الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Contrôle stochastique et conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous l'information partielle

Préparé par : **Benslimane Sofia**

Soutenue devant le jury

Bouaden Rabeh	**MCA**	**C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila**	**Président**
Samira Boukaf	**MCA**	**C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila**	**Rapporteur**
Ahmed yahia Rakia	**MCB**	**C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila**	**Examinateur**

Année universitaire :2024/2025

Remerciements

Mes remercîment vont premièrement a «Allah» le tout puissant

pour la volonté et le courage qu'il m'a donnée pour terminer ce mémoire.

Mes premiers remercîments vont certainement à Dr

«Boukaf samira»

Pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils

durant toute la période du travail accordées et vraiment je suis très honorée qu'elle était mon encadrante.

Je remercie également les membres de jury Mr. « Bouaden rabeh», Pour avoir accepté de présider et Madame

« Ahmed yahia rakia»Pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Et je n'oublie pas de remercier chaleureusement tous les membres

de département de mathématiques. Merci beaucoup pour tous vos efforts.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, un grand merci à toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail, et en particulier « Ma mère»,

« Mon mari» et « Mes enfants» pour leur soutien infini.

Dédicace

Ma présence ici n'est pas au hasard. Cela n'a été possible que grâce au soutien d'un homme qui m'a

toujours encouragé à persévérer, à lutter et à apprendre. Cet homme, qui a planté ses valeurs en moi avant de voir le fruit de ce qu'il m'a offert pour atteindre tous mes objectifs.

Je dédie ce travail à mon «Père » qu'Allah lui accorde sa miséricorde, à son âme pure .

A celle qui est chère à mon cœur, mon paradis sur terre «Ma mère», qui m'a encouragée à continuer .

A mon «Cher époux », mon soutien et mon appui, qui m' a encouragée à poursuivre mon chemin et qui à partagé mes difficultés et mes obstacles.

A mes enfants «Nour adjiad», «Maram», «Souhaibe ».

A mes frères et mes sœurs .

A ma belle mère, mes beaux frères et mes belles sœurs, et à tous ceux qui ont contribué à me soutenir et à m'encourager.

Résumé

Ce mémoire traite le contrôle stochastique, en se concentrant sur les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, dans le cadre de l'information partielle. Nous analysons un système décrit par une équation différentielle stochastique (EDS) et étudions spécifiquement le cas où le domaine de contrôle admissible est convexe.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions que nous utilisons dans les autres chapitres. Dans le deuxième, nous étudions le contrôle stochastique, certaines classes de contrôle et deux méthodes de résolution. Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons au principe de maximum sous l'information partielle. Enfin, dans le dernier chapitre, nous appliquons le principe de maximum stochastique au problème de sélection de portefeuille moyenne variance.

Mots clés :

Equations différentielle stochastique, contrôle stochastique, contrôle optimale, perturbation, et fonction du cout.

Abstract

This recherch addresses stochastic control, focusing on the necessary and sufficient conditions for optimality, In the context of partial information. We analyze a system described by a stochastic differential equation (SDE) and specifically study the case. where the admissible control domain is convex.

In the first chapter, we recall some definitions that we use in the other chapters. In the second chapter, we study stochastic control, certain classes of control, and two methods of resolution. In the third chapter, we focus on the principal of maximum under partial information. Finally, in the last chapter, we apply the stochastic maximum principle to the problem of portfolio selection based on meanvariance.

Key words:

Stochastic differential equation, stochastic control, perturbation, cost funtion.

ملخص

يتناو ل هذا البحث موضوع التحكم العشوائي، مع التركيز على الشروط الضرورية والكافية لتحقيق الأمثلية في سياق المعلوما ت الجزئية. حيث نقوم بتحليل نظام موصوف بمعادلة تفاضلية عشوائية يكون فيها مجال التحكم المقبول محدبا.

في الفصل الأول، نتطرق لبعض التعريفات الأساسية المستخدمة في الأجزاء الأخرى من البحث، في الفصل الثاني نبحث في التحكم العشوائي، نستعرض بعض فئات التحكم وطريقتين للحل، في الفصل الثالث نتناول مبدأ الحد الأقصى ضمن إطار المعلومات الجزئية وأخيرا. في الفصل الرابع نطبق مبدأ الحد الأقصى العشوائي على مشكلة اختيار المحفظة اعتمادا على المتوسط والانحراف المعياري

الكلمات الأساسية :
المعادلة التفاضلية العشوائية، التحكم العشوائي، التحكم الأمثل، الإضطراب ودالة التكلفة.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale **2**

1 Généralité sur le calcul stochastique **4**

1.1 Espace de probabilité 4

1.2 Processus stochastique 5

1.2.1 Filtration 5

1.2.2 Processus stochastique 5

1.2.3 Temps d'arrêt 6

1.2.4 Mouvement brownien 7

1.2.5 Variation quadratique 7

1.3 L'intégrale stochastique 8

1.3.1 Propriétés de l'intégrale stochastique 8

1.3.2 Processus d'Itô 8

1.3.3 Formule d'Itô 9

1.4 Inégalité 10

1.4.1 Inégalité de Cauchy-schwarz 10

1.4.2 Inégalité de Burkhölder-Davis-Gandy 10

1.4.3 Inégalité de Gronwall 11

1.5 Espérance conditionnelle 11

1.5.1 Conditionnement sur un événement 11
1.5.2 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu 11
1.5.3 Espérance conditionnelle par rapport à une variable 12
1.5.4 Propriétés de l'espérance conditionnelle 12
1.6 Équation différentielle stochastique(EDS) 13
1.7 L'existence et l'unicité de la solution 13

2 Contrôle optimal et méthode de résolution 21
2.1 Contrôle stochastique 21
2.2 Classe de contrôle stochastique 23
2.2.1 Contrôle admissible 23
2.2.2 Contrôle optimal 23
2.2.3 Contrôle presque optimal 23
2.2.4 Contrôle feed-back 24
2.2.5 Contrôle relaxé 24
2.2.6 Arrêt optimal 24
2.2.7 Contrôle ergodique et contrôle risk-sensible 25
2.3 Méthode de résolution 25
2.3.1 Principe de maximum de Pontryagin 26
2.3.2 Principe de programmation dynamique 28

3 Principe de maximum sous l'information partielle 31
3.1 Formulation général 31
3.2 Conditions nécessaires 33
3.3 Conditions suffisantes 37

4 Application en finance 41
4.1 Critère moyenne-variance d'allocation de portefeuille 42

Bibliographie 49

QUELQUE NOTION MATHÉMATIQUE

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de mémoire sont expliquées ci dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\leq 0}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité filtré
W	:	Mouvement brownien
$(\mathcal{F})_{t\leq 0}$	:	La filtration
EDS	:	Équation différentielle stochastique
$< X, X >_T$	:	Variation quadratique de X sur $[0, T]$
b	:	Drift
σ	:	coefficient de diffusion
u	:	Contrôle admissible
u^*	:	Contrôle optimal
$\mathcal{N}(0, t)$	:	Loi normale centre de variance t
$\mathbb{P}.p.s$	:	prés que sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
p_t	:	Processus adjoint
$H(t, X, u, p, q)$	:	Hamiltonien
max, min	:	Maximum, minimum
$s \wedge t$	:	$min(s, t)$

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le contrôle stochastique est un domaine de la théorie des systèmes dynamiques qui étudie les décisions optimale en présence d'incertitudes.
Ce mémoire se penche sur les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous l'information partielle, qui consiste à minimiser une fonction du coût donnée par :

$$J(u) = E\left[\int_0^T l(t, X_t, u_t)dt + g(X_T)\right]$$

Où X_t est la solution prise au temps terminal T d'un système gouverné par l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

Où $W = (W_t) \in [0, T]$ est un mouvement brownien définit sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$, b et σ sont des fonctions déterministes.
Dans le cadre de la théorie du contrôle optimal stochastique, notre objectif est d'obtenir des conditions nécessaire et suffisantes d'optimalité, ces conditions sont connue sous le nom de principe de maximum de Pontryagin pour un système différentielle gouverné par les équations différentielles (EDS) avec des coefficients contrôlées. La preuve de ce

résultat est basé sur la perturbation forte et la formule d'Itô. Ce travail est organisée de la manière :

* Le premier chapitre est de nature introductif dans le quel on s'intéresse aux éléments de calcule stochastique, qui permet d'introduire les outils essentiels pour les autres chapitres tel que : le mouvement brownien, l'intégrale stochastique la formule d'Itô les équations différentiels et le théorème d'existence et d'unicité.

* Dans le deuxième chapitre, l'attention se porte sur les classes de contrôle le stochastique et les méthodes de résolution tel que le principe de la programmation dynamique et le principe de maximum de Pontryagin que nous utilisons dans notre travail.

*Dans le troisième chapitre on va étudier le principe du maximum stochastique sous l'information partielle pour cela on suppose que la fonction du coût $J(u)$ où u est un contrôle admissible, différentiable et il accepte un minimum en u^* qu'on appellera contrôle optimal u^* tel que :

$$J(u^*) = \min_{u \in U} \{J(u), u \in U : \quad \text{convex}\}$$

Ou u est l'espace de contrôle admissible, puis on perturbe le contrôle u^* sur un intervalle de longueur δ ou on obtient un contrôle u_ζ qu'on appellera perturbation convexe de u^*, en remarquant que u_ζ est un contrôle admissible et $\mathcal{G}_t-$adapté.

L'intérêt de la perturbation du contrôle optimal u^* est d'introduire u_ζ sur le quel nous pourrons dériver la fonction de coût $J(u_\zeta)$. La domaine de contrôle u est supposé convexe.

Notons que les étapes d'études suivies dans ce chapitre sont similaires à celles de Benssoussan [1].

Pour prouver il est nécessaire que le processus de contrôle soit adapté à une sous filtration $\mathcal{G}_t$ de la filtration complet $\mathcal{F}_t$ et avec le domaine des contrôles admissibles et convexe.

* Dans le quatrième chapitré,nous appliquons les résultats de principe de maximum stochastique aux problèmes de sélection de portefeuille en moyenne variance.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉ SUR LE CALCUL STOCHASTIQUE

Dans ce chapitre on présente quelques définitions de base et certains résultat que nous utilisons dans la suit de mémoire. voir les référence suivante :

1.1 Espace de probabilité

Une expérience et appelé ”aléatoire” s'il est impossible de prévoir son résultat sur à l'avence. Et si elle est répétée dans des conditions identiques. On appelle ensemble associé à une expérience aléatoire l'ensemble fondamentale (voir [11])

$$\Omega = \{\text{tous resultat possibles de cette expérience}\}.$$

Un espace de probabilité oú espace probabilisé est la donnée d'une probabilité à tout événement, il permet la modélisation quantitative de l'expérience aléatoire étudiée. c'est un letlet $(\Omega, F, \mathbb{P})$, F est un ensemble des évènements ou tribu sur Ω, et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur F.

Définition 1.1.1 *Une tribu (ou σ-algèbre) sur* Ω *est une famille de* $\mathcal{F}$ *de sous-ensemble de* Ω *tel que :*

i) $\phi \in \mathcal{F}$

ii) $A \in \mathcal{F} \rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

iii) $(A_n)_{n=1} \subset \mathcal{F} \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

En particulier $A, B \in \mathcal{F} \rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ *de même* $A, B \in \mathcal{F} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

1.2 Processus stochastique

1.2.1 Filtration

Définition 1.2.1 *[5]Une filtration sur un triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille croissante* $F = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *:*

$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *pour tout* $0 \leqslant s \leqslant t$ *dans* T.

On dit que le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé filtré.*

Définition 1.2.2 *Une filtration* $F = (\mathcal{F}_t)_{t\in \mathbb{R}_+}$ *est continue à droit si pour tout* $t \in T$

$$\mathcal{F}_{t_+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t \qquad \forall t \in T$$

Si F_0 *est la plus petite filtration contient tous les ensembles négligeable de F alors on dit que la filtration F sur l'espace de probabilité est complète.*

1.2.2 Processus stochastique

Définition 1.2.3 *[5]Soit* $\mathbb{T}$ *un ensemble d'indices non vide. On appelle processus stochastique la famille des variable aléatoires* X_t *définie sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *indexée par* $\mathbb{T}$

$$\begin{cases} X : \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \qquad (t, W) \mapsto X_t(W) \end{cases}$$

Remarque 1.2.1 *:*

✓ *Si* $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}$. *On dit que le processus est a temps discrète.*

✓ *Si* $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$. *On dit que le processus est a temps continu.*

En général $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ *ou* $\mathbb{T} = [0, T]$

Définition 1.2.4 *On peut noter qu'un processus stochastique peut être vu comme une fonction aléatoire :*
A chaque W, on associe la fonction $t \to X_t(W)$ qui est appelée trajectoire.

Définition 1.2.5 *Un processus est dit càdlag (continu à droite, pourvu de limites à gauche), si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.*
- Un processus est dit càglad (continu à gauche, pourvu de limites à droite), si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droite.

Définition 1.2.6 ***(Processus adapté)***
Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit adapté (par rapport à F) si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable lorsqu'on veut préciser par rapport à quelle filtration le processus est adapté on écrira $F-$adapté.
- Le processus stochastique X est vu comme une fonction du temps t a W fixé (lorsque on parle de trajectoire)

Définition 1.2.7 ***(Processus progressif, optionnel, prévisible)***
1) Processus progressif : *Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit progressif si pour tout $t \in T$, l'application $(s, W) \to X_s(W)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $B([0, T] \otimes \mathcal{F}_t)$.*
2)Processus optionnel : *Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit optionnel si l'application $(t, W) \to X_s(W)$ est mesurable sur $T \times \Omega$ muni de la tribu engendrée par les processus $\mathbb{F}-$adaptes et càdlàg.*
3) Processus prévisible : *Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit prévisible si l'application $(t, W) \to X_s(W)$ est mesurable sur $T \times \Omega$ muni de la tribu engendrée par les processus $\mathbb{F}-$adaptes et continues.*

Proposition 1.2.1 *Si le processus X est optionnel, il est progressif, en particulier s'il est adapté et càdàlg alors il est progressif*

1.2.3 Temps d'arrêt

1) Une variable aléatoire $\mathcal{T} : \Omega \to [0, +\infty]$, un temps aléatoire, est appelé temps d'arrêt (par rapport à la filtration $F = (\mathcal{F})_{t\in\pi}$ si pour tout $t \in T$).

$$\{\mathcal{T} \leqslant t\} = \{W \in \Omega : \mathcal{T}(W) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$$

2) Si $\mathcal{T}$ et σ sont deux temps d'arrêt alors $\mathcal{T} \wedge \sigma, \mathcal{T} \vee \sigma$ et $\mathcal{T} + \sigma$ sont des temps d'arrêt.

Etant donné un temps d'arrêt $\mathcal{T}$, on mesure l'information accumulée jusqu'en $\mathcal{T}$ par :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}} = \{B \in \mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{T}}} : B \cap \{\mathcal{T} \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{T}\}$$

qui est une tribu de $\mathcal{F}$. Il est clair que $\mathcal{T}$ est $\mathcal{F}_T-$mesurable. On a aussi immédiatement que si $\mathcal{T} = t$ alors : $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$(voir [5]).

1.2.4 Mouvement brownien

Définition 1.2.8 *[5]Un mouvement brownien est un processus stochastique $(W_t)_{t\geqslant 0}$ a trajectoires continues dont les accroissement disjoints sont indépendants et $\forall s > 0, (W_{t+s} - W_t) \sim \mathcal{N}(0, s)$ si de plus, $p(W_0 = 0) = 1$, alors $(W_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard.*

Proposition 1.2.2 *Soit $(W_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$*
•***Symetrie :*** *$(-W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est aussi un mouvement brownien.*
•***Echelle :*** *pour tout $\lambda > 0$, le processus $((\frac{1}{\lambda})W_{\lambda^2 t})_{t\in\mathbb{T}}$ est aussi un mouvement brownien.*

Théorème 1.2.2 *Le mouvement brownien est un processus Markovian. C'est à dire pour f une application borelienne bornée on a :*

$$pour\ u \in t, (f(W_u \setminus \mathcal{F}_t) = E(f(W_u \setminus \sigma(W_t))$$

Preuve. (Voir Monic [9] et Yong et zhou [6]) ■

1.2.5 Variation quadratique

Définition 1.2.9 *[3]On définit la variation infinitésimale d'ordre P d'un processus X sur $[0, T]$ associée à une subdivision $\pi_n = (t_1^n, ..., t_n^n)$ de $[0, T]$ par*

$$V_T^p(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}|^p$$

✓ *Si $p = 1$, la limite s'appellera variation totale de X sur $[0, T]$.*

✓ *Si $p = 2$, la limite s'appellera variation quadratique de X sur $[0, T]$ notée $< X >_T$.*

Proposition 1.2.3 *Si X est un processus à variation bornée à trajectoires continues, sa variation quadratique est nulle presque surment : $< X >_T = 0$.*

1.3 L'intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale de la forme $\int_0^t X_t dW_t$ où $\{X_t\}_{t\geq 0}$ est un processus stochastique. $\{W_t\}_{t\geq 0}$ est le mouvement brownien.

1.3.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivent[6] :

1. $\int_0^t (aH_1 + bH_2)_s dW_s = a\int_0^t H_1(s)dW_s + b\int_0^t H_2(s)dW_s$.
2. $\int_0^t H(s)dW_s = \int_0^u H(s)dW_s + \int_u^t H(s)dW_s$.
3. $E(\int_0^t H(s)dW_s) = 0$.
4. $E[(\int_0^t H(s)dW_s)^2] = E(\int_0^t H(s)^2 dW_s)$ (isométrie d'Itô).
5. $E(\int_0^t H_1(s)dW_s)(\int_0^t H_2(s)dW_s) = E(\int_0^t H_1(s)H_2(s)dW_s)$.

1.3.2 Processus d'Itô

Définition 1.3.1 *Un processus X est un processus d'Itô s'il existe X_0 tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, t \in T \tag{1.1}$$

Ou X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable , b_t et σ_t sont des processus progressivement mesurable, vérifiant :

$$\int_0^T \mid b_s \mid d_s < +\infty \; et \; \int_0^T \parallel \sigma_s \parallel^2 d_s < +\infty$$

On écrira (1.1) sous la forme différentielle suivante :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$$

Le coefficient b est le drift, le coefficient σ est le coefficient de diffusion[9].

1.3.3 Formule d'Itô

$(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô[10]

Théorème 1.3.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < X, X >_s$$

$$\int_0^t f'(X_s)dX_s = \int_0^t f'(X_s)b_s d_s + \int_0^t f''(X_s)\sigma_s dW_s$$

et la variation quadratique $< X, X >_t = \int_0^t \sigma_s^2 d_s$

Théorème 1.3.2 *Si $(t, x) \to f(t, x)$ est une fonction deux fois continûement différentiable en x et une fois continûement différentiable en t ces dérivées étant continus en (t, x), $f \in C^{12}$, on a :*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X(0)) + \int_0^t f'_s(s, X_s)d_s + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)d < X, X >_s \\ &= f(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)d_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(s, X_s)d < X, X >_s \\ &= f(0, X(0)) + \int_0^t f'_s(s, X_s)d_s + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\sigma_s^2 ds. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.3 *(Cas multidimensionnel)*
Soient X^1, X^2 deux processeur d'Itô issus de x_1 (resp de x_2) de coefficient de dérive b^1 (resp de b^2) de coefficient de diffusion σ^1 (resp de σ^2) et portées respectivement par deux browniens W^1 et W^2. Supposons que b^i et σ^i sont $\mathcal{F}_t^{B_i}-$adaptés.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 alors :

$$f(X_t^1, X_t^2) = f(x_1, x_2) + \int_0^t f_1'(X_s^1, X_s^2)dX_s^1 + \int_0^t f_2'(X_s^1, X_s^2)dX_s^2 + \frac{1}{2}\int_0^t f_{11}''(X_s^1, X_s^2)(\sigma_s^1)^2 + 2pf_{12}''(X_s^1, X_s^2)\sigma_s^1\sigma_s^2 + f_{22}''(X_s^1, X_s^2)(\sigma_s^2)^2 d_s$$

Tel que : f_i' désigne la dérivée par rapport à x_i et f_{ij}'' est la dérivée seconde par rapport à x_i, x_j.

Proposition 1.3.1 *La formule d'intégration par partie :*
Soient X et Y deux processus d'Itô, on a :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s' ds + \int_0^t \sigma_s' dW_s$$

donc :

$$X_t Y_t = Y_0 X_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d < X, Y >_s$$

notons que : $< X, Y >$ s'appelle le crôchet de X et Y.

1.4 Inégalité

1.4.1 Inégalité de Cauchy-schwarz

f et g deux fonctions de carré intégrable alors on a :

$$E(fg) \leqslant (E(f^2)E(g^2))^{\frac{1}{2}}$$

1.4.2 Inégalité de Burkhölder-Davis-Gandy

Pour tout $m > 0$, il existe une constante C_m tel que pour tout temps d'arrêt $\mathcal{T}$ on a :

$$\left[\sup_{t\leq\mathcal{T}}\left|\int_0^t f(s)dW_s\right|^m\right]\leq C_m E\left[\left(\int_0^t \left|f(s)\right|^2 ds\right)^{\frac{m}{2}}\right]$$

En particulier pour $m=2$ et $\mathcal{T}=T$ on a :

$$E\left[\sup_{t\leq t\leq T}\left|\int_0^t f(s)dW_s\right|^2\right]\leq CE\left[\int_0^t \left|f(s)\right| ds\right]$$

1.4.3 Inégalité de Gronwall

Soit ϕ et f deux fonction positives et continues sur $[0,T]$, il existe une constante $C>0$,

* Si $\phi(t)\leq C+\int_0^t f\phi(s)ds;\ 0\leq t\leq T$

Alors :

$\phi(t)\leq C\ exp^{\int_0^t fds}\ ;\ 0\leq t\leq T$

1.5 Espérance conditionnelle

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité [9]

1.5.1 Conditionnement sur un événement

Soit A et B deux événement de $\mathcal{F}$. Alors la probabilité conditionnelle de A sachant B est :

$$p(A\setminus B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

Pour tout B tel que $p(B)\neq 0$

1.5.2 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit X une variable aléatoire définit sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$

Définition 1.5.1 *On appelle l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire X sachant $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire et on la note $E(X\setminus\mathcal{G})$ tel que :*

a) $\mathcal{G}-$*mesurable.*

b) $\int_A E(X \setminus \mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}$

c'est l'unique variable $\mathcal{G}-$*mesurable tel que :*

$$E\left[E(X \setminus \mathcal{G})Y\right] = E(XY)$$

1.5.3 Espérance conditionnelle par rapport à une variable

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{G}$ la tribu engendré par Y(*ie* $\mathcal{G} = \sigma(Y)$)

Définition 1.5.2 *On appelle l'espérance conditionnelle de* X *sachant* Y *est une variable aléatoire définie comme l'espérance conditionnelle de* X *par rapport à la tribu* $\mathcal{G}$ *on la note* $E(X \setminus Y)$.
L'espérance conditionnelle $E(X \setminus Y)$ *est caractérisée par :*

- *C'est une variable* $\sigma(Y)$ *mesurable.*
- $\int_A E(X \setminus Y) d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \ \forall A \in \sigma(Y)$

1.5.4 Propriétés de l'espérance conditionnelle

- **Linéarité :** Soit a et b deux constantes tel que :

$$E(aX + bY \setminus \mathcal{G}) = aE(X \setminus \mathcal{G}) + bE(Y \setminus \mathcal{G})$$

- **Croissance :** Soit X et Y deux variables aléatoires tel que :

$$X \leq Y, \text{ alors} E(X \setminus \mathcal{G}) \leq E(Y \setminus \mathcal{G})$$

* X est indépendant de $\mathcal{G}$, alors : $E(X \setminus \mathcal{G}) = E(X)$.

* $E\left[E(X \setminus \mathcal{G})\right] = E(X)$.

* X est $\mathcal{G}-$mesurable, alors : $E(X \setminus \mathcal{G}) = X$.

* Y est $\mathcal{G}-$mesurable, alors : $E(XY \setminus \mathcal{G}) = YE(X \setminus \mathcal{G})$.

* Si ϕ est une application convexe mesurable, $E\left[\phi(X) \setminus \mathcal{G}\right] \geq \phi(E\left[X \setminus \mathcal{G}\right])$ (Inégalité de Jensen).

1.6 Équation différentielle stochastique(EDS)

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}\mathbb{P})$ est un espace probabilité filtré [12] [9].

Définition 1.6.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme suivante :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t & 0 \leqslant t \leqslant T \\ X(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Où :

* $x_0 \in \mathbb{R}$

* (W_t) *est un mouvement brownien.*

* $b(t, X_t)$ *et* $\sigma(t, X_t)$ *sont des fonction continues.*

Définition 1.6.2 *Une solution fort de l'EDS (1.2) est un processus* $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ *continue* $\mathcal{F}_t-$*adapte tel que :*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \quad 0 \leq t \leq T$$

1.7 L'existence et l'unicité de la solution

Notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet, $(W(t))_{t\geq 0}$ désigne un mouvement Brownien à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et x une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Soient n et m des entiers positif et soient aussi b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$ donnée par (voir [9][12]) :

$$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n,$$
$$\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{M}^{n\times m},$$

où $\mathbb{M}^{n\times m}$ désigne l'ensemble des matrices $n \times m$

Notre objective est de résoudre l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ X(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

La solution de l'équation (1.3) est un processus X continue $\mathcal{F}_t$-adapté telle que les deux intégrales suivantes : $\int_0^t b(s, X_s)ds$, et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dW(s)$ ont une sens et l'égalité

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

est satisfaite $\forall t$ $\mathbb{P}.p.s.$

Maintenant on donne le théorème qui permet davoir l'existence et l'unicité d'une solution de (1.2) .

Théorème d'existence et d'unicité

Si b et σ sont des fonctions continues tel qu'il existe $C < +\infty, X, Y$ dans $\mathbb{R}^n$:

(A_1) condition de Lipschitz :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C|x - y|$$

(A_2) condition de croissance linéaire :

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$$

(A_3) :

$$\mathbf{E}\left[|X(0)|^2\right] < +\infty$$

Alors l'équation (1.3) admet une solution unique dans l'intervalle $[0, T]$, tel que la solution $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ vérifié :

$$E(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2) < +\infty$$

Théorème 1.7.1 *Sous l'hypothése* $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ *et* $\mathbf{A}_3$, *l'équation (1.3) posséde une unique solution à trajectoire continue pour tout* $t \leq T$.
De plus cette solution vérifier

$$\mathbf{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2) < +\infty.$$

Preuve. L'existence :
Pour obtenir l'existence de la solution il y'a deux méthode (l'itération de Picart et le théorem de point fixe).
Nous avons décidé d'utiliser la méthode d'approximation de Picard dans la preuve.
En définissant la suite $(X^n)_{n\geq 0}$ tel que $X^0 = x_0$ et $\left(X^{n+1}\right)_{n\geq 0}$ est la solution du système de l'équation différentielle stochastique suivantes :

$$X_t^{n+1} = x_0 + \int_0^t b(s, X_s^n)ds + \int_0^t \sigma(s, X^n)dW_s. \tag{1.4}$$

Vérifiant d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante C_n telle que pour tout $t \in [0, T]$:

$$\mathbf{E}\left|X_t^n\right|^2 \leq C_n.$$

Supposons que $\mathbf{E}\left[\left|X_t^n\right|^2\right] \leq C_n$. et nous montrons que $\mathbf{E}\left|X_t^{n+1}\right|^2 \leq C_{n+1}$.
On a

$$\left|X_t^{n+1}\right|^2 = \left|x_0 + \int_0^t b\left(s, X_s^n\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X^n\right) dW_s\right|^2.$$

Par l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, on trouver l'estimation suivante :

$$\left|X_t^{n+1}\right|^2 \leq 3\left(|x_0|^2 + \left|\int_0^t b\left(s, X_s^n\right) ds\right|^2 + \left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) dW_s\right|^2\right).$$

Par passage a l'espérance mathématique, on obtient :

$$\mathbf{E}\left|X_t^{n+1}\right|^2 \leq 3\left(\mathbf{E}\left|x_0\right|^2 + \mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n\right)\right| ds\right)^2\right]\right) + \mathbf{E}\left[\left(\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) dW_s\right|\right)^2\right]. \tag{1.5}$$

Par l'isométrie d'Itô et l'hypothése (A_2), on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) dW_s\right|\right)^2\right] &= \mathbf{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^n\right)\right|^2 ds\right], \\ &\leq C^2 \mathbf{E}\left[\int_0^t \left(1 + X_s^n\right) ds\right], \\ &= C^2 \int_0^t \left(1 + \mathbf{E}\left[\left|X_s^n\right|^2\right]\right) ds.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t b\left(s, X_s^n\right) ds\right)^2\right] &\leq \mathbf{E}\left[\left(\int_0^t ds\right)\left(\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n\right)\right|^2 ds\right)\right], \\ &\leq T\mathbf{E}\left[\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n\right)\right|^2 ds\right], \\ &\leq TC^2\left[\int_0^t \left(1 + \mathbf{E}\left|X_s^n\right|^2\right) ds\right].\end{aligned} \tag{1.7}$$

Retour à l'équation (1.5) et en substituant les deux estimations (1.6) et (1.7) dans (1.5), et comme x est un variable aléatoire de carré intégrable alors on trouve l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left|X_t^{n+1}\right|^2\right] &\leq 3\left(\mathbf{E}\left|x_0\right|^2 + TC^2\left[\int_0^t \left(1 + \mathbf{E}\left|X_s^n\right|^2\right) ds\right] + C^2 \int_0^t \left(1 + \mathbf{E}\left|X_s^n\right|^2\right) ds\right), \\ &\leq 3\left(\mathbf{E}\left|x_0\right|^2 + C^2\left(T+1\right) \int_0^t \left(1 + \mathbf{E}\left|X_s^n\right|^2\right) ds\right), \\ &\leq 3\left(\mathbf{E}\left|x_0\right|^2 + C^2\left(T+1\right) T\left(1 + C_n\right)\right) = C_{n+1}.\end{aligned}$$

Ce qui prouve :

$$\mathbf{E}\left|X_t^{n+1}\right|^2 < \infty.$$

Maintenant on va majorer par récurrence la quantité suivante :

$$\mathbf{E}\left[\sup_{t\in[0,t]} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right].$$

En utilisant de l'équation (1.4) on obtient :

$$\begin{aligned} X_t^{n+1} - X_t^n = & \int_0^t \left(b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s^{n-1}\right)\right) ds \\ & + \int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)\right) dW_s \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Doob, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1} - X_s^n\right|^2\right] \quad & \le 2\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s^{n-1}\right)\right| ds\right)^2\right] \\ & +2\mathbf{E}\left[\int_0^t \sigma\left|\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)\right|^2 ds\right]. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Chwartz donne l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1} - X_s^n\right|^2\right] \quad & \le 2T\mathbf{E}\left[\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s^{n-1}\right)\right|^2 ds\right] \\ & +2\mathbf{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)\right|^2 ds\right], \end{aligned}$$

D'aprés l'hypothése (A_2), on obtient pour tout $s \in [0, t]$:

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1} - X_s^n\right|^2\right] \le 2\left(T+1\right)C^2\mathbf{E}\left[\int_0^t \left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2 ds\right].$$

Par conséquence on trouve :

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1} - X_s^n\right|^2\right] \le \underbrace{2\left(T+1\right)C^2}_{=C}\int_0^t \mathbf{E}\left[\sup_{0\le u\le s}\left|X_u^n - X_u^{n-1}\right|^2\right] ds, \tag{1.8}$$

Nous réappliquons la même téchnique une autre fois, en appliquant l'inégalité de Doob, à $\left|X_u^n - X_u^{n-1}\right|^2$ pour obtenir :

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0\le u\le s}\left|X_u^n - X_u^{n-1}\right|^2\right] \le C\int_0^s \mathbf{E}\left[\sup_{0\le r\le u}\left|X_m^{n-1} - X_m^{n-2}\right|^2\right] dm. \tag{1.9}$$

en substituant l'estimation (1.8) à l'inégalité(1.9), on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right] &\le C\int_0^t \mathbf{E}\left(\sup_{0\le u\le s}\left|X_u^n-X_u^{n-1}\right|^2\right)ds,\\
&\le C\int_0^t\left(C\int_0^s \mathbf{E}\left[\sup_{0\le r\le u}\left|X_m^{n-1}-X_m^{n-2}\right|^2\right]dm\right)ds,\\
&\le C^2\mathbf{E}\left[\sup_{0\le r\le u}\left|X_m^{n-1}-X_m^{n-2}\right|^2\right]\int_0^t\left(\int_0^s dm\right)ds,\\
&\le \frac{C^2T^2}{2}\mathbf{E}\left[\sup_{0\le r\le u}\left|X_m^{n-1}-X_m^{n-2}\right|^2\right],
\end{aligned}$$

Nous réappliquons la même technique plusieurs fois, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right] &\le \frac{C^nT^n}{n!}\sup_{0\le s\le T}\left[\left|X_s^1-X_s^0\right|^2\right],\\
&\le A\times\frac{C^nT^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'ingalité de **Bienaymé-Tchebychev** , on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2>\frac{1}{2^{n+1}}\right]\le\frac{A\times\frac{(CT)^n}{n!}}{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2}=4A\times\frac{(4CT)^n}{n!}.$$

Il vient donc que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2>\frac{1}{2^{n+1}}\right]\le 4A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4CT)^n}{n!}=4A.\exp(4CT)<\infty.$$

Donc d'aprés le lemme de **Borel-Cantelli**, on trouver l'égalité suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le T}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2>\frac{1}{2^{n+1}}\right]=0,$$

utilisant l'égalité $\mathbb{P}(A^c)=1-\mathbb{P}(A)$ on obtient l'égalité suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le T}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|\le\frac{1}{2^{n+1}}\right]=1.$$

Donc :

$$\sup_{0\leq s\leq T}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|\leq\frac{1}{2^{n+1}},\qquad\forall n\geq n_0,\qquad\text{et }\ n_0\in\mathbb{N}.$$

En remarquant que la suite $(X^n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans un espace de Banach, donc elle converge dans le méme espace de Banach. Alors il existe un processus continu $(X_t)_{0\leq t\leq T}$, tel que :

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\longrightarrow 0,\qquad\text{quand}\qquad n\longrightarrow\infty.$$

Donc, $\mathbb{P}-p.s$, $(X^n)_{n\geq 0}$ converge vers processus continu X_t. ■

L'unicité : Supposons que $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux solution de (1.3) pour tout $t\in[0,T]$:

$$X_t-Y_t=\int_0^t\left[b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right]ds+\int_0^t\left[\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right]dW_s.$$

D'aprés l'inégalité $(a+b)^2\leq 2a^2+2b^2$, on obtient l'inégalité suivante :

$$\mathbf{E}\left[\left|X_t-Y_t\right|^2\right]\leq 2\mathbf{E}\left[\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right)ds\right|^2\right]+2\mathbf{E}\left[\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)dW_s\right)\right|^2\right].\tag{1.10}$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse (A_2) on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left|\int_0^t\left(b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right)ds\right|^2\right]&\leq T\mathbf{E}\left[\int_0^t\left|b\left(s,X_s\right)-b\left(s,Y_s\right)\right|^2ds\right],\\&\leq TC^2\int_0^t\mathbf{E}\left(\left|X_s-Y_s\right|^2\right)ds.\end{aligned}\tag{1.11}$$

L'utilisation de la propriété d'isométrie d'Itô et la condition (A_2), on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)dW_s\right)\right|^2\right]&\leq\mathbf{E}\left[\int_0^t\left|\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,Y_s\right)\right|^2ds\right],\\&\leq C^2\int_0^t\mathbf{E}\left[\left|X_s-Y_s\right|^2\right]ds.\end{aligned}\tag{1.12}$$

En substituant les deux estimations (1.11) et (1.12) dans (1.10), on trouve

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] &\leq 2TC^2 \int_0^t \mathbf{E}\left[|X_s - Y_s|^2\right] ds + 2C^2 \int_0^t \mathbf{E}\left[|X_s - Y_s|^2\right] ds, \\ &\leq 2\left(TC^2 + C^2\right) \int_0^t \mathbf{E}\left[|X_s - Y_s|^2\right] ds.\end{aligned}$$

Finalement en utilisant le lemme de Granwall, on trouve :

$$\mathbf{E}\left(|X_t - Y_t|^2\right) = 0.$$

CHAPITRE 2

CONTRÔLE OPTIMAL ET MÉTHODE DE RÉSOLUTION

La théorie du contrôle a été initialement développée dans le but d'obtenir des outils d'analyse et de synthèse de contrôle et de système dynamique (c'est à dire l'évolution du système au cours du temps). Cette théorie intervient dans différents domaines de la vie courante comme l'économie, la biologie, les sciences humaines et social.
Nous représentons dans ce chapitre la structure de base d'un problème de contrôle, quelques classes de contrôle et aussi deux méthodes de résolution qui sont le principe de Pontryagin et le principe de la programmation dynamique.

2.1 Contrôle stochastique

Définition 2.1.1 *Un contrôle est un processus* $(u_t)_{t>0}$ *adapté par rapport à une filtration, de carré intégrable et prend ses valeur dans un borélien* $u \subset \mathbb{R}^n$
Le contrôle stochastique se caractérise par :
i) État du système :
État du système dynamique se caractérise le contrôle stochastique à tout instant dans la mesure

ou le temps peut être discret ou continue. L'intervalle de variation du temps peut être fini ou infini.

Les variable quantitatives se représentent par l'état du système et elles sont en nombre fini à valeur réelles. Au moment t, l'état du système sera noté $X_t(W)$ *pour tout* $W \in \Omega$ *l'espace mesurable muni d'une probabilité* $\mathbb{P}$.

ii) Contrôle :

La dynamique X_t *de l'état du système est influencée par un contrôle que nous modélisons comme un processus* u_t *dont la valeur peut très décidée à tout instant t, en fonction des informations disponibles à cet instant.*

iii) Critère de coût :

L'objectif précis est minimiser (où de maximiser s'il s'agit d'un gain) une fonctionnelle J s'appelle fonction de coût sur l'ensemble des contrôles admissibles.

$$J(u) = E\left[\int_0^T l(t, X_t, u_t)dt + g(X_t)\right] \tag{2.1}$$

La fonction $J(u)$ *est la fonction coût intégrale,* g *est le coût final où terminale. On définit la fonction valeurs par :*

$$V(t,x) = \inf_{u \in U} J(t,x,u) \tag{2.2}$$

Généralement le coût est donné par :

$$J(u) = E(g(X_t)) \tag{2.3}$$

Où g *est une fonction de classe* C^1 *tel que :*

$$g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

$| g_x(X) | \leq c(1+ | x |)$ *et à dérivée bornée c'est à dire :*

$$| g_x(X) | \leq M, \quad \text{où } g_x \text{ est le gradient de } g \text{ en } x$$

L'orsqu'on cherche à maximiser un gain, au lieu de minimiser un coût, alors on écrira :

$$V(t,x) = \sup_{u \in U} J(t,x,u) = -\inf_{u \in U} J(-(t,x,u)) \tag{2.4}$$

un contrôle $u^* \in U$ est dit optimale si :

$$V(t,x) = J(t,x,u^*) \tag{2.5}$$

2.2 Classe de contrôle stochastique

2.2.1 Contrôle admissible

Définition 2.2.1 *On appelle un contrôle admissible tout processus $(u_t)_{t\in[0,T]}$ mesurable intégrable et adapté à une valeur dans un borélien $A \subset \mathbb{R}$, notons par u. L'ensemble de tous les contrôles admissibles (voir [7][8])*

$$U = \{u : [0,T] \times \Omega \to u \ \ mesurable, integranle\ et\ \mathcal{F}_t - adapté\}$$

2.2.2 Contrôle optimal

Définition 2.2.2 *Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de côut $J(u)$ sur l'ensemble des contrôle admissible u un contrôle admissible u^* est dite optimal si :*

$$J(u^*) \leq J(u),\ \forall u \in U$$

2.2.3 Contrôle presque optimal

Définition 2.2.3 *Soit $\zeta > 0$, le contrôle u^ζ est dite presque optimal (ou $\zeta-$optimal) si :*

$$J(u^\zeta) \leqslant J(u) + \zeta : \forall u \in U.$$

2.2.4 Contrôle feed-back

Définition 2.2.4 *Soit un contrôle $\mathcal{F}_t-$adapté, et soit $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$ la filtration naturelle engendrée par le processus X. On dit que u_t est feed-back contrôle si u_t est aussi adapté par rapport à la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$. On dit aussi qu'un contrôle u est feed-back si est seulement si u dépend de X.*

2.2.5 Contrôle relaxé

Soit V l'ensemble des mesures de Radon sur $[0,T]\times A$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt muni de la topologie de la convergence stable des mesures.
L'espace V est muni de sa tribu borélienne, qui est la plus petite tribu tel que l'application $q \to \int f(s,a)q(ds,da)$ soit mesurable, bornée et continues en a.

Définition 2.2.5 *Un contrôle relaxé q est une variable aléatoire $q(W,dt,da)$ à valeurs dans l'espace V tel que pour chaque t : $1_{[0,T]q}$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable. Tout contrôle relaxé peut être intégré en*

$$q(W,dt,da) = dtq(W,dt,da)$$

Où $q(t,da)$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans l'espace des mesures de probabilités.

2.2.6 Arrêt optimal

L'horizon d'un problème de contrôle est détermine, qu'il soit fini ou infini. En effet il existe de nombreuses applications ou le contrôleur peut également choisir l'horizon de son objectif.
On appelle problème d'arrêt optimal la décision de stopper le processus est modélisée par un temps d'arrêt et le problème d'optimisation associé.
La fonctionnelle à optimiser s'écrit sous la forme suivante.

$$J(u,\mathcal{T}) = E\left[\int_0^T f(t,X_t,u_t)dt + g(X_{\mathcal{T}})\right]$$

2.2.7 Contrôle ergodique et contrôle risk-sensible

Certains systèmes stochastiques peuvent exhiber sur le long terme un comportement stationnaire caractérisé par une mesure invariante. Cette mesure si elle existe, est obtenue en calculant la moyenne de l'état du système le long terme. Un problème de contrôle ergodique consiste alors à optimiser sur le long terme un certain critère prenant en compte cette mesure invariante, une formulation standard résultant des critères étudiés précédemment consiste à optimiser sur les contrôles u_t une fonctionnelle de la forme [5] :

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{T} E\left[\int_0^t l(X_t, u_t)dt\right]$$

Ou bien

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{T} \ln E\left[exp\left(\int_0^t l(X_t, u_t)dt\right)\right]$$

Cette dernière formulation est appelée contrôle risk-sensible dans la littérature et a récemment été utiliser dans plusieurs travaux en mathématique financières comme un critère de gestion de portefeuille à long terme.
Un autre critère basé sur le comportement de type grandes déviations du système :

$$\mathbb{P}\left[X_T/T \geq c\right] \simeq exp(-I(c)T), \quad \text{quand} \quad T \to +\infty$$

Consiste à maximiser sur les contrôles u une fonction de la forme :

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{1}{T} \mathbb{P}\left[\frac{1}{T} \geq c\right]$$

Ce problème de contrôle de grandes déviations s'interprète en finance comme la version asymptotique (ergodique) du critère quant le consistant à maximiser la probabilité que la valeur terminale X_t du portefeuille soit au-dessus d'un certain index.

2.3 Méthode de résolution

Il existe essentiellement deux célébrés approches pour résoudre des problèmes des contrôles stochastique. La première méthode et le principe de maximum de Pontryagin

qui consiste à chercher les conditions nécessaires d'optimalité satisfaite par un contrôle optimal u^*. La deuxième méthode est le principe de la programmation dynamique introduite par Bellman en 1953, elle s'appuie sur la notion de la " politique optimale " qui consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles de second ordre.

2.3.1 Principe de maximum de Pontryagin

*** Cas du contrôle déterministe**

Le principe du maximum dans le cas du contrôle déterministe $\sigma = 0$ a été formulé par le mathématicien soviétique Lev semionovitch Pontryagin en 1950 (voir [5][6]).
La problématique que générale du contrôle optimal est considérée comme un système différentiel donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t), \quad t \in [0, T] \\ X(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

On définit donc le côut de la trajectoire associée par

$$J(u) = E\left(\int_0^t l(s, X_s, u_s)d_s + g(X_T)\right) \tag{2.7}$$

L'objectif est de minimiser la fonction $J(u)$ sur un ensemble U de tous les contrôles admissibles. Alors le contrôle u^* est dit optimal si :

$$J(u^*) = \min\{J(u), u \in U\} \tag{2.8}$$

Sous les hypothèse suivantes :
(1) $b, l : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d$:

$$| b(t, x, u) - b(t, y, u) | \leq K | x - y |$$
$$| b(t, x, u) + l(t, x, u) | \leq C(1 + | x |)$$

Tel que $b(t,x,.) + l(t,x,.)$ de $A \to \mathbb{R}^d$ sont continues en u est uniformément en (t,x).

(2) b, l et g sont de classes C^1 en x.

Le Hamiltonien de ce système est donner par :

$$H(t, X_t, u_t, p_t) = p_t b(t, X_t, u_t) - l(t, X_t, u_t)$$

Théorème 2.3.1 ***(Principe de Pontryagin)***

Soit (X^*, u^*) la solution optimale de (2.2) et (2.3) alors il existe un processus $p(t)$ tel que $p(t)$ est $\mathcal{F}_t-$adapté, solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} dp_t = -H_x(t, x_t, u_t, p_t)dt \\ p(T) = -g_x(X_T) \end{cases}$$

Tel que :

$$H(t, X_t^*, u_t^*, p_t) = \max_{u \in U} H(t, X_t^*, u, p_t) \;\; \mathbb{P}p.s \;\; et \;\; dt - p.p.$$

*** Cas du contrôle stochastique**

Dans le cas stochastique, plusieurs formes de principe du maximum de Pontryagin. Le premier résultat à été établi par Kushner en 1973 dans le cas où l'ensemble de contrôle admissibles est formé de processus adaptés à une filtration fixée à l'avance et l'utilisation des solutions trajectorilles de l'équation d'état, ces résultats ont été développés en 1976 par Haussmann.

Lorsque le coefficient de diffusion σ dépend explicitement du contrôle, le problème de principe du maximum stochastique a été abordé par Bensoussan et Peng .

Le problème d'optimalité des conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôlés adaptés à une filtration plus petite que la filtration $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ à été abordé par Haussmann et Zhoo.

Le principe de Pontryagin dans ce cas consiste à introduire un processus adjoint p_t rétrograde et d'une inégalité variationnelle.

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW \\ X(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.9}$$

L'équation adjointe est donnée par :

$$\begin{cases} dp_t = -H_x(t, X_t, u_t, p_t, q_t)dt + q_t dW_t \\ p_t = g_x(X_t) \end{cases} \tag{2.10}$$

Où

$$H(t, X_t, u_t, p_t, q_t) = l(t, X_t, u_t) + b^T(t, X_t, u_t)p_t + tr(\sigma^T(t, X_t, u_t))q_t \tag{2.11}$$

est l'hamiltonien du système.

Théorème 2.3.2 ***(Principe du maximum de Pontryagin)***
Soit H défini par (2.11), u_t^* le contrôle optimal, (p_t^*, q_t^*) solution de l'équation optimal(2.10), $X_t^* = X_t^{u^*}$ solution de l'équation (2.9)alors on a :

$$H(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*) = \max_{u \in U} H(t, X_t^*, u_t, p_t^*, q_t^*) \quad \forall t \in [0, T]$$

Preuve. Voir le livre de Yong et Zhou 1999 [6] ■

2.3.2 Principe de programmation dynamique

Le principe de programmation dynamique appelée principe de R.Belman introduite en 1953. Ce principe consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles de second ordre, non linéaire appelée Hamilton-Jacobi-Belman (HJB en abrégé). Elle est basée sur le principe d'optimisation suivant : si une trajectoire est optimal alors elle est optimal à chaque instant. Ce qui veut dire " si on commence à un autre point on ne peut faire mïeux que suivre de la trajectoire optimal. "
L'idée basique de ce principe est de considérer une famille de problème de contrôle à différents états initiaux et établir des relations entre les fonctions valeurs.

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Belman (HJB) [5][6]

L'équation d'(HJB) est la version infinitésimal du principe de la programmation dynamique. Supposant que la fonction V est de classe C^2.

la dérivation formelle de l'équation d' HJB est donnée par :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \inf_{u\in U}[\mathcal{L}_u V(t,x) + l(t,x,u)] = 0, \forall (t,x) \in [0,T]\times \mathbb{R}^n \tag{2.12}$$

Où $\mathcal{L}_u$ est l'opérateur associé à l' EDS contrôlées (1.10), il est défini par :

$$\mathcal{L}_u V = b(x,u)D_x(V) + \frac{1}{2}tra\left[\sigma(x,u)\sigma^T(x,u)D_x^2(V)\right] \tag{2.13}$$

Cependant : lorsqu'on cherche à maximiser un Gain, l' EDP (2.12) devient sous la forme :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \sup_{u\in U}[\mathcal{L}_u V(t,x) + l(t,x,u)] = 0 \tag{2.14}$$

On réécrit souvent cette EDP (2.12) sous la forme :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) - H(t,x,D_x v(t,x), D_x^2(V)) = 0, \forall (t,x) \in [0,T]\times \mathbb{R}^n \tag{2.15}$$

où $(t,x,p,M) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times S_n$ (où S_n est l'ensemble des matrices $n\times n$ symétriques).

$$H(t,x,p,M) = \sup_{u\in U}\left[b(x,u)p_t + \frac{1}{2}tra\left[\sigma\sigma^T(t,x,u)M + l(t,x,u)\right]\right] \tag{2.16}$$

L'équation (2.15) est appelée équation de la programmation dynamique ou équation d'HJB.

La fonctionnelle H s'appelle l'hamiltonien associé au problème de contrôle, A l'EDP (2.12) on ajoute la condition terminale :

$$V(T,x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et elle vient immédiatement d'après la fonction valeur (2.2).

Généralement,l' EDP n'est pat facile à résoudre donc il faut supposer que la solution soit

de classe C^2, ce qui n'est pas nécessairement le cas même pour des fonctions simples. Crandall et Lions ont introduit dans les années 80 la notion de solutions de viscosité du premier ordre. Elle était après généralisée aux équations du second ordre. Ce qui a donné une formulation rigoureuse à l'équation d'HJB pour des fonctions supposées seulement localement bornées.

CHAPITRE 3

PRINCIPE DE MAXIMUM SOUS L'INFORMATION PARTIELLE

Dans ce chapitre, on va étudier le principe du maximum stochastique sous l'information partielle. Pour prouver ses conditions il est nécessaire que le processus de contrôle soit adapté à une sous filtration $\mathcal{G}_t$ de la filtration complet $\mathcal{F}_t$ telle que le domaine des contrôles admissibles est convexe.

3.1 Formulation général

Soit l'espace filtrée $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$, soit $W_t = (W_t^1, W_t^2, ..., W_t^n)$ un mouvement brownien d-dimensionnel.
Considérons l'équation différentielle stochastique contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, dt)dW_t \\ X(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $x_0 \in \mathbb{R}, b$ et σ sont des fonction de classe C^1 données telle que :
$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$

$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times d}$

Le contrôle $u(t)$ est un contrôle admissible (3.1),

(ie : $u \in U = \{u : [0,T] \times \Omega \to u$ telle que u est $(\mathcal{G}_t)_{t\geqslant 0}$-adapté$\}$).

et $\mathcal{G}_t$ une sous filtration de la filtration complet $\mathcal{F}_t(\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t), \forall t \geqslant 0.T$ un nombre réel strictement positif.

On définit la fonction du coût comme suit :

$$J(u) = E\left[\int_0^T l(t, X_t, u(t)dt + g(X_T))\right] \tag{3.2}$$

Où l et g deux fonction de classe C^1 telle que $l : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times u \to \mathbb{R}$ coût de fonctionnement $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ coût terminal qui vérifient :

$$E\left[\int_0^T |l(t, X_t, u(t)|dt + |g(X_T))|\right] < \infty, \quad u \in U \tag{3.3}$$

l'objectif du contrôle optimal stochastique sous l'information partielle est de trouver le couple $(\Phi_{\mathcal{G}}, u^*)$ étant donnée :

$$\Phi_{\mathcal{G}} = \sup_{u\in\mathcal{G}} \{J(u)\} = J(u^*)$$

Ce principe consiste d'introduire l'équation adjointe tel que cette dernière est une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire satisfaite par les inconnus p_t et q_t est donner par :

$$\begin{cases} dp_t = -H_x(t, X_t, u_t, p_t, q_t)dt + q_t dW_t \\ p_T = g_x(X_T) \end{cases}$$

Tell que l'hamiltonienne $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ comme suit :

$$H(t, X_t, u_t, p_t, q_t) = l(t, X_t, u_t) + p_t b^T(t, X_t, u_t) + tr(\sigma^T(t, X_t, u_t)q_t)$$

Si on utilise la définition du l'hamiltonien on obtient l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} dp_t = -H_x(t, X_t, u_t, p_t, q_t)dt + q_t dW_t \\ p_T = g_x(X_T) \end{cases} \tag{3.4}$$

Proposition 3.1.1 *Soit $u^* \in U$ avec le processus d'état correspondant $X_t^* = X_t^{u^*}$ on suppose qu'il existe une solution (p_t^*, q_t^*) pour l'équation différentielle stochastique partielle rétrograde suivante :*

$$\begin{cases} dp_t^* = -H_x(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)dt + q_t^* dW_t \\ p_T^* = g_x(X_T^*) \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2 Conditions nécessaires

Dans cette section, on étude les conditions nécessaires pour le problème du maximum sous l'information partielle [4] [1].

Hypothèse

• Pour t, z tel que $0 \leqslant t \leqslant t + z \leqslant T \quad \forall i = \overline{1, K}$.

Pour tout processus $\lambda = \lambda(W)$, $\mathcal{G}_t-$mesurable et bornée, on définit le contrôle v comme suit :

$$v(s) = (0, ..., v_i(s), 0, 0, ..., 0) \in u \subset \mathbb{R}^k$$

avec

$$v_i(s) = \lambda_i \ \ 1_{[t,t+z]}(s), \quad s \in [0, T]$$

Un contrôlé admissible.

• Pour tout $u, v \in U$ avec v et borné, $\exists \delta > 0 : u + \xi v \in U, \forall \xi \in E_\xi = (-\delta, \delta)$.

On définit le processus X_t^1 par :

$$X_t^1 = X_t^{(u,v)} = \frac{d}{d\xi} X_t^{u+\xi v}|_{\xi=0}$$

tel que : $X_t = (X_t^1, X_t^2, ..., X_t^n)$

Notions que : $X_0^1 = 0, u_\xi = u + \xi v$ et

$$dX_t^1 = (b_x(t, X_t, u_t)X_t^1 + b_u(t, X_t, u_t)\xi_t)dt + \sigma_x(t, X_t, u_t)X_t^1 + \sigma_u(t, X_t, u_t)\xi_t dW_t$$

Alors la dérivée par rapport à ξ de la formule précédente est :

$$\begin{aligned} dX_t^i &= \left[b_x^i(t, X_t, u_t)X_t + b_u^i(t, X_t, u_t)v_t\right]dt + \sum_{j=1}^{n}\left[\sigma_x^{i,j}(t, X_t, u_t) + \sigma_u^{i,j}(t, X_t, u_t)v_t\right]dW_t^j \\ &= \phi_i dt + \sum_{j=1}^{n}\psi_{i,j}dW_t^j \end{aligned}$$

Conditions (A_1)

Supposons que $u^* \in \mathcal{G}$ est un maximum local pour $J(u)$ alors :

$$h(\xi) := J(u^* + \xi v),\ \xi \in E_\delta$$

est un maximum au point $\xi = 0$

et supposons que :

$$E\left[\int_0^T (x_t^{*1})^T q_t^* q_t^{*T} X_t^1 dt\right] < \infty$$

et

$$E\left[\int_0^T p_t^{*T}\psi\psi^T(t, X_t^*, u_t^*)p_t^*\right] < \infty$$

Tel que $\psi_i = \sigma_x(t, X_t, u_t)x_t^1 + \sigma_x^1(t, X_t, u_t)\lambda_t$

Théorème 3.2.1 *Sous les conditions (A_1), on a u^* est un point stationnaire pour $E[H \setminus \mathcal{G}_t]$ donc :*

$$E[H(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*) \setminus \mathcal{G}_t] = 0$$

Preuve. La dérivée du coût J par rapport à ξ égale a zéro

$$h'(0) = 0$$
$$\frac{d}{d\xi}J(u^* + \xi u)|_{\xi=0} = 0$$
$$\frac{d}{d\xi}E\left[\int_0^T l(t, X_t^*, u_t^*)dt + g(X_T^*)\right]|_{\xi=0} = 0$$
$$E\left[\int_0^T \left\{l_x(t, X_t^*, u_t^*)^T \frac{d}{d\xi}X_t^{(u^*+\xi v)} + l_u(t, X_t^*, u_t^*)^T v_t\right\} dt\right]|_{\xi=0} + E\left[g_x(X_t^*)^T \frac{d}{d\xi}X^{(u^*+\xi v)}(T)\right]|_{\xi=0} = 0$$

Alors :

$$E\left[\int_0^T l_x(t, X_t, u_t)^T X_t^1 dt\right] + E\left[\int_0^T l_u(t, X_t^*, u_t^*)v_t dt\right] + E\left[(g_x(X_t^*)^T X_t^1)\right] = 0 \tag{3.6}$$

Appliquons les conditions (A_1) et la formule d'itô, on trouve la formule suivante

$$\begin{aligned}
E\left[g_x(X_T^*)^T X_T^{*1}\right] &= E\left[p_T^* X_T^{*1}\right] \\
&= E\left[\int_0^T p_t^{*T} dX_t^{*1}\right] + E\left[\int_0^T X_t^{*1} dp_t^*\right] + E\left[\int_0^T d < p_t^*, X_t^{*1} >\right] \\
&= E\left[\int_0^T p_t^*(b_x(t, X_t^*, u_t^*)X_t^{*1} + b_u(t, X_t^*, u_t^*)v_t)dt\right] - E\left[\int_0^T X_t^{*1} H_x(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)dt\right] \\
&+ \left[E\int_0^T q_t^*(\sigma_x(t, X_t^*, u_t^*)X_t^{*1} + \sigma_u(t, X_t^*, u_t^*)v_t)dt\right]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

On remplace (3.6) dans l'égalité (3.5), on trouve :

$$E\left[\int_0^T l_x(t,X_t^*,u_t^*)X_t^* dt\right] + E\left[\int_0^T l_u(t,X_t^*,u_t^*)v_t dt\right] + E\left[(g_x(X_T^*)^T X_T^*)\right] = 0$$

$$E\left[\int_0^T l_x(t,X_t^*,u_t^*)X_t^{*1} dt\right] + E\left[\int_0^T l_u(t,X_t^*,u_t^*)v_t dt\right] + E\left[\int_0^T p_t^*(b_x(t,X_t^*,u_t^*)X_t^{*1} + b_u(t,X_t^*,u_t^*)v_t)dt\right]$$

$$- E\left[\int_0^T X_t^{*1} H_x(t,X_t^*,u_t^*,p_t^*,q_t^*)dt\right] + E\left[\int_0^T q_t^*(\sigma_x(t,X_t^*,u_t^*)X_t^{*1} + \sigma_u(t,X_t^*,u_t^*)v_t)dt\right] = 0 \qquad (3.8)$$

Si on dérive l'hamiltonien par rapport a x on obtient :

$$H_x(t,X_t,u_t,p_t,q_t) = l_x(t,X_t,u_t) + p_t b_x(t,X_t,u_t) + q_t\sigma_x(t,X_t,u_t)$$

de mémé maniéré par rapport à u

$$H_u(t,X_t,u_t,p_t,q_t) = l_u(t,X_t,u_t) + p_t b_u(t,X_t,u_t) + q_t\sigma_u(t,X_t,u_t)$$

substituant les deux équations précédents en (3.8), on obtient :

$$E\left[H_u(t,X_t^*,u_t^*,p_t^*,q_t^*)v_t\right] = 0$$

Remplacer maintenant v_t par sa forme, on obtient :

$$E\left[H_u(t,X_t^*,u_t^*,p_t^*,q_t^*)^T v_t\right] = 0$$

$$E\left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial u_i} H(s,X_s^*,u_s^*,p_s^*,q_s^*)\lambda_i 1_{[t,t+z]} ds\right] = 0$$

on différence par rapport à z au point $z = 0$:

$$E\left[\frac{\partial}{\partial z}\int_t^{t+z} \frac{\partial}{\partial u_i} H(s,X_s^*,u_s^*,p_s^*,q_s^*)\lambda_i ds \mid_{z=0}\right] = 0$$

$$E\left[\frac{\partial}{\partial u_i}H(t,X_t^*,u_t^*,p_t^*,q_t^*)\lambda_i\right]=0$$

car :

$$\lim\frac{\int_t^{t+z}\frac{\partial}{\partial u_1}H(s,X_s^*,u_s^*,p_s^*,q_s^*)\lambda_i}{z}ds=\frac{\partial}{\partial u_i}H(t,X_t^*,u_t^*,p_t^*,q_t^*)\lambda_i$$

l'égalité précédent est vraie pour tout λ_i est $\mathcal{G}_t-$mesurable borné donc :

$$E\left[\frac{\partial}{\partial u_i}H(t,X_t^*,u_t^*,p_t^*,q_t^*)\lambda_i\setminus\mathcal{G}_t\right]=0$$

$$\lambda_i E\left[\frac{\partial}{\partial u}H(t,X_t^*,u_t^*,p_t^*,q_t^*)\setminus\mathcal{G}_t\right]=0$$

alors :

$$E\left[\frac{\partial}{\partial u_1}H(t,X_t^*,u_t^*,p_t^*,q_t^*)\setminus G_t\right]=0$$

qui nous donne le résultat souhaité. ■

3.3 Conditions suffisantes

Dans cette section on étudie les conditions suffisantes d'optimalité pour notre problème de contrôle sous l'information partielle. Voir l'article de Baghery et Oksendal [4].

Hypothèses

Condition (H_2) on suppose que :

$$E\left[\int_0^T(X_t^*-X_t^u)^T q^* q_t^{*T}(X_t^*-X_t^u)dt\right]<\infty$$

$$E\left[\int_0^T p^{*T}\sigma\sigma^T(t,X_t,u_t)p_t dt\right]<\infty$$

$$E\left[\int_0^T|\,H_u(t,X_t^*,u_t^*,p_t^*,q_t^*)\,|^2\,dt\right]<\infty,\quad\forall u\in U$$

et supposons que : $H(t, X, u, p_t, q_t)$ et g sont des fonctions concaves en u et x.
La condition d'optimalité sous l'information partielle est :

$$E\left[H(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*) \setminus \mathcal{G}_t\right] = \max_{u \in U} E\left[H(t, X_t^*, u_t, p_t^*, q_t^*) \setminus \mathcal{G}_t\right]$$

Théorème 3.3.1 *Sous les conditions* (H_2)*, pour tout* $t \geq 0, u_t^*$ *est un contrôle optimal sous l'information partielle* $\mathcal{G}_t$ *tel que :*

$$E\left[H(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*) \setminus G_t\right] = \max_{u \in U} E\left[H(t, X_t^*, u_t, p_t^*, q_t^*) \setminus \mathcal{G}_t\right]$$

Preuve. On démontre que $J(u) \leq J(u^*)$ pour tout $u \in U$
Soit $u \in U$ on a

$$J(u) - J(u^*) = E\left[\int_0^T \{l(t, X_t, u_t) - l(t, X_t^*, u_t^*)\}\, dt\right] + E\left[g(X_T) - g(X_T^*)\right]. \tag{3.9}$$

On utilise la définition de l'hamiltonien on obtient :

$$\begin{aligned} E\int_0^T \{l(t, X_t, u_t) - l(t, X_t^*, u_t^*)\}\, dt = E\left[\int_0^T \{H(t, X_t, u_t, p_t^*, q_t^*) - H(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)\}\, dt\right] \\ - E\left[\int_0^T \left\{b(t, X_t, u_t) - b^T(t, X_t^*, u_t^*)\right\}^T p_t^* dt\right] \\ - E\left[\int_0^T tr\left[\{\sigma(t, X_t, u_t) - \sigma(t, X_t^*, u_t^*)\}^T q_t^*\right] dt\right] \end{aligned} \tag{3.10}$$

Par concavité on trouve :

$$\begin{aligned} &H(t, X_t, u_t, p_t^*, q_t^*) - H(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*) \\ \leq &H_x(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)(X_t - X_t^*) + H_u(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)(u_t - u_t^*) \end{aligned} \tag{3.11}$$

par la $\mathcal{G}_t$-mesurabilité de u_t et u_t^* on a :

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{\partial}{\partial u} E\left[H(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*) \setminus \mathcal{G}_t\right](u_t - u_t^*) \\ &= E\left[H_u(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)(u_t - u_t^*) \setminus \mathcal{G}_t\right] \end{aligned}$$

d'où :

$$0 \geq E\left[H_u(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)\right](u_t - u_t^*) \tag{3.12}$$

d'après (3.10) et (3.11) on obtient :

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^T \{H(t, X_t, u_t, p_t^*, q_t^*) - H(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)\} dt\right] \\ & \leq E\left[\int_0^T H_x(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)^T (X_t - X_t^*)^T dt\right] \\ & = -E\left[\int_0^T (X_t - X_t^*)^T dp_t\right] + E\left[\int_0^T (X_t - X_t^*)^T q_t dW_t\right] \\ & = -E\left[\int_0^T (X_t - X_t^*)^T dp_t^*\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

tel que :

$$E\left[\int_0^T (X_t - X_t^*)^T q_t dW_t\right] = 0 \quad \text{et} \quad H_x(t, X_t, u_t, p_t, q_t) = -dp_t + q_t dW_t$$

g concave alors :

$$\begin{aligned} E\left[g(X_T) - g(X_T^*)\right] &\leq E\left[g_x(X_T^*)^T (X_T - X_T^*)\right] \\ &= \left[(X_T - X_T^*) p_T^*\right] \\ &= E\left[\int_0^T d < (X_T - X_T^*) p_T^* >\right] \end{aligned}$$

On appliquant la formule d'Itô on obtient :

$$E\left[\int_0^T d < (X_T - X_T^*)p_T^* > \right] \leq E\left[\int_0^T p_t^*(X_t - X_t^*)\right] + E\left[\int_0^T (X_t - X_t^*)dp_t^*\right] + E\left[\int_0^T d < p_t^*(X_t - X_t^*) > \right]$$
$$= E\left[\int_0^T p_t^*(b(t, X_t, u_t) - b(t, X_t^*, u_t^*))dt\right] + E\left[\int_0^T (X_t - X_t^*)(-H_x(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*))\right]$$
$$+ E\left[\int_0^T tra\left[(\sigma(t, X_t, u_t) - \sigma(t, X_t^*, u_t^*)\right]^T q_t\right]dt \tag{3.14}$$

Substituant tout les membres de (3.13) et (3.14) dans (3.9) on obtient :

$$J(u) - J(u^*) \leq 0 \rightarrow J(u) \leq J(u^*), \quad \forall u \in U$$

Ce qu'il fallait à démontrer. ■

CHAPITRE 4

APPLICATION EN FINANCE

Les résultats du troisième chapitre trouvent divers applications en économie, finance, assurance et bien d'autres domaines. Nous utilisons les résultats pour les appliquer à la modélisation, notamment dans la résolution de problèmes d'investissement et de consommation dans un marché financier.

Le contrôle stochastique est une technique qui étudie les décisions optimales dans des systèmes soumis à des incertitudes, Il s'agit de modéliser des processus dynamiques ou l'évolution dépend d'évènement aléatoires.

Dans ce cadre, les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sont cruciales pour déterminer les stratégies qui maximisent (ou minimisent) une fonction de cout donnée, ces conditions permettent d'identifier les contrôles optimaux sous l'information partielle, ce qui est souvent le cas en finance .

Dans cette partie, nous allons énoncer un exemple intéressants bien connu dans le monde de la finance, est le problème du portefeuille qui a été formalisé la première fois par Harry Markowitz en 1952 dans son article intitulé " portoflio sélection ". Markowitz a introduit le concept de la théorie de la moyenne-variance, qui permet d'optimiser l'allocation d'actifs en tenant compte à la première fois du rendement attendu et du risque associé.

4.1 Critère moyenne-variance d'allocation de portefeuille

Exemple 4.1.1 *Considérons un portefeuille investi dans un marché financier, composé de deux types d'actifs [4][8] :*

Des capitaux risques générant un taux d'intérêt r_t et des capitaux risqués avec un taux de rendement α_t et une volatilité δ_t tel que :

- r_t, α_t, δ_t *sont des fonctions déterministe est bornée.*
- $\alpha_t > \delta_t, \quad \forall t \geq 0.$
- $\mathcal{G}_t$ *une sous filtration de* $\mathcal{F}_t (\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t)$

1- Le prix p_0 au temps t est décrit par :

$$\begin{cases} dp_0(t) = r_t p_0(t) dt, \quad t \in [0, T] \\ p_0(0) = p_0 = 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

2- Le prix p_1 au temps t est donné par :

$$\begin{cases} dp_1(t) = p_1(t)(\alpha_1(t)dt + \delta_i(t)dW_t) \\ p_1(0) = p_1 > 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Définition 4.1.1 *un portefeuille R est un processus prévisible $R(t) = (u_0(t), u_1(t)) \in \mathbb{R}^2$*
X_t^R est la richesse donnée par :

$$X_t^R = u_0(t)p_0(t) + u_1(t)p_1(t), \quad t > 0 \tag{4.3}$$

On dit que le portefeuille est auto finançant si :

$$dX_t^R = u_0(t)dp_0(t) + u_1(t)dp_1(t). \tag{4.4}$$

la quantité d'argent investi dans la sécurité risquée est donnée par : $u(t) = u_1(t)p_1(t)$
Nottons $X_t^R = X_t^u$ d'après (4.3) on trouve que :

$$u_0(t)p_0(t) = X_t^u - u(t)$$

l'équation du richesse est donnée par :

$$\begin{cases} dX_t^u = \left[r_t X_t^u + (\alpha_t - r_t)u(t)\right]dt + \delta_t u(t)dW_t \\ X_0^u = x > 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

L'objectif principal est de minimiser le risque du portefeuille tout en atteignant un rendement attendu de $E[X_T] = A$, tel que A est une constante.

$$var(X_T^u) = E\left[(X_T^u - A)^2\right] \tag{4.6}$$

En utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange, le problème peut être réduit comme suit :

$$\sup_{u\in U}\left\{E\left[-\frac{1}{2}(X_T^u - a)^2\right]\right\} = E\left[-\frac{1}{2}(X_T^{u*} - a)^2\right] \tag{4.7}$$

Afin de résoudre ce problème, on utilise l'hamiltonien associé à cette situation qui est défini par :

$$H(t, x, u, p, q) = (r_t x + (\alpha_t - r_t)u)p + \delta_t uq \tag{4.8}$$

donc l'équation adjointe correspondante est :

$$dp_t = -r_t p_t dt + q_t dW_t \tag{4.9}$$

Avec la condition terminale :

$$p_T = -X_T + a$$

La solution est donnée par :

$$p_t = \varphi_t X_t + \psi_t \tag{4.10}$$

Tel que φ_t et ψ_t sont des fonction déterministe et différentiables.

Appliquant la formule d'Itô (4.10) on obtient :

$$\begin{aligned} dp_t &= \varphi_t' X_t dt + \varphi dX_t + \psi_t' dt \\ &= \left[(\varphi_t p_t + \varphi_t')X_t + \varphi_t(\alpha_t - r_t)u(t) + \psi_t'\right] dt + \varphi_t \delta_t u(t) dW_t \end{aligned} \tag{4.11}$$

par comparaison on trouve :

$$\begin{aligned} (\varphi_t p_t + \varphi_t')X_t + \varphi_t(\alpha_t - r_t)u(t) + \psi_t' &= -r_t(\varphi_t X_t + \psi_t) \\ \varphi_t \delta_t u(t) &= q_t \\ (\varphi_t, \psi_t) &= (-1, a) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Soit $u_t^* \in U$ et soient X_t^*, p_t^*, q_t^*, les solutions des équation (4.5) et (4.9) appliquant la linéarisation d'espérance conditionnelle. On trouve :

$$E\left[H(t, X_t^*, u, p_t^*, q_t^*) \setminus \mathcal{G}_t\right] = r_t E\left[X_t^* p_t^* \setminus \mathcal{G}_t\right] + uE\left[(\alpha_t - r_t)p_t^* + \delta_t q_t^* \setminus \mathcal{G}_t\right] \tag{4.13}$$

l'équation (4.13) est linéaire en u alors par hypothèse :

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial}{\partial u} H(t, X_t^*, u, p_t^*, q_t^*) \setminus \mathcal{G}_t\right] &= 0 \\ (\alpha_t - r_t)E\left[p_t^* \setminus \mathcal{G}_t\right] + \delta_t E\left[q_t^* \setminus \mathcal{G}_t\right] &= 0 \\ (\alpha_t - r_t)\left[\varphi_t E\left[X_t^* \setminus \mathcal{G}_t\right] + \psi_t\right] + \delta_t^2 \varphi_t u^*(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

d'où :

$$u^*(t) = \frac{-(\alpha_t - r_t)\left(\varphi_t E\left[X_t^* \setminus \mathcal{G}_t\right] + \psi_t\right)}{\varphi_t \delta_t^2} \tag{4.15}$$

d'un autre côté, l'équation (4.12) devient :

$$u^*(t) = \frac{(2\varphi_t r_t + \varphi_t')X_t^* + \psi_t' + r_t \psi_t}{-\varphi_t(\alpha_t - r_t)}$$

ce que implique que :

$$u^*(t) = \frac{(2\varphi_t r_t + \varphi_t^{'})E\left[X_t^* \setminus \mathcal{G}_t\right] + \psi_t^{'} + r_t\psi_t}{-\varphi_t(\alpha_t - r_t)} \tag{4.16}$$

combinant les deux équations (4.15) et (4.16) et en comparant les termes en $E\left[X_t^* \setminus \mathcal{G}_t\right]$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}(\alpha_s - r_t)^2\varphi_t - (2\varphi_t r_t + \varphi_t^{'})\delta_t^2 = 0; \quad \varphi_T = -1\\ (\alpha_s - r_t)^2\psi_t - (\psi_t r_t + \psi_t^{'})\delta_t^2 = 0; \quad \psi_T = a\end{aligned} \tag{4.17}$$

les fonction φ_t *et* ψ_t *nécessitent la résolution des équations différentielles précédentes, par un simple calcule on obtient :*

$$\begin{aligned}\varphi_t = -exp\left(\int_t^T \left\{\frac{(\alpha_s - r_s)^2}{\delta_s^2} - 2r_s\right\} ds\right); \quad 0 \le t \le T\\ \psi_t = Aexp\left(\int_t^T \left\{\frac{(\alpha_s - r_s)^2}{\delta_s^2} - r_s\right\} ds\right); \quad 0 \le t \le T\end{aligned} \tag{4.18}$$

pour ce choix des fonctions φ_t *et* ψ_t *les processus :*

$p_t^* = \varphi_t X_t^* + \psi_t$

Et

$q_t^* = \varphi_t \delta_t u_t^*$

Sont la solution de l'équation adjointe (4.9). Ce qui prouve que $u^*(t)$ *satisfait tout les conditions de théorème (3.2.1)*

$u^*(t)$ constitue un portefeuille optimal dans le cadre du problème de Sélection de portefeuille moyenne variance fondé sur l'information partielle $\mathcal{G}_t$

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail, nous avons traité un problème de contrôle optimale stochastique pour un système gouverné par une équation différentielle stochastique (EDS). Nous sommes concentrés sur le cas où le domaine de contrôle admissible est convexe. En utilisant la méthode de perturbation, nous avons dérivé les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous l'information partielle.

Cette approche a non seulement permis d'établir des résultats théorique solides, mais elle à également éclairé l'impact de l'incertitude sur les décisions optimales.

Cela souligne l'importance cruciale de l'information partielle dans les problèmes de contrôle stochastique.

ANNEXE

Quelque outils mathématique

Développement de Taylor avec reste intégrale

Définition 4.1.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, $(n \in \mathbb{N})$ et $a, x \in I$, alors :*

$$f(x+a) = f(x) + f'(x)(a) + \frac{f''(x)}{2!}(a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(a)^n + 0(|a|^n) + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}(a)^{n+1}dt$$

L'inégalité de Hölder :

Si $p, q > 1$ sont conjugués au sens de Yong, alors :

$$\int_D (f(x)g(x)d\mu(x) \leq \left(\int_D |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_D |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

L'inégalité de Doob (Inégalité maximale) :

Si X est une sous martingale à temps continu, positive et càdlàg, alors pour $p > 1$ et $q = \dfrac{p}{p-1}$ on a :

$$\|\sup_{s \leq t} X_s\|_p \leq q\|X_t\|_p \quad \text{et} \quad \|\sup_t X_t\|_p \leq q \sup_t \|X_t\|_p$$

En particulier si X est une martingale càdlàg pour $p = 2, q = 2$ alors :

$$E[\sup_{s \leq t} X_s^2] \leq 4E(X_s^2) \quad \text{et} \quad E[\sup_{t} X_t^2] \leq 4 \sup_{t} E(X_s^2)$$

Fonction concave :

Une fonction f d'un intervalle réel I vers $\mathbb{R}$ est dit concave lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I et tout t dans $[0, 1]$ on a :

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bensoussan,*Lectures on stochastic control*, In nonlinear filtering and stochastic control(pp. 1-62), Springer, Berlin, Heidelberg, (1982) .

[2] B. Oksendal, &A. Sulem, *Stochastic control of Jump diffusion in applied cotrol of Jump diffusion*, Springer Internatioal publishing, (p.p 93-155), (2019).

[3] E. I. E. Romuald, & I. KHARROUBI, *Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, ENSAE, Avril (2006).

[4] F. Baghery, & B. Oksendal,*Amaximum principale for stochastic control with partial informtion*,Stochstic Analysis and Applications, 25(3)-705-717, (2007).

[5] H. Pham, *Optimisation et controle stochastique appliqués à la finance*, (Vol. 61), Berlin, Springer Verlag, (2005).

[6] J. Yong, & X.Y. Zhou, *Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations*, (vol 43), Springer Science and Busines Media, (1999).

[7] M. Hafayed, *Gradient généralisés et contrôle stochastique* , Universite mohamed khider Biskra, pp-102, (2009).

[8] M. Hafayed, M. Tabet, &S. Boukaf, *Mean-field Maximum principale for Optimal Control of Forward-Backward Stochastic Systems With Jumps and its Application to Mean-Variance Portofolio Problem*, Communications in Mathematics and Statistics, (2005).

[9] M. Jeanblanc, *Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY* , Lecture Notes, University of Evry, (2006).

[10] M. Jeanblanc, & T. Simon, *Eléments de Calcul stochastique*, IRBID, Septembre (2005) .

[11] O. Lévêque, *Cours de probabilités et calcul stochastique*, (semestre d'hiver 2004-2005).

[12] P. Briand, *Equations differentielles stochastiques rétrogrades*, Mars (2001).

[13] X.Y. Zhou et D. Li, *Sélection de portefeuille moyenne-variance en temps continu : un cadre LQ stochastique*, Mathématiques appliquées et optimisation, 42, 19-33, (2000).