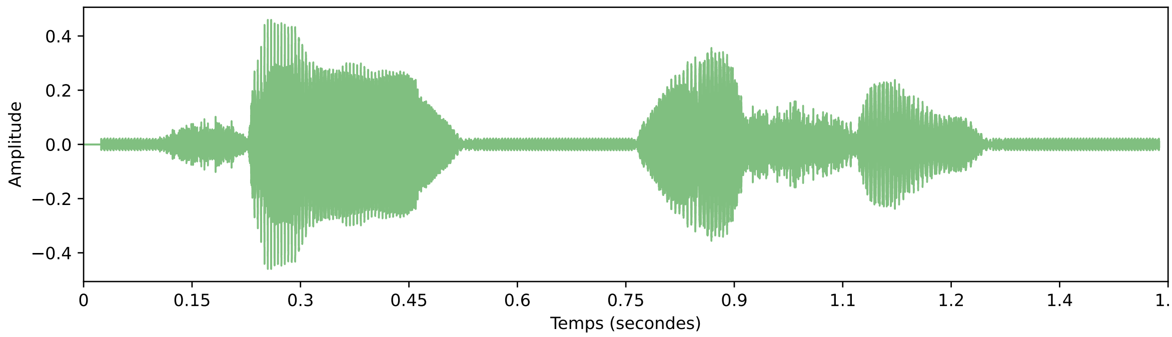


Figure 4.5: Le signal sonore décrypté

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue les principes fondamentaux des systèmes chaotiques tels que Lorenz et Rössler, et leur rôle dans la génération de nombres aléatoires, essentiels pour la sécurisation des clés de chiffrement. Nous avons également montré l'évolution de ces systèmes dans le chiffrement d'images et la protection des communications vocales sensibles, ce qui reflète les progrès continus des technologies de sécurité. En combinant ces méthodes avec des outils de programmation comme Python, il est désormais possible de développer des solutions pratiques et efficaces capables de résister aux tentatives de décryptage. Étant donné que la cybersécurité est un domaine en constante évolution, les systèmes chaotiques représentent une réponse prometteuse pour relever les défis actuels et futurs dans ce domaine.

Chapitre 5

Utilisation de la segmentation temporelle pour mettre en évidence le chaos dans les systèmes dynamiques

5.1 Introduction

Au fil du temps, une attention considérable a été portée à la compréhension des dynamiques complexes des écosystèmes simplifiés contenant trois niveaux alimentaires, révélant que des comportements complexes peuvent émerger d'une hiérarchie simple entre proie, prédateur et super-prédateur. Dans cette étude, l'extension d'un modèle de chaîne alimentaire à trois espèces avec une réponse fonctionnelle de type Crowley-Martin a été examinée en introduisant des échelles de temps discrètes pour étudier leur impact sur la dynamique du système à différents niveaux alimentaires. Les variations de l'abondance des espèces ont été analysées selon trois échelles de temps différentes : lente, rapide et intermédiaire. La présence d'une orbite homocline dans le sous-système (proie-prédateur) suggère l'existence de cascades de doublement de période qui conduisent finalement au chaos dans le système complet (proie-prédateur-super-prédateur). Cette étude souligne l'importance de la modélisation écologique et des interactions trophiques dans la compréhension des dynamiques variées et complexes des écosystèmes, mettant ainsi en évidence la pertinence des recherches dans ce domaine.

5.2 Modèle de réseau alimentaire à trois niveaux

5.2.1 Modèle sans dimension

Le système étudié dans ce travail représente un modèle mathématique d'une chaîne alimentaire à trois niveaux, transformé en modèle sans dimension dans [63]. Le schéma de Holling de second ordre et la réponse fonctionnelle de type Crowley-Martin sont combinés dans cette chaîne alimentaire pour former un type hybride d'organisme.

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1}{dT} = a_1 X_1 \left(1 - \dfrac{X_1}{K}\right) - \dfrac{cX_2X_3}{X_1 + D} \\ \dfrac{dX_2}{dT} = -a_2X_2 + \dfrac{c_1X_1X_3}{X_1 + D_1} - \dfrac{c_2X_2X_3}{1 + dX_2 + bX_3 + bdX_2X_3} \\ \dfrac{dX_3}{dT} = -mX_3 + \dfrac{c_3X_2X_3}{1 + dX_2 + bX_3 + bdX_2X_3} \end{cases} \tag{5.1}$$

Les densités de population de la proie, du prédateur et du super-prédateur, respectivement, en fonction du temps T, sont représentées par les variables $X_1(T)$, $X_2(T)$, et $X_3(T)$.

Le modèle (5.1) se distingue par l'existence de 12 paramètres de contrôle qui régulent le comportement du système. a_1 représente le taux de croissance intrinsèque de la proie en l'absence de prédateurs, tandis que K correspond à la capacité de charge de la proie. D décrit le niveau de protection environnementale dont bénéficie la proie, tandis que D_1 indique le niveau de protection environnementale du prédateur. c exprime le taux maximal de réduction de la proie par habitant, tout comme c_1, qui représente également un taux maximal de réduction de la proie par habitant.

Les paramètres c_2 et c_3 montrent les caractéristiques de la réponse fonctionnelle de type Crowley-Martin, tandis que b est un paramètre évaluant l'interférence entre les prédateurs. En ce qui concerne les taux de mortalité, a_2 représente le taux de mortalité du prédateur intermédiaire X_2, tandis que m décrit le taux de mortalité du super-prédateur X_3.

Nous avons simplifié ce modèle, en ignorant les considérations dimensionnelles, afin de faciliter l'analyse mathématique. Le tableau 5.1 contient les représentations sans dimension des variables et des paramètres. La première ligne représente les variables sans dimension, et la deuxième ligne représente les valeurs environnementales correspondantes.

t	x_1	x_2	x_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}
a_1T	$\frac{X_1}{K}$	$\frac{cX_2}{a_1K}$	$\frac{cc_2X_3}{a_1^2dK}$	$\frac{D}{K}$	$\frac{a_2}{a_1}$	$\frac{c_1}{a_1}$	$\frac{D_1}{K}$	$\frac{a_1b}{c_2}$	$\frac{a_1^2bdK}{cc_2}$	$\frac{c}{a_1dK}$	$\frac{c}{a_1}$	$\frac{c_3}{a_1d}$

Tableau 5.1: Variables et paramètres sans dimensions.

En conséquence, nous avons dérivé un système sans dimension caractérisé par neuf paramètres, comme détaillé ci-dessous.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 \left[(1 - x_1) - \dfrac{x_2}{x_1 + c_4} \right] = x_1 g_1(x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 \left[-c_5 + \dfrac{c_6 x_1}{x_1 + c_7} - \dfrac{x_3}{x_2 + (c_8 + c_9 x_2)\, x_3 + c_{10}} \right] = x_2 g_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3 \left[-c_{11} + \dfrac{c_{12} x_2}{x_2 + (c_8 + c_9 x_2)\, x_3 + c_{10}} \right] = x_3 g_3(x_2, x_3). \end{cases} \tag{5.2}$$

5.2.2 Reformulation du modèle à trois espèces

Nous utilisons deux paramètres de temps sans dimension positifs, β_1 et β_2, pour mettre à l'échelle le modèle à trois espèces (5.2), avec $0 < \beta_2 < \beta_1 \ll 1$. La mise à l'échelle est effectuée de manière à ce que le taux de croissance du prédateur soit $O(\beta_1)$, et le taux de croissance du super-prédateur soit $O(\beta_2)$. Nous reformulons le modèle (5.2) comme suit après cet ajustement :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 \left[(1 - x_1) - \dfrac{x_2}{x_1 + c_4} \right] = x_1 g_1(x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \beta_1 x_2 \left[-c_5 + \dfrac{c_6 x_1}{x_1 + c_7} - \dfrac{x_3}{x_2 + (c_8 + c_9 x_2)\, x_3 + c_{10}} \right] = \beta_1 x_2 g_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \beta_2 x_3 \left[-c_{11} + \dfrac{c_{12} x_2}{x_2 + (c_8 + c_9 x_2)\, x_3 + c_{10}} \right] = \beta_2 x_3 g_3(x_2, x_3). \end{cases} \tag{5.3}$$

Les variables rapides, intermédiaires et lentes du système, notées respectivement par les valeurs x_1, x_2, et x_3, reflètent les densités sans dimension de la proie, des prédateurs et des super-prédateurs. En appliquant la transformation $\tau_1 = \beta_1 t$ dans (5.3), nous pouvons définir le système et obtenir les résultats suivants :

$$\beta_1 \frac{dx_1}{d\tau_1} = x_1 g_1(x_1, x_2), \frac{dx_2}{d\tau_1} = x_2 g_2(x_1, x_2, x_3), \beta_1 \frac{dx_3}{d\tau_1} = \beta_2 x_3 g_3(x_2, x_3), \tag{5.4}$$

Et après des changements supplémentaires $\tau_2 = \beta_2 t$, nous obtenons :

$$\beta_2 \frac{dx_1}{d\tau_2} = x_1 g_1(x_1, x_2), \beta_2 \frac{dx_2}{d\tau_2} = \beta_1 x_2 g_2(x_1, x_2, x_3), \frac{dx_3}{d\tau_2} = x_3 g_3(x_2, x_3), \tag{5.5}$$

t, τ_1, et τ_2, les variables de temps sans dimension, représentent respectivement les échelles de temps rapides, intermédiaires et lentes. Nous divisons le système en sous-systèmes et utilisons la théorie des perturbations singulières géométriques pour étudier la dynamique de chacun d'eux. Pour les systèmes (5.3), (5.4) et (5.5), une trajectoire de solution typique est constituée de segments correspondant aux processus lents, intermédiaires et rapides. La solution totale du système est ensuite obtenue en concaténant les solutions de chaque sous-système (5.3). Nous étudions d'abord l'impact de plusieurs échelles de temps sur la dynamique locale du système (5.3) avant de le diviser en ses sous-systèmes.

5.3 Analyse linéaire et caractéristiques dynamiques

5.3.1 Points d'équilibre

Le système contient quatre points d'équilibre, décrits comme suit :

Le point P_0 représente le point d'équilibre trivial, qui est $(0, 0, 0)$. Le point P_1 est un point d'équilibre pour une seule espèce, donné par $(1, 0, 0)$.

Le point P_2 représente un point d'équilibre pour deux espèces, situé en $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, 0)$, où les valeurs de $\tilde{x_1}$ et $\tilde{x_2}$ sont calculées comme suit :

$$\tilde{x_1} = \frac{c_5 c_7}{c_6 - c_5}$$

$$\tilde{x_2} = (1 - \tilde{x_1})(\tilde{x_1} + c_4)$$

avec la condition d'existence $0 < \frac{c_5 c_7}{c_6 - c_5} < 1$.

Enfin, le point P_3 est le point d'équilibre représentant la coexistence des trois espèces, (x_1^*, x_2^*, x_3^*), avec des valeurs calculées comme suit :

$$x_2^* = (1 - x_1^*)(x_1^* + c_4)$$

$$x_3^* = \frac{(c_{12} - c_{11})x_2^* - c_{10}c_{11}}{c_{11}(c_8 + c_9 x_2^*)}$$

La valeur de x_1^* est obtenue à partir de l'équation implicite :

$$-c_5 + \frac{c_6 x_1^*}{x_1^* + c_7} - \frac{x_3^*}{x_2^* + (c_8 + c_9 x_2^*)\, x_3^* + c_{10}} = 0$$

avec la condition d'existence $0 < x_1^* < 1$ et $0 < \frac{c_{10}c_{11}}{c_{12} - c_{11}} < x_2^*$.

5.3.2 Analyse de la stabilité

La matrice jacobienne de chaque point d'équilibre a été calculée, et la stabilité a été examinée à l'aide du polynôme caractéristique de chaque matrice. Le tableau 5.2 résume les résultats des calculs.

Résultats de stabilité et remarques :

Point d'équilibre	Matrice jacobienne	Valeurs propres
P_0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 c_5 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 c_{11} \end{pmatrix}$	$e_1 = 1 > 0$, $e_2 = -\beta_1 c_5 < 0$, $e_3 = -\beta_2 c_{11} < 0$
P_1	$\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{1+c_5} & 0 \\ 0 & \beta_1(\frac{c_6}{1+c_7} - c_5) & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 c_{11} \end{pmatrix}$	$e_1 = -1$ $e_2 = \beta_1(\dfrac{c_6}{1+c_7} - c_5)$ $e_3 = -\beta_2 c_{11}$
P_2	$\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & 0 \\ \beta_1 a_{21} & \beta_1 a_{22} & -\beta_1 a_{23} \\ 0 & 0 & \beta_2 a_{33} \end{pmatrix}$	$e_0 = \beta_2 a_{33}$ $e_{1,2}(\beta_1) = \dfrac{a_{11} + \beta_1 a_{22}}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{(a_{11} - \beta_1 a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}}$

Tableau 5.2: Tableau des points d'équilibre, matrices jacobiennes et valeurs propres.

- P_0 est toujours un point selle.
- Pour P_1 :
  - Si $c_5 < \frac{c_6}{1+c_7}$, alors $\lambda_2 < 0$, et P_1 est un point selle.
  - Si $c_5 > \frac{c_6}{1+c_7}$, alors $\lambda_2 > 0$, et P_1 est stable.
- Pour P_2 :
  - Les coefficients de la matrice J_{P_2} sont :

$$a_{11} = 1 - 2\tilde{x_1} - \frac{c_4(1-\tilde{x_1})}{\tilde{x_1} + c_4}, a_{12} = \frac{\tilde{x_1}}{\tilde{x_1} + c_4}, a_{21} = \frac{(1-\tilde{x_1})(\tilde{x_1} + c_4)c_6c_7}{(\tilde{x_1} + c_7)^2},$$

$$a_{22} = -c_5 + \frac{c_6\tilde{x_1}}{\tilde{x_1} + c_7}, a_{23} = \frac{(1-\tilde{x_1})^2(\tilde{x_1} + c_4)^2 + c_{10}(1-\tilde{x_1})(\tilde{x_1} + c_4)}{[(1-\tilde{x_1})(\tilde{x_1} + c_4) + c_{10}]^2},$$

$$a_{33} = -c_{11} + \frac{c_{12}(1-\tilde{x_1})^2(\tilde{x_1} + c_4)^2 + c_{10}c_{12}(1-\tilde{x_1})(\tilde{x_1} + c_4)}{[(1-\tilde{x_1})(\tilde{x_1} + c_4) + c_{10}]^2}$$

  - Nous sélectionnons c_5 comme paramètre de bifurcation pour trouver le seuil d'instabilité pour P_2. La bifurcation de Hopf provoque la perte de stabilité du point d'équilibre P_2 à $c_5 = \hat{c}_5$, où les parties réelles des valeurs propres $e_{1,2} = 0$. En sélectionnant les paramètres discutés dans [63] et en les organisant dans le tableau 5.3, en tenant compte de $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$.

Paramètre	c_4	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}
Valeur	0.25	0.8	0.25	0.01	0.1	0.28	0.06	0.25

Tableau 5.3: Valeurs des paramètres.

Nous trouvons que la partie réelle des valeurs propres $e_{1,2}$ est égale à zéro à la valeur $\hat{c}_5 = 0,48$. À partir de cela, nous obtenons les résultats suivants :

— Si $c_5 < 0,48$, le point d'équilibre P_2 est instable.

— Si $c_5 > 0,48$, le point d'équilibre P_2 est stable.

Pour mettre davantage en évidence ces résultats, nous fournissons un exemple en sélectionnant deux valeurs pour c_5, et en fonction de ces valeurs, nous calculons le point d'équilibre P_2 et analysons la stabilité dans chaque cas.

Nous présentons les résultats dans le tableau 5.4 :

c_5	Point d'équilibre P_2	Matrice Jacobienne	Valeurs propres et stabilité
0.25	$(0.1136, 0.3223, 0)$	$\begin{pmatrix} -0.1136 & -0.3124 & 0 \\ -0.8254 & -0.9374 & -1.6603 \\ 0 & 0 & -0.3112 \end{pmatrix}$	0.1283, $-$ 1.1794, $-$ 0.3112 c_5 est instable
0.5	(0.4167,0.3889,0)	$\begin{pmatrix} -0.4167 & -0.6250 & 0 \\ 0.300 & -1.2500 & -1.4950 \\ 0 & 0 & -0.3046 \end{pmatrix}$	$-$ 0.8334 + 0.1181i, $-$ 0.8334 $-$ 0.1181i, $-$ 0.3046 c_5 est stable

Tableau 5.4: Résultats de l'étude de stabilité pour le système dynamique pour deux valeurs de c_5.

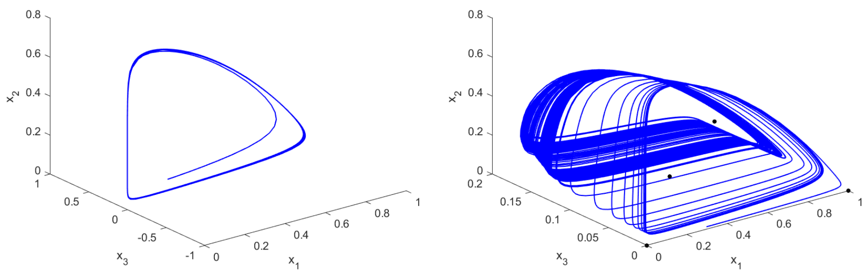
- Le point d'équilibre intérieur $P_3 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$:

  Nous abordons l'instabilité du point d'équilibre intérieur P_3 à l'aide d'un exemple numérique en raison de la complexité de l'équation impliquant x_1^*. Nous sélectionnons le même ensemble de valeurs de paramètres avec $c_5 = 0.25$, $\beta_1 = 1$, et $\beta_2 = 1$ comme indiqué dans le tableau 5.3. Nous utilisons le critère de Liu pour examiner l'instabilité de P_3 via la bifurcation de Hopf. Supposons que le paramètre de bifurcation soit c_{11}. Nous obtenons que la matrice J_{P_3} a l'équation caractéristique en fonction de c_{11} : $\lambda^3 + k_1(c_{11})\lambda^2 + k_2(c_{11})\lambda + k_3(c_{11}) = 0$, où $k_1(c_{11}) = 0.1412c_{11} - 0.0084187$; $k_2(c_{11}) = 7.8822 * 10^{-6}c_{11} - 0.025663$; $k_3(c_{11}) = 0.00023312 - 0.0038824c_{11}$. Nous considérons $\Lambda(c_{11}) = k_1(c_{11})k_2(c_{11}) - k_3(c_{11})$, selon le critère de Liu [39], [54], P_3 devient instable par la bifurcation de Hopf s'il existe une valeur critique $\hat{c}_{11}$ telle que $k_1(\hat{c}_{11}) > 0$, $k_3(\hat{c}_{11}) > 0$, $\Lambda(\hat{c}_{11}) = 0$, et $\left.\frac{d\Lambda}{dc_{11}}\right|_{c_{11}=\hat{c}_{11}} \neq 0$. Après avoir sélectionné les valeurs des paramètres comme indiqué précédemment, nous obtenons $\hat{c}_{11} = 0.065964$. Pour $0 < c_{11} < 0.065964$, le point d'équilibre de coexistence P_3 est stable ; pour $c_{11} > 0.065964$, il est instable. Nous choisissons $\beta_1 = \beta_2 = 1$ et $c_{11} = 0.06$ comme cas spécifique. Alors $P_3 = (0.9240, 0.0893, 0.1412)$ est le seul point d'équilibre de coexistence réalisable. La matrice Jacobienne évaluée en P_3, notée J_{P_3}, est donnée par

$$J_{P_3} = \begin{pmatrix} -0.9241 & -0.7871 & 0 \\ 0.3912 & -1.1659 & -2.6884 \\ 0 & 0.2551 & -0.2556 \end{pmatrix}$$

$\lambda^3 + k_1\lambda^2 + k_2\lambda + k_3 = 0$ est l'équation caractéristique de la matrice J_{P_3}, où $k_1 = 2.3455$, $k_2 = 2.6053$, et $k_3 = 0.9878$. Puisque $k_1 > 0$, $k_3 > 0$, et $k_1k_2 - k_3 = 5.1229 > 0$, nous pouvons conclure que P_3 est stable sur la base des critères de Routh-Hurwitz. En choisissant $c_{11} = 0.07$ et $\beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.49$ comme un autre exemple, nous obtenons des valeurs instables $P_2 = (0.1136, 0.3223, 0)$ et $P_3 = (0.9046, 0.1101, 0.1482)$.

Les figures 5.1, 5.2 et 5.3 seront utilisées pour illustrer ce dernier exemple.



(a) **(b)**

Figure 5.1: Deux trajectoires convergeant vers des attracteurs périodiques différents, (a) Trajectoire pour $\beta_1 = 0.7$, $\beta_2 = 0.49$, point initial $=(0.2, 0.1, 0)$, (b) Trajectoire pour $\beta_1 = 0.7$, $\beta_2 = 0.49$, point initial $=(0.3, 0.1, 0.001)$.

Dans le système, deux cycles limites stables coexistent : l'un autour du point d'équilibre P_2 dans le plan x_1x_2, et l'autre autour de P_3 dans l'espace tridimensionnel, illustrant la bi-stabilité. Les trajectoires sont sensibles aux conditions initiales, suggérant la possibilité de chaos.

5.4 Comportement des sous-systèmes

Tout d'abord, nous présentons le modèle dans la limite singulière, c'est-à-dire dans le cas où soit $\beta_1 \to 0$, soit $\beta_2 \to 0$, ou les deux peuvent se produire. Pour $0 < \beta_2 < \beta_1 \ll 1$, la trajectoire de l'ensemble du système (5.3) est une solution perturbée des sous-systèmes.

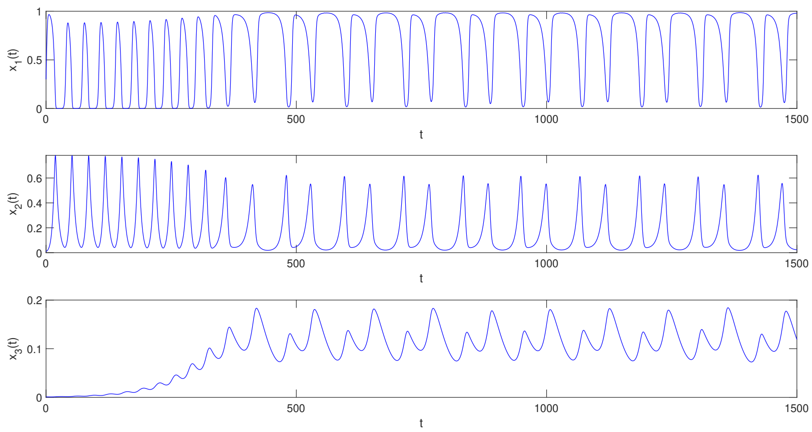
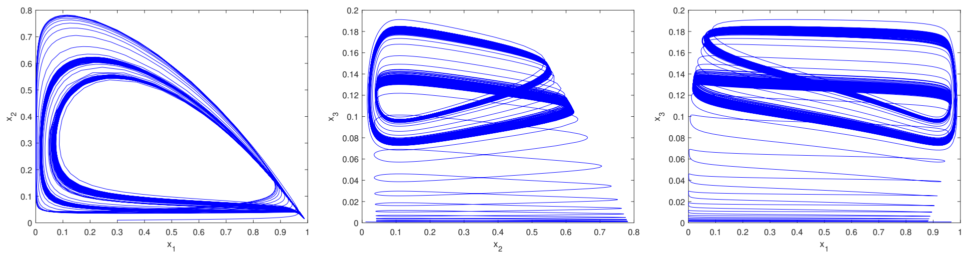


Figure 5.2: Les fréquences de x_1, x_2, et x_3 en fonction du temps



(a) **(b)** **(c)**

Figure 5.3: (a) Projection de la trajectoire dans le plan x_1x_2, (b) Projection de la trajectoire dans le plan x_2x_3, (c) Projection de la trajectoire dans le plan x_1x_3.

Après que le temps soit divisé en échelles de temps rapides, intermédiaires et lentes, le système 5.3 repose sur un système de trois équations différentielles dont le comportement varie selon les valeurs des paramètres β_1 et β_2 et leur effet sur la rapidité de chaque équation. Le système est divisé en trois cas principaux.

Dans le premier cas, lorsque $\beta_1 \to 0$ et que β_2 est une petite valeur positive, cette situation est considérée comme rapide. Dans ce cas, seule la variable x_1 évolue dans le temps, tandis que x_2 et x_3 restent constantes. Le sous-système pour cette situation est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 \left[(1 - x_1) - \frac{x_2}{x_1 + c_4} \right] = x_1 g_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = 0, \\ \frac{dx_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, connu comme l'état intermédiaire, $\beta_2 \to 0$ tandis que β_1 est une valeur positive. Ici, seule la variable x_2 évolue dans le temps, tandis que x_1 et x_3 restent constantes. Le sous-système de ce cas est :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0, \\ \frac{dx_2}{dt} = \beta_1 x_2 \left[-P_2 + \frac{c_6 x_1}{x_1 + c_7} - \frac{x_3}{x_2 + (c_8 + c_9 x_2) x_3 + c_{10}} \right] = \beta_1 x_2 g_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Dans le troisième cas, appelé l'état lent, lorsque β_1 et β_2 sont nulles. Dans cette situation, seule la variable x_3 évolue dans le temps, alors que x_1 et x_2 restent constantes. Le sous-système dans ce cas est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0, \\ \frac{dx_2}{dt} = 0, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3 \left[-c_{11} + \frac{c_{12} x_2}{x_2 + (c_8 + c_9 x_2) x_3 + c_{10}} \right] = x_3 g_3(x_2, x_3). \end{cases}$$

Le flux concaténé lent-intermédiaire-rapide, ou les solutions des sous-systèmes susmentionnés, constituent la trajectoire unique. Un exemple schématique d'un cycle lent-intermédiaire-rapide unique est montré dans la Figure 5.4a, qui se compose d'un segment de flux lent (la fine ligne noire), de trois segments de flux intermédiaires (la ligne bleue moyenne) et de deux segments de flux rapides (la ligne rouge épaisse). La variété critique du sous-système rapide est l'ensemble de tous les points d'équilibre comme suit :

$$M^0 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2, x_3 > 0\}, \quad \text{et} \quad M^1 = \{(x_1, x_2, x_3) : g_1(x_1, x_2) = 0, x_3 > 0\}$$

, cela ressemble explicitement à ceci $M^1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 := \varphi(x_2) = (1 - x_2)(x_2 + c_4), x_2 > 0, x_3 > 0\}$.
Il y a un pli dans cette surface, et nous pouvons trouver la courbe de pli par
$\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3) : \varphi'(x_1) = 0, x_2 = \varphi(x_1), x_3 \geq 0\}$, impliquant $x_{1,max} = \frac{1-c_4}{2}$.

À l'exception de la courbe de pli $\mathcal{C}$, où elle perd son hyperbolicité, M^1 est hyperbolique partout. La variété critique non triviale $M^1 = 0$ est divisée en sous-variétés hyperboliques typiquement attractives et répulsives par la courbe de pli $\mathcal{C}$ comme suit : $M_a^1 = \{(x_1, \varphi(x_1), x_3) : x_1 > x_{1,max}, x_3 \geq 0\}$ et $M_r^1 = \{(x_1, \varphi(x_1), x_3) : x_1 < x_{1,max}, x_3 \geq 0\}$, respectivement. La variété critique triviale M^0 (plan $x_2 x_3$) et la variété M^1 se croisent en une courbe décrite par : $\mathcal{T}_1 = \{(0, c_4, x_3) : x_3 \geq 0\}$.
La courbe de bifurcation transcritique, $\mathcal{T}_1$, divise le plan en sous-variétés hyperboliques typiquement répulsives et attractives, respectivement. Ensuite, les sous-variétés attractives et répulsives de la variété M_0 sont $M_a^0 = \{(0, x_2, x_3) : x_2 > \varphi(0), x_3 > 0\}$, et

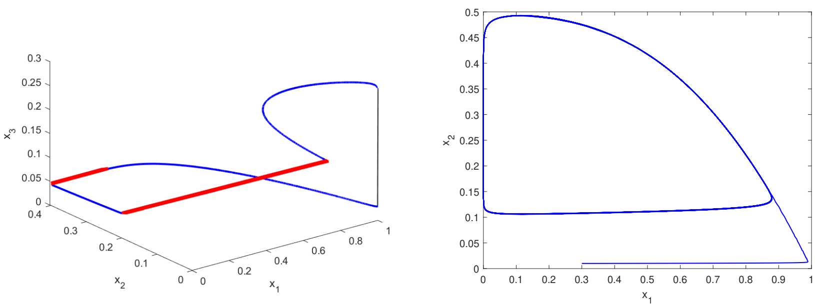
$M_r^0 = \{(0, x_2, x_3) : x_2 < \varphi(0), x_3 > 0\}$, respectivement.

Pour β_1, β_2 où $0 < \beta_1, \beta_2 \ll 1$, le théorème de Fenichel [14] garantit l'existence de sous-variétés perturbées localement invariantes, les variétés essentielles M^0 et M^1 ayant les sous-variétés $M^0_{\beta_1,\beta_2}$ et $M^1_{\beta_1,\beta_2}$, respectivement, à l'exception des courbes non hyperboliques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}_1$. De plus, les sous-variétés attractives M^1_{a,β_1,β_2} et répulsives M^1_{r,β_1,β_2} correspondantes sont perturbées par les sous-variétés attractives (M_a^1) et répulsives (M_r^1) de la variété critique. Par conséquent, les sous-variétés perturbées $M^0_{\beta_1,\beta_2}$ et $M^1_{\beta_1,\beta_2}$ dictent la dynamique de l'ensemble du système (5.3) pour $\beta_1, \beta_2 \neq 0$ localement.

Le sous-système intermédiaire est défini sur les variétés M^0 et M^1 avec $x_3 =$ constant, donc nous analysons le système intermédiaire dans le plan $x_3 = c'$, parallèle au plan x_1x_2. En substituant $x_3 = c'$ dans l'expression de g_3, nous obtenons une expression explicite de la ligne de niveau non triviale du sous-système intermédiaire comme suit :

$$x_1 = \frac{c_5c_7(1 + c_9c')x_2 + (c_5c_7c_8 + c_7)c' + c_5c_7c_{10}}{(c_6 + c_9(c_6 - c_5)c' - c_5)x_2 + (c_6c_8 - c_5c_8 - 1)c' + c_{10}(c_6 - c_5)}$$

Le nombre de points d'équilibre est lié à la valeur c' ainsi qu'à d'autres paramètres de fond. Par exemple, dans la Figure 5.4b, nous montrons que pour $c' = 0.1$, le système possède un unique point d'équilibre instable entouré d'un cycle limite stable.



(a) **(b)**

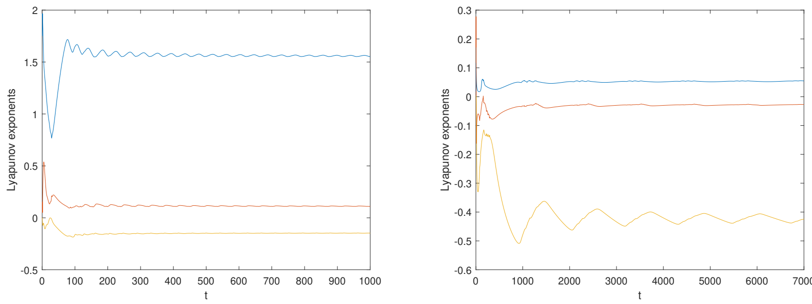
Figure 5.4: Les dynamiques des sous-systèmes : (a) Une représentation schématique du cycle lent-intermédiaire-rapide pour $\beta_1 = 0.005$ et $\beta_2 = 0.0035$, (b) La dynamique des systèmes intermédiaires pour $c = 0.1$, $\beta_1 = 0.1$ et $\beta_2 = 0$.

La compréhension des dynamiques générées par le sous-système intermédiaire du système complet est particulièrement importante pour certaines instances spécifiques. L'objectif principal de ce travail est d'examiner les nombreuses dynamiques chaotiques que le système (5.3) présente et de déterminer comment les différents régimes chaotiques du système peuvent être influencés par les diverses échelles de temps.

5.5 Analyse Dynamique du Chaos

5.5.1 Exposants de Lyapunov

Nous avons représenté les exposants de Lyapunov en supposant deux valeurs pour β_1 et β_2 et obtenu les résultats suivants :



(a) **(b)**

Figure 5.5: (a) Exposants de Lyapunov pour $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, (b) Exposants de Lyapunov pour $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.05$.

Comparaison :
La présence de ce type d'exposants de Lyapunov dans la Figure 5.5a indique une complexité accrue dans le comportement du système, où il existe une convergence locale dans une direction avec dispersion ou chaos dans d'autres. Cela suggère une sensibilité plus élevée du système (5.2) aux conditions initiales par rapport au système après segmentation temporelle (5.3), résultant en un comportement plus complexe et chaotique. Le rôle de cette étude en utilisant la segmentation temporelle devient évident, car elle a clarifié le comportement du système.

5.5.2 Transition progressive vers le chaos

Nous démontrons comment les paramètres de temps influencent la dynamique chaotique. Nos simulations commencent avec $\beta_1 = \beta_2 = 1$ et sont progressivement réduites pour observer la cascade de doublements de période menant au chaos. Dans la Figure 5.6a, nous constatons que les espèces évoluent sur une orbite périodique en l'absence de multiples échelles de temps. En revanche, dans la Figure 5.6b, l'orbite 1-périodique subit une bifurcation de doublement de période lorsque β_1 et β_2 diminuent, produisant une orbite 2-périodique. Dans la Figure 5.6c, nous obtenons une orbite 4-périodique. Ainsi, avec des bifurcations successives de doublement de période, le système devient chaotique à partir d'un état périodique (voir Figure 5.6d).

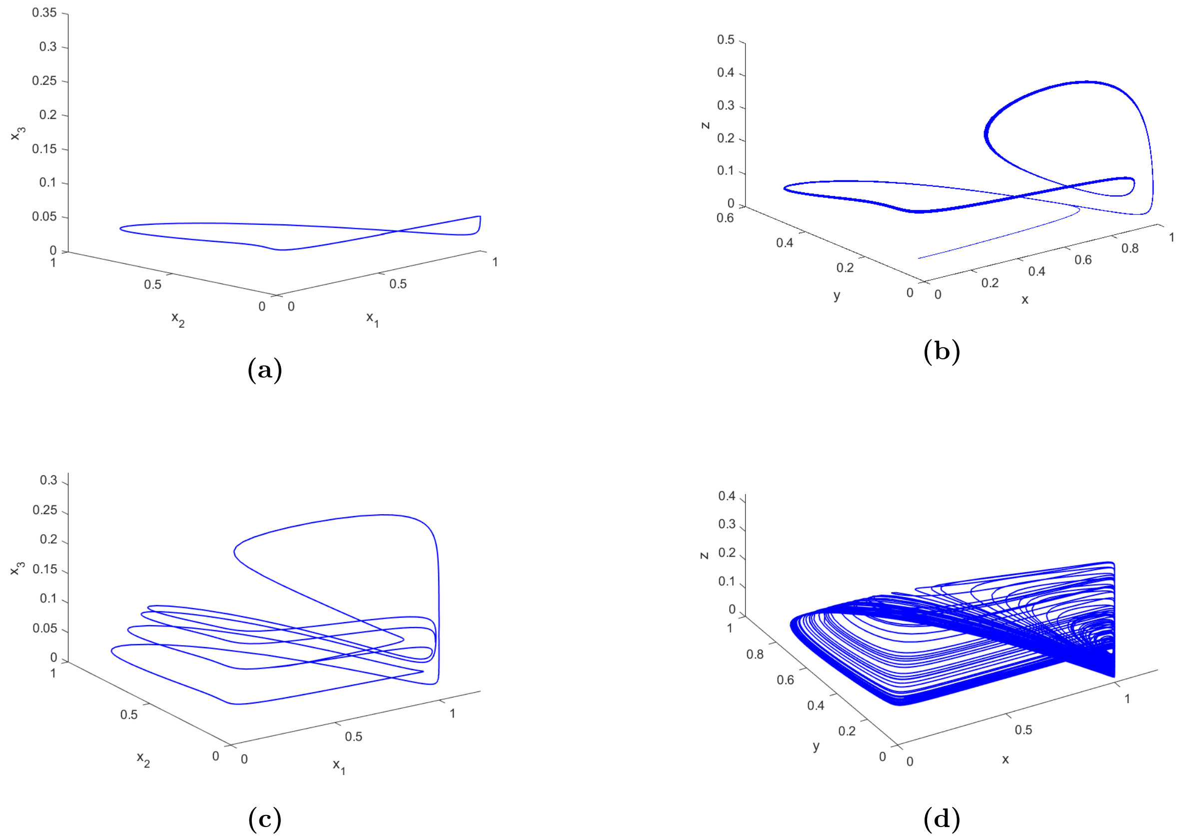


Figure 5.6: La bifurcation par doublement de période en fonction des variations de β_1 et β_2 : (a) Période 1 pour $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = 1$, (b) Période 2 pour $\beta_1 = 0.25$ et $\beta_2 = 0.125$, (c) Période 4 pour $\beta_1 = 0.2$ et $\beta_2 = 0.1$, (d) Chaos pour $\beta_1 = 0.1$ et $\beta_2 = 0.05$.

5.6 Conclusion

Les interprétations écologiques des résultats présentés dans cet article soulignent l'importance de comprendre les impacts environnementaux des modifications des paramètres clés des modèles environnementaux. Lorsque le taux de reproduction du premier prédateur approche de zéro, il reflète la réponse environnementale de la chaîne alimentaire et des prédateurs. La réduction du taux de reproduction entraîne une diminution de la population du premier prédateur, affectant indirectement le prédateur supérieur qui dépend de ce premier prédateur comme source de nourriture.

Il est important de noter que les effets environnementaux de ces changements ne se limitent pas au niveau individuel, mais s'étendent également à l'ensemble de l'écosystème. En raison des interactions complexes entre les organismes vivants et les facteurs environnementaux, l'écosystème peut entrer dans un état chaotique où le comportement devient imprévisible et les dynamiques sont instables.

Par conséquent, cette recherche met en lumière l'importance d'analyser les impacts environnementaux des changements dans les paramètres clés des modèles environnementaux et leur rôle dans la détermination de la stabilité et de l'évolution des écosystèmes à long terme.

En résumé, cette recherche contribue de manière significative à la compréhension des impacts environnementaux des changements dans les systèmes écologiques et à l'identification des facteurs influençant leur stabilité. Cela aide à élaborer des stratégies pour la conservation de la biodiversité et pour assurer la durabilité environnementale.

Conclusion Générale

Les systèmes dynamiques chaotiques représentent un domaine avancé en mathématiques et en sciences appliquées, établissant un lien entre les théories abstraites et les applications pratiques dans divers secteurs. Cette thèse a exploré plusieurs aspects des systèmes dynamiques chaotiques, en commençant par les concepts théoriques fondamentaux pour aboutir à des applications concrètes dans le chiffrement et l'étude des chaînes alimentaires dans les écosystèmes.

Dans les premiers chapitres, les bases théoriques ont été exposées, notamment les concepts de points fixes, de bifurcations, d'espace des phases et de stabilité des systèmes à l'aide du critère de Lyapunov. Des propriétés caractéristiques des systèmes chaotiques, telles que la sensibilité aux conditions initiales et les attracteurs étranges, ont été abordées, mettant en évidence la nature imprévisible mais déterministe de ces systèmes régis par des lois mathématiques rigoureuses.

Les chapitres suivants se sont concentrés sur les applications pratiques, en particulier dans le domaine du chiffrement. L'étude a montré comment les systèmes chaotiques peuvent être utilisés pour générer des nombres aléatoires appliqués dans des algorithmes de chiffrement, en mettant l'accent sur les systèmes de Lorenz et de Rössler. En outre, un programme a été développé en langage Python pour chiffrer des messages vocaux entre deux appareils de communication, en utilisant les propriétés du chaos pour générer des signaux chiffrés garantissant la sécurité des échanges numériques.

Par ailleurs, la thèse a exploré le rôle des systèmes chaotiques dans l'étude des écosystèmes. Les dynamiques des chaînes alimentaires et les interactions entre les espèces au sein des systèmes écologiques ont été analysées à l'aide de modèles mathématiques. Cette approche a permis de mieux comprendre l'impact des changements environnementaux et des facteurs externes sur la stabilité des écosystèmes, contribuant ainsi à l'élaboration de stratégies durables pour la gestion des ressources naturelles.

La recherche a également porté sur l'application de la technique de partitionnement temporel comme outil efficace pour analyser le chaos et identifier les zones de comportement chaotique au sein des systèmes dynamiques. Cette méthode s'est révélée pertinente pour détecter les transitions entre comportements réguliers et chaotiques, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives dans l'étude des systèmes complexes et leurs applications.

En conclusion, cette thèse souligne l'importance des systèmes dynamiques chaotiques en tant qu'outil scientifique puissant, combinant l'analyse mathématique et les applications pratiques dans divers domaines. Le champ d'étude reste ouvert aux recherches futures, qui pourraient porter sur l'amélioration des algorithmes chaotiques pour le chiffrement et la sécurité informatique, ou sur l'élargissement des modèles écologiques pour analyser des systèmes plus complexes. Ce travail constitue une étape vers une meilleure compréhension des systèmes dynamiques chaotiques et de leur rôle dans la résolution des défis du monde moderne.

Bibliographie

[1] A. Y. Albakri and O. Karan. A two-layer for image encryption using lorenz and rossler chaotic systems. *Journal of Modern Computing and Engineering Research*, pages 9–19, 2024.

[2] A. H. Alrubaie, M. A. A. Khodher, and A. T. Abdulameer. Image encryption based on 2dna encoding and chaotic 2d logistic map. *Journal of Engineering and Applied Science*, **70**(1) :60, 2023.

[3] G. Alvarez and S. Li. Some basic cryptographic requirements for chaos-based cryptosystems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **16**(8) :2129–2151, 2006.

[4] A. Ambhaikar. A novel chaos-based encryption algorithm for secure communication systems. *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, **30**(2) :24–39, 2023.

[5] M. C. Benkara and N. E. Hamri. Dynamics analysis of the coexistence equilibrium for a differential-algebraic biological economic system with the hybrid functional response. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B : Applications & Algorithms*, **30** :375–394, 2023.

[6] M. C. Benkara and N. E. Hamri. Stability and hopf bifurcation of a generalized differential-algebraic biological economic system with the hybrid functional response and predator harvesting. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **23**(4) :398–409, 2023.

[7] N. Berguellah and N. E. Hamri. Cryptographic study of functional message using two chaotic models. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **42** :67–78, 2019.

[8] K. Busawon, P. Canyelles-Pericas, R. Binns, I. Elliot, and Z. Ghassemlooy. A brief survey and some discussions on chaos-based communication schemes. *2018 11th International Symposium on Communication Systems, Networks Digital Signal Processing (CSNDSP)*, pages 1–5, 2018.

[9] P. R. Chowdhury, M. Banerjee, and S. Petrovskii. Coexistence of chaotic and non-chaotic attractors in a three-species slow–fast system. *Chaos, Solitons & Fractals*, **167** :113015, 2023.

[10] Sparrow Colin. *The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer, 1982.

[11] K. Daas and N. E. Hamri. Inducing chaos through timescales in a three-species food chain model. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **24**(6) :582–593, 2024.

[12] Joan Daemen and Vincent Rijmen. *The Design of Rijndael : AES – The Advanced Encryption Standard*. Springer, 2002.

[13] A. Durdu. Image transfer with secure communications application using a new reversible chaotic image encryption. *Multimedia tools and applications*, **83** :3397–3424, 2024.

[14] N. Fenichel. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of differential equations*, **31**(1) :53–98, 1979.

[15] A. M. Gilmolk and M. R. Aref. Lightweight image encryption using a novel chaotic technique for the safe internet of things. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **17** :146, 2024.

[16] P. Grassberger and I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D : nonlinear phenomena*, **9**(1-2) :189–208, 1983.

[17] B. Hassard and J. Zhang. Existence of a homoclinic orbit of the lorenz system by precise shooting. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **25**(1) :179–196, 1994.

[18] S. P. Hastings and W. C. Troy. A proof that the lorenz equations have a homoclinic orbit. *Journal of Differential Equations*, **113**(1) :166–188, 1994.

[19] J. Hateley. The lorenz system, 2021. Lecture Notes from the University of California, Santa Barbara.

[20] P. R. Midhun I. Pavithran and R. I. Sujith. Tipping in complex systems under fast variations of parameters. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **33**(8) :83130, 2023.

[21] A. P. James. An overview of memristive cryptography. *The European Physical Journal Special Topics*, **228**(10) :2301–2312, 2019.

[22] G. Kaddoum. Wireless chaos-based communication systems : A comprehensive survey. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*, **4** :2621–2648, 2016.

[23] Holger Kantz and Thomas Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, 2004.

[24] M. Khan, S. A. Khan, and M. A. Gondal. A new image alternate encryption algorithm based on chaotic map. *International Journal of Computer Applications*, **42**(2) :13–17, 2012.

[25] W. Khellaf and N. Hamri. Boundedness and global stability for a predator-prey system with the beddington-deangelis functional response. *International Journal of Differential Equations*, 2010(1) :813289, 2010.

[26] G. Kocarev. Chaos-based cryptography : A brief overview. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, **1**(3) :6–21, 2001.

[27] V. Kontorovich, M. Beltrán, and L. Cruz. Cumulant analysis of rössler attractor and its applications. *The Open Cybernetics & Systemics Journal*, **3** :29–39, 2009.

[28] F. Koulouh, S. Amine, R. Taouil, M. Es-Sabry, F. Hdioud, and N. Akkad. An algorithm for image encryption combining the lorenz system, xor operation, and inverted bit permutation. In *2024 3rd International Conference on Embedded Systems and Artificial Intelligence (ESAI)*, pages 1–6, 2024.

[29] M. Labid and N. E. Hamri. Chaos anti-synchronization between fractional-order lesser date moth chaotic system and integer-order chaotic system by nonlinear control. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **23**(2) :207–213, 2023.

[30] Q. Lai, A. Akgul, C. Li, and G. Xu. A new chaotic system with multiple attractors : Dynamic analysis, circuit realization and s-box design. *Entropy*, **20**(1) :12, 2017.

[31] Q. Lai, Z. Wan, L. K. Kengne, P. D. K. Kuate, and C. Chen. Two-memristor-based chaotic system with infinite coexisting attractors. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, **68**(6) :2197–2201, 2020.

[32] M. Lakshmanan and S. Rajasekar. *Nonlinear Dynamics : Integrability, Chaos and Patterns*. Springer, 2012.

[33] W. laouira and N. E. Hamri. Contrôle des systèmes dynamiques chaotiques. *Thèse de doctorat, Université Frères Mentouri-Constantine 1*, 2018.

[34] W. Laouira and N. E. Hamri. New design of stability study for linear and nonlinear feedback control of chaotic systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, page 414, 2022.

[35] C. Letellier, L. Olsen F. Lars, and S. Mangiarotti. Chaos : From theory to applications for the 80th birthday of otto e. rössler. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **31**(6), 2021.

[36] Y. Li. Predicting time series of the lorenz chaotic system using random forest regression. In *2023 IEEE International Conference on Signal Processing*. IEEE, 2023.

[37] Z. Li, C. Li, A. Akgul, L. Bi, and Y. Jiang. Rössler-like neuronal firing with local amplitude control. *Mathematical Problems in Engineering*, **2022**(1), 2022.

[38] S. Liu, Y. Wei, J. Liu, S. Chen, and G. Zhang. Multi-scroll chaotic system model and its cryptographic application. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **30**(13), 2020.

[39] W. Liu. Criterion of hopf bifurcations without using eigenvalues. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **182**(1) :250–256, 1994.

[40] W. Liu and G. Chen. Can a three-dimensional smooth autonomous quadratic chaotic system generate a single four-scroll attractor ? *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **14**(4) :1395–1403, 2004.

[41] Z. Liu and Q. Lai. A novel memristor-based chaotic system with infinite coexisting attractors and controllable amplitude. *Indian Journal of Physics*, **97**(4) :1159–1167, 2023.

[42] N. A. Magnitskii. Advances in nonlinear dynamics and chaos : Theory and application. *Mathematics*, **11**(Special Issue), 2023.

[43] R. Ouahabi and N. E. Hamri. Systèmes dynamiques et chaos. *Thèse de doctorat, Université Frères Mentouri-Constantine 1*, 2018.

[44] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, **64**(8) :821–824, 1990.

[45] L. Perez and L. Adrian. Xor chain and perfect secrecy at the dawn of the quantum era. *Cryptography*, **7**(4) :50, 2023.

[46] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer, 2013.

[47] K. Qian and H. Wen. Exploiting newly designed fractional-order 3d lorenz chaotic system and 2d discrete polynomial hyper-chaotic map for high-performance multi-image encryption. *Fractal and Fractional*, **7**(12) :887, 2023.

[48] E. Reinhard, E. A. Khan, A. O. Akyuz, and G. G. Johnson. *Color imaging : fundamentals and applications.* CRC Press, 2008.

[49] R. L. Rivest, A. Shamir, and L. Adleman. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Communications of the ACM*, **21**(2) :120–126, 1978.

[50] O. E. Rössler. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, **57**(5) :397–398, 1976.

[51] A. R. Salam, J. Raied, and K. S. Mousa. Generating a new chaotic system using two chaotic rossler-chua coupling systems. *Optical and Quantum Electronics*, **53** :1–10, 2021.

[52] Hiroki Sayama. *Introduction to the modeling and analysis of complex systems.* Open SUNY Textbooks, 2015.

[53] Bruce Schneier. *Data and Goliath : The Hidden Battles to Collect Your Data and Control Your World.* W.W. Norton Company, 2015.

[54] D. Sen, S. Ghoraiand, and M. Banerjee. Complex dynamics of a three species prey-predator model with intraguild predation. *Ecological Complexity*, **34** :9–22, 2018.

[55] G. Sharma. Digital color imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, **6**(7) :901–932, 1997.

[56] Y. Shen, J. Huang, L. Chen, T.Wen, T.Li, and G. Zhang. Fast and secure image encryption algorithm with simultaneous shuffling and diffusion based on a time-delayed combinatorial hyperchaos map. *Entropy*, **25**(5) :753, 2023.

[57] Peter W. Singer and Allan Friedman. *Cybersecurity and Cyberwar : What Everyone Needs to Know.* Oxford University Press, 2014.

[58] C. Sparrow. The lorenz equations : Bifurcations, chaos, and strange attractors. *Mathematical Intelligencer*, **4**(3) :183–188, 1982.

[59] Julien Clinton Sprott. *Elegant Chaos : Algebraically Simple Chaotic Flows.* World Scientific, 2010.

[60] N. Stankevich, A. Kazakov, and S. Gonchenko. Scenarios of hyperchaos occurrence in 4d rössler system. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **30**(12), 2020.

[61] Steven Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering.* CRC Press, 2018.

[62] J. S. Teh, M. Alawida, and Y. S. Cheng. Implementation and practical problems of chaos-based cryptography revisited. *Journal of Information Security and Applications*, **50** :102421, 2020.

[63] R. Upadhyay and R. K. Naji. Dynamics of a three species food chain model with crowley–martin type functional response. *Chaos, solitons & fractals*, **42**(3) :1337–1346, 2009.

[64] Sundarapandian Vaidyanathan and Christos Volos, editors. *Advances and Applications in Chaotic Systems.* Springer, 2016.

[65] Y. Wang, X. Leng, C. Zhang, and B. Du. Adaptive fast image encryption algorithm based on three-dimensional chaotic system. *Entropy*, **25**(10) :1399, 2023.

[66] F. Yu, L. Li, Q. Tang, S. Cai, Y. Song, and Q. Xu. A survey on true random number generators based on chaos. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2019**(1), 2019.

[67] C. Zhang and B. Hong. Neimark–sacker bifurcation of a discrete-time predator–prey model with prey refuge effect. *Mathematics*, **11**(6) :1399, 2023.