الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Sur un problème de contrôle optimal stochastique de type mean-field :cas convex

Préparé par : Abir Kadjoudj

Asma Boulbair

Soutenue devant le jury

Loubna Benaouicha	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Samira Boukaf	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Yakoub Boularouk	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire :2024/2025

Remeciements

Avant tout, je remercie d'abord Allah qui m'a aidée, et qui m'a donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude. Il est difficile de trouver les mots justes pour exprimer toute la gratitude que je ressens aujourd'hui. Ce travail est l'aboutissement d'un parcours jalonné de doutes, d'efforts, mais surtout de belles rencontres et de soutiens inestimables.

À **mes parents**, vous qui avez toujours cru en moi, même lorsque la fatigue prenait le dessus. Merci pour votre amour inconditionnel, vos encouragements silencieux et vos sacrifices que je mesure un peu plus chaque jour. Votre présence a été ma plus grande force.

À **Madame Boukaf Samira**, mon encadrante, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance pour votre patience, votre écoute, et vos conseils avisés. Votre accompagnement bienveillant a été essentiel dans la réalisation de ce travail et m'a permis de grandir autant sur le plan académique que personnel.

Je tiens également à remercier sincèrement **Monsieur Yakoub Boualarouk** et **Madame Benaouicha Loubna**, membres du jury, pour avoir accepté d'évaluer ce travail. Leur lecture attentive, leurs remarques pertinentes et leur bienveillance ont grandement enrichi cette expérience.

Je remercie aussi ma famille et mes proches pour leurs mots rassurants, leurs gestes réconfortants et leur indéfectible soutien dans les moments de doute. Vous avez su rendre ce parcours plus doux.

Enfin, une pensée sincère à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont croisé mon chemin durant cette aventure. Chacun de vous a contribué, d'une manière ou d'une autre, à l'accomplissement de ce projet.

Ce mémoire n'est pas seulement le fruit d'un travail personnel, mais aussi le reflet de tout l'amour, la confiance et l'accompagnement que j'ai reçus.

Merci, du fond du coeur.

إهداء **بسم الله الرحمان الرحيم**

الحمد لله الذي يسر لي البدايات و بلغني النهايات بفضله و كرمه أهدي هذا النجاح لنفسي الطموحة أولا ابتدأت بطموح و انتهت بنجاح ثم إلى كل من سعى معي لإتمام مسيرتي الجامعية وبكل حب أهدي تخرجي و حصاد ما زرعته سنين طويلة في سبيل العلم .

إلى من أكرمني الله به و جعله من بين صفوف الرجال أبا لي و زادني به شرفا إلى من كلل العرق جبينه و من علمني أن النجاح لا يأتي إلا بالصبر و الإصرار إلى العزيز الذي حملت اسمه فخرا إلى النور الذي أنار دربي و داعمي الأول في مسيرتي و قوتي بعد الله.

"أبي الغالي "

إلى من جعل الجنة تحت أقدامها وسهلت لي الشدائد بدعائها إلى أنيسة العمر و حبيبة الروح و أعظم نعم لله علي إلى قدوتي و صديقة أيامي التي طالما تمنت أن تقرعينها بي في يوم كهذا .

"أمي الحنونة "

إلى من شددت عضدي بهم فكانوا لي خير معين إلى خيرة أيامي و صفوتها إلى قرة عيني .

"حاتم معتز بالله"

إلى صديقاتي اللواتي جعلن هذه الرحلة أكثر متعة وأقل صعوبة شكرا لكل لحظة ودعم لكل كلمة مشجعة ولكل الذكريات التي صنعناها معا .

(تقوى هديل عبير دنيا رجاء إخلاص أماني فاتن) حفظهم الله

إلي جميع أساتذتي الكرام كل باسمه ممن مدو يد العون لي أهدي إليكم ثواب هذا الجهد وأخص بالذكر الدكتورة الفاضلة "بوكاف سميرة " صاحبة الفضل في توجيهنا ومساعدتنا جزاها الله خير.

ها أنا اليوم أكملت و أتممت أول ثمرات جهدي بفضل الله و جاء اليسر هدا النجاح ليس لي وحدي بل لكم جميعا فقد كنتم سندا لي شكرا من القلب وأتمنى أن أكون مصدر فخركم كما كنتم مصدر قوتي .فالحمد الله على ما وهبني وأن يجعل هذا العمل مباركا وأن يعينني أينما كنت فمن قال أنا لها نالها فأنا لها وإن أبت رغما عنها أتيت بها فالحمد لله شكرا وحبا وامتنانا على البدء والختام وآخر دعواهم أن الحمد لله رب العالمين.

أسماء

بسم الله الرحمان الرحيم

إهداء

الحمد لله الذي ما ضيع لي تعب و لا خيب لي سعي و لا نقص لي مجهود ولا ثبط لي حلم كان الله معي ولا زال في كل سعي وراء النجاح فالحمد لله حتى ترضى واذا رضيت وبعد الرضا أهدي تخرجي إلى اليد الخفية والقلب الحنون الى من تحملت الكثير لأكون ما أنا عليه اليوم إلى صاحبة الدعاء الصادق إلى من كانت أمي وأبي و سندي في هذه الحياة .

"أمي العزيزة "

وإلى العزيز الذي حملت اسمه فخرا يردد إسمي عاليا في عنان السماء حاملة شرف لقبه إلى من فارقني وروحه مازالت ترفرف في سماء حياتي إلى تلك الروح الطاهرة أسأل الله أن يجعل هذا النجاح صدقة جارية في ميزان حسناته رحمك الله يا قطعة من الجنة .

"أبي الغالي "

إلى من هم دائما الكتف والسند الذي لا يميل أخواتي أسماء و تسنيم ولكل من كان لي عونا وسندا في هذا الطريق أصدقائي ورفقاء السنين أصحاب الشدائد و الأزمات .

وأخيرا وليس أخرا ماكنت أفعل لولا توفيق من الله ها هو اليوم العظيم هنا اليوم الذي اجريت سنوات شاقة حالمة فيها حتى توالت بمنته وكرمه لفرحة التمام الحمد لله الذي به خيرا وأمال وأغرقني سرورا وفرحا ينسيني مشقتي.

عبير

Résumé

Dans ce travail nous étudions un problème de contrôle optimal stochastique que consiste à minimiser une fonction coût par

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T l(t, X_t, E(X_t), u_t)dt + g(X_T, E(X_T))\right]$$

X_T est la solution au temps terminal T d'un système de type mean - field gouverné par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t & = b(t, X_t, E(X_t), u_t)dt + \sigma(t, X_t, E(X_t), u_t)dB_t \\ X_0 & = \xi \end{cases}$$

Notre objectif est d'établir des conditions nécessaires (principale du maximum stochastique) d'optimalité pour des diffusions

Abstract

In this work, we study a stochastic optimal control problem which consists of minimizing a cost function given by

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T l(t, X_t, E(X_t), u_t)dt + g(X_T, E(X_T))\right]$$

Where X_T is the solution at the terminal time T of a mean-field type system governed by the following stochastic differential equation :

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t, E(X_t), u_t)dt + \sigma(t, X_t, E(X_t), u_t)dB_t \\ X_0 &= \xi \end{cases}$$

Our objective is to establish necessary conditions of optimality (stochastic maximum principle) for such diffusions.

ملخص

تهدف هذه المذكرة إلى دراسة مسألة التحكم الأمثل في الأنظمة العشوائية من نوع Mean-Fild أين تعتمد ديناميكية النظام على الحالة الفردية و متوسط الحالات الأخرى. نهدف إلى **تقليل دالة تكلفة** تصف أداء النظام، رغم وجود عناصر عدم يقين، مع اعتماد **معادلة تفاضلية تصادفية** قد تكون معاملتها غير قابلة للإشتقاق.

نستعمل في هذا العمل **مبدأ الحد الأقصى العشوائي** لاستخلاص **شروط ضرورية للأمثلة**، مما يسمح باقتراح استراتيجيات تحكم فعالة. و تكمن أهمية هذا النموذج في تطبيقاته الواسعة في ميادين مثل الإقتصاد فيما يخص تحديد سياسات مالية فعالة في ظل تقلبات الأسواق في ميدان الصحة وضع خطط صحية لمواجهة انتشار الأوبئة في مجال الطاقة لتحسين أداء الأنظمة التكنولوجية كالمركبات الذكية و الطائرات بدون طيار كذلك فيما يتعلق بالذكاء الإصطناعي و التعلم الآلي حيث يساعد في اتخاذ القرار داخل أنظمة معقدة وغير مستقرة.

الكلمات المفتاحية: التحكم العشوائي الأمثل، معادلات تفاضلية عشوائية، نظرية الحقل المتوسط، مبدأ الحد الأقصى العشوائي ،حركة براونية ،العمليات العشوائية، مبدأ بونترياغين.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans de nombreux domaines scientifiques tels que la finance, l'ingénierie, la biologie ou la physique, les phénomènes aléatoires jouent un rôle fondamental.

Pour modéliser ces incertitudes et étudier leur évolution dans le temps, les processus stochastiques offrent un cadre mathématique puissant.

Ce travail commence par une présentation des concepts fondamentaux : espace de probabilité, filtration, mouvement brownien et calcul stochastique d'Itô. Ces outils sont essentiels pour comprendre le comportement des systèmes soumis au hasard.

Ensuite, nous abordons les équations différentielles stochastiques, en détaillant les conditions d'existence et d'unicité des solutions.

La deuxième partie est consacrée au contrôle stochastique, avec l'étude de méthodes classiques comme la programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryagin.

Enfin, nous développons le principe du maximum stochastique, d'abord dans le cadre classique, puis dans le cadre plus complexe du type Mean-Field, où l'interaction entre plusieurs individus est prise en compte. À travers ce mémoire, notre objectif est d'acquérir une compréhension globale et rigoureuse des outils mathématiques nécessaires pour modéliser et contrôler les systèmes aléatoires.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR PROCESSUS STOCHASTIQUES

Dans ce chapitre nous nous concentrons sur quelques définitions de base et certains résultats que nous utilisons dans [1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8],[9],[13],[14].

1.1 Espace de probabilité

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oû :
-Ω est un ensemble,
- $\mathcal{F}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω,
-$\mathbb{P}$ est une (mesure de) probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$

Définition 1.1.1 *Une tribu (ou σ-algèbre) sur* Ω *est une famille* $\mathcal{F}$ *de sous -ensembles de* Ω *(appellés "événements") tels que*

$$\begin{cases} i)\emptyset \in \mathcal{F}, \\ ii)A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}, \\ (A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{cases}$$

En particulier : $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$
De même , $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ *(cf exercices pour d'autre propriétés)*

1.2 Filtration

Définition 1.2.1 *Une filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille croissante* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, c'est -à- dire* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *pour tout* $0 \leq s \leq t$ *dans* $\mathbb{T}$ *.*

On dit qu'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite, i.e. :*

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

et si elle est complète , c'est -à- dire. $\mathcal{F}_0$ *contient les ensembles négligeables* ($\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} telque \mathbb{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$).

On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ *l'espace de probabilité filtré satisfait les conditions habituelles.*

1.3 Processus stochastique

Définition 1.3.1 *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est une famille de variables*

aléatoires X_t *définie sur un même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *indexé par un ensemble* $\mathbb{T}$.

$$\begin{cases} X : \mathbb{T} \times \Omega & \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ (t, \omega) & \rightarrow \quad X_t(\omega) \end{cases}$$

En général $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ *ou* $\mathbb{T} = [0, T]$ *et on considère que le processus est indexé par le temps* $t \in \mathbb{T}$ *. Un processus dépend de deux paramètres :*$X_t(\omega)$ *dépend de t et de l'aleàtoire* $\omega \in \Omega$ *:*
-pour t$\in \mathbb{T}$ *fixé ,* $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ *est une variable aleàtoire sur l'éspace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
-pour $\omega \in \Omega$ *fixé, t* $\rightarrow X_t(\Omega)$ *est une trajectiore du processus.*

Définition 1.3.2 *(égalités des processus)*

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *et*$Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *deux processus :*

1) Deux processus X et Y ont même loi s'ils ont même loi fini-dimensionnelles, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $t_1, ..., t_p \in \mathbb{T}$.

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_p}) \overset{\mathcal{L}}{\equiv} (Y_{t_1}, ...Y_{t_p})$$

2) On dit que $(Y_t)_{t\in T}$ *est une modification (ou une versin) du processus* $(X_t)_{t\in T}$ *si pour tout* $t \in T$ *, on a* $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.

3) Deux processus $(X_t)_{t_\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *sont dit indistingable si leur trajectoires coincident p.s,* $\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t) = 1$.

Définition 1.3.3 *soit* $X = (X_t)_{t\in T}$ *un processus stochastique défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, une filtration naturelle à X est la filtration définit par :*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X(t), 0 \leq s \leq t), \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

1.4 Temps d'arrêt

Définition 1.4.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ *l'espace de probabilité filtré.*
Une variable aléatoire $\tau :\longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$*, est une temps aléatoire , est appellé temps d'arrêt (par rapport à la filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$*) si pour tout* $t \in \mathbb{T}$ *:*

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Etant donné un temps d'arrêt τ*, on mesure l'information accumulée jusqu'en* τ *par :*

$$\mathcal{F}_\tau = \{B \in \mathcal{F} : B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{T}\}$$

1.5 Mouvement Brownien

Mouvement Brownien 1-dimensionnel :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité,le processus $B = (B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un mouvement Brownien (standard) si :

a) $B_0 = 0$

b) $\forall 0 \leq s \leq t, B_t - B_s \sim N(0, t-s) \sim B_{t-s}$.

c) $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 ... \leq t_n$, les accroissements $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0})$ sont indépendantes

d) pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \longrightarrow B_t(\omega)$ est continue .

On définit $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s, 0 \leq s \leq t\}$ pour tout $t \geq 0$,$(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ s'appelle la filtration naturelle générée par (B_t).On dit $(B_t)_{t\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0} - M.B.$

1.6 Variation quadratique

Variation quadratique du mouvement brownien standard

soit($B_t, t \in R_+$)un mouvement brownien standard(par convenance,on notera parfoit $B_t = B(t)$). pour $t > 0$,

On définit :

$$\langle B \rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} \left(B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)\right)^2$$

proposition :

Pour $t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle B \rangle_t^{(n)} = t \quad p.s.$$

et on définit la variation quadratique du mouvement brownien standard $\langle B \rangle_t$ comme étant donnée par cette limite(par convention,on pose également$\langle B \rangle_0 = 0$) .

corollaire

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left| B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)\right| = \infty$$

p.s. donc le processus (B_t) n'est pas à variation bornée.

1.7 Le calcul stochastique d'itô

1.7.1 L'intégrale d'itô

Soit($B_t, t \in R_+$) un mouvement brownien standard par rapport à ($\mathcal{F}_t, t \in R_+$). Soit$T > 0$ fixé(n'est pas temps d'arrêt).Notre but est de construire l'intégrale stochastique

$$(\int_0^t H_s dB_s, t \in [0, T])$$

Pour un processus (H_t) vérifiant certain propriétés.pour cela , on procède en plusieurs étape (cf.construction de l'espérance).

Propriétés

1) ***Linéarité*** : soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $(H^i, i = 1, 2)$ deux processus, alors :

$$\int_0^t (aH_s^1 + bH_s^2)dB_s = a\int_0^t H_s^1 dB_s + b\int_0^t H_s^2 dB_s$$

2) ***Aditivité*** : pour $0 \leq s \leq u \leq t$,Alors :

$$\int_0^t H_s dB_s = \int_0^u H_s dB_s + \int_u^t H_s dB_s$$

3) ***Isométrie*** :

$$E\left[\left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2 d_s\right]$$

4) $(I_t)_{t\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ mesurable et trajectoire continues.

5) Propriétés de martingale $E[I_t(H) \setminus \mathcal{F}_s^B] = I_s(H)$.

6) $E[I_t(H)] = 0$

7) ***Variation quadratique*** :$\langle I(H)\rangle_t = \int_0^t \mid H_s \mid^2 ds$.

1.7.2 Formules d'itô

X est un processus d'itô :

Théorème 1.7.1 *:*
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*, de classe* C^2 *alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds$$

Sous forme différentielle,

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2 dt$$

Théorème 1.7.2 *:*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*de classe* $C^{1,2}$ *on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Ce que l'on note,

$$df(t, X_t) = f_t'(t, X_t)dt + f_x'(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}''(X_t)d\langle X\rangle_t$$

avec $d\langle X\rangle_t = \sigma_t^2 dt$

Théorème 1.7.3 *(cas multidimensionnelle)*
Soit $(X_i; i = 1, 2)$ *deux processus d'itô , et f fonction de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* C^2*.On a*

$$\begin{aligned} df(X_1(t), X_2(t)) &= f_1'(X_1(t), X_2(t))dX_1(t) + f_2'(X_1(t), X_2(t))dX_2(t) \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{11}''\sigma_1^2(t) + 2f_{12}''\sigma_1(t)\sigma_2(t) + f_{22}''\sigma_2^2(t)\right)(X_1(t), X_2(t))dt \end{aligned}.$$

ou f_i' *désigne la dérivé par rapport à* $x_i, i = 1, 2$ *et* f_{ij}'' *la dérivée seconde par rapport à* x_i, x_j

Théorème 1.7.4 *(intégration par parties)*
Si f est une fonction de classe C^1 *, alors*

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B(t) - \int_0^t f'(s)B_s ds$$

1.7.3 L'isométrie d'itô

L'isométrie d'itô est un résultat fondamentale du calcule stochastique qui exprime une propriété essentielle des intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien. Elle permet de calcule la variance d'une intégrale stochastique et joue un rôle clé dans l'analyse des équation différentielles stochastiques.

Enoncé de l'isométrie d'itô

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement browniene standard et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté vérifiant

$$E\left[\int_0^T X_t^2 dt\right] < \infty$$

Alos, l'intégrale stochastique

$$I_T = \int_0^T X_t dW_t$$

Vérifie la relation d'isométrie suivant :

$$E[I_T^2] = E\left[\int_0^T X_t^2 dt\right]$$

interprétation et implications

- Cette propriété signifie que l'intégrale d'itô préserve la norme L^2 ce qui justifie l'utilisation du terme "isométrie".
- Elle permet d'estimer directement la variance de l'intégrale stochastique .
- elle est utilisée dans la résolution des équation différentielles stochastiques et l'étude des propriétés des martingales.

1.8 Inégalités

1.8.1 Inégalité de Gronwall

Soient ϕ et f deux fonction continues sur $[0, T]$ non négatives , c_0 une constante positive.

Si

$$\phi(t) \leq c_0 + \int_0^t f\phi(s)ds; 0 \leq t \leq T$$

Alors :

$$\phi(t) \leq c_0 e^{\int_0^t f ds}; 0 \leq t \leq T$$

1.8.2 Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

pour tout $m > 0$, il existe C_m tel que pour tout temps d'arrêt τ on a :

$$E\left[\sup_{t\leq\tau}\left|\int_0^t f(s)dB_s\right|^m\right] \leq C_m E\left[\left(\int_0^t \mid f(s) \mid^2 ds\right)^{\frac{m}{2}}\right]$$

En particulier pour $m = 2$ et $\tau = T$ on a :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t f(s)dB_s\right|^2\right] \leq CE\left[\int_0^t \mid f(s) \mid^2 ds\right]$$

1.8.3 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soient f,g deux fonction de carré intégrable, alors on a

$$E(fg) \leq \left(E(f^2)E(g^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.9 Equation différentielles stochastiques

Le but des équation différentielles stochastique est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire . Partant d'une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$X'(t) = b(X(t)),$$

Soit encore sous la forme différentielles :

$$dX_t = b(X_t)dt.$$

Une telle équation est utilisé pour décrire l'évolution d'un systéme physique . Si l'on prend en compte les perturbations aléatoires , on ajoute un terme de bruit , qui sera de la forme $\sigma\ dB_t$, ou B_t désigne un mouvement brownien et σ est pour l'instant une constante qui correspond à l'intensité du bruit . On arrive à une équation différentielle "stochastique" de la forme :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma dB_t,$$

Ou encore sous form intégrale

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \sigma B_t.$$

On généralise cette équation en autorisant σ à dépendre de l'état à l'instant t :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

Soit encore sous la forme intégrale

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$$

Remarquant que le sens donné à cette équation dépend de la théorie de l'intégrale stochastique qui est un très bel outil mathématique .

cette notion était déjà employée en contrôle stochastique ou en finance en particulier

On continue de généraliser l'équation tout en autorisant b et σ dépendent du temps t , on se place donc dans un cadre vectorial, elle se représente sous la forme suivante :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, pour \quad 0 \leq t \leq T$$

En utilisant la forme d'itô pour une fonction $u(x) = e^x$ nous donne :

$$\begin{aligned} du(t,Y_t) &= \frac{du(t,Y_t)}{dt}dt + \frac{du(t,Y_t)}{dx}dY_t + \frac{1}{2}\frac{d^2u(t,Y_t)}{dx^2}d\langle Y,Y\rangle_t, \\ &= e^Y\left(-\frac{1}{2}g^2dt + gdB_t + \frac{1}{2}g^2dt\right) \\ &= g(X_t)dB_t. \end{aligned}$$

1.10 Existence et d'unicité

1.10.1 Notations et définition

Soient $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé complet;$(B_t)_{t\geq 0}$ un movement brownien à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et x une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$ indépendante de $(B_t)_{t\geq 0}$.

On pose : $\mathcal{F}_t = \sigma(X, B_s, s \leq t)$, T>0 et les fonctions soient mesurables et bornées :

$$b : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

$$\sigma : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to M^{n\times m}. \tag{1.2}$$

Le problème donc est de résoudre l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \\ X(0) = x \end{cases} \tag{1.3}$$

qui peut être écrite sous forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s, \quad pour 0 \leq t \leq T. \tag{1.4}$$

telle que : Le coefficient b s'appelle le drift et σ s'appelle la diffusion .

Définition 1.10.1 *Soient d et m des entiers positifs , et soient b et σ deux fonctions mesurables localement borneé définies sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ et à valeurs respectivement dans $M_{d\times m}et(\mathbb{R}^d)$, ou $M_{d\times m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $d\times m$ à coéficients réels . On note : $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i\leq d, 1\leq j\leq m}$*

et $b = (b_i)_{1\leq i\leq d}$. *LA solution de l'équation :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X(0) = x \end{cases}$$

est la donnée d'un processus $\mathcal{F}_t$ *-adapté continu* $X = (X^1, ..., X^d)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *,tel que :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad pour 0 \leq t \leq T.$$

Soit encore , cordonnée par cordonnée ,pour tout $i \in \{1, ..., d\}$,

$$X_t^i = x^i + \int_0^t b_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)dB_s^j, \quad pour 0 \leq t \leq T.$$

La question qui se pose : quelle conditions doit on appliquer sur b et σ pour avoir l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDS (1.4) *Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur b et σ pour avoir l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation* (1.4)

1.10.2 Théorème d'existence et d'unicité

Soient b et σ deux fonctions boréliennes .On suppose qu'il existe une constante L telle que :
Pour tout t∈[0,T] pour tout x, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$| b(t, x) - b(t, \hat{x}) | + | \sigma(t, x) - \sigma(t, \hat{x}) | \leq L | x - \hat{x} | \tag{1.5}$$

$$| b(t, x) | + \|\sigma(t, x)\| \leq L(1+ | x |), \tag{1.6}$$

$$E(| X(0) |^2) < +\infty \tag{1.7}$$

Alors il existe une solution unique X de l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X(0) = x \end{cases}$$

Preuve Notons par H^2 l'espace de Banach constitué des processus X_t progressivement mesurables , telle que :

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t \mid^2\right) < +\infty$$

muni de la nprme :

$$\| X \| = \left[E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t \mid^2\right) < +\infty\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Notons par H_c^2 le sous espace par des processus continus

1.10.3 L'existence

nous construisons la solution par la méthode d'approximation de picard.On pose :

$$X_t^0 = x,$$

$$X_t^1 = x + \int_0^t \sigma(s, x)dB_s + \int_0^t b(s, x)ds,$$

$$X_t^n = x + \int_0^t \sigma(s, x_s^{n-1})dB_s + \int_0^t b(s, x_s^{n-1})ds,$$

Telles que : Les intégrales stochastique sont bien défini car il est clair par récurrence que pour chaque n , X_t^n est continu et adapté , donc le processus $\sigma(s, X_s^{n-1})$ l'est aussi . Fixons un réel $T \geq 0$, et raisonnons sur l'intervalle [0,T].Vérifions d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante C_n telle que pour tout$t \in [0, T]$.

$$E\left[(X_t^n)^2\right] \leq C_n. \tag{1.8}$$

Cette majoration si $n = 0$ .Ensuite,si elle vraie à l'ordre $n-1$, on utilise les majoration

$$|\sigma(s,y)| \leq K' + K \mid y \mid, \quad \forall s \in [0,T]. y \in \mathbb{R}$$

pour écrire

$$\begin{aligned}
E\left[(X_t^n)^2\right] &\leq 3\left(|x|^2 + E\left[\left(\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})dB_s\right)^2\right] + E\left[\left(\int_0^t b(s,X_s^{n-1})ds\right)^2\right]\right)\\
&\leq 3\left(|x|^2 + E\left[\left(\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})^2 ds\right)\right] + tE\left[\left(\int_0^t b(s,X_s^{n-1})^2 ds\right)\right]\right)\\
&\leq 3\left(|x|^2 + 4(1+T)E\left[\int_0^t (K'^2 + k^2(X_s^{n-1})^2)ds\right]\right)\\
&\leq C_n \quad \text{avec} \quad C_n = 3\left(|x|^2 + 4T(1+T)(K'^2 + k^2 C_{n-1})\right)
\end{aligned}$$

pour justifier le calcule du moment d'ordre deux de l'intégrale stochastique. on a utilisé le fait que $E\left[\left(\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})^2 ds\right)\right] \leq \infty$.
Ce qui découle de la majoration ci-dessus pour σ et de l'hypothèse de récurrence. La majoration(1.5) , et L'hypothèse sur σ entrainent que la martingale locale $\int_0^t \sigma(s,X_s^{n-1})^2 dB_s$ est pour chaque n une vraie martingale borné dans L^2 sur l'intervalle $[0,T]$ .Nous utilisant cette remarque pour majorer par récurrence :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n-1} - X_t^n|^2\right]$$

On a

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (\sigma(s,X_s^n) - \sigma(s,X_s^{n-1}))dB_s + \int_0^t (b(s,X_s^n) - b(s,X_s^{n-1}))ds$$

En utilisant l'inégalité de doob,on obtient :

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\le t\le T} \mid X_t^{n-1} - X_t^n \mid^2\right] &\le 2E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t (\sigma(u,X_u^n)-\sigma(u,X_u^{n-1}))dB_u\right|^2 + \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t (b(u,X_u^n)-b(u,X_u^{n-1}))du\right|^2\right] \\
&\le 2\left(4E\left[\left(\int_0^t (\sigma(u,X_u^n)-\sigma(u,X_u^{n-1}))dB_u\right)^2\right] + E\left[\left(\int_0^t (b(u,X_u^n)-b(u,X_u^{n-1}))du\right)^2\right]\right) \\
&\le 2\left(4E\left[\int_0^t (\sigma(u,X_u^n)-\sigma(u,X_u^{n-1}))^2du\right] + TE\left[\int_0^t (b(u,X_u^n)-b(u,X_u^{n-1}))^2du\right]\right) \\
&\le 2(4+T)K^2E\left[\int_0^t \mid X_t^{n-1} - X_t^n \mid^2 du\right] \\
&\le C_TE\left[\int_0^t \sup_{0\le r\le u} \mid X_r^n - X_r^{n-1} \mid^2 du\right]
\end{aligned}$$

En notons $C_T = 2(4+T)K^2$ Si $g_n(u) = E\left[\sup_{0\le r\le u} \mid X_r^n - X_r^{n-1} \mid^2\right]$, on voit donc que :

$$g_{n+1} \le C^T \int_0^t g_n(u)du$$

D'autre part(1,8) , est les intégrale précédentes montrent que chacune des fonction g_n est bornée sur $[0,T]$. En particulier,il existe une constante C'_T telle que $g_0(t) \le C'_T$ pour $t \in [0,T]$. Une récurrence simple utilisant (1,8) montre alors que pour tous $n \ge 0, t \in [0,T]$,

$$g_n(t) \le C'_T (C_T)^n \frac{T^n}{n!}$$

D'aprés cette dernière inégalité on obtient :

$$\sum_{n\ge 0} \left\|\sup_{0\le t\le t} \mid X_t^{n+1} - X_t^n\right\|_{L^1} \le \sum_{n\ge 0} \left\|\sup_{0\le t\le t} \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid\right\|_{L^2}$$

$$\le \sqrt{C'_T} \sum_{n\ge 0} \frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}} < \infty$$

Ainsi, la série $\sup_t \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid$ converge P-p.s. et X_n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus X continu . De plus $X \in H_c^n$ puisque la convergence a lieu dans H^2 . On vérifier que X est une solution de l'équation (1.4).

En passant à la limite dans l'équation de récurrence pour X^n , on trouve que X est solution (forte) de (1.4) sur [0,T]

1.10.4 L'unicité

Supposons que X, $\hat{X}$ solutions de l'équation (1.4) , pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$X(t) - \hat{X}(t) = \int_0^t b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s) dB_s.$$

Comme $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on peut estimer

$$E\left(\left|X(t) - \hat{X}(t)\right|^2\right) \leq 2E\left(\left|\int_0^t b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s) ds\right|^2\right) + 2E\left(\left|\int_0^t \sigma(s, Xs) - \sigma(s, \hat{X}_s) dB_s\right|^2\right).$$

D'après l'intégrale de Cauchy -Schawrtz , on a :

$$\begin{aligned} E\left(\left|\int_0^t b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s) ds\right|^2\right) &\leq TE\left(\int_0^t \mid b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s) \mid^2 ds\right) \\ &\leq L^2 T \int_0^t E(\mid X_s - \hat{X}_s \mid^2) ds \quad \text{(d'aprés la condition de lipshitz)} \end{aligned}$$

D'une manière sémilaire :

L'isométrie d'Ito nous donne :

$$\begin{aligned} E\left(\left|\int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s) ds\right|^2\right) &= E\left(\int_0^t \mid \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s) \mid^2 ds\right) \\ &\leq L^2 \int_0^t E(\mid X_s - \hat{X}_s \mid^2) ds \quad \text{(d'aprés la condition de lipshitz)} \end{aligned}$$

Pour une constante c ,on à :

$E\left(\left|X(t) - \hat{X}(t)\right|^2\right) \leq c \int_0^t E(\mid X_s - \hat{X}_s \mid^2) ds$. pour tout $0 \leq t \leq T$

Soit ϕ(t)= $E\left(\left|X(t) - \hat{X}(t)\right|^2\right)$,alors :

$$\phi(t) \leq c \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall 0 \leq t \leq T$$

En utilisant le lemme de Granwall , avec c_0 =0 implique ϕ=0. Donc X(t)=$\hat{X}(t)$ p.s, pour tout $0 \leq t \leq T$, et X(r)=$\hat{X}(r)$ pour tout rationel $0 \leq r \leq T$, pour des ensembles de probabilité zéro .

X et $\hat{X}$ sont des trajectoires continues presque surement ;

$$P\left(\max_{0\leq t\leq T}\left|X(t) = \hat{X}(t)\right| > 0\right) = 0.$$

CHAPITRE 2

CONTRÔLE STOCHASTIQUE

Un grande partie de ce chapitre est inspiré e du document [10]

2.1 Introduction

Le contrôle stochastique joue un rôle clé ans plusieurs domaines , notamment la gestion et la finance.Il s'agit d'un cadre mathématique permettent d'influencer des systèmes dynamique évoluant dans un environnement incertain afin d'optimiser un critère donné.

état du système : On considère un système dynamique caractérisé par son état à tout instant. Le temps peut être discret ou continu. L'horizon (intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini.

L'état du système représente l'ensemble des variables quantitatives constituant une description exhaustive du système. On notera $X_t(w)$ l'état du système à l instant t : Une fois défini l'état, il s'agit de décrire les lois d'évolution de cet ètat en fonction du temps. L'application $t \longrightarrow X_t$ décrit l'évolution du système. Cette évolution est fournie par un modèle probabiliste.

Contrôle : La dynamique X_t de l'état du système est influencée par un contrôle que nous modélisons comme un processus $(u_t)_t$ dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est à dire que u_t est adapté par rapport à certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle.

Critère de coût : L'objectif est de minimiser (ou maximiser) sur les contrôles une fonctionnelle J

Pour décrire un problème de contrôle stochastique, il est important de préciser quelle est l'information disponible à tout instant. Plusieurs situations sont possibles :
1) Le contrôleur n"a aucune information pendant l'opération du système. Dans ce cas, il choisit un contrôle qui est fonction du temps. Ces contrôles sont appelés boucle ouverte.

2) Le contrôleur connait l'état du système à chaque instant. C'est le cas de l'observation (ou information) complète.
3) Le contrôleur a une connaissance partielle de l'état du système. C'est le cas de l'observation incomplète.

Pour les problèmes de contrôle déterministe, les contrôles peuvent être indifférement choisis en boucle ouverte ou en boucle fermée (appelés alors feed-back). Les contrôles en feed-back ne donneront pas un plus petit minimum. En effet, l'état du système à tout instant t peut être déduit des données initiales et du contrôle appliqué jusqu'à l'instant t par la résolution de l'équation différentielle satisfait par l'état du système.
Donc l'observation de l'état courant du système à tout instant t ne donne pas l'avantage d'information que les données initiales.

Par contre, pour les problèmes de contrôle stochastique, à partir d'une donné initiale et d'un contrôle, le système peut suivre différentes trajectoires. Dans le cas stochastique la trajectoire optimale dépend de l'information disponible au contrôleur à tout instant t.

Dans le cas de l'information complète, la méthode utilisée est la programmation dynamique qui conduit à des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre non linéaires (équation d'Hamilton -Jacobi- Bellman), cette dernière méthode connue sous le nom le principe de Bellman, dont la résolution permet d'obtenir la fonction valeur et des contrôles en boucle fermée.

Dans le cas de l'observation incomplète, la méthode de la programmation dynamique conduit à des équations de dimention infinie. Ici, la deuxième méthode utilisée est le principe de Pontryagin qui consiste à déterminer des conditions nécessaires d'optimalité vérifient par un contrôle optimal, cette dernière méthode décrite précédemment sera au centre de notre intérêt.pour résoudre notre problème.

2.2 Méthode de résolution en contrôle stochastique

Il existe essentiellement deux méthodes majeures pour la résolution des problèmes des contrôles dans les cas détreministes ou stochastiques, le principe de la programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryagin. La première méthode a elle été introduite par Bellman en 1953, elle s'appuie sur la notion de la "politique optimale", qui consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles de second ordre, non linéaire. La deuxième méthode connue sous le non conditions nécessaires d'optimalité qui sera au centre de notre intérêt.pour abordé notre problème.

Le problème de contrôle stochastique d'une diffusion en horizon fini se formule comme suit :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. T >0 un temps fini, B_t est un mouvement Brownien de dimension d.

Un processus stochastique est une famille $(X_t)_t$ de variables aléatoires à valeurs dans un espace mesurable et indexées par le temps t. Le processus stochastique est càd -lag si pour chaque $\omega \in \Omega$, la trajectoire $X(\omega)$ est continue à droite et admet une limite à gouche.

étant donné un processus stochastique $Y = (Y_t)_t$. On dit que Y est une modification de X si pour tout $t \in [0, T]$ on a $X_t = Y_t$ p.s c'est à dire $\mathbb{P}$ $[X_t = Y_t]$=1.

On dit que Y est indistinguable de X si leurs trajectoires coincident p :s :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \forall t \in [0; T]) = 1$$

Bien entendu, la notion d'indistinguabilité est le plus forte que celle de modification, mais si on sait que les deux processus X et Y sont cad -laget Y est une modification de X, alors X et Y sont indistinguables.

On considère le processus stochastique X de valeurs dans R^nsatisfait l'équation diffèrentielle stochastiques suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.1}$$

Le contrôle $u = (u_s)_{0 \leq s \leq T}$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{A}$ sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Pour assurer l'existence et l'unicité de solution de l'équation (2,1), les fonctions boréliennes b et σ définies par $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}^d$,$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$

satisfait les condition suivantes :

$$\mid b(t, x, u) - b(t, y, u) \mid + \mid \sigma(t, x) - \sigma(t, y) \mid \leq K \mid x - y \mid$$

$$\mid b(t, x, u) \mid + \mid \sigma(t, x) \mid \leq c(1 + \mid x \mid)$$

$b(t, x) : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est continue uniformément en(t, x).

L'objet du contrôle optimal stochastique est de minimiser un coût, ou de maximiser s'il s'agit d'un gain, sur un ensemble U de tous les contrôles admissibles. Généralement ce coût donné par

$$J(u) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \ell(s, X_s, u_s)\, ds + g(X_T)\right),$$

Où ℓ et g sont deux fonctions données par :
$\ell : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times A \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifies les mêmes hypothèses que celle imposés sur le drift b, et soit $g : R^d \longrightarrow R^d$ une application de classe C^1,$|g(x)| \leq c[1 + |x|]$ et à dérivée bornée. C'est à dire :$|g_x(X)| \leq M$ où g_x est le gradient de g en x .

Si en partant d'un état x à l'instant t on définit pour tout processus de contrôle u, le coût est donnée par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \ell(s, X_s, u_s)ds + g(X_T)\right).$$

La fonction de valeurs associé à ce problème de contrôle stochastique est donnée par :

Pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et $u \in U$

$$v(t, x) = \inf_{u \in U} J(t, x, u)$$

. Lorsque l'on cherche à maximiser un gain, au lieu de minimiser un coût, alors on écrira

$$V(t, x) = \sup_{u \in U} J(t, x, u) = - \inf_{u \in U}(-J(t, x, u)).$$

Un contrôle admissible $u* \in U$ est dit optimale si $V(t, x) = J(t, x, u*)$.

2.2.1 Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique appelé aussi principe de Bellman est fondée sur le principe d'optimisation suivant :

Si une trajectoire est optimal alors elle est optimal pour chaque instant, c'est à dire " si on commence à un autre point on ne peut faire mieux que suivre de la trajectoire optimale".

Le principe de la programmation dynamique de Bellman permet de résoudre, au travers d'une équation aux dérivées partielles, appelé équation de Hamilton-Jacobi-Belman, certain problème analytiquement.

Généralement l'équation aux dérivées partielles de Bellman n'est pas facile à résoudre et il faut supposer que la solution soit de classe C^2. nous pouvons sinon supposer qu'elle est seulement localement bornée mais dans ce cas la solutions sera au sens de la viscosité.

En appliquant formellement ce principe ou on peut minimiser la fonction valeur $V(t, x)$ associée à un problème de contrôle stochastique à temps continu satisfait à une équation parabolique fortement non linéaire appelée équation de Hamilton-Jacobi-

Bellman.

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \inf_{u \in \mathcal{U}}[\mathcal{L}V(t,x) + f(t,x,u)] = 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

Ou $\mathcal{L}_u$ est le générateur infinitésimale de second-ordre associé à la diffusion X_t solution de l'équation (2,1) avec un contrôle u donné par la formule suivante :

$$\mathcal{L}_u V = b(x,u)D_x(V) + \frac{1}{2}tra[\sigma(x,u)\sigma'(x,u)D_x^2(V)]$$

Notons que l'équation (2,2) est une version infinitésimal de la programmation dynamique : on suppose que la fonction valeur V est de classe C^2, en appliquant la formule d'itô sur $V(s, X_s^{t,x})$ entre $s = t$ et $s = t + h$ puis faisons tendre h vers $+\infty$.

Lorsque l'on cherche à maximiser un gain, l'équation aux dérivées partielles (2,2) devient sous la forme :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) - \sup_{u \in \mathcal{U}}[\mathcal{L}_u V(t,x) + f(t,x,u)] = 0 \tag{2.3}$$

D'autre part, on peut avoir cette équation (2,3) de la façon suivante :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - H(t,x,D_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) = 0, \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

telle que $\forall (t,x,p,M) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S_n$:(S_n l'ensemble des matrices symétrique $n \times n$.)

$$H(t,x,p,M) = \sup_{u \in \mathcal{U}}\left[b(t,x,u)p_t + \frac{1}{2}tra[\sigma\sigma'(t,x,u)M + f(t,x,u)]\right]$$

La fonction H est dite le hamiltonien du problème de contrôle associé.

En remarquant que si la fonction de valeur est continue et pas nécessairement de classe C^2 et satisfait le principe d'optimalité de la programmation dynamique, alors elle est solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi- Bellman correspond.

2.2.2 principe du maximum de pontryagin

Le principe du maximum de Pontryagin connue sous le nom conditions nécessaires d'optimalité a été introduit par Pontryagin en 1956. il s'appuie sur l'idée suivante : si un contrôle optimal existe en utilisant l'appoche de Lagrange en calcul des variations sur la fonctionnelle $J(u)$ par rapport à certain paramètre de perturbation θ doit être positive. Généralement cette approche consiste à introduire un processus adjoint p (t) solution d'une équation différentielle rétrograde et d'une inégalité variationnelle.
Cas du contrôle déterministe(Thèse de doctorat Hafyad)

La version originale de principe du maximum de Pontryagin a été établie par Pontryagin [11] dans le cas déterministe. Des résultats plus récents pour l'étude du contrôle optimal dans le cas déterministe ont été traité par W.H. Fleming [13 ; 12], H. Frankowska [14] ; ou les auteurs présentent des résultats fondamentales dans la théorie du contrôle.

étant donné un système différentiel gouverné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt, t \in [0, T] \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.4}$$

La fonction coût a minimiser est la forme :

$$J(u) = \mathbb{E}\left(\int_0^T l(s, X_s, u_s)ds + g(X_T)\right)$$

L'objectif est de minimiser la fonction J (u) sur un ensemble $\mathcal{U}$ de tous les contrôles admissibles. Alors un contrôle $u*$ est optimal si

$$J(u^*) = \min J(u), u \in \mathcal{U} \tag{2.5}$$

Sous les hypothèse suivants :

$(D1)b, l : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}^d$:

$$| b(t, x, u) - b(t, y, u) | \leq K | x - y | .$$

$$| b(t, x, u) | + | l(t, x, u) | \leq c(1 =| x |).$$

$b(t, x, .), l(t, x, .) : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est continue en u,uniformément en (t, x).

(D2)b,l and g are C^1 in x.

Soit $H(t, X_t, u_t, p_t) = p_t b(t, X_t, u_t) - l(t, X_t, u_t)$

Maintenant l'objet auquel on s'intéresse est le théorème de principe du maximum dans le cas déterministe

Théorème 2.2.1 ***Principe de Pontryagin*** *[15] Soit* (X^*, u^*) *la solution optimale de (2,4)et (2,5), alors il existe un processus p(t) ,* $\mathcal{F}$ *- adapté,solution de l'équation suivante :*

$$\begin{cases} dp_t = -H_x(t, x_t, u_t, p_t)dt \\ X(o) = x, p(T) = -g_x(X_T) \end{cases}$$

tel que :

$$H(t, X_t^*, u_t^*, p_t) = \max_{u \in \mathcal{U}} H(t, X_t^*, u, p_t).\mathbb{P} - p.s \quad et \quad dt - p.p..$$

Exemple :

On considère l'équation suivante : $\dfrac{dx_t^u}{dt} = a_t x_t + b_t u_t$
et la fonction coût est donnée par : $J(u) = \int_0^T (m_s x_s^2 + n_s u_s^2)ds + dx_T^2$
Avec $m_s > 0, n_s > 0$, et $d > 0$
Le hamiltonien de ce système est :

$$H(t, X_t, u_t, P_t) = P_t(a_t x_t + b_t u_t) - m_t x_t^2 - n_t u_t^2$$

D'ou

$$dP_t = -P_t a_t + 2m_t x_t$$

$$P(T) = -2dx_T$$

Maximisation du hamiltonien :

$$\begin{aligned} H_u(t, X_t, u_t) &= 0 \Leftrightarrow P_t b_t - 2n_t u_t = 0 \\ &\Rightarrow u_t = \frac{b_t P_t}{2n_t} \end{aligned}$$

Pour identifier u_t, on doit résoudre l'équation :

$$\begin{pmatrix} x'_t \\ P'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_t x_t + \frac{b_t^2}{2n_t} P_t \\ -a_t P_t + 2m_t x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_t & \frac{b_t^2}{2n_t} \\ 2m_t & -a_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ P_t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_t \\ P'_t \end{pmatrix} = A_t \begin{pmatrix} x_t \\ P_t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_t \\ P_t \end{pmatrix} = \exp\left(-\int_0^t A_s ds\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

Il reste à calcule x_0 et P_0 ;

$$\begin{pmatrix} x_T \\ P_T \end{pmatrix} = \exp\left(-\int_0^T A_s ds\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_0 \\ P_0 \end{pmatrix} &= \exp\left(\int_0^T A_s ds\right) \begin{pmatrix} x_T^* \\ -2dx_T^* \end{pmatrix} \\ &= x_T^* \exp\left(\int_0^T A_s\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Voir [16]

cas du contrôle stochastique(Thèse de doctorat de Hafyed)

Dans le cas stochastique, plusieurs formes de principe du maximum de Pontryagin, le premier résultat a été établi par H.J. Kushner [17] en 1973 dans le cas où l'ensemble de contrôles admissibles est formé de processus adaptés à une filtration fixée à l'avance et l'utilisation des solutions trajectorilles de l'équation d'état , ces résultats ont été développés par Haussmann [18] en 1976.

Dans le cas contrôle feed-back, ou il suppose que cette classe de contrôles sont des processus mesurables par rapport à la filtration naturelle $\mathcal{F}^X$ de l'état du système, c'est à dire, le contrôle $u$dépend de X; ce dernière méthode basée sur la transformation de Guirsanov et la théorie des Martingales.

Lorsque le coefficient de diffusion σ dpend explicitement du contrôle, le problème de principe du maximum stochastique ont été abordé par Arkin et Saksonov [1], A. Bensoussan [10], R.J. Elliott [23] et S. Peng [58] :

Le problème d'obtention des conditions nécessairs d'optimalité pour les contrôles adaptés à une filtration plus petite que la filtration $(\mathcal{F}_t)_t \geq 0$ (c'est à dire le système est partielement observable) ont été abordé par U.G. Haussmann [40] et A. Bensoussan [11], R.J. Elliott [23] et X.Y. Zhoo [66] :

Pour établir des conditions nécessaires de presque optimalité, des résultats ont été obtenus par Elliott [23] et B. Mezerdi [49] en utilisant le principe variationnel de Ekeland [24]. Ce principe permet d'obtenir un contrôle presque optimal qui existe toujours.

L'obtention d'un principe du maximum repose sur la dérivabilité de coefficients. Dans l'absence de ces hypothèses de régularité des résultats récents ont été obtenus par B. Mezerdi [49] : Ceci concernant le cas ou le coefficient de dirft n'est plus diffirentiable en variable d'état x : Ces résultats ont été établi utilisant le pricinpe variationnel d'Ekeland et le gradient généralisé de Clarke.

Les nouveaux obstacles détectés dans beaucoup de situations peuvent être intégrés directement dans le cas des contrôles relaxés dont les résultats ont été obtenus par S. Bahlali et B. Mezerdi [4; 5; 6] : Dans [5] les résultats ont été obtenus d'aprés l'ellipticité uniforme de la diffusion et l'unicité trajectorielle.

Le problème de principe du maximum stochastique dans le cas ou les diffusions non dégénérées ont été abord par K. Bahlali, B. Mezerdi et Y. Ouknine [14]; Dans ce travail, les auteurs utilisent le fait que les fonctions lipschitziennes sont presque partout dérivables avec des dérivées mesurables bornées. Ceci est d'aprés le thoérème de Radamacher, ce qui permet de donner une formule explicite du processus adjoint. Les résultats finals ont été obtenus graçe à une technique basée sur l'inégalité de Krylov.

L'obtention des conditions nécessaires d'optimalité dans le cas des diffusions dégénérées avec des coefficients lipschitziens ont été traité par K. Bahlali, B. Djihiche et B. Mezerdi [8], ou les auteurs présentent une nouvelle architecture basée sur les dérivées au sens de distribution et le résultats de Bouleau Hirsh pour définir le processus adjoint sur un espace large.

Les problèmes de contrôle optimal dans le cas des équations différentielles stochastiques rétrogrades a été étudier par plusieurs auteurs, (N. Elkaroui [28], Peng [58],... .) ont étè présenté des résultats récents. Dans ce qui suit, nous allons donner des différentes classes de contrôle stochastique.

2.3 Classe de contrôle

2.3.1 Contrôle admissible

On appelle contrôle admissible tout processus u_t ou $t \in [0,T]$ mesurable et $(\mathcal{F}_t)_t$ adapté à valeur dans un borélien $\mathbb{A}$ de R^n. Notons par U l'ensemble de tous les contrôle admissible.

$$U = u : [0,T] \times \Omega \longrightarrow A,, telque \quad u \quad est \quad msurable \quad et \quad \mathcal{F}_t - adapt$$

2.3.2 Contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction coût J(u) sur un ensemble de contrôle admissible U. On dit que le contrôle u^* est optimale si

$J(u^*) \leq J(u) \forall u \in U.$

2.3.3 Contrôle presque optimal

Soit ϵ >0, le contrôle u^{ϵ} est dit presque optimal (ou ϵ-optimal) si pour tout contrôle $u \in U$ on a :

$$J(u^{\epsilon}) \leq J(u) + \epsilon \quad \forall u \in U$$

2.3.4 Contrôle feed -back

Soit u_t un contrôle $\mathcal{F}_t$ -adapté , et soit $\{\mathcal{F}_t^X\}$ la filtration naturelle engendrée par le processus X. On dit que u_t est Feed-back contrôle si u_t est aussi adapté par rapport la filtration $\{\mathcal{F}_t^X\}$. On dit aussi qu'un contrôle u est feed-back si et seulement si u dépend de X

2.3.5 Contrôle Singulier

Soit $\mathbb{U}_1$ un sous ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{U}_2$:=[0,∞) .soit u_1 la classe des processus mesurable $\mathcal{F}_t$ - adapté u(.) : [s,T]*Ω → $\mathbb{U}_1$ et u_2 la classe des processus mesurable $\mathcal{F}_t$ - adapté η(.) : [s,T]*Ω → $\mathbb{U}_2$.pour u_1*u_2 l'ensemble de tous les contrôles admissibles . La partie singulière η(.) d'un contrôle est définit comme la partie du processus de contrôle qui $d\eta$(.) peut être singulière par rapport à la mesure de Lebesgue dt.

CHAPITRE 3

PRINCIPE DE MAXIMUM STOCHASTIQUE DANS LE CAS RÉGULIER

dans ce chapitre [9],[11],

3.1 Introduction

Dans ce chapitre ,nous proposons d'étudier la structure mathématique rigoureuse des problèmes de contrôle stochastique , dans le cas où les coefficients sont différentiables . L'analyse portera principalement sur le principe du maximum, Ce cadre d'étude se présente comme suit :

La premier section est consacrée à l'examen de certaine propriétés fondamentales des équation contrôlées.

La deuxième section s'intéresse à la linéarisation de la solution.

Enfin,la troisième section est dédiée à l'étude approfondie du principe du maximum.

3.2 Présentation du problème et hypothèses

Soit$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré qui satisfait aux conditions usuelles.On définit un MB standard $B(\cdot)$-unidimensionnel sur ce même espace.Soient $\mathbb{U}$ un sous-ensemble convexe fermé dans R et $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble des processus $\mathcal{F}_t$- adapté $u(\cdot) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{U}$.

Considérons l'équation différentielle stochastique contrôle suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t. \\ X_0 = \xi. \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec

$$b : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$$

Le coût à minimiser sur la classe de contrôles admissibles, qui a la forme :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \ell(t, X_t, u_t)dt + g(X_T)\right]. \tag{3.2}$$

Où

$$\ell : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

On dit que $\mathcal{U}_{ad}$ désigne la classe de tous les contrôles admissibles,définis comme suit :

$$\mathcal{U}_{ad}[0,T] := \left\{ u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{U}, \mathbb{E}\int_0^T \mid u_t \mid^2 dt < \infty \right\}$$

. Pour minimiser la fonctionnelle $J(u(.))$ dans l'ensemble $u \in \mathcal{U}_{ad}$ c'est-à-dire que nous recherchons u* tel que :

$$J(u^*(.)) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u(.)). \tag{3.3}$$

Tout contrôle $u^*(.)$admissible qui attient le minimum est un contrôle optimal.La trajectoire correspondant de cet $u^*(.)$ est noté par $X^*(.)$.

Les conditions

Soient les fonctions b,σ ,g et ℓtel que :

C1) Les fonctions b, σ, g et ℓ sont continûment différentiables par rapport à (X,u).

C2) Les dérivées b_x, b_u, σ_x, σ_u, g_x, g_u sont bornées et continues.

C3) Condition de croissance linéaire : il existe une constante K_1 et K_2 telle que :

$$\mid b(t, X_t, u_t) \mid \leq K_1(1 + \mid X \mid + \mid u \mid)$$

$$\mid \sigma(t, X_t, u_t) \mid \leq K_2(1 + \mid X \mid + \mid u \mid)$$

Sous les hypothèses ci-dessus, l'EDS (3.1) admet une solution forte unique donnée par :

$$X(t) = \xi + \int_0^t b(s, X_s, u_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, u_s)dB_s.$$

De plus , cette solution est continue et vérfiée pour tout $p > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid X_t \mid^p\right] < C_p.$$

On dit que u_t^ε le contrôle perturbé de u_t^* tel que pour tout $u \in \mathcal{U}_{ad}$ on a

$$\begin{aligned} u_t^\varepsilon &= u_t^* + \varepsilon[u_t - u_t^*]. \\ &= (1-\varepsilon)u_t^* + \varepsilon u_t \end{aligned}$$

où ε est plus petit , X_t^ε est trajectoire correspondant de cet contrôle admissible u_t^ε .

Nous dérivons **l'inégalité variationnelle (3.13)** en plusieurs étapes, à partir du fait que :

$$j(u^\varepsilon(\cdot)) - j(u^*(\cdot)) \geq 0. \tag{3.4}$$

3.3 Résultats préliminaires

3.3.1 Convergence des trajectoires perturbées

Lemme 3.2.1 Soient X_t^ε correspondant de cet contrôle admissible u_t^ε.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^\varepsilon - X_t^* \mid^2\right) = 0. \tag{3.5}$$

Ou on dit aussi que X_t^ε converge en moyenne quadratique versX_t^ε :

$$\mathbb{E}(\mid X_t^\varepsilon - X_t^* \mid^2) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Preuve :

D'après l'équation (3.1) on trouver :

$$X_t^* = X_0^* + \int_0^t b(s, X_s^*, u_s^*)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^*, u_s^*)dB_s.$$

$$X_t^\varepsilon = X_0^\varepsilon + \int_0^t b(s, X_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon)dB_s.$$

Donc

$$X_t^\varepsilon - X_t^* = \int_0^t b(s, X_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon)dB_s - [\int_0^t b(s, X_s^*, u_s^*)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^*, u_s^*)dB_s]$$

En ajoutant et en retranchant le terme

$$[\int_0^t b(s, X_s^\varepsilon, u_s^*)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^\varepsilon, u_s^*)dB_s]$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} X_t^\varepsilon - X_t^* &= \int_0^t [b(s, X_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - b(s, X_s^\varepsilon, u_s^*)]ds \\ &+ \int_0^t [b(s, X_s^\varepsilon, u_s^*) - b(s, X^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s))]ds \\ &+ \int_0^t [\sigma(s, X_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - \int_0^t \sigma(s, X_s^\varepsilon, u_s^*)]dB_s \\ &+ \int_0^t [\sigma(s, X_s^\varepsilon, u_s^*) - \sigma(s, X_s^*, u_s^*)]dB_s \end{aligned}$$

Sur la base des intégrales $(x + y + z + s)^2 \leq 4(x^2 + y^2 + z^2 + s^2)$,et en prenant l'espérance des deux côtes de l'inégalité ,on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \mid X_t^\varepsilon - X_t^* \mid^2 &\leq 4\mathbb{E}\left|\int_0^t \left[b(s, X_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - b(s, X_s^\varepsilon, u_s^*)\right]ds\right|^2 \\ &+ 4\mathbb{E}\left|\int_0^t \left[b(s, X_s^\varepsilon, u_s^*) - b(s, X_s^*, u_s^*)\right)]ds\right|^2 \\ &+ 4\mathbb{E}\left|\int_0^t \left[\sigma(s, X_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - \sigma(s, X_s^\varepsilon, u_s^*)\right]dBs\right|^2 \\ &+ 4\mathbb{E}\left|\int_0^t \left[\sigma(s, X_s^\varepsilon, u_s^*) - \sigma(s, X_s^*, u_s^*)\right)]ds\right|^2 \end{aligned}$$

D'après l'isométrie et la condition de lipschitzienne pour les fonction b et σ ,on a :

$$\mathbb{E} \mid X_t^\varepsilon - X_t^* \mid^2 \leq 8K\mathbb{E} \int_0^t \mathbb{E} \mid X_t^\varepsilon - X_t^* \mid^2 ds + 8K\varepsilon^2 \int_0^t \mathbb{E} \mid u^\varepsilon(s) - u^*(s) \mid^2 ds$$

$$\mathbb{E} \mid X_t^\varepsilon - X_t^* \mid^2 \leq 8K\mathbb{E} \int_0^t \mathbb{E} \mid X_t^\varepsilon - X_t^* \mid^2 ds + K\varepsilon^2$$

En appliquons lemme de Gronwall,on conclut :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \mid X_t^\varepsilon - X_t^* \mid^2 &\leq K\varepsilon^2 \int_0^t \exp(8Ks)ds,\\ &\leq K\varepsilon^2 \tfrac{1}{8K}(8KT-1) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve de (3.5)

3.3.2 L'équation linéarisée

Soit Z_t la solution du EDS linéaire suivant :

$$\begin{cases} dZ_t &= \left\{b_x(t, X_t^*, u_t^*)Z_t + b_u(t, X_t^*, u_t^*)(u_t - u_t^*)\right\} dt \\ &+ \left\{\sigma_x(t, X_t^*, u_t^*)Z_t + \sigma_u(t, X_t^*, u_t^*)(u_t - u_t^*)\right\} dB_t. \\ Z_0 = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

Lemme 3.3.1 *:*

Soit X_t^ε et X_t^* les trajéctoires associées réspectivement aux contrôles $u^\varepsilon(t)$ et $u^*(t)$ on pose :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{X_t^\varepsilon - X_t^*}{\varepsilon} - Z_t\right|^2\right) = 0 \tag{3.7}$$

preuve :

On pose $O_t^\varepsilon = \frac{X_t^\varepsilon - X_t^*}{\varepsilon} - Z_t, t \in [0, T]$ ce implique $X_t^\varepsilon = X_t^* + \varepsilon(O_t^\varepsilon + Z_t)$.

$$\begin{aligned} dO_t^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}[b(t, X_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) - b(t, X_t^*, u_t^*)]dt - [b_x(t, X_t^*, u_t^*)Z_t + b_u(t, X_t^*, u_t^*)v_t]dt \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}[\sigma(t, X_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) - \sigma(t, X_t^*, u_t^*)]dB_t - [\sigma_x(t, X_t^*, u_t^*)Z_t + \sigma_u(t, X_t^*, u_t^*)v_t]dB_t \end{aligned} \tag{3.8}$$

On notons $v_t = (u_t - u_t^*)$.

En utilssant le développement de Taylor d'ordre 1 avec un reste intégral, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}b(t,X_t^\varepsilon,u_t^\varepsilon)-b(t,X_t^*,u_t^*) &= \int_0^1\Big[b_x\Big(t,X_t^*+\mu\varepsilon(O_t^\varepsilon+Z_t),u_t^*+\mu\varepsilon v_t\Big)(O_t^\varepsilon+Z_t) \quad d\\ &+ b_u(t,X_t^*+\mu\varepsilon(O_t^\varepsilon+Z_t),u_t^*+\mu\varepsilon v_s)v_t d\mu.\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\sigma(t,X_t^\varepsilon,u_t^\varepsilon)-\sigma(t,X_t^*,u_t^*) &= \int_0^1\Big[\sigma_x\Big(t,X_t^*+\mu\varepsilon(O_t^\varepsilon+Z_t),u_t^*+\mu\varepsilon v_t\Big)(O_t^\varepsilon+Z_t)\\ &+ \sigma_u(t,X_t^*+\mu\varepsilon(O_t^\varepsilon+Z_t),u_t^*+\mu\varepsilon v_s)v_t]d\mu.\end{aligned} \tag{3.10}$$

En substitant les équation (3,9)et(3,10) dans l'équation(3,8), nous obtenons :

$$\begin{aligned}O_t^\varepsilon &= \int_0^t\left(\int_0^1 b_x(s,X_s^*+\mu\varepsilon(O_s^\varepsilon+Z_s),u_s^*+\mu\varepsilon v_s)O_s^\varepsilon d\mu\right)ds\\ &+ \int_0^t\left(\int_0^1 \sigma_x(s,X_s^*+\mu\varepsilon(O_s^\varepsilon+Z_s),u_s^*+\mu\varepsilon v_s)O_s^\varepsilon d\mu\right)dB_s\\ &+ \int_0^t\left(\int_0^1[b_x(s,X_s^*+\mu\varepsilon(O_s^\varepsilon+Z_s),u_s^*+\mu\varepsilon v_s)-b_x(s,X_s^*,u_s^*)]Z_s d\mu\right)ds\\ &+ \int_0^t\left(\int_0^1[b_u(s,X_s^*+\mu\varepsilon(O_s^\varepsilon+Z_s),u_s^*+\mu\varepsilon v_s)-b_u(s,X_s^*,u_s^*)]v_s d\mu\right)ds\\ &+ \int_0^t\left(\int_0^1[\sigma_x(s,X_s^*+\mu\varepsilon(O_s^\varepsilon+Z_s),u_s^*+\mu\varepsilon v_s)-\sigma_x(s,X_s^*,u_s^*)]Z_s d\mu\right)dB_s\\ &+ \int_0^t\left(\int_0^1[\sigma_u(s,X_s^*+\mu\varepsilon(O_s^\varepsilon+Z_s),u_s^*+\mu\varepsilon v_s)-\sigma_u(s,X_s^*,u_s^*)]v_s d\mu\right)dB_s\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}\eta_\varepsilon &= +\int_0^t\left(\int_0^1[b_x(s,X_s^*+\mu\varepsilon(O_s^\varepsilon+Z_s),u_s^*+\mu\varepsilon v_s)-b_x(s,X_s^*,u_s^*)]Z_s d\mu\right)ds\\ &+ \int_0^t\left(\int_0^1[b_u(s,X_s^*+\mu\varepsilon(O_s^\varepsilon+Z_s),u_s^*+\mu\varepsilon v_s)-b_u(s,X_s^*,u_s^*)]v_s d\mu\right)ds\\ &+ \int_0^t\left(\int_0^1[\sigma_x(s,X_s^*+\mu\varepsilon(O_s^\varepsilon+Z_s),u_s^*+\mu\varepsilon v_s)-\sigma_x(s,X_s^*,u_s^*)]Z_s d\mu\right)dB_s\\ &+ \int_0^t\left(\int_0^1[\sigma_u(s,X_s^*+\mu\varepsilon(O_s^\varepsilon+Z_s),u_s^*+\mu\varepsilon v_s)-\sigma_u(s,X_s^*,u_s^*)]v_s d\mu\right)dB_s\end{aligned}$$

Maintenant,puisque les dérivées de b et σ par rapport à (X,u) sont Lipchitz continues par rapport à (X,u), nous obtenons :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \mid \eta_s^\varepsilon \mid^2\right]=0$$

Comme les dérivées de b et σ par rapport à (X,u) sont bornées $\forall t \in [0,T]$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \mid O_s^{\varepsilon} \mid^2\right] \leq k(t)\left\{\mathbb{E}\int_0^t \mid O_s^{\varepsilon} \mid^2 ds + \mathbb{E}\left[\sup s \in [0T] \mid \eta_s^{\varepsilon} \mid^2\right]\right\}$$

En appliquant maintenant le lemme de Gronwall, nous obtenons que $\forall t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \mid O_s^{\varepsilon} \mid^2\right] \leq k(t)\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0T]} \mid \eta_s^{\varepsilon} \mid^2\right]\exp\left(\int_0^t k(s)ds\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

.

Ceci conclut la démonstration de (3.7).

Lemme 3.3.2 *la fonctionnelle J est Gâteaux différentiable et la formule suivant est valable*

$$\frac{dJ(u^{\varepsilon}(.))}{d\varepsilon} \mid_{\varepsilon=0}= \mathbb{E}\int_0^T [\ell_x(t,X_t^*,u_t^*)Z(t) - \ell_u(t,X_t^*,u_t^*)v_t]dt + \mathbb{E}[g_x(X_T^*)Z(T)]$$

preuve

La dérivée de Gâteaux de J définit comme suit :

$$\frac{dj(u^{\varepsilon}(.))}{d\varepsilon} \mid_{\varepsilon=0}= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(u^{\varepsilon}(.)) - J(u^*(.))}{\varepsilon}$$

En déduit que la valeur :

$$\frac{J(u^{\varepsilon}(.)) - J(u^*(.))}{\varepsilon} = \mathbb{E}\left[\frac{g(X_T^{\varepsilon}) - g(X_T^*)}{\varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{\varepsilon}(\ell(t,X_t^{\varepsilon},u_t^{\varepsilon}) - \ell(t,X_t^*,u_t^*))dt\right].$$

En appliquant le dévloppement de taylor avec rest intégral au point X_t^* et à l'ordre 1 de les fonction $\ell(t, X_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon)$ et $g(X_T^\varepsilon)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\varepsilon}\mathbb{E} & \left[\int_0^T (\ell(t, X_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) - \ell(t, X_t^*, u_t^*))dt\right] \\
= & \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 [\ell_x(t, X_t^* + \mu(X_t^\varepsilon - X_t^*), u_t^* + \mu\varepsilon(u_t^\varepsilon - u_t^*))](x_t^\varepsilon - x_t^*)d\mu dt\right] \\
+ & \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 [\ell_u(t, X_t^* + \mu(X_t^\varepsilon - X_t^*), u_t^* + \mu\varepsilon(u_t^\varepsilon - u_t^*))]\varepsilon(u_t^\varepsilon - u_t^*)d\mu dt\right] \\
= & \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 [\ell_x(t, X_t^* + \mu(X_t^\varepsilon - X_t^*), u_t^* + \mu\varepsilon v_t)]\frac{(X_t^\varepsilon - X_t^*)}{\varepsilon}d\mu dt\right] \\
+ & \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 [\ell_u(t, X_t^* + \mu(X_t^\varepsilon - X_t^*), u_t^* + \mu\varepsilon(u_t^\varepsilon - u_t^*))]v_t d\mu dt\right] \\
= & \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 \ell_x(t, X_t^* + \mu\varepsilon(O_t^\varepsilon + Z_t), u_t^* + \mu\varepsilon v_t)](O_t^\varepsilon + Z_t)d\mu dt\right] \\
+ & \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 [\ell_u(t, X_t^* + \mu\varepsilon(O_t^\varepsilon + Z_t), u_t^* + \mu\varepsilon v_t)]v_t d\mu dt\right]
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[g(X_T^\varepsilon) - g(X_T^*)] &= \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x(X_T^* + u(X_T^\varepsilon - X_T^*))(X_T^\varepsilon - X_T^*)d\mu\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x(X_T^* + \mu\varepsilon(O_t^\varepsilon - Z_t))(O_t^\varepsilon + Z_t)d\mu\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x(X_T^* + \mu\varepsilon(O_t^\varepsilon - Z_t))O_t^\varepsilon d\mu\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x(X_T^* + \mu\varepsilon(O_t^\varepsilon - Z_t))Z_t^d\mu\right]
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{J(u^\varepsilon(.)) - J(u^*(.))}{\varepsilon} &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x(X_T^* + \mu\varepsilon(O_t^\varepsilon - Z_t))O_t^\varepsilon d\mu\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x(X_T^* + \mu\varepsilon(O_t^\varepsilon - Z_t))Z_t d\mu\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 [\ell_x(t, X_t^* + \mu\varepsilon(O_t^\varepsilon + Z_t), u_t^* + \mu\varepsilon v_t)](O_t^\varepsilon + Z_t)d\mu dt\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 [\ell_x(t, X_t^* + \mu\varepsilon(O_t^\varepsilon + Z_t), u_t^* + \mu\varepsilon v_t)]v_t d\mu dt\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(u^\varepsilon(.)) - J(u^*(.))}{\varepsilon} &= \mathbb{E}\int_0^T \ell_x(t, X_t^*, u_t^*)Z_t dt + \mathbb{E}\int_0^T \ell_u(t, X_t^*, u_t^*)v_t dt \\
&+ \mathbb{E}[g_x(X_T^*)Z_t]
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{dj(u^\varepsilon(.))}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} &= \mathbb{E}\int_0^T \ell_x(t, X_t^*, u_t^*)Z_t dt + \mathbb{E}\int_0^T \ell_u(t, X_t^*, u_t^*)v_t dt \\
&+ \mathbb{E}[g_x(X_T^*)Z_t]
\end{aligned}$$

Lemme 3.3.3 *pour tout $u \in \mathcal{U}_{ad}$ nous avons :*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T [\ell_x(t, X_t^*, u_t^*)Z_t] \\ &+ \ell_u(t, X_t^*, u_t^*)v_t dt + g_x(x^*(T)Z_t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.3.3 principe du maximum stochastique

Le but du principe de maximum stochastique est trouver les conditions nécessaires d'optimalité par un contrôle optimal.Puisque le domaine de contrôle est convexe, la preuve de notre théorème repose sur une perturbation convexe de contrôle optimal

L'équation adjointe et le processus adjoint

Définition 3.3.1 *Nous présentons l'équation adjointe associée au principe du maximum stochastique pour notre problème de contrôle. c'est a dire que l'équation adjointe prend la forme d'une EDSR . Ainsi, pour tout$(u(.)) \in \mathcal{U}_{ad}$ et la trajectoire d'état correspondante X_t , nous considérons l'équation adjointe suivante :*

$$\begin{cases} dp_t = -b_x(t, X_t^*, u_t^*)p_t + \sigma_x(t, X_t^{,} u_t^{)} q_t + \ell_x(t, X_t, u_t)dt + q_t dB_t, \\ p_T = g_x(X_T). \end{cases} \tag{3.12}$$

Comme on sait que sous les hypothèses précédentes,l'équation adjoint(3.12) admit une paire solution$(p_t, q_t) - \mathcal{F}_t$-adapté et $(p_t, q_t) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0, T]; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0, T]; \mathbb{R})$

Définition 3.3.2 *Nous déffinissons* ***l'hamiltonien*** *habituel associé au problème de contrôle stochastique (3,1)(3,2) comme suit :*

$$H : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

telle que

$$H(t, X_t, u_t, p_t, q_t) = p_t b(t, X_t, u_t) + q_t \sigma(t, X_t, u_t) + \ell(t, X_t, u_t)$$

théorème(le principe du maximum stochastique de contrôle optimal

On suppose les hypothèses précédentes sont vérifie.Alors la solution de l'équation adjoint (3,13) corespond à(u_t^*, X_t^*) est un unique couple de processus $\mathcal{F}_t$ adapté (p_t^*, q_t^*) , tel que pour tout $u \in \mathbb{U}$,on a :

$$\mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)(u_t - u_t^*)dt \geq 0 \tag{3.13}$$

pour prouver le théorème, nous avons besoin des résultats et les lemmes précédent.

La démonstration du théorème consiste à appliquer la formule d'Itô à $p_T^* Z_t$ et à prendre l'espérance. des calculs simples permettent de montrer que :

$$p_T^* Z_T = p_0^* Z_0 + \int_0^T p_t^* Z_t + \int_0^T Z_t dp_t^* + \int_0^T d\left\langle p^*, Z\right\rangle_t$$

De puis (3,12)et (3,6)et $\int_0^T d\left\langle p^*, Z\right\rangle_t = \int_0^T q_t^* \sigma_x(t, X_t^*, u_t^*) Z_t dt + \int_0^T q_t^* \sigma_u(t, X_t^*, u_t^*) v_t dt$. on a :

$$\begin{aligned}
P_T^* Z_T &= \int_0^T p_t^* [\left\{b_x(t, X_t^*, u_t^*) Z_t + b_u(t, X_t^*, u_t^*) v_t\right\} dt \\
&+ \left\{\sigma_x(t, X_t^*, u_t^*) Z_t + \sigma_u(t, X_t^*, u_t^*) v_t\right\} dB_t] \\
&+ \int_0^T Z_T \left[-\left[b_x(t, X_t^*, u_t^*) p_t^* + \sigma_x(t, X_t^*, u_t^*) q_t^*\right) + \ell_x(t, X_t^*, u_t^*)\right] dt + q_t^* dB_t] \\
&+ \int_0^T q_t^* \sigma_x(t, X_t^*, u_t^*) Z_t dt \\
&+ \int_0^T q_t^* \sigma_u(t, X_t^*, u_t^*) v_t dt
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(p_T^* Z_T) &= \mathbb{E}\int_0^T p_t^* b_u(t) v_t dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T q_t^* \sigma_u(t) v_t dt - \mathbb{E}\int_0^T \ell_x(t) Z_t dt
\end{aligned}$$

Nous savons que $p_T^* = h_x(X_T^*)$,on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{h_x(X_T^*) Z_T\right\} &= \mathbb{E}\int_0^T p_t^* b_u(t) v_t dt + \mathbb{E}\int_0^T q_t^* \sigma_u(t) v_t dt \\
&- \mathbb{E}\int_0^T \ell_x(t) Z_t dt
\end{aligned}$$

. D'aprés (3.11)on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T p_t^* b_u(t) v_t dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T q_t^* \sigma_u(t) v_t dt + \mathbb{E}\int_0^T \ell_x(t) Z_t dt \\
&= \mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*) v_t dt
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du théorème.

CHAPITRE 4

PRINCIPE DE MAXIMUM STOCHASTIQUE DE TYPE MEAN-FIELD

4.1 Introduction

Dans ce chapitre , nous abordons le problème du contrôle optimal des systèmes régis par des équation différentielles stochastiques de type mean-field.Les dynamiques de ces systèmes dépendent à la fois de l'état du processus, de son espérance , ainsi que du contrôle exercé. L'objectif principal est de formuler et d'appliquer le principe du maximum à ce type particulier de systèmes.On suppose que l'ensemble des contrôles admissibles forme un domaine convexe .Voir [9], [12].

4.2 Position du problème

Considérons un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ vérifiant les condition classique,sur cet espace, on définit un mouvement brownien standard unidimensionnel $(B_t)_{t\geq 0}$. Soit $\mathbb{U}$ un sous-ensemble convexe et fermé de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble des processus $u(.) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{U}$ que sont adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)$.

Nous considérons alors le problème de contrôle stochastique suivant,de type mean-field :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \mathbb{E}(X_t), u_t)dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{E}(X_t), u_t)dB_t \\ X_0 = \xi \end{cases} \tag{4.1}$$

Notation : $\mathbb{E}(X_t) = Y_t$

La fonction de côut à minimiser sur la classe des contrôles admissibles est également de type mean-field, que à la forme :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \ell(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t)dt + g(X_T, Y_T)\right] \tag{4.2}$$

Le problème de contrôle optimal est de minimiser le côut $J(u(.))$,on introduit la fonction valeur :

$$J(u^*(.)) = min_{u(.)\in\mathcal{U}_{ad}} J(u(.))$$

Supposons les hypothéses suivant,soient les fonction$b : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}, \sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}, \ell : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

H1) Les fonction b, σ, ℓ et g sont continument différentiable par rapport à (X, Y, u).

H2) Les fonction de b, σ, ℓ et g sont continue de Lipschtz et bornées par $c(1+ \mid X \mid + \mid Y \mid + \mid u \mid)$.

sous les hypothèses ci-dessus,l'EDS (4,1)admet une solution forte unique donnée par :

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s, Y_s, u_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, Y_s, u_s)dB_s.$$

Supposons maintenant que u^* soit une contrôle optimal et X^* la trajectoire optimal associée , définie par L'EDS(4,1). En suit, nous définissons le contrôle perturbée comme suit :

$$u^\theta(t) = u^*(t) + \theta[u(t) - u^*(t)]$$

Où $\theta > 0$ est suffisamment petit $(0 < \theta < 1)$.Nous désignons par X^θ la solution de (4,1) du système associé à le contrôle u^θ.A partir de l'optimalité de u^*,l'intégralité variationnelle sera dérivée du fait que :

$$J(u^\theta(.)) - J(u^*(.)) \geq 0 \tag{4.3}$$

4.2.1 Les estimation des solution

Lemme 4.2.1 *D'après les hypothèses énoncées précédemment concernant les coefficients, on a :*

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \mid X_t^\theta - X_t^* \mid^2\right) = 0 \tag{4.4}$$

Preuve

En appliquant les estimation classiques ainsi que l'inégalité de Burkholder-David-Gundy , on peut établire l'existance d'une constante $C > 0$ et de coefficient de Lipschitziens pour b et σ, tels que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \quad (\sup_{0\le t\le T} \mid X_t^\theta - X_t^* \mid^2) \\ \le \quad &\mathbb{E}[\int_0^t \mid b(s, X_s^\theta, Y_s^\theta, u_s^\theta) - b(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*) \mid^2 ds \\ + \quad &\int_0^t \mid \sigma(s, X_s^\theta, Y_s^\theta, u_s^\theta) - \sigma(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*) \mid^2 ds] \end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \quad (\sup_{0\le t\le T} \mid X_t^\theta - X_t^* \mid^2) \\ \le \quad &C\mathbb{E} \int_0^t \mid X_s^\theta - X_s^* \mid^2 ds + C\theta^2 \mathbb{E} \int_0^t \mid u_s^\theta - u_s^* \mid^2 ds \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} \mid X_t^\theta - X_t^* \mid^2) \le C\theta^2 \mathbb{E} \int_0^t \exp(Cs) ds \underset{\theta\to 0}{\to} 0$$

Lemme 4.2.2 *Soit Z_t la solution d'EDS de type mean-field linéaire suivant :*

$$\left\{ \begin{aligned} dZ_t \quad &= b_x(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*) Z_t + b_y(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*) \mathbb{E}(Z_t) \\ + \quad &b_u(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*) v_t dt \\ + \quad &\sigma_x(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*) Z_t + \sigma_y(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*) \mathbb{E}(Z_t) \\ + \quad &\sigma_u(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*)(u_t - u_t^*) dB_t \\ Z_0 \quad &= 0 \end{aligned} \right. \tag{4.5}$$

Pour chaque t dans l'intervalle $[0, T]$, *nous observons la convergence suivant :*

$$\lim_{\theta\to 0} \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} \left| \frac{X_t^\theta - X_t^*}{\theta} - Z_t \right|^2 \right) = 0 \tag{4.6}$$

Preuve :

Nous posons :$\eta_t^\theta = \dfrac{X_t^\theta - X_t^*}{\theta} - Z_t, t \in [0,T]$ et $v_t = u_t - u_t^*$

$$\begin{array}{rcl}
\eta_t^\theta & = & \frac{1}{\theta}\int_0^t [b(s, X_s^\theta, Y_s^\theta, u_s^\theta) - b(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*)]ds \\
& + & \frac{1}{\theta}\int_0^t [\sigma(s, X_s^\theta, Y_s^\theta, u_s^\theta) - \sigma(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*)]dB_s \\
& - & \int_0^t [b_x(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*)Z_s + b_y(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*)\mathbb{E}(Z_s) \\
& + & b_u(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*)v_s]ds - \int_0^t [\sigma_x(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*)Z_s \\
& + & \sigma_y(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*)\mathbb{E}(Z_s) + \sigma_u(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*)v_s]dB_s
\end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid \eta_t^\theta \mid^2\right] & = & C\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 [(\mid b_y(s, X_s^\theta, Y_s^* + \mu\theta\mathbb{E}(\eta_s^\theta + Z_s), u_s^\theta)\mathbb{E}(\eta_s^\theta) \mid^2)]d\mu ds \\
& + & C\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 [\mid b_x(s, X_s^* + \mu\theta(\eta_s^\theta + Z_s), Y_s^*, u_s^\theta)\eta_s^\theta \mid^2]d\mu ds \\
& + & C\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 [(\mid \sigma_y(s, X_s^\theta, Y_s^* + \mu\theta\mathbb{E}(\eta_s^\theta + Z_s), u_s^\theta)\mathbb{E}(\eta_s^\theta) \mid^2)]d\mu ds \\
& + & C\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 [\mid \sigma_x(s, X_s^* + \mu\theta(\eta_s^\theta + Z_s), Y_s^*, u_s^\theta)\eta_s^\theta \mid^2]d\mu ds \\
& + & C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid \alpha_t^\theta \mid^2\right]
\end{array} \tag{4.7}$$

Où

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_t^\theta & = & \int_0^t \int_0^1 [(b_y(s, X_s^\theta, Y_s^* + \mu\theta\mathbb{E}(\eta_s^\theta + Z_s), u_s^\theta) - b_y(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*))\mathbb{E}(Z_s)d\mu ds \\
& + & \int_0^t \int_0^1 [(b_x(s, X_s^* + \mu\theta(\eta_s^\theta + Z_s), Y_s^*, u_s^\theta) - b_x(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*))Z_s]d\mu ds \\
& + & \int_0^t \int_0^1 [(b_u(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^* + \mu\theta v_s) - b_u(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*))v_s]d\mu ds \\
& + & \int_0^t \int_0^1 [(\sigma_y(s, X_s^\theta, Y_s^* + \mu\theta\mathbb{E}(\eta_s^\theta + Z_s), u_s^\theta) - \sigma_y(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*))\mathbb{E}(Z_s)d\mu dB_s \\
& + & \int_0^t \int_0^1 [(\sigma_x(s, X_s^* + \mu\theta(\eta_s^\theta + Z_s), Y_s^*, u_s^\theta) - \sigma_x(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*))Z_s]d\mu dB_s \\
& + & \int_0^t \int_0^1 [(\sigma_u(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^* + \mu\theta v_s) - \sigma_u(s, X_s^*, Y_s^*, u_s^*))v_s]d\mu dB_s
\end{array}$$

Par la suite, en utilisant (4.4), l'équation $\eta_t^\theta = \dfrac{X_t^\theta - X_t^*}{\theta} - Zt$ et d'après hypothèse **H1** , nous obtenons : $\lim_{\theta\to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid \alpha_t^\theta \mid^2\right] = 0$

En outre, étant donné que les dérivées de b et σ sont bornées, l'équation (4.7) conduite à :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid \eta_t^\theta \mid^2\right] \leq C\mathbb{E}\int_0^t \mid \eta_t^\theta \mid^2 ds + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid \alpha_t^\theta \mid^2\right].$$

Nous appliquons le lemme de Gronwall, on obtenons (4.6)

Lemme 4.2.3 *Pour toute contrôle optimal et sa trajectoire correspondante* X^* *optimal, pour chaque* $u \in U_a d$ *, nous avons :*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}[g_x(X_T^*, Y_t^*) + \mathbb{E}(g_y(X_T^*, Y_T^*))]Z_T \\ &+ \int_0^T [\ell_x(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*)Z_t + \mathbb{E}(\ell_y(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*))Z_t \\ &+ \ell_u(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*)v_t]dt \end{aligned} \tag{4.8}$$

Preuve : À partir de (4.2) et (4.3) nous déduisons :

$$\begin{aligned} 0 &\leq J(u^\theta(\cdot)) - J(u^*(\cdot)) \\ &= \mathbb{E}\left[g(X_T^\theta, Y_T^\theta) - g(X_T^*, Y_T^*)\right] \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\ell(t, X_t^\theta, Y_t^\theta, u_t^\theta) - \ell(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^\varepsilon)\right]dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\ell(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^\theta) - \ell(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*)\right]dt \\ &= \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1 &= \mathbb{E}\left[g(X_T^\theta, Y_T^\theta) - g(X_T^*, Y_T^*)\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[g(X_T^*, Y_T^\theta) - g(X_T^*, Y_T^*)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_y(X_T^\theta, Y_T^* + \mu\theta(\eta_T + Z_T))\theta\mathbb{E}(\eta_T + Z_T)d\mu\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x(X_T^* + \mu\theta(\eta_T + Z_T), Y_T^*)\theta(\eta_T + Z_T)d\mu\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_2 &= \mathbb{E}\int_0^T \left[\ell(t, X_t^\theta, Y_t^\theta, u_t^\theta) - \ell(t, X_t^\theta, Y_t^*, u_t^\theta)\right]dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\ell(t, X_t^\theta, Y_t^*, u_t^\theta) - \ell(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^\theta)\right]dt \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \left[\ell_y(t, X_t^\theta, Y_t^* + \mu\theta\mathbb{E}(\eta_t + Z_t))\theta\mathbb{E}(\eta_t + Z_t)d\mu\right]dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_0^1 \ell_x(t, X_t^* + \mu\theta(\eta_t + Z_t), Y_t^*, u_t^\theta)\theta(\eta_t + Z_t)d\mu\right]dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_3 &= \mathbb{E}\int_0^T \left[\ell(t,X_t^*,Y_t^*,u_t^\theta)-\ell(t,X_t^*,Y_t^*,u_t^*)\right]dt\\ &= \mathbb{E}\int_0^T\left[\int_0^1 \ell_u(t,X_t^*+y_t^*,u_t^*+\mu\theta v_t)\theta v_t d\mu\right]dt.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'équation (4.8), nous obtenons :

$$0\leq \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_y(X_T^\theta,Y_T^*+\mu\theta\mathbb{E}(\eta_T+Z_T))\mathbb{E}(Z_T)d\mu\right] \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}&+\ \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x(X_T^*+\mu\theta(\eta_T+Z_T),Y_T^*)Z_Td\mu\right]\\ &+\ \mathbb{E}\int_0^T\left(\int_0^1 \ell_y(t,x^\theta(t),Y_T^*+\mu\mathbb{E}(\eta_t+Z_t)),u_t^\theta\mathbb{E}(Z_t)d\mu\right)dt\\ &+\ \mathbb{E}\int_0^T\left(\int_0^1 \ell_x(t,X_t^*,+\mu\theta(\eta_t+Z_t)),Y_t^\theta,u_t^\theta)Z_td\mu\right)dt\\ &+\ \mathbb{E}\int_0^T\left(\int_0^1 l_u(t,X_t^*,Y_t^*,Z_t^*,u_t^*+\mu\theta v_td\mu\right)dt+\beta_t^\theta.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Où

$$\begin{aligned}\beta_t^\theta &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_y(X_T^\theta,Y_T^*+\mu,\theta\mathbb{E}(\eta_T+Z_T))\mathbb{E}(\eta_T)d\mu\right]\\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x(X_T^*+\mu\theta(\eta_T+Z_T),Y_T^*)\eta_Td\mu\right]\\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^1 l_y(t,x^\theta(t),Y_T^*+\mu\theta\mathbb{E}(\eta_t+Z_t)),u_t^\theta\mathbb{E}(\eta_t)d\mu\right)dt\right]\\ &+\mathbb{E}\int_0^T\left[\int_0^1 l_x(t,X_t^*,+\mu\theta(\eta_t+Z_t,Y_t^\theta,u_t^\theta)\eta_td\mu\right]dt\\ &.\end{aligned}$$

En se référant à (4.6), on constate que $lim\mathbb{E}_\theta \longrightarrow 0(\sup_{0\leq t\leq T}|\beta_t^\theta|^2)=0$ De plus, comme les dérivées de g et l sont bornées, nous avons $\lim_{\theta\longrightarrow 0}\beta_t^\theta=0$.

En conclusion, en se basant sur les équations (4.4) et (4.10) , avec u_t^θ tendent vers u_t^* (quand θ tend vers 0), et en raison de la continuité lipschitz des dérivées de g et l, nous obtenons le résultat (4.8).

4.2.2 Les équations adjointes

Nous présentons les équations adjointes qui sont impliquées dans le principe du maximum stochastique pour notre problème de contrôle de champ moyen. Il se trouve que l'équation adjointe prend la forme d'une EDSR linéaire de type de champ moyen. Pour tout u_t appartenant à l'espace $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$ et la trajectoire d'état correspondante X_t, nous considérons l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} dp_t = \Big[b_x(t, X_t, Y_t, u_t)p_t + \mathbb{E}\left(b_y(t, X_t, Y_t, u_t)p_t)\right) \\ \qquad + \sigma_x(t, X_t, Y_t, u_t)q_t + \mathbb{E}\left(\sigma_y((t, X_t, Y_t, u_t)q_t)\right) \\ \qquad + l_x(t, X_t, y_t, u_t) + \mathbb{E}(l_y(t, X_t, Y_t, u_t))\Big]\, dt + q_t dB_t, \\ p_T = g_x(X_T, Y_T) + \mathbb{E}\left[g_x(X_T, Y_T)\right]. \end{cases} \tag{4.12}$$

À partir des hypothèses précédentes, l'équation (4.12) admet une et une seule paire solution (p_t, q_t), qui est $\mathcal{F}_t$-adaptée dans $L^2_{\mathcal{F}}([0, T]; \mathbb{R}^n) \times L^2_{\mathcal{F}}([0, T]; \mathbb{R}^{n\times d})$, et nous avons :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |p_t|^2 + \int_0^T |q_t|^2 dt\right] \le C.$$

4.2.3 Principe du maximum de champ moyen

Théorème (Principe du maximum de champ moyen pour le contrôle optimal)

Si u^* est le contrôle optimal du problème (4.1),(4.2) X^* sa trajectoire optimale associée. Alors il existe un processus adjoint (p^*_t, q^*_t), $\mathcal{F}_t$-adapté solution de l'EDSR (4.12).
telle que :

$$\mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X^*_t, Y^*_t, u^*_t, p^*_t, q^*_t)\, v_t\, dt \ge 0. \tag{4.13}$$

Où nous établissons la définition conventionnelle de l ?hamiltonien lié au problème de contrôle stochastique de champ moyen (4.1) et(4.2) comme suit :

$$H\Big(t, X_t, Y_t, u_t, p_t, q_t\Big) \; = \; p_t\, b\Big(t, X_t, Y_t, u_t\Big) \; + \; q_t\, \sigma\Big(t, X_t, Y_t, u_t\Big) \; + \; \ell\Big(t, X_t, Y_t, u_t\Big),$$

Preuve On notons $f_\alpha(t) = \partial f / \partial \alpha(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*)$ pour $f = b, \sigma, \ell$ et g, et $\alpha = x, y, u$.
En utilisant la formule d'Itô pour $p_t^* Z_t$ et en prenant l'espérance, avec $Z_0 = 0$, un calcul direct démontre que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(p_t^* Z_t\Big) &= \mathbb{E}\int_0^T p_t^* dZ_t + \mathbb{E}\int_0^T Z_t\, dp_t^* \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T q_t^* \Big[\sigma_x(t)\, Z_t + \sigma_y(t)\, \mathbb{E}(Z_t) \\ &+ \sigma_u(t)\, v_t\Big] dt. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Nous savons que $p_T^* = \Big[g_x(X_T^*, Y_T^*) + \mathbb{E}\, g_y(X_T^*, Y_T^*)\Big]$ on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \; \Big[\{g_x(X_T^*, Y_T^*) + \mathbb{E}\, g_y(X_T^*, Y_T^*)\}\, Z_T\Big] \\ &= \mathbb{E}\int_0^T p_t^*\, b_u(t)\, v_t\, dt + \mathbb{E}\int_0^T q_t^*\, \sigma_u(t)\, v_t\, dt \\ &- \mathbb{E}\int_0^T Z_t\, \ell_x(t)\, dt - \mathbb{E}\int_0^T Z_t\, \mathbb{E}\Big(\ell_y(t)\Big)\, dt. \end{aligned}$$

Finalement, à partir de (4.8) nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T p_t^* b_u(t)\, v_t\, dt + \mathbb{E}\int_0^T q_t^* \sigma_u(t)\, v_t\, dt + \mathbb{E}\int_0^T \ell_u(t)\, v_t\, dt \\ &= \mathbb{E}\int_0^T H_u\Big(t, X_t^*, Y_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*\Big)\, v_t\, dt. \end{aligned}$$

Cela complète la preuve du Théorème.

Exemple économique simplifié 1 :Modèle de consommation influencée par la moyenne sociale (Mean-Field)

1.Contexte

On modélise un consommateur qui souhaite gérer sa richesse au fil du temps tout décidant combien consommer chaque jour. ais ses décisions ne dépendent pas seulement de sa propre situation ,elles sont influencées aussi par la consommation moyenne de tout les autres consommateurs (effet de champ moyen)

2.Modèle mathématique

On note :

- X_t :La richesse de l'individu au temps t
- u_t : sa consommation(contrôle)
- r :le taux d'intérêt
- σ : la volatilité(incertitude)
- B_t : mouvement brownien
- $\mathbb{E}[u_t] = \bar{u}$: moyenne de consommation de tous les individus

L'évolution de la richesse suit l'équation :

$$dX_t = (rX_t - u_t)dt + \sigma X_t dB_t$$

3. Fonction de coût (à minimiser) :

$J(u(.)) = \mathbb{E}[\int_0^T (\frac{1}{2}u_t^2 + \lambda(u_t - \bar{u}_t)^2)dt + q(X_t)]$

- Le premier terme pénalise une consommation trop élevée.
- Le deuxième terme pénalise le fait de s'éloigner de la moyenne (conformité sociale)
- $q(X_t)$ est une fonction terminale (exemple : $q(X_t) = \frac{1}{2}(X_t - x^*)^2$)

4. Interprétation :

Ce modèle simple montre que le consommateur prend en compte non seulement sa richesse, mais aussi le comportement moyen de la société .

C'est typique dans les économies modernes :les gens consomment en fonction de leurs moyennes et de ce que font les autres (influence sociale)

5.Objectif

Trouver une stratégie de consommation u_t^* qui équilibre :

- La stabilité financière.
- Le respect de la norme sociale (via $\bar{u}_t$)
- La minimisation des coût globaux

Exemple :Modèle de gestion d'un portefeuille financer sous influence Mean-Field On considère un investisseur qui gère un portefeuille dans un marché incertain .il cherche à maximiser ses gains .tout en tenant compte non seulement de sa propre situation mais aussi de comportement moyen des autres investisseurs(effet Mean - Field). équation de dynamique du portefeuille :

$$dX_t = [rX_t + \alpha_t(\mu - r) - 1/2\sigma^2\alpha_t^2]dt + \sigma\alpha_t X_t dB_t$$

X_t :valeur du portefeuille à l'instant t .

α_t :proposition investie dans l'actif risqué(contrôle).

r :taux sans risque.

μ :rendement espéré de l'actif risqué.

σ :volatilité du marché.

B_t :mouvement brownien.

$E(X_t)$:moyenne des portefeuilles dans le marché (effet de champ moyen). avec l'effet Mean -Field, l'équation devient :

$$dX_t = b(t, X_t, E[X_t], \alpha_t)dt + \sigma(t, X_t, E[x_t], \alpha_t)dB_t$$

Fonction de coût (à minimiser) :

$$J(\alpha(.)) = E[\int_0^T (1/2\alpha_t^2 + \lambda(X_t E[X_t])^2)dt + q(X_T)]$$

λ : pénalité de l'écart par rapport à la moyenne.

$q(X_T)$:fonction de coût terminale (souvent quadratique) trouver α_t^* qui minimise $J\alpha(.)$ en équilibrant :

-le risque personnel.

-la conformité au marché .

-la performance finale du portefeuille .

ce modèle reflété un comportement réaliste :un investisseur rationnel ajuste sa stratégie en fonction du marché global , pas seulement de sa propre situation .C'est un exemple typique de prise de décision les systèmes à agents multiples.

CONCLUSION

À travers ce travail, nous avons exploré les bases des processus stochastiques ainsi que leur rôle fondamental dans la modélisation des phénomènes aléatoires.

Nous avons étudié les équations différentielles stochastiques, en nous concentrant sur les résultats d'existence et d'unicité des solutions, puis nous avons abordé la problématique du contrôle stochastique à travers différentes approches telles que la programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryagin.

Enfin, nous avons étendu notre étude au principe du maximum stochastique dans le cadre Mean-Field, qui prend en compte l'interaction entre plusieurs agents.

Ce mémoire nous a permis de mieux comprendre les outils théoriques nécessaires pour analyser et contrôler des systèmes soumis à l'incertitude.

De nombreuses perspectives de recherche restent ouvertes, notamment dans l'optimisation de systèmes plus complexes et l'application de ces méthodes à de nouveaux domaines scientifiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bouleau, *Probabilités de l ?ingénieur*, Hermann, 1986.

[2] R. Durrett, *The essentials of probability*, The Duxbury Press, 1994.

[3] S. M. Ross,*Initiation aux probabilités*, PPUR, 1987.

[4] Bensoussan A (1983), Lectures on stochastic contr.In Lect.Notes in Math.972,Springer Varlag, pp.1-62

[5] Hafayed, M. (2013). A mean-field necessary conditions for optimal singular stochastic control. Communications in Mathematics and Statistics, 1(4), 417-435.

[6] Hafayed, M. (2013). A mean-field maximum principle for optimal contrôle of forward-backward stochastic differential equations with Poisson jump processes. International Journal of Dynamics and Control, 1(4), 300-315.

[7] Hafayed M, Abbas S.(2013) : On Stochastic Near-optimal Singular Controls for Jumps Diffusions : Necessary and Sufficient Conditions , Journal of Dynamical and Control Systems, Springer 19(4),503-517

[8] Hafayed M. Abbas S. : (2014) On Near-optimal Mean-field stochastic singular controls : necessary and sufficient conditions for near-optimality.Journal of Optimization Theory and Applications, Springer Vol 160, 778-808.

[9] Hafayed, M. (2013). A mean-field necessary and sufficient conditions for optimal singular stochastic control. Communications in Mathematics and Statistics, 1(4),

417-435

[10] Hafayed,Mokhtar,Gradient généralisés et contrôle stochastique,Thèse de Doctorat,Université Mohamed Khider Biskra,2009.

[11] Borkar, V. S. (2005). Controlled diffusion processes

[12] Li, J. (2012). Stochastic maximum principle in the mean-field controls. Automatica, 48(2), 366-373.

[13] B.OKSENDAL (1998),Stochastic Deffirential equation,an introduction with application,5^th Edition,Springer Verlag.New York.

[14] D. Applem,Lévy Processes and Stochastic Calculus, University Press,2009.

[15] Mokhtar Hafayed, Moufida Tabet,Samira Boukaf : Mean-field maximum principle for optimal control of forward-backward stochastic systems with jumps and its application to mean-variance portfolio problem, Communication in Mathematics and Statistics, Doi : 10.1007/s40304-015-0054-1, Springer, Volume 3, Issue 2, pp 163-186 (2015)

[16] Mokhtar Hafayed , Syed Abbas , Abdelmadjid Abba : On Mean-field Partial Information Maximum Principle of Optimal Control for Stochastic Systems with Lévy Processes, Journal of Optimizations Theory and Applications. Springer , J Optim Theory Appl (2015) 167 :1051-1069 (2015).

[17] Boukaf Samira Mokhtar Hafayed, , Ghebouli Messaoud : A study on optimal control problem with ?- ?-error bound for stochastic systems with application to linear quadratic problem , International Journal of Dynamics and Contro , Springer DOI : 10.1007/s40435-015-0178-x. Volume 5, Issue 2, pp 297–305, (2017)

[18] Mokhtar Hafayed, Abdelmadjid Abba , Samira Boukaf : On Zhou's maximum principle for near-optimal control of mean-field forward-backward stochastic systems with jumps and its applications , International Journal of Modelling, Identification and Control".25 (1), 1-16, (2016).

[19] Mokhtar Hafayed, Abdelmadjid Abba , Syed Abbas : On partial-information optimal singular control problem for mean-field stochastic differential equations driven byTeugels martingales measures, ID : 1079648

DOI :10.1080/00207179.2015.1079648 Internat. J. Control , 89 (2016), no. 2, 397–410. 2016.

[20] Mokhtar Hafayed, Samira Boukaf,Yan Shi, Shahlar Meherrem. : A McKean-Vlasov optimal mixed regular-singular control problem, for nonlinear stochastic systems with Poisson jump processes, (2016) Neurocomputing. Doi 10.1016/j.neucom.2015.11.082, Volume 182, 19, pages 133-144 (2016).

[21] Mo22htar Hafayed, Ghebouli Messaoud, Samira Boukaf , Yan Shi : Partial information optimal control of mean-field forward-backward stochastic system driven by Teugels martingales with applications (2016) DOI 10.1016/j.neucom. 2016.03.002. Neurocomputing, Vol 200 pages 11–21 (2016).

[22] Mokhtar Hafayed, ,Shahlar Meherrem ,Deniz H Guoclu, Saban Eren Variational principle for stochastic singular control of mean-field Lévy-forward-backward system driven by orthogonal Teugels martingales with application International Journal of Modelling, Identification and Control, DOI : 10.1504/IJMIC.2017.10006366, Vol 28, Issue 2, pp 97–113. (2017).

[23] Shahlar Meherrem , Mokhtar Hafayed , Deniz H. Gucoglu , Saban Eren A general characterization of the stochastic optimal combined control of mean field stochastic systems with application, International journal of dynamics and Control, Doi Int. J. Dynam. Control, Springer, DOI 10.1007/s40435-017-0323-9. Volume 6, Issue 2, pp 873–880 , (2018).

[24] Mokhtar Hafayed, , Shahlar Meherrem ,Saban Eren Deniz H Guoclu, : On optimal singular control problem for general McKean-Vlasov differential equations : Necessary and sufficient optimality conditions, Optimal Control Applications and Methods DOI :10.1002/oca.2403. Optim Control Appl Meth 2018 ; 39 , pp :1202–1219.(2018).

[25] Shahlar Meherrem, ,Mokhtar Hafayed, , Syed Abbas : On Peng's type maximum principle for optimal control of mean-field stochastic differential equations with jump processes, International Journal of Modelling, Identification and Control. DOI : 10.1504/IJMIC.2018.10014194. (2019)

[26] Shahlar Meherrem, Mokhtar Hafayed, Maximum principle for optimal control of McKean-Vlasov FBSDEs with Lévy process via the differentiability with respect to probability law, Optimal Control Applications and Methods DOI : 10.1002/oca.2490 2019. (40) pp. 499-516.

[27] Mokhtar Hafayed, Shahlar Meherrem , On optimal control of mean-field stochastic systems driven by Teugels martingales via derivative with respect to measures, International journal of control, DOI :10.1080/00207179.2018.1489148, Vol 93 (5), pp 1053-1062. (2020).

[28] Ravi Deepa , Palanisamy Muthukumar ,Mokhtar Hafayed, Optimal control of non-zero sum game mean-field delayed Markov regime-switching forward-backward system with Lévy processes, Optimal Control Applications and Methods Wiley, 2021. DOI : 10.1002/oca.2665.

[29] Samira Boukaf , Lina Guenane , Mokhtar Hafayed, Optimal continuous-singular control of stochastic McKean-Vlasov system in Wasserstein space of probability measures, IJDSDE 265175, Accept, International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations . 2022

[30] Naceur Rahmani, Samira Boukaf, Mokhtar Hafayed, Second-order optimization control problem for McKean-Vlasov systems via L-derivatives. International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, Volume 14, Issue 6, pp. 1-22. (2023).https ://ijnaa.semnan.ac.ir/article 7670 - 56d92bd8cbe5f5932f72284c9db7b336.pdf

[31] Fatiha Korichi, Samira Boukaf, Mokhtar Hafayed, : Stochastic intervention control of mean-field Poisson-jump-system with noisy observation via L-derivatives with respect to probability law . Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática Vol 42 , 2024 pp 1-25.

[32] Samira Boukaf, Fatiha Korichi , Mokhtar Hafayed, Muthukumar Palanisamy. On pointwise second-order maximum principle for optimal stochastic controls of general mean-field type. Asian Journal of Control, Doi : 10.1002/asjc.3271, pp. 790-802 , Vol 2024. https ://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/asjc.3271.

ANNEXE :ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: espace de probabilité.

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$: espace de probabilité filtré.

$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$: filtration.

$\mathbb{R}^d$: l'espace réel euclidien de dimension d.

$\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels.

$\mathcal{N}$:la famille des ensembles $\mathbb{P}$-négligable de $\mathcal{F}$.

B_t :Mouvement Brownien.

$\mathbb{E}$:l'espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$.

I_d : matrice identité $d \times d$.

$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d$: l'ensemble des matrices réelles $n \times d$.

$B^j(t)$: la $j^{\text{ième}}$ composante de $B(t)$.

$\sigma^j(t, X)$: la $j^{\text{ième}}$ colonne de $\sigma(t, X)$.

dt**-p.p.** : presque partout par rapport la mesure dt.

P**-p.s.** : presque surement pour la mesure de probabilité P.

U : ensemble de contrôles admissibles.

EDS :équation différentielle stochastique.

p_t :processus adjoint.

$J(.)$:la fonction de coût à minimiser.

$H(t, X_t, u_t, p_t)$: hamiltonien.

A : un borélien de $\mathbb{R}^d$.

mot clés :
équations différentielles stochastiques de type mean-field, équations adjoints, contrôle optimal, le principe de maximum stochastique. Perturbation convexe.
keywords :
Stochastic optimal control, stochastic differential equation, mean-field systems, necessary conditions of optimality. Ito-formula. variational method, convex perturbations.