الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Fonctions symétriques et génératrices a certains nombres et polynômes

Préparé par : Yalaoui Abir - Remmache Chaima

Soutenue devant le jury

Khalfaoui Mohamed	**MAA**	**C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila**	**Président**
Bouzakria fahima	**MAA**	**C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila**	**Rapporteur**
Daoui Amina	**MAA**	**C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila**	**Examinateur**

Le :25-06-2025

Année universitaire :2024/2025

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Avant tout, nous remercions ALLAH qui nous a accordé la force, la santé et la volonté, et qui nous a permis de mener à bien ce travail, en espérant bénéficier encore de Ses bénédictions.

Nous tenons également à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à notre encadrante, Madame la Professeure Fahima Bouzekria, pour sa patience, le temps qu'elle nous a consacré, sa disponibilité et, surtout, pour ses conseils avisés qui ont nourri notre réflexion.

Nous exprimons aussi notre reconnaissance à tous les enseignants, amis proches et lointains, ainsi qu'au personnel du département de mathématiques.

Une place particulière revient à nos familles, que nous remercions chaleureusement pour leur soutien indéfectible et leur présence tout au long de notre parcours académique.

Abir, Chaima

DÉDICACE

Je dédie ce travail modeste comme témoignage d'affection, de respect et d'admiration à : À ma très chère mère Yasmine, pour tout l'amour qu'elle m'a donné et tous les sacrifices qu'elle a faits pour moi. Je ferai de mon mieux pour rester une source de fierté à ses yeux, avec l'espoir de ne jamais la décevoir.

À mon père Zoher, pour la confiance qu'il m'a accordée et son soutien constant.

À ma soeur Soundous qui m'a toujours encouragée.

À mon frère Anis.

À mes amies fidèles Chaima et Imane, qui sont partagé avec moi tous les bons et les mauvais moments.

À tous les membres de ma promotion, à tous mes enseignants depuis ma première année d'études. Et aussi à toutes les personnes que je n'ai pas pu citer, mais qui m'ont aidée de près ou de loin.

Abir

DÉDICACE

À ceux qui ont été mon pilier, ma lumière et ma chaleur au fil du chemin. À mon père Halim, qui m'a appris la patience et la force,
À ma mère Machatiya, qui m'a transmis la tendresse et la foi,
À mes frères : Yahya, Ibrahime, Youssef et mes soeurs : Ala, Maryam et Kawtar compagnons de chaque instant, À mes amies, présents dans les moments de doute comme de joie,
Et à ma chère grand-mère disparue ton absence me pèse, mais ta mémoire vit en moi, dans chaque prière, dans chaque réussite.

C'est à vous tous que je dédie ce travail. Vous êtes ma source d'inspiration et ma force.

Chaima

INTRODUCTION

Il y a plusieurs années, des études approfondies ont été menées sur diverses relations de récurrence linéaires, telles que les suites de Fibonacci, de Lucas et de Pell-Lucas, entre autres. L'objectif de ces études était d'explorer leurs solutions, les fonctions génératrices associées et leurs formes explicites. Ces relations de récurrence explicites sont largement utilisées dans de nombreux domaines de recherche, notamment en économie et en informatique.

Cependant, ces dernières années, de nombreux chercheurs ont cherché à généraliser plusieurs de ces relations de récurrence. L'une des généralisations les plus connues est celle de la suite de Fibonacci. Cette généralisation a suscité un grand intérêt et est bien connue des chercheurs.

Grâce à cette généralisation, nous pouvons obtenir de nombreuses relations de récurrence et fonctions génératrices en utilisant la technique des fonctions symétriques.

Dans le premier chapitre, nous fournissons les outils nécessaires et les informations de base pour comprendre les chapitres suivants. Nous commençons par présenter les définitions et les propriétés des relations de récurrence linéaires pour certains nombres et polynômes. De plus, nous introduisons, vers la fin du chapitre, les fonctions génératrices ordinaires de certains polynômes.

Dans le deuxième chapitre, nous passons en revue les fonctions symétriques élémentaires et complètes ainsi que leurs propriétés.

Dans le troisième chapitre, nous utilisons les théorèmes précédents afin de dériver de nouvelles fonctions génératrices pour les produits de nombre Pell Modifiée, des polynômes de Jacobsthal Lucas bivariée et Lucas complexe bivariée en utilisant les fonctions symétriques en plusieurs variables.

CHAPITRE 1

RELATIONS DE RÉCURRENCES

Dans ce chapitre, nous allons résoudre les relations de récurrences linéaires à coefficients constants d'ordre k en utilisant la méthode du polynôme caractéristique.

1.1 Relations de récurrences linéaires

Une suite (u_n) vérifie une relation de récurrence s'il est possible d'exprimer le terme u_n comme une fonction des termes précédents u_0, u_1, u_2, ..., u_{n-1}. Cette relation de récurrence est dite d'ordre k si u_n dépend de k termes précédents de la suite, c'est-à-dire :

$$u_n = R\left(u_{n-1}, \ldots, u_{n-k}\right)$$

pour une certaine fonction R.

Définition 1.1.1 [10] *Une relation de récurrence dit linéaire d'ordre k si elle exprime* *sous la forme suivante :*

$$u_n + f_1(n)\,u_{n-1} + f_2(n)\,u_{n-2} + \ldots + f_k(n)\,u_{n-k} = g(n)\,, \tag{1.1}$$

ou $f_1(n)$, $f_2(n)$, …, $f_k(n)$ *et* $g(n)$ *sont des fonction non nulle.*

Théorème 1.1.1 [10] *la relation de récurrence linéaire*

$$u_n + f_1(n)\,u_{n-1} + f_2(n)\,u_{n-2} + \ldots + f_k(n)\,u_{n-k} = g(n)\,,$$

avec $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$, …, $u_{k-1} = a_{k-1}$, *sont des constants a une unique solution.*

Lemme 1.1.1 [10] *Soit* $u_n^{(1)}$ *la solution de la relation :*

$$u_n + f_1(n)\,u_{n-1} + f_2(n)\,u_{n-2} + \ldots + f_k(n)\,u_{n-k} = g_1(n)\,,$$

et $u_n^{(2)}$ *la solution de la relation*

$$u_n + f_1(n)\,u_{n-1} + f_2(n)\,u_{n-2} + \ldots + f_k(n)\,u_{n-k} = g_2(n)\,,$$

donc $c_1u_n^{(1)} + c_2u_n^{(2)}$ *est la solution de la relation*

$$u_n + f_1(n)\,u_{n-1} + f_2(n)\,u_{n-2} + \ldots + f_k(n)\,u_{n-k} = c_1g_1(n) + c_2g_2(n)\,.$$

Preuve. On a

$$\left[c_1u_n^{(1)} + c_2u_n^{(2)}\right] + f_1(n)\left[c_1u_{n-1}^{(1)} + c_2u_{n-1}^{(2)}\right] + \cdots + f_k(n)\left[c_1u_{n-k}^{(1)} + c_2u_{n-k}^{(2)}\right]$$

$$= c_1u_n^{(1)} + c_1f_1(n)u_{n-1}^{(1)} + \cdots + c_1f_k(n)u_{n-k}^{(1)} + c_2u_n^{(2)} + c_2f_1(n)u_{n-1}^{(2)} + \cdots + c_2f_k(n)u_{n-k}^{(2)}$$

$$= c_1\left[u_n^{(1)} + f_1(n)u_{n-1}^{(1)} + \cdots + f_k(n)u_{n-k}^{(1)}\right] + c_2\left[u_n^{(2)} + f_1(n)u_{n-1}^{(2)} + \cdots + f_k(n)u_{n-k}^{(2)}\right]$$

$$= c_1g_1(n) + c_2g_2(n).$$

■

1.2 Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants

Définition 1.2.1 [11] *Une relation de récurrence est dit linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants si elle est de la forme*

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k}, \tag{1.2}$$

Ou $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sont des nombres réels et c_k est non nul.

Exemple 1.2.1 *La relation de récurrence $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ est une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre deux.*

Exemple 1.2.2 *La relation de récurrence $u_n = 6u_{n-1} + u_{n-2}^2$ n'est pas linéaire.*

Exemple 1.2.3 *La relation de récurrence $u_n = 3u_{n-1} + 2$ est linéaire.*

Exemple 1.2.4 *La relation de récurrence $u_n = 5nu_{n-1} + n^2 u_{n-2}^2$ n'a pas des coefficients constants.*

Remarque 1.2.1 [11] *L'approche de base pour résoudre les relations de récurrence linéaires homogènes est de chercher des solutions de la forme $u_n = t^n$ est une constante. Remarquons que $u_n = t^n$ est une solution de la relation de récurrence $u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k}$ si et seulement si*

$$t^n = c_1 t^{n-1} + \cdots + c_k t^{n-k},$$

quand les deux côtés de cette équation sont divisés par t^{n-k} et que le côté droit est soustrait du côté gauche, on obtient l'équation :

$$t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_k = 0,$$

par conséquent, la suite u_n et $u_n = t^n$ sont des solutions si et seulement si est une solution de cette dernière équation. Nous appelons cet équation l'équation caractéristique de la relation de récurrence. Les solutions de cette équation sont appelées les racines caractéristiques de la relation de récurrence. Comme nous le verrons, ces racines caractéristiques peuvent être utilisées pour donner une formule explicite pour toutes les solutions de la relation de récurrence.

1.3 Polynômes caractéristiques

Définition 1.3.1 [3] *Soit la relation de récurrence linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants :*

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k},$$

Le polynôme caractéristique correspondant est

$$P(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \ldots - c_k.$$

Exemple 1.3.1 *le polynôme caractéristique de la relation récurrence suivante*

$$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$$

est : $\quad t^2 - 5t + 6 = 0$

Exemple 1.3.2 *Le polynôme caractéristique de la relation récurrence suivante*

$$u_n = -2u_{n-1} - 2u_{n-2} - u_{n-3},$$

est : $\quad t^3 + 2t^2 + 2t + 1 = 0.$

Remarque 1.3.1

1. *L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est obtenue en annulant le polynôme caractéristique de cette dernière.*

2. *Les racines de polynôme caractéristique sont appelées les racines caractéristiques.*

Théorème 1.3.2 [11] *Soient $c_1, c_2, \ldots, c_k$ des nombres réel tels que c_k est non nul. Supposons que le polynôme caractéristique*

$$P(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \ldots - c_k,$$

Admette k racines distinctes $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Alors (u_n) est une solution de la relation de récurrence

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k},$$

si et seulement si

$$u_n = \alpha_1 t_1^n + \alpha_2 t_2^n + \ldots + \alpha_k t_k^n, \forall n \in \alpha N,$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des constantes réelles.

Exemple 1.3.3 *Soit la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_n = -3u_{n-1} + 2u_{n-2}, & n \geq 2 \\ u_0 = 0, u_1 = -1. \end{cases}$$

L'équation caractéristique est $t^2 + 3t + 2 = 0$. Elle peut être factorisée comme $(t+1)(t+2)$, donc il y a deux racines réelles :-1 et -2.
La solution générale est :

$$u_n = c_1(-1)^n + c_2(4)^n,$$

Les conditions initiales $u_0 = 0, u_1 = -1$ impliquent que :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Donc la solution est :

$$u_n = -(-1)^n + (-2)^n.$$

Théorème 1.3.3 [11] *Soient $c_1, c_2, \ldots, c_k$ Supposons que l'équation caractéristique*

$$t^k - c_1 t^k - \ldots - c_k = 0,$$

admet r racines distinctes $t_1, t_2, \ldots, t_r$ avec des multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$, telles que $m_i \geq 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, r$ et $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$. Alors, (u_n) est solution de la relation de récurrence :

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k},$$

si et seulement si :

$$u_n = \left(\alpha_{1.0} + \alpha_{11} n + \ldots + \alpha_{1m_1-1} n^{m_1-1}\right) t_1^n + \left(\alpha_{2.0} + \alpha_{21} n + \ldots + \alpha_{2m_2-1} n^{m_2-1}\right) t_2^n$$
$$+ \ldots + \left(\alpha_{r.0} + \alpha_{r1} n + \ldots + \alpha_{rm_r-1} n^{m_r-1}\right) t_r^n,$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, où les $\alpha_{i,j}$ sont des constantes, avec $1 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq m_i - 1$.

Exemple 1.3.4 *Soit la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}, \quad n \geq 2 \\ u_0 = 2, u_1 = 8. \end{cases}$$

L'équation caractéristique est $t^2 - 4t + 4 = 0$. Elle peut être factorisée comme $(t-2)^2$, donc il y a une racine double réelle 2.
La solution générale est :

$$u_n = c_1(2)^n + c_2 n(2)^n,$$

$$u_n = (c_1 + c_2 n)(2)^n.$$

Les conditions initiales $u_0 = 2, u_1 = 8$ impliquent que :

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ (c_1 + c_2)2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Donc la solution est :

$$u_n = 2(2)^n + 2n(2)^n,$$

$$u_n = (2 + 2n)2^n.$$

1.3.1 Relations de récurrences de certains nombres et polynômes

Définition 1.3.2 [3] *La relation de Fibonacci $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} G_n = pG_{n-1} + qG_{n-2}, \quad n \geq 2 \\ G_0 = \alpha, G_1 = \beta. \end{cases} \tag{1.3}$$

avec $p, q \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Lemme 1.3.1 *Soit $t^2 - pt - q = 0$, l'équation caractéristique de la relation récurrence* (1.1)

1. *si l'équation caractéristique a deux solutions réels t_1 et t_2 alors la solution générale de* (1.3) *est donnée par :*

$$G_n = \frac{\lambda_1 t_1^n - \lambda_2 t_2^n}{t_1 - t_2},$$

avec λ_1=$\beta - \alpha t_2$ et λ_2=$\beta - \alpha t_1$.

2. *si l'équation caractéristique a une seule solution réel t_1 et t_2 alors la solution générale*

de (1.3) est donnée par :

$$G_n = (c_1 + c_2 n)t^n,$$

avec $c_1 = \alpha$ *et* $c_2 = \frac{\beta - \alpha t}{t}$.

Définition 1.3.3 [12] *Le nombre de Pell-modifié est définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} MP_{p,qn} = 2pMP_{p,q,n-1} + qMP_{p,q,n-2}, & n \geq 2 \\ MP_{p,q,0} = 1, MP_{p,q,1} = p. \end{cases} \tag{1.4}$$

Définition 1.3.4 [14] *Le polynôme de Jacobsthal Lucas bivarié sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} j_n(x,y) = xyj_{n-1}(x,y) + 2yj_{n-2}(x,y), & n \geq 2 \\ j_0(x,y) = 0, j_1(x,y) = 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Définition 1.3.5 [5] *Le polynôme de Lucas complexe bivarié sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} L_n(x,y) = ixL_{n-1}(x,y) + yL_{n-2}(x,y), & n \geq 2 \\ L_0(x,y) = 2, L_1(x,y) = ix. \end{cases} \tag{1.6}$$

1.4 Fonctions génératrices

1.4.1 Séries formelles

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.4.1 [3] *Les éléments de l'ensemble* $\mathbb{K}[[t]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, a_n \in \mathbb{N} \right\}$ *s'appellent les séries formelles à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, t^n *s'appellent le monôme de degré* n *et* a_n *est son coefficient.*

Définition 1.4.2 [3] *Soient* $\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *et* $\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *deux séries formelles, alors*

$$\alpha(t) + \beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n.$$

Définition 1.4.3 [3] *Soient* $\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *et* $\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *deux séries formelles, alors*

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}.$$

Définition 1.4.4 [3] *Deux séries formelles* $\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *et* $\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *sont égales si et seulement si pour tout* $n \neq 0, a_n = b_n$.

Définition 1.4.5 [3] *On dit que la serie formelle* $\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *est l'inverse de le serie* $\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *si,*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right) = 1$$

Exemple 1.4.1 *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *est inversible est son inverse est* $(1-t)$*, en effet*

$$\begin{aligned}(1-t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1.\end{aligned}$$

Proposition 1.4.1 [3] *Une serie formelle* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *est inversible si et seulement si* $a_0 \neq 0$.

Preuve. Nous devons déterminer s'il existe ou non une série formelle $\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ dans $\mathbb{K}[[t]]$, telle que $\alpha(t)\beta(t) = 1$. En développant le produit, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha(t)\beta(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) t^n. \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de t^n des deux côtés de l'équation $\alpha(t)\beta(t) = 1$, on voit que $\beta(t)$ satisfait l'équation si et seulement si $a_0 b_0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} t^n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Si a_0 n'est pas inversible dans K, alors l'équation $\alpha(t)\beta(t) = 1$ ne peut pas être résolue pour b_0, de sorte que $\beta(t)$ n'existe pas et $\alpha(t)$ n'est pas inversible dans $\mathbb{K}[[t]]$.

Si a_0 est inversible dans $\mathbb{K}$, alors $b_0 = a_0^{-1}$ existe. Chacune des équations restantes (pour $n \geq 1$) on peut la récrite sous la forme $a_0 b_n = -\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, ou en multipliant par b_0, $b_n = -b_0 \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Ces équations peuvent être résolues par récurrence sur $k \geq 1$, donnant une solution pour $\beta(t)$ qui constitue l'inverse multiplicatif de $\alpha(t)$. Par conséquent, $\beta(t)$ est inversible dans $\mathbb{K}[[t]]$. ∎

Proposition 1.4.2 [3] *Si $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont deux séries formelles non nulles, alors $\alpha(t)\beta(t)$ est également non nulle.*

1.4.2 Fonctions génératrices ordinaires (FGO)

Définition 1.4.6 [3] *La fonction génératrice ordinaire (FGO) de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, est définie par :*

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Exemple 1.4.2 *La fonction génératrice de la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *avec* $a_n = 3, a_n = n+1, a_n = 2^n$ *est :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3t^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n+1t^n \quad et \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n.$$

Théorème 1.4.1 *Soient A(t) la FGO de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *et B(t) la FGO de* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *alors :*

1. *A(t)+B(t) est la FGO de* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. *tA(t) est la FGO de* $(0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.
3. *A′(t) est la FGO de* $(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, (n+1)a_{n+1}, \ldots)$.
4. *A(t)B(t) est la FGO de* $(a_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots)$.
5. *(1-t)A(t) est la FGO de* $(a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1}, \ldots)$.
6. $\frac{A(t)}{1-t}$ *est la FGO de* $\left(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ldots\right)$.

Théorème 1.4.2 *Soit la suite* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} G_n = pG_{n-1} + qG_{n-2} \quad , n \geqslant 2 \\ G_0 = \alpha, G_1 = \beta. \end{cases} \tag{1.7}$$

avec $p, q \in \mathbb{C}_+^*, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Alors la fonction génératrice associée a* $(G_n)_{n\geq 0}$ *est donnée par :*

$$G(t) = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha)\, t}{1 - pt - qt^2}. \tag{1.8}$$

Preuve. On a :

$$
\begin{aligned}
G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n &= G_0 + G_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} G_n t^n = \alpha + \beta t + \sum_{n=2}^{\infty} (pG_{n-1} + qG_{n-2}) t^n \\
&= \alpha + \beta t + pt \sum_{n=2}^{\infty} G_{n-1} t^{n-1} + qt^2 \sum_{n=2}^{\infty} G_{n-2} t^{n-2} \\
&= \alpha + \beta t + pt \sum_{n=1}^{\infty} G_n t^n + qt^2 \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n \\
&= \alpha + \beta t + pt \left(\sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n - \alpha \right) + qt^2 \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n \\
&= \alpha + (\beta - p\alpha) t + ptG(t) + qt^2 G(t).
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
G(t) = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha)t}{1 - pt - qt^2}.
$$

■

Théorème 1.4.3 [13] *La fonction generatrice des polynômes de Fibonacci bivariés est donnée par :*

$$
\sum_{n=2}^{\infty} F_n(x, y) t^n = \frac{t}{1 - xt - yt^2}.
$$

Preuve. On a :

$$
\begin{aligned}
G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y) t^n &= F_0(x, y) + F_1(x, y) t + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(x, y) t^n \\
&= t + \sum_{n=2}^{\infty} \left(xF_{n-1}(x, y) + yF_{n-2}(x, y) \right) t^n \\
&= t + xt \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}(x, y) t^{n-1} + yt^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}(x, y) t^{n-2} \\
&= t + xt \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x, y) t^n + yt^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y) t^n \\
&= t + xt \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y) t^n - 0 \right) + yt^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y) t^n \\
&= t + xtG(t) + yt^2 G(t).
\end{aligned}
$$

Alors :

$$G(t)(1 - xt - yt^2) = t,$$

Donc :

$$G(t) = \frac{t}{1 - xt - yt^2}.$$

■

Théorème 1.4.4 [13] *La fonction génératrice des polynômes de Lucas bivariés est donnée par :*

$$\sum_{n=2}^{\infty} L_n(x,y)t^n = \frac{2 - xt}{1 - xt - yt^2}.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
G(t) = \sum_{n=2}^{\infty} L_n(x,y)t^n &= L_0(x,y) + L_1(x,y)t + \sum_{n=2}^{\infty} L_n(x,y)t^n \\
&= 2 + xt + \sum_{n=2}^{\infty}(xL_{n-1}(x,y) + yL_{n-2}(x,y))t^n \\
&= 2 + xt + xt\sum_{n=2}^{\infty} L_{n-1}(x,y)t^{n-1} + yt^2\sum_{n=2}^{\infty} L_{n-2}(x,y)t^{n-2} \\
&= 2 + xt + xt\sum_{n=1}^{\infty} L_n(x,y)t^n + yt^2\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,y)t^n \\
&= 2 + xt + xt\left(\sum_{n=1}^{\infty} L_n(x,y)t^n - 2\right) + yt^2\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,y)t^n \\
&= 2 - xt + xtG(t) + yt^2G(t).
\end{aligned}$$

Alors :

$$G(t)(1 - xt - yt^2) = 2 - xt,$$

Donc :

$$G(t) = \frac{2 - xt}{1 - xt - yt^2}.$$

■

Théorème 1.4.5 [13] *La fonction génératrice des polynômes de Pell bivariés est donnée* *par :*

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n(x,y)t^n = \frac{t}{1-2xyt-yt^2}.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
G(t) = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(x,y)t^n &= P_0(x,y) + P_1(x,y)t + \sum_{n=2}^{\infty} P_n(x,y)t^n \\
&= t + \sum_{n=2}^{\infty}(2xyP_{n-1}(x,y) + yP_{n-2}(x,y))t^n \\
&= t + 2xyt\sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x,y)t^{n-1} + yt^2\sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2}(x,y)t^{n-2} \\
&= t + 2xyt\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x,y)t^n + yt^2\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x,y)t^n \\
&= t + 2xyt\left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x,y)t^n - 0\right) + yt^2\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x,y)t^n \\
&= t + 2xytG(t) + yt^2G(t).
\end{aligned}$$

Alors :

$$G(t)(1-2xyt-yt^2) = t,$$

Donc :

$$G(t) = \frac{t}{1-2xyt-yt^2}.$$

■

Théorème 1.4.6 [13] *La fonction génératrice des polynômes bivariés de Pell-Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x,y)t^n = \frac{2-2xyt}{1-2xyt-yt^2}.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x,y)t^n &= Q_0(x,y) + Q_1(x,y)t + \sum_{n=2}^{\infty} Q_n(x,y)t^n \\
&= 2 + 2xyt + \sum_{n=2}^{\infty}(2xyQ_{n-1}(x,y) + yQ_{n-2}(x,y))t^n \\
&= 2 + 2xyt + 2xy\sum_{n=2}^{\infty} Q_{n-1}(x,y)t^n + y\sum_{n=2}^{\infty} Q_{n-2}(x,y)t^{n-2} \\
&= 2 + 2xyt + 2xyt\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x,y)t^n + yt^2\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x,y)t^n \\
&= 2 + 2xyt + 2xyt\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x,y)t^n - 2\right) + yt^2\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x,y)t^n \\
&= 2 - 2xyt + 2xytG(t) + yt^2G(t).
\end{aligned}$$

Alors :

$$G(t)(1 - 2xyt - yt^2) = 2 - 2xyt,$$

Donc :

$$G(t) = \frac{2 - 2xyt}{1 - 2xyt - yt^2}.$$

Théorème 1.4.7 [13] *La fonction génératrice des polynômes de Jacobsthal est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n(x,y)t^n = \frac{t}{1 - xyt - 2yt^2}.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x,y)t^n, &= J_0(x,y) + J_1(x,y)t + \sum_{n=2}^{\infty} J_n(x,y)t^n, \\
&= t + \sum_{n=2}^{\infty} (xy\,J_{n-1}(x,y) + 2y\,J_{n-2}(x,y))\,t^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t + xyt\sum_{n=2}^{\infty} J_{n-1}(x,y)t^{n-1} + 2yt^2\sum_{n=2}^{\infty} J_{n-2}(x,y)t^{n-2},\\
&= t + xyt\sum_{n=1}^{\infty} J_{n}(x,y)t^{n} + 2yt^2\sum_{n=0}^{\infty} J_{n}(x,y)t^{n},\\
&= t + xyt\left(\sum_{n=0}^{\infty} J_{n}(x,y)t^{n} - 0\right) + 2yt^2\sum_{n=0}^{\infty} J_{n}(x,y)t^{n},\\
&= t + xytG(t) + 2yt^2G(t).
\end{aligned}$$

Donc :

$$G(t)(1 - xyt - 2yt^2) = t.$$

Alors :

$$G(t) = \frac{t}{1 - xyt - 2yt^2}.$$

■

Théorème 1.4.8 [13] *La fonction génératrice des polynômes de Jacobsthal-Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n(x,y)t^n = \frac{2 - xyt}{1 - xyt - 2yt^2}.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n(x,y)t^n, &= j_0(x,y) + j_1(x,y)t + \sum_{n=2}^{\infty} j_n(x,y)t^n\\
&= 2 + xyt + \sum_{n=2}^{\infty} \left(xy\, j_{n-1}(x,y) + 2y\, j_{n-2}(x,y)\right) t^n\\
&= 2 + xyt + xyt\sum_{n=2}^{\infty} j_{n-1}(x,y)t^{n-1} + 2yt^2\sum_{n=2}^{\infty} j_{n-2}(x,y)t^{n-2}\\
&= 2 + xyt + xyt\left(G(t) - j_0(x,y)\right) + 2yt^2G(t)\\
&= 2 + xyt + xyt\left(\sum_{n=0}^{\infty} j_n(x,y)t^n - 2\right) + 2yt^2\sum_{n=0}^{\infty} j_n(x,y)t^n\\
&= 2 - xyt + xytG(t) + 2yt^2G(t).
\end{aligned}$$

Alors :

$$G(t)(1 - xyt - 2yt^2) = 2 - 2xyt,$$

Donc :

$$G(t) = \frac{2 - xyt}{1 - xyt - 2yt^2}.$$

la preuve est complète . ■

D'après les théorèmes précédentes on a déduit le tableau suivant *[3]* : Pour $k = 1$

Valeurs de p, q, α, β	**Coefficient de** t^n	**Fonction génératrice**
$p = k, \beta = 1, q = 1, \alpha = 0$	$F_{k,n}$	$\frac{1}{1 - kt - t^2}$
$p = \beta = k, q = 1, \alpha = 2$	$L_{k,n}$	$\frac{2 - kt}{1 - kt - t^2}$
$\alpha = 0, p = 2, q = k, \beta = 1$	$P_{k,n}$	$\frac{k}{1 - 2t - kt^2}$
$\alpha = \beta = p = 2, q = k$	$Q_{k,n}$	$\frac{2 - 2t}{1 - 2t - 2t^2}$
$p = k, q = 2, \alpha = 0, \beta = 1$	$J_{k,n}$	$\frac{t}{1 - kt - 2t^2}$
$p = \beta = k, \alpha = q = 2$	$j_{k,n}$	$\frac{2 - kt}{1 - kt - 2t^2}$

Tableau 1 : Fonction génératrice de certaines nombres k.

dans le tableau 1.1 on obtient le tableau suivant *[3]* :

Valeurs de p, q, α, β	**Coefficient de** t^n	**Fonction génératrice**
$p = 1, \beta = 1, q = 1, \alpha = 0$	F_n	$\frac{1}{1 - t - t^2}$
$p = \beta = 1, q = 1, \alpha = 2$	L_n	$\frac{2 - t}{1 - t - t^2}$
$\alpha = 0, p = 2, q = 1, \beta = 1$	P_n	$\frac{1}{1 - 2t - t^2}$
$\alpha = \beta = p = 2, q = 1$	Q_n	$\frac{2 - 2t}{1 - 2t - t^2}$
$p = 1, q = 2, \alpha = 0, \beta = 1$	I_n	$\frac{t}{1 - t - 2t^2}$
$p = \beta = 1, \alpha = q = 2$	j_n	$\frac{2 - t}{1 - t - 2t^2}$

Tableau 2 : Fonction génératrice de certaines suites numériques pour $k = 1$.

CHAPITRE 2

FONCTIONS SYMÉTRIQUES ÉLÉMENTAIRES ET COMPLÈTES

Dans ce chapitre ,nous mentionnons quelques définitions et propriétés importantes des fonctions symétriques élémentaires et complètes.

2.1 Fonctions symétriques

Définition 2.1.1 [14] *Considérons f une fonction définie sur n variables on qualifie cette fonction symétrique lorsque sa valeur demeure inchangée quelle que soit la permutation appliquée à ses variables . Autrement dit, pour tout permutation des indices (1,. . .,n), on a :*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{s(1)}, x_{s(2)}, \ldots, x_{s(n)})$$

Cela signifie que l'ordre des variables n'affecte pas le résultat de la fonction.

2.1.1 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 2.1.2 [3] *Soit k et n deux entiers positifs et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ l'ensemble des variables donnée, alors la fonction symétrique élémentaire $e_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ est définie par :*

$$e_k^{(n)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}, \qquad 0 \leq k \leq n,$$

avec $i_1, i_2, \ldots, i_n = 0 \vee 1$.

Exemple 2.1.1 *Pour une équation de degré $2 (n = 2, racines : \lambda_1 et \lambda_2)$, on a :*

$$\begin{cases} e_0^{(2)} = 1, \\ e_1^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2, \\ e_2^{(2)} = \lambda_1\lambda_2. \end{cases}$$

Proposition 2.1.1 [7] *La fonction génératrice des fonctions symétriques élémentaires est donnée par :*

$$E(t) = \sum_{k\geq 0} e_k t^k = \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i t), \qquad avec \quad e_k^{(n)} = 0 \quad si \quad k > n.$$

Preuve. Nous avons :

$$e_k^{(n)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\cdots\lambda_n^{i_n}, \qquad avec \quad e_k^{(n)} = 0 \quad si \quad k > n.$$

pour $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{2}(1 + \lambda_i t) &= (1 + \lambda_1 t)(1 + \lambda_2 t), \\ &= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_1\lambda_2 t^2, \\ &= e_0 + e_1 t + e_2 t^2 = \sum_{k=0}^{2} e_k t^k. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la propriété est vraie pour n :

$$\sum_{k\geq 0} e_k t^k = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i t),$$

et montrons qu'elle reste vraie pour $n+1$:

$$\sum_{k\geq 0}^{(n+1)} e_k t^k = \prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i t).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i t) &= \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i t)(1+\lambda_{n+1} t) &&= \left(\sum_{k\geq 0}^{(n)} e_k t^k\right)(1+\lambda_{n+1} t) \\
&= \sum_{k\geq 0}^{n} e_k t^k + \lambda_{n+1}\sum_{k\geq 0} e_k^{(n)} t^{k+1} &&= \sum_{k\geq 0}^{n} e_k t^k + \lambda_{n+1}\sum_{k\geq 1} e_{k-1}^{(n)} t^{k} \\
&= \sum_{k\geq 0}^{n} e_k t^k + \lambda_{n+1}\sum_{k\geq 0} e_{k-1}^{(n)} t^{k} &&= \sum_{k\geq 0}\left(e_k^{(n)} + \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)}\right) t^k \\
&= \sum_{k\geq 0} e_k^{(n+1)} t^k &&= \sum_{k\geq 0}^{n+1} e_k t^k.
\end{aligned}$$

Ainsi, la proposition est vraie pour tout $n \geq 0$ ■

2.1.2 Fonctions symétrique complètes

Définition 2.1.3 [3] *Soient k et n deux entiers positifs et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ l'ensemble des variables données. Alors la fonction symétrique complète $h_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ est définie par :*

$$h_k^{(n)} = h_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}, \tag{2.1}$$

avec : $i_1, i_2, \ldots, i_n \geq 0$ *et* $h_k^{(n)} = 0, \quad \forall k < 0$.

Exemple 2.1.2 *Pour une équation de degré ($n = 4$, racines : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) on a :*

$$\begin{cases} h_0^{(4)} = 1, \\ h_1^{(4)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \\ h_2^{(4)} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4, \\ h_3^{(4)} = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + +\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_4 + \dots \\ h_4^{(4)} = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 + \lambda_4^4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_4^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_4^2 + \lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_1^3\lambda_2 + \dots. \end{cases}$$

Proposition 2.1.2 [7] *Les fonctions symétriques complètes d'ordre peuvent également être caractérisées comme les coefficient du développement en série formelle*

$$H(t) = \sum_{k\geq 0} h_k^n t^k = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i t)^{-1}.$$

Preuve. nous avons

$$h_k^n = h_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\dots\lambda_n^{i_n}.$$

pour $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k\geq 0} h_k^2 t^k &= h_0^2 + h_1^2 t + h_2^2 t + \dots \\ &= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)t + (\lambda_1^2 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2^2)t^2 + \dots \\ &= (1 + \lambda_1 t + \lambda_1^2 t^2 + \dots)(1 + \lambda_1 t + \lambda_2^2 t^2 + \dots) \\ &= \left(\sum_{k\geq 0} (\lambda_1 t)^k\right) + \left(\sum_{k\geq 0} (\lambda_2 t)^k\right) \\ &= \frac{1}{(1 - \lambda_1 t)(1 - \lambda_2 t)} \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{2} (1 - \lambda_i t)}, \end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour$n$

$$H(t) = \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} t^k = \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i t)^{-1},$$

Et montrons qu'elle est rest vraie pour $n+1$

$$H(t) = \sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k = \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i t)^{-1},$$

On a

$$h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{n}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k &= \sum_{k\geq 0} (\lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)}) t^k \\
&= \lambda_{n+1} \sum_{k\geq 0} h_{k-1}^{(n+1)} t^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} t^k \\
&= \lambda_{n+1} \sum_{k=1} h_{k-1}^{(n+1)} t^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} t^k \\
&= \lambda_{n+1} t \sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} t^k,
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k - \lambda_{n+1} t \sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k &= \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i t)^{-1} \\
(1-\lambda_{n+1} t) \sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k &= \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i t)^{-1} \\
\sum_{k\geq 1} h_{k-1}^{(n+1)} t^k &= \frac{(1-\lambda_{n+1} t)^{-1}}{\prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i t)} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (1+\lambda_i t)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.3 [3] *Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

$$H(t).E(-t) = 1.$$

Preuve. On a

$$E(t) = \sum_{k\geq 0} e_k t^k = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i t)$$

$$E(-t) = \sum_{k\geq 0} e_k (-t)^k = \prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i t)$$

$$H(t) = \sum_{k\geq 0} h_k t^k = \prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i t)^{-1}$$

$$H(t).E(-t) = \left(\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i t)^{-1}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i t)\right) = 1.$$

■

2.2 Quelques propriétés sur les fonctions symétriques

Définition 2.2.1 [3] *Soit n un entier positif et $A = \{a_1, a_2\}$ un ensemble de variables donnée, alors la fonction symétrique S_n est définie par*

$$S_n(A) = S_n(a_1 + a_2) = \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{a_1 - a_2}$$

Avec $\quad S_0(a_1 + a_2) = 1, S_1(a_1 + a_2) = a_1 + a_2, S_2(a_1 + a_2) = a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2.$

Définition 2.2.2 [1] *Soient A et B deux alphabets quelconques. Nous définissons $S_j(A - B)$ de la manière suivante :*

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A-B)t^j = E(-t)H(t). \tag{2.2}$$

Avec

$$H(t) = \prod_{b\in B}(1-bt)^{-1} \quad et \quad E(-t) = \prod_{a\in A}(1-at).$$

Proposition 2.2.1 [14] *En posant $A = \phi$ dans (2.2), nous obtenons :*

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(-B)t^j = \prod_{b\in B}(1-bt), \tag{2.3}$$

Proposition 2.2.2 [14] *En choisissant $B = \phi$ dans (2.2), nous obtenons :*

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A)t^j = \frac{1}{\prod_{a\in A}(1-at)} \tag{2.4}$$

Lemme 2.2.1 [3] *Soient deux alphabets $A = [x]$ et $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ alors :*

$$S_{n+k}(x-B) = x^k S_n(x-B),$$

Pour tout $k \geq 0$.

Proposition 2.2.3 [3] *Si A est de cardinal 1(c'est-à-dire $A = x$), alors*

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bt)}{(1-xt)} = 1 + \dots + t^{j-1}S_{j-1}(x-B) + t^j\frac{S_j(x-B)}{(1-xt)}. \tag{2.5}$$

Preuve. D'après (2.2) on a

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-tb)}{1-xt} = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(x-B)t^j, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} S_j(x-B)t^j &= 1+\ldots+S_{j-1}(x-B)t^{j-1}+S_{j+1}(x-B)t^{j+1}+\ldots \\
&= 1+\ldots+S_{j-1}(x-B)t^{j-1}+z^j(S_j(x-B)+S_{j+1}(x-B)t+\ldots) \\
&= 1+\ldots+S_{j-1}(x-B)t^{j-1}+t^j(S_j(x-B)+xS_j(x-B)t+\ldots) \\
&= 1+\ldots+S_{j-1}(x-B)t^{j-1}+t^jS_j(x-B)(1+xt+x^2t^2+\ldots) \\
&= 1+\ldots+t^{j-1}S_{j-1}(x-B)+t^j\tfrac{S_j(x-B)}{1-xt}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bt)}{(1-xt)} = 1+\ldots+t^{j-1}S_{j-1}(x-B)+t^j\frac{S_j(x-B)}{1-xt}.$$

■

Proposition 2.2.4 [2] *En considérant successivement le cas$A=\phi, B=\phi$, on obtient la factorisation suivante :*

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A-B)t^j = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(A)t^j \sum_{j=0}^{\infty} S_j(-B)t^j.$$

Ainsi

$$S_j(A-B)t^j = \sum_{k=0}^{j} S_{j-k}(A)S_k(-B).$$

Corollaire 2.2.1 [12] *La fonction symétrique des polynômes de Jacobsthal-Lucas bivariés est donnée par :*

$$j_n = 2S_n\left(p_1+[-p_2]\right) - xyS_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right).$$

Corollaire 2.2.2 [14] *La fonction symétrique des polynômes de Lucas complexe bivariés est donnée par :*

$$L_n = 2S_n\left(p_1+[-p_2]\right) - ixS_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right),$$

Corollaire 2.2.3 [5] *La fonction symétrique des nombres de Pell modifiés est donnée par :*

$$MP_{p,q,n} = S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) - pS_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right).$$

Suites/Polynômes	Fonctions symétriques
j_n	$2S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) - xyS_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right)$
L_n	$2S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) - ixS_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right)$
MP_n	$S_n\left(p_1 + [-p_2]\right) - pS_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right)$

Tableau 1 : Fonctions symétriques associées à certaines suites et polynômes bivariés.

CHAPITRE 3

FONCTIONS GÉNÉRATRICES ORDINAIRES DES PRODUITS DES NOMBRES ET POLYNOMES AVEC DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES

Dans ce chapitre, nous introduisons de nouvelles fonctions génératrices pour les produits de nombres tels que les nombre Pell-modifiées et les polynômes de Jacobsthal-Lucas bivariés, Lucas complexe bivariés.

3.1 Définitions et quelques propriétés

Définition 3.1.1 [3] *Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^n$, la différence divisée $\partial_{a_i,a_{i+1}}$ est définie par :*

$$\partial_{a_i,a_{i+1}}(f) = \frac{f(a_1,\dots,a_i,a_{i+1},\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},a_i,\dots,a_n)}{a_i - a_{i+1}}. \tag{3.1}$$

Définition 3.1.2 [3] *L'opérateur de symétrisation $\delta^k_{a_1,a_2}$ est définie par :*

$$\delta^k_{a_1,a_2} f(a_1) = \frac{a_1^k f(a_1) - a_2^k f(a_2)}{a_1 - a_2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Théorème 3.1.1 *Soit $P = \{p_1, p_2\}$ et $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, Soient deux alphabets, alors on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4) H_n(p_1+p_2) t^n = \frac{1-(p_1p_2)e_2^{(4)}t^2+\left[(p_1p_2)(p_1+p_2)\right]e_3^{(4)}t^3}{\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_1t)\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_2t)} - \frac{(p_1p_2)\left[(p_1+p_2)^2-p_1p_2\right]e_4^{(4)}t^4}{\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_1t)\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_2t)}.$$

Théorème 3.1.2 *Soit $P = \{p_1, p_2\}$ et $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, Soient deux alphabets, alors on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4) H_{n-1}(p_1+p_2) t^n = \frac{e_1^{(4)}t-(p_1+p_2)e_2^{(4)}t^2+\left[(p_1+p_2)^2-p_1p_2\right]e_3^{(4)}t^3}{\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_1t)\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_2t)} - \frac{(p_1+p_2)\left[(p_1+p_2)^2-2p_1p_2\right]e_4^{(4)}t^4}{\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_1t)\prod_{i=1}^{4}(1-a_ip_2t)},$$

changeons p_2 par $(-p_2)$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right) H_n\left(p_1+[-p_2]\right) t^n = \frac{1+\left(p_1p_2\right) e_2^{(4)}t^2 - \left[\left(p_1p_2\right)\left(p_1+p_2\right)\right] e_3^{(4)}t^3}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-\left(p_1-p_2\right)a_it - p_1p_2a_i^2t^2\right)} + \frac{\left(p_1p_2\right)\left[\left(p_1-p_2\right)^2+p_1p_2\right] e_4^{(4)}t^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-\left(p_1-p_2\right)a_it - p_1p_2a_i^2t^2\right)}, \tag{3.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right) H_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right) t^n = \frac{e_1^{(4)}t - \left(p_1-p_2\right) e_2^{(4)}t^2 + \left[\left(p_1-p_2\right)^2+p_1p_2\right] e_3^{(4)}t^3}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-\left(p_1-p_2\right)a_it - p_1p_2a_i^2t^2\right)} - \frac{\left(p_1-p_2\right)\left[\left(p_1-p_2\right)^2+2p_1p_2\right] e_4^{(4)}t^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-\left(p_1-p_2\right)a_it - p_1p_2a_i^2t^2\right)}. \tag{3.6}$$

3.2 Sur les fonctions génératrices des nombres

Dans cette partie, nous considérons désormais les théorèmes précédents afin de dériver une nouvelle fonction génératrice pour les produits des fonctions symétriques en plusieurs variables avec les nombres suivants : Jacobsthal-Lucas bivarié, Lucas complexe bivarié et Pell-modifiée. Dans cette partie, nous considérons désormais les théorèmes précédents afin de dériver une nouvelle fonction génératrice pour les produits des fonctions symétriques en plusieurs variables avec les polynômes suivants : Jacobsthal-Lucas bivarié, Lucas complexe bivarié et le nombre de Pell-modifiée.

Théorème 3.2.1 *Étant donné que n est un nombre naturel, la nouvelle fonction génératrice du produit des polynômes de Lucas complexe bivariés et d'une fonction symétrique en plusieurs variables est :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4)L_n t^n = \frac{2 - ixte_1^4 + (ix^2+2y)t^2e_2^4 + (-ix^3 - ixy - 2xy)t^3e_3^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)} + \frac{(ix^4 + 2ix^2y + 2x^2y + 2y^2)t^4e_4^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)}.$$

Preuve. On marque que :

$$L_n = 2H_n\left(p_1 + [-p_2]\right) + ixH_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right),$$

puis,

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4)L_n t^n \\
= \; & \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\left(2H_n\left(p_1+[-p_2]\right) - ixH_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right)t^n, \\
= \; & 2\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4)H_n\left(p_1+[-p_2]\right) \\
- \; & ix\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4)H_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right) \\
= \; & 2\frac{1+ye_2^{(4)}t^2 - xye_3^{(4)}t^3 + (ix^2y+x^2y+y^2)e_4^{(4)}t^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)} \\
- \; & ix\frac{e_1^{(4)}t - xe_2^{(4)}t^2 + (x^2-y)e_3^{(4)}t^3 - (x^3+2xy)e_4^{(4)}t^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)} \\
= \; & \frac{2 - ixte_1^4 + (ix^2+2y)t^2e_2^4 + (-ix^3 - ixy - 2xy)t^3e_3^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)} \\
+ \; & \frac{(ix^4+2ix^2y+2x^2y+2y^2)t^4e_4^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.2 *Étant donné que n est un nombre naturel, la nouvelle fonction génératrice du produit des polynômes de Jacobsthal-Lucas bivariés et d'une fonction symétrique en plusieurs variables est :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4)j_n t^n = \frac{2 - xyte_1^4 + (x^2y^2+4y)t^2e_2^4 + (-x^3y^3-6xy^2)t^3e_3^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-a_it-a_i^2t^2\right)} \frac{+(x^4y^4+8x^2y^3+8y^2)t^4e_4^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-a_it-a_i^2t^2\right)}.$$

Preuve. On a

$$j_n = 2H_n\left(p_1+[-p_2]\right) - xyH_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right),$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4)j_nt^n \\
= & \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4)\left(2H_n\left(p_1+[-p_2]\right) - xyH_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right)\right)t^n \\
= & 2\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4)H_n\left(p_1+[-p_2]\right) \\
- & xy\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1,a_2,a_3,a_4)H_{n-1}\left(p_1+[-p_2]\right) \\
= & 2\frac{1+2ye_2^{(4)}t^2-2xy^2e_3^{(4)}t^3+(4y^2+2y^3x^2)e_4^{(4)}t^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-a_it-a_i^2t^2\right)} \\
- & xy\frac{e_1^{(4)}t-xye_2^{(4)}t^2+(x^2y^2+2y)e_3^{(4)}t^3-(x^3y^3+4y^2x)e_4^{(4)}t^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-a_it-a_i^2t^2\right)} \\
= & \frac{2-xyte_1^4+(x^2y^2+4y)t^2e_2^4+(-x^3y^3-6xy^2)t^3e_3^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-a_it-a_i^2t^2\right)} \\
+ & \frac{(x^4y^4+8x^2y^3+8y^2)t^4e_4^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1-a_it-a_i^2t^2\right)}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.3 *Étant donné que n est un nombre naturel, la nouvelle fonction génératrice du produit des nombres de Pell- Modifié et d'une fonction symétrique en plusieurs variables est :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1, a_2, a_3, a_4) MP_{p,q,n} t^n = \frac{1 - pte_1^4 + (2p^2+q)e_2^4 t^2 + (-4p^3 - 3pq)t^3 e_3^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)} + \frac{(8p^4 + 8p^2 q + q^2) e_4^4 t^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)}.$$

Preuve. On a

$$MP_{p,q,n} = H_n\left(p_1 + [-p_2]\right) - pH_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right),$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1, a_2, a_3, a_4) MP_{p,q,n} t^n \\
= \; & \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1, a_2, a_3, a_4)\left(H_n\left(p_1 + [-p_2]\right) - pH_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right)\right) t^n \\
= \; & \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1, a_2, a_3, a_4) H_n\left(p_1 + [-p_2]\right) \\
- \; & p \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(a_1, a_2, a_3, a_4) H_{n-1}\left(p_1 + [-p_2]\right) \\
= \; & \frac{1 + qe_2^{(4)} t^2 + (-2p^3 - pq)e_3^{(4)} t^3 + q^2 e_4^{(4)} t^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)} \\
- \; & p \frac{e_1^{(4)} t - 2pe_2^{(4)} t^2 + (2p^2 + 2q)e_3^{(4)} t^3 - (8p^3 + 8pq)e_4^{(4)} t^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)} \\
= \; & \frac{1 - pte_1^4 + (2p^2+q)e_2^4 t^2 + (-4p^3 - 3pq)t^3 e_3^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)} \\
+ \; & \frac{(8p^4 + 8p^2 q + q^2) e_4^4 t^4}{\prod_{i=1}^{4}\left(1 - a_i t - a_i^2 t^2\right)}.
\end{aligned}$$

■

CONCLUSION

Dans ce travail, grâce à l'utilisation de fonction symétrique, nous avons dérivé de nouvelles fonction génératrices pour les produits des polynômes de Lucas complexe bivariés, Jacobsthal-lucas bivariés et les nombres de Pell-Modifié à fonction symétrique à plusieurs variable .

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous présentons un théorème afin de calculer des nouvelles fonctions génératrices pour les relations de récurrences du second ordre, le théorème présenté est basé sur les fonctions symétriques, nous permet d'obtenir les fonctions génératrices des produits des polynômes de Lucas complexe bivariés, Jacobsthal-lucas bivariés et de nombre de Pell-Modifié avec les fonctions symétriques plusieurs variables.

ABSTRACT

In the dissratation, we present a theorem in order to calculate new generating functions for second-order recurrences relations. The presented theorem is based on symmetric functions, we gived the Generating functions of polynomials of bivariate complex lucas, bivariate jacobsthal lucas and nembers of modified pell with symmetric functions in several variables.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بعرض نظريتين تعتمد على التوابع التناظرية وذلك لحساب الدوال المولدة للعلاقات التراجعية الخطية حيث أننا قمنا بحساب الدوال المولدة لجداءات كثيرات الحدود ل جاكوبستال لوكاس ، لوكاس المركب ثنائي المتغير وأعداد بيل المُعدَّلة بمتغيرين مع الدوال التناظرية بعدة تغيرات.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Abderrezzak, Généralisation de la transfortmation d'Euler d'une série formelle, Adv.Math., 103, 180-195, 1994.

[2] A. Abderrezzak, Généralisation d'identités de Carlitz, Howard et Lehmer, A equationes Math., 49, 36-46, 1995.

[3] Kh. Boubellouta, Fonctions symétriques et leurs applications à certains noumbres et polynômes, (Doctoral dissertation). Mohamed Seddik Ben Yahia University, Jijel, Algeria. 2020.

[4] S. Boughaba, A. Boussayoud, S. Araci and M. Kerada, Construction of Generating Functions of Gaussian Fibonacci Numbers and Polynomials, Univ. J. Math. Appl. (Submitted), 2021.

[5] S. Boughaba, A. Boussayoud, N. Saba, Generating Fonction of the product of bivariate complexe Fibonacci polynomials with gaussian numbers and polynomials,General Algebra and Applications 40, 245-265, 2020.

[6] S. Fiorini, MATH-F-307 Mathématiques discrétes. Version 2012.

[7] D. Foata et GN. Han, Principe de combinatoire classique, Université Louis Pasteur, Strasbourg Département de mathématique, 2008.

[8] S. Halici, S. Oz, On Gaussian Pell polynomials and some of their properties, Palestine Journal of Mathematics 7, 251-256, 2018.

[9] S. Halici, S. Oz, On some Gaussian Pell and Pell-Lucas numbers, Ordu University Journal of Science and Technology 6, 8-18, 2016.

[10] A. F Horadam, Generating functions for pwers of a certain generalized sequence of numbers, Duke Math. J. 32, 1965.

[11] K. H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, Monmouth University(and fromerly AT et T Laboratories), 2019.

[12] N. Saba, A. Boussayoud, S. Araci, M. Kerada, A new class of ordinary generating fonction for binary product of mersenne numbers and gaussien numbers with parameters p and q, integers, novomber 2023.

[13] N. Saba and A. Boussayoud, Complete homogeneous symmetric functions of Gauss Fibonacci polynomials and bivariate Pell polynomials, Open Journal of Mathimatical Sciences, 2020.

[14] N. Saba and A. Boussayoud, Ordinary generating functions of binary products of (p,q)- Modified-Pell numbers and k-numbers at positive and negative indices, 627-648, 2020.

[15] A. M. Sharari, Introduction to Combinatorial Theory, Saudi University Publications, Kingdom of Saudi Arabia.