الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلة
معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم: العلوم الاقتصادية والتجارية

رقم المطبوعة:...../2024

مطبوعة بيداغوجية بعنوان :

أساسيات بحوث العمليات

موجهة لطلبة السنة الثانية، طور الليسانس، شعبة: علوم اقتصادية وتجارية، تخصص: علوم اقتصادية وتجارية

من إعداد الدكتور: بوبكر ياسين

الرتبة: أستاذ محاضر قسم أ

السنة الجامعية 2024/2023

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات:

المحور	الصفحة
المحور الأول: مدخل عام حول بحوث العمليات	06 – 01
المحور الثاني: البرمجة الخطية: الصيغة القياسية	13 – 07
المحور الثالث: الطريقة البيانية	27 – 14
المحور الرابع: البرمجة الخطية – طريقة السمبلكس	66 – 28
المحور الخامس: البرمجة الخطية – الثنائية او الازدواجية	86 – 67
المحور السادس: برمجة الأعداد الصحيحة – طريقة القطع	92 – 87
المحور السابع: برمجة الاعداد الصحيحة مشاكل النقل	145 – 93

المحور الأول: مدخل عام حول بحوث العمليات

1-لمحة تاريخية:

تعود البدايات الأولى لبحوث العمليات إلى الحرب العالمية الثانية، عندما استدعت الإدارة العسكرية في بريطانيا فريقاً من العلماء من مختلف التخصصات الدراسة المسائل الاستراتيجية المتعلقة بالدفاع الأرضي والجوي، بهدف الاستخدام الأمثل والفعال للموارد الحربية المحدودة، واهتم الفريق أيضًا بدراسة الأسلوب الأمثل لاستخدام الرادارات الجديدة وكفاءه الأنواع المتاحة من قاذفات القنابل.

إن النتائج المشجعة التي توصل إليها فريق بحوث العمليات البريطاني، حشت الإدارة الحربية الأمريكية على القيام بأنشطة مماثلة شملت دراسة أنماط جديدة لنقل الجنود وإمداداتهم وتخطيط عمليات زرع الألغام في البحار، ودراسة الاستخدام الأمثل للتجهيزات الإلكترونية.

بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية، ونتيجة للنجاح الكبير الذي حققته الإدارات العسكرية البريطانية والأمريكية، اتجهت أنظار الإدارات الاقتصادية والإدارية والهندسية المختلفة نحو هذا الحقل الجديد من المعرفة حقل "بحوث العمليات "، وبدأت تلك الإدارات في الدول المتقدمة بإنشاء مراكز بحوث متخصصة لضم اختصاصين في مختلف المجالات العلمية من أجل إيجاد الحلول المثلى للمشكلات التي كانت تواجههم.

ومع ذلك فإن علم بحوث العمليات ظل ولفترة طويلة يعاني من مشاكل كثيرة مثل:

1- كبر حجم النماذج الرياضية المشكلة من المواقف والمسائل الحقيقية (الواقعية) المدروسة.
2- ازدياد عدد المتغيرات اللازم إيجاد قيمها مع تزايد حجم المسائل والمواقف المدروسة.
3- تضخم حجم البيانات الأولية اللازمة لبناء النموذج الرياضي حسب الموقف المدروس.
4- كثير من الأساليب وطرائق الحل يحتاج إلى وقت وجهد كبيرين في التطبيق.

2-بحوث العمليات فن أم علم؟:

تعد بحوث العمليات فنًا وعلمًا على حد سواء:

الفن: يتمثل في القدرة على تحويل الموقف أو النظام المدروس إلى نموذج رياضي محدد تحديدًا جيدًا (صبحي و ابراهيم، 2007، الصفحات 15-16)، يأخذ في الحسبان كل ما يحقق الهدف الذي نسعى إليه وهو إيجاد الحل الأمثل.

العلم: يتمثل في إيجاد الطرائق العلمية الفعالة لحل مثل هذه النماذج.

والنظام أو الموقف المدروس:

- قد يكون موجوداً فعلاً، وعندئذ يهدف من بناء وحل النموذج إلى تحديد سلوك أمثل للنظام لتحسين أدائه.
- وقد يكون مجرد فكرة تحتاج إلى تخطيط وتنفيذ، وعندئذ تكون غاية النموذج في مثل هذه الحالة هي تحديد البنية الأفضل للنظام في المستقبل.

وفي الحالتين كلتيهما تساهم دراسة وتحليل المواقف باستخدام بحوث العمليات بشكل فعال في عملية اتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب. لذلك يمكن تعريف بحوث العمليات بأنه استخدام الأساليب العلمية في عملية اتخاذ القرار المناسب.

3- دور الحاسوب في تطوير بحوث العمليات:

إن أهمية علم بحوث العمليات تأتي من مقدرته على نمذجة المشاكل والمواقف الحقيقية في المجالات المختلفة، واستخدامه لأساليب وخوارزميات علمية رياضية في تحليل تلك النماذج ودراستهما، واستخلاص الحلول المثلى التي تساهم بشكل فعال في عملية اتخاذ القرار المناسب.

لقد ظل هذا العلم لفترة طويلة يعاني من عدم إمكانية نمذجة المواقف والمشاكل كبيرة الحجم ذات التركيب المعقد، وذلك إما بسبب هيكلية الأساليب والخوارزميات المستخدمة التي يحتاج تطبيقها إلى وقت وجهد كبيرين، أو بسبب حجم البيانات الأولية اللازمة لتطبيق الأساليب والخوارزميات الكبير والذي يستهلك وقتًا وجهدًا ودقة كبيرة، بحيث أن الوقوع بالخطأ في أثناء التطبيق مهما كان هذا بسيطًا، فإنه ينعكس سلبيًا على القائدة المرجوة من الحلول المستخلصة.

وقد ساهم الحاسوب بإمكاناته الهائلة في تذليل أغلب الصعوبات، وإعطاء علم بحوث العمليات دفعًا جديدًا وتقدمًا مميزًا وأهمية على جميع المستويات فقد أصبحا معًا:

- الحاسوب بما يتملك من القدرة على حفظ وسرعة تداول ومعالجة البيانات مهما يكن حجمها وبدقة فائقة.
- وبحوث العمليات بما تمتلك من أســـاليب وخوارزميات حل كثيرة، أداة فعالة وهامة لدى متخذي القرار في مختلف الميادين لمساعدتهم في اتخاذ قرارات سليمة ورشيدة ودقيقة وبالوقت المناسب، إذ لم تعد تقتصر تطبيقات بحوث العمليات على المواقف العسكرية والصناعية بل اتسعت لتشمل المستشفيات والمؤسسات المالية والمكتبات وتخطيط المدن وتنظيم النقل، ووضـــع الخطط المثلى العمليات الإنتاج والتصـــنيع بأقل تكلفة ممكنة وأكبر ربح ممكن، وحتى في مجالات دراسة وكشف الجرائم.

4- أنواع نماذج بحوث العمليات:

نواجه في حياتنا العملية الكثير من المواقف والمشـاكل التي يمكن معالجتها ضـمن علم بحوث العمليات وهذه المواقف تأخذ صيغًا ونماذج متنوعة حسب نوع الموقف المدروس (صبحي و ابراهيم، 2007، الصفحات 18-19)، وفيما يلي أهم النماذج التي يعالجها علم بحوث العمليات:

أولاً: النماذج الرياضية (Mathematical Models):

بعد أن يتم توضـيح المشـكلة والكشـف ض العوامل والمتغيرات المختلفة المؤثرة فيها وصـياغتها بشـكل محدد ودقيق، يجب انتقال إلى وضـع النموذج الرياضـي للمشكلة، وهي أهم النماذج وأكثرها شـيوعًا، إذ نفترض خلال بناء هذه النماذج أن جميع المتغيرات المسـتقلة قابلة للقياس وتسـتخدم رموزًا رياضـية لتمثيلها، وترتبط المتغيرات بعضـها ببعض بعلاقات رياضية تصف سلوك النظام، ويتم معالجة هذه النماذج باستخدام طرق حسابية بهدف الوصول إلى الحل الأمثل، تذكر من هذه النماذج:

1. النماذج الخطية Linear Models
2. النماذج اللاخطية Nonlinear Models
3. نماذج الأعداد الصحيحة Integer Models
4. النماذج التربيعية Quadratic Models
5. النماذج الديناميكية Dynamic Models

ثانياً: النماذج الاحتمالية (Probability Models)

وهي نماذج رياضية تخضع بعض أو كل متغيراتها إلى قوانين احتمالية، من هذه النماذج تذكر:

1. نماذج صفوف الانتظار Queuing Models
2. نماذج الألعاب Game Models
3. نماذج التخزين Inventory Models
4. النماذج الشبكية (PERT) Network Models

ثالثاً: نماذج البحث والاستقصاء والمحاكاة (Simulation and Heuristic Models)

نماذج البحث والاستقصاء هي النماذج التي لا تستخدم دوال رياضية للربط بين متغيراتها، بل تعتمد على أسلوب التحليل الذي يكافئ عملية إجراء التجارب وبالتالي هذه النماذج تخضع إلى خطأ التجربة مما يؤدي إلى صعوبات في تصميم التجربة إحصائيًا وصعوبات في جمع المشاهدات.

أما نماذج المحاكاة فهي تهدف إلى تقليد النظام المدروس بنظام فرضي يحاكي النظام الحقيقي ومراقبة التغيرات التي تطرأ على النموذج المحاكي خلال فترة زمنية محددة.

5-مراحل دراسة بحوث العمليات Phases of Operation Research Study:

عادة تحتاج دراسة وحل أي مشكلة من المشاكل التي تندرج ضمن بحوث عمليات إلى فريق بحث متكامل، حيث يقوم أحد أو بعض أعضائه بمعالجة المشكلات التي تنشأ بصدد صياغة العلاقات الرياضية، وبعضهم يقوم ببناء وصياغة النموذج المناسب للمسألة المدروسة وبعضهم الآخر يتخصص في إيجاد الأسلوب الأمثل لحل النموذج المصاغ وهكذا..

إن المراحل الأساسية التي يقوم فيها أي فريق بحث مكلف بدراسة مشكلة ضمن مفاهيم بحوث العمليات تتلخص بما يلي:

1. تعريف المسألة.
2. صياغة النموذج.
3. حل النموذج.

4. فحص فعالية النموذج.
5. تطبيق النتائج النهائية للنموذج.

المرحلة الأولى: تعريف المسألة

يتضمن تعريف المسألة ثلاثة عناصر أساسية:

1) وصف دقيق لهدف الدراسة.

2) تحديد بدائل (متغيرات) القرار للنظام والتي يستطيع الباحث السيطرة عليها.

3) تحديد القيود ومتطلبات النظام.

بعبارة أخرى في هذه المرحلة يتم تحديد المشكلة وما يتعلق بها وما ينتج عنها بصورة وصفية.

المرحلة الثانية: صياغة النموذج

في هذه المرحلة يقوم الباحث بتحويل الشكل الوصفي للمشكلة إلى نموذج، ويتم في هذا النموذج تحديد التعابير الكمية لهدف وقيود المسألة بدلالة متغيرات القرار. فإذا كان النموذج الناتج هو من النماذج الرياضية الشائعة فيمكن الوصول إلى الحل الأمثل باستخدام التقنيات الرياضية المعروفة. وإذا كانت العلاقات الرياضية للنموذج معقدة جدًا بحيث لا يمكن الحصول على حلول تحليلية، عندئذ نستخدم نماذج المحاكاة، وأحيانًا يضطر الباحث إلى استخدام توليفة نماذج رياضية، محاكاة أو بحث واستقصاء لتمثيل النظام المدروس، وهذا يعتمد بشكل أساسي على طبيعة ودرجة تعقيد المشكلة المدروسة وعلى خبرة الباحث الذي يقوم بصياغة النموذج.

المرحلة الثالثة: حل النموذج

في هذه المرحلة تقوم بالتفتيش عن الأساليب والتقنيات الحسابية الملائمة والتي تقودنا للحصول على الحل الأمثل للنموذج، هذا إذا كان النموذج رياضيًا، أما في حالات استخدام نماذج المحاكاة أو نماذج البحث والاستقصاء، فإنه لا يمكن الحصول على حل أمثل بشكل دقيق بل قريب قدر الإمكان إلى الحل الأمثل.

المرحلة الرابعة: فحص فعالية النموذج

إن الأسلوب الأكثر شيوعًا لاختبار صحة وفعالية النموذج يمثل نظامًا معينًا هو مقارنة أداء النظام الحالي مع أدائه في الماضـي (باسـتخدام بيانات متاحة في الماضـي) هذا مع افتراض أن جميع شـروط المدخلات تبقى ثابتة، فإذا كان أداء النظام المدروس في الحاضر هو نفس أدائه في الماضي، فإن النموذج يكون صحيحًا

المرحلة الخامسة: تطبيق النتائج النهائية للنموذج

ويستم ذلك بالتعاون بين فريق بحوث العمليات والفريق الذي يكون مسؤولاً عن إدارة وعمل النظام، إذ أن فريق بحوث العمليات يقوم بوضـع خطة التطبيق العملي التي هي عبارة عن ترجمة لنتائج النموذج بشـكل سـلسـلة من التعليمات العملية المفصـلة، ويتولى فريق إدارة وتشـغيل النظام تنفيذ هذه الخطة، وتجدر الإشـارة هنا إلى أن التعاون الحاد بين هذين الفريقين كفيل بإزالة جميع التعقيدات التي قد تظهر أثناء وضع الخلطة وتنفيذها.

المحور الثاني: البرمجة الخطية – الصيغة القياسية

تمهيـــــد:

البرمجة الخطية هي أسلوب رياضي يساعد على اتخاذ أفضل القرارات المتعلقة بالتوزيع أو التخصيص الأمثل لمجموعة من الموارد المحدودة على مجموعة من الاستخدامات المتعددة، وعلى هذا الأساس فإن البرمجة الخطية تبحث عن أفضل الاستعمالات لتحقيق أحسن النتائج، وبذلك فإنها تحقق الكفاءة في استخدام الموارد والفعالية في تحقيق النتائج، وتشير كلمة خطية إلى أن العلاقة بين المتغيرات المكونة للمسألة المدروسة هي علاقة خطية، بينما تعني كلمة البرمجة الأسلوب أو التقنية الرياضية التي تسمح بالوصول إلى تحديد حل أمثل من بين جملة من الحلول المشتركة تكون عنده قيمة دالة الهدف في حدها الأدنى أو الأقصى حسب طبيعة الهدف، و تحويل قيود البرنامج الخطي من متراجحات إلى معادلات يجعل منه الشكل القياسي.

متطلبات البرمجة الخطية:

لكي يتمكن متخذ القرار في المؤسَّسة من استخدام هذا الأسلوب الرياضي لابد من توفر جملة من الشروط أو المتطلبات وهي:

1. وجود هدف تسعى المؤسَّسة لتحقيقه يمكن التعبير عنه في شكل دالة، كتخفيض التكاليف تعظيم الأرباح، تقليص استهلاك المواد... الخ.
2. وجود مجموعة من القيود والشروط التي في ظلها يتم تحقيق الهدف.
3. يجب أن تكون هناك استخدامات متعددة للموارد المتاحة.
4. إمكانية صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي.

تطبيقات البرمجة الخطية:

في الحقيقة فإن للبرمجة الخطية استخدامات متعددة وكثيرة جدا، حيث يمكن استعمالها في العديد من ميادين الحياة ولحل الكثير من المسائل التي تواجهنا على أن تستوفي الشروط المذكورة سابقا، غير أننا سوف نذكر فقط بعضًا من المجالات التي يمكن أن استعمالها في المؤسسات من بينها ما يلي:

المحور الثاني: البرمجة الخطية – الصيغة القياسية

1. المشـــاكل المتعلقة بالإنتاج، كتحديد التشـــكيلة الممكنة من مختلف المنتجات وكمياتها مما يســـمح بتحقيق هدف معين، وفي ظل كميات متاحة من عوامل الإنتاج تدخل جميعها في تشكيلة الإنتاج.
2. تحديد المزيج الإنتاجي المتمثل في العناصـر التي تُمزج مع بعضـها بكيفية معينة وبنسـب مختلفة للحصـول على منتج جديد، كصناعة الأدوية الأغذية، الدهن...الخ.
3. تســتعمل في اختيار وتعيين الأفراد في المؤســســة بغرض القيام بعمليات ومهام مختلفة (مســائل التعيين والتخصيص).
4. توزيع المواد والمنتجات المتجانسة من مصادر تواجدها نحو أماكن استخدامها (مسائل النقل).
5. بالإضـافة إلى ذلك يمكن اسـتخدام البرمجة الخطية في: تخطيط الإشـهار، تخطيط المخزون، تحديد أماكن إقامة الوحدات... الخ.

عرض مسألة البرمجة الخطية:

نموذج البرمجة الخطية قد يكون في شـــكل قانوني، أو في شـــكل معياري وتأخذ المســـألة الشـــكل المعياري (Standard) إذا كانت القيود عبارة عن معادلات على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} [Min]Z = C_iX_i \\ A_iX_i = b_i \\ X_i \geq 0 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} [Max]Z = C_iX_i \\ A_iX_i = b_i \\ X_i \geq 0 \end{bmatrix}$$

أما إذا كانت قيود المسألة عبارة عن متراجحات أو متباينات فنقول أن المسألة على شكل قانوني (Canonique) وتأخذ إحدى الصيغتين التاليتين:

$$\begin{bmatrix} [Min]Z = C_iX_i \\ A_iX_i \leq b_i \\ or\ A_iX_i \geq b_i \\ X_i \geq 0 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} [Max]Z = C_iX_i \\ A_iX_i \geq b_i \\ or\ A_iX_i \leq b_i \\ X_i \geq 0 \end{bmatrix}$$

طرق حل مسألة البرمجة الخطية:

نستطيع النظر لمسألة البرمجة الخطية من زاويتين، الأولى تسمى المسألة المطروحة (Problème Primal) أو المسألة الأولية، أما الزاوية الثانية تسمى بالمسألة المعكوسة (Problème Dual) أو المسالة الثنائية.

تكون المسألة المطروحة بشكل عام على النحو التالي:

$$[Max/Min]Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots a_{2n}X_n \leq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}X_1 + am_2X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

أما المسألة المعكوسة فتكون بصفة عامة على الشكل التالي:

$$[Max]G = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots b_mu_m$$

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_n \geq C_1$$

$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_n \geq C_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_n \geq C_n$$

ولحل أي من المسألتين لدينا الطرق التالية:

1. الطريقة الجبرية.
2. طريقة الرسم البياني
3. الطريقة المبسطة (السمبلاكس Simplexe)

ولتقريب الفهم أكثر لنموذج البرمجة الخطية يبدو مفيدا أخذ مثال على ذلك:

المثال (01): سـوف نسـتخدم هذا المثال كنموذج خلال هذا الكتاب لتسـهيل الفهم ولإمكانية مقارنة الحلول والنتائج المتوصل إليها.

تقوم إحدى المؤسَّسات الإنتاجية بتصنيع نوعين من لعب الأطفال (B,A) لإنتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول (A) يتطلب استعمال وحدتي قياس(2) من مادة البلاستيك كمادة أولية، كما أنها تستغرق في ورشة التصنيع 3 ساعات عمل، بينما تتطلب الوحدة الواحدة من النوع (B) وحدة قياس واحدة من المادة الأولية البلاستيك، وتستغرق 6 ساعات عمل بورشة التصنيع، تتوقع المؤسسة أن تتحصل على 1000 وحدة قياس خلال السنة من المادة الأولية البلاستيك المخصصة لإنتاج هذه المنتجات كما أن طاقة ورشة التصنيع المتاحة خلال هذه الفترة هي 2400 ساعة عمل.

تقدر المؤسسة أن تحقق ربحا صافيا قدره (20 وحدة نقدية) للوحدة من النوع الأول (A) و (30 وحدة نقدية) من النوع الثاني (B).

المطلوب:

1. صياغة هذه المشكلة في نموذج مسألة البرمجة الخطية.
2. تحديد التشكيلة الإنتاجية المثلى من النوعين لتحقيق أقصى ربح ممكن.

حل المثال (01):

قبل صياغة النموذج الرياضي الذي يمثل هذه المسألة لابد من مراعاة إمكانية وجود المتطلبات المذكورة سابقا (متطلبات البرمجة الخطية) وهي:

- من خلال المسألة المطروحة أمامنا يتضح أن المؤسسة تبحث عن أفضل توليفة من لعب الأطفال (A,B) من بين العديد من التوليفات الممكنة، هذه التوليفة تسمح لها بتحقيق الهدف المرجو وهو تعظيم الأرباح.
- إن هذا الهدف تحكمه مجموعة من القيود والشروط التي في ظلها يتم تحقيقه وتتمثل هذه القيود في الموارد المتاحة والمخصصة لإنتاج هذين النوعين، وهي ساعات عمل ورشة التصنيع والمادة الأولية المتاحة البلاستيك.

- يتضح أيضا بأن هذه الموارد كما يمكن استعمالها في إنتاج النوع (A) فإنها أيضا يمكن استخدامها في الوقت نفسه لإنتاج النوع الثاني (B) فهي بذلك متعددة الاستخدامات فهي عوامل إنتاج غير قابلة للإحلال. وهذا هو الشرط الأساسي والمهم في البرمجة الخطية وبدونه لا يمكن حل هذه المسائل بطرق البرمجة الخطية.
- ولإمكانية صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي لا بد من إعطاء بعض الرموز كما يلي: (ملاحظة: إن وضع الرموز هي عملية مهمة جدا تساعد على تشكيل نموذج المسألة، لذلك فهي تتطلب فهم حقيقي لطبيعة المسألة):
  - ✓ نرمز بالرمز (X) لعدد الوحدات التي يمكن أن تنتجها المؤسسة من النوع (A).
  - ✓ وبالرمز (Y) لعدد الوحدات التي يمكن أن تنتجها أيضا من النوع (B).
  - ✓ وبالرمز (Z) لقيمة الأرباح المحتمل تحقيقها.

(أ) دالة الهدف:

وهي المعادلة التي تعبر عن الهدف المُراد تحقيقه، وفي مثالنا هذا يتمثل الهدف في تعظيم الأرباح، فإذا كان الربح في الوحدة الواحدة من النوع (A) 20 وحدة نقدية، فإن الربح المحتمل تحقيقه من الوحدات الممكن إنتاجها هذا النوع هو $20X$ وحدة نقدية، وإذا كان الربح في الوحدة الواحدة النوع (B) هو $30Y$ وحدة نقدية، فإن الربح المتوقع تحقيقه من الوحدات الممكر إنتاجها من هذا النوع هو $30Y$ وحدة نقدية، وعليه تكون دالة الهدف هي:

$$[Max]Z = 20\,X + 30Y$$

(ب) القيود:

القيود هي المعادلات أو المتراجحات (المتباينات) التي تعبر عن ظروف أو شروط المسألة، وفي ظلها سوف يتم اتخاذ القرار واختيار أفضل الحلول، أما في مثالنا فإن هذه الشروط التي تحدد تشكيلة المنتجات هي القيود التالية:

- قيد ساعات العمل: $3X + 6Y \leq 2400$

تعني هذه المتباينة أنه إذا كانت كل وحدة واحدة من النوع الأول (A) تتطلب 3 ساعات عمل في الورشة فإن عدد الوحدات الإجمالية التي يمكن إنتاجها من هذا النوع سوف يستغرق في ورشة التصنيع $3X$ ساعة عمل وكذلك الأمر بالنسبة للنوع الثاني الذي يستغرق في هذه الورشة زمن قدره $6Y$ ساعة عمل، وبالتالي فإنه لإنتاج النوعين معا يجب أن لا تتجاوز ساعات العمل الإجمالية 2400 ساعة عمل، وهي طاقة ورشة التصنيع أو أقصى ساعات العمل المخصصة في هذه الورشة لتصنيع كلا النوعين من لعب الأطفال.

قيد المادة الأولية: $2X + Y \leq 1000$

يشير هذا القيد أن الكميات المستهلكة من المادة الأولية البلاستيك لإنتاج أي تشكيلة من النوعين يجب أن لا تتجاوز الكميات المتاحة لدى المؤسسة من هذه المادة وهي (1000 وحدة قياس)، فإذا كانت الوحدة الواحدة من النوع الأول (A) تتطلب 2 وحدة قياس من مادة البلاستيك، فإن عدد الوحدات الإجمالية الممكن إنتاجها من هذا النوع سوف تستهلك $(2X)$ وحدة قياس من هذه المادة وكذلك الأمر بالنسبة للنوع الثاني (B) الذي يستعمل عن كل وحدة يمكن إنتاجها وحدة قياس واحدة، فإنه سوف يستهلك $(1Y)$ وحدة قياس من المادة الأولية عند إنتاج (Y) وحدة، وعليه فإنه لإنتاج أي كمية من النوعين يجب أن لا يتجاوز الكميات المتاحة من هذه المادة وهي 1000 وحدة قياس.

ج – قيد عدم السلبية (الايجابية) $X \geq 0$ و $Y \geq 0$:

هذا القيد يعني أن عدد الوحدات المنتجة من النوعين $(A$ و $B)$يجب أن لا تكون سالبة لأن ذلك ليس له أي معنى اقتصادي.

وعلى هذا الأساس يمكن جمع النقاط السابقة (أ، ب، ج) للوصول إلى صياغة النموذج الرياضي للمسألة على النحو التالي:

$$[Max]Z = 20X + 30Y$$
$$3X + 3Y \leq 2400$$
$$2X + Y \leq 1000$$
$$X \geq 0$$

ملاحظة: إن العلاقات التي تربط بين المتغيرات في المســـألة هي علاقات خطية بحيث لا يمكن أن تظهر في مثل هذه المسائل (مسائل البرمجة الخطية) العلاقات التالية على سبيل المثال: $\ln Y, \log X, X_2, XY$...الخ لأنها ليست خطية.

المحور الثالث: الطريقة البيانية

نعني بحل البرنامج الخطي، إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، سواء كانت دالة الهدف في حالة تعظيم أو في حالة تدنئة (راتول، 2008، صفحة 25).

ويمكن إيجاد حل للبرنامج الخطي بإحدى الطريقتين:

-**الطريقة البيانية:** وهي شائعة الاستخدام فقط في البرامج التي تحتوي على متغيرتين على الأكثر.

-**طريقة السمبليكس أو طريقة الجداول:** وهـي طريقـة عامة تستخدم مهما كان عدد متغيرات البرنامج.

وسوف نتطرق في هذا الفصل إلى الطريقة البيانية، ونخصـص الفصل الموالي لطريقة السمبليكس.

الطريقة البيانية كما سبقت الإشارة تستخدم فقط عندما يحتوي البرنامج على متغيرتين على الأكثر، وذلك لصعوبة تصور المسألة على معلم يحتوي على أكـثر من بعدين.

ويمكن استخدام الطريقة البيانية سواءٌ في حالة التعظيم أو في حالة التدنئة.

-**أولًا: حالة التعظيم** : لحل برنامج التعظيم بهذه الطريقة يتم اتباع الخطوات التالية:

أ- نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات.

ب- نرسم الخطوط المستقيمة لمعادلات الخطوة (أ) علـــى معلم متعامد، تسمى المستقيمات المحصل عليها **بالمستقيمات المولدة**، وقد تشكل لنا على المعلم مضلع متعدد الرؤوس.

ج - نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يمين المستقيم في حالة كون القيد **أقل من** وإلى يساره في حالة القيد **أكبر من.**

د- نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود وهي في الغالب تشكل مضلع متعدد الرؤوس.

هـ-نجعل دالة الهدف معدومة، أي نسـاويها إلى الصـفر، ونرسـم مسـتقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المسـتقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم **المستقيم** Δ.

و- نحرك المسـتقيم Δ بصـفة متوازية اتجاه رؤوس المضـلع المحصـل عليه من المسـتقيمات المولدة، بموجب الخطوة د، وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة من للدالة الاقتصـــادية (دالة الهدف) هي آخر نقطة يصـــل إليها المستقيم Δ عند سحبه إلى الأعلى بشكل موازٍ لأصله، وهي نقطة حاصلة من تقاطع عدة مستقيمات مولدة.

ل- نوجد قيم الأزواج المرتبة لهذه النقطة وذلك إمـــا هندسيًا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنحصل على قيمة المتغيرة الأولى، ونمد من هذه النقطة أيضًا مستقيمًا موازيًـــا للمحور الأفقي فيتقاطع مع المحور

المحور الثالث: الطريقة البياني

العمودي عند نقطة هي قيمة المتغيرة الثانية، أو جبريًا بإيجاد الحل المشـــترك لمعادلات المســـتقيمات المتقاطعة فنحصل على قيمة المتغيرتين.

م- في حالة ما إذا لم نتمكن من تعيين هذه النقطة بدقة لوجود عدد من النقاط المتجاورة أو المتوازية التي يقترب منها المستقيم ، فإننا نوجد الأزواج المرتبة لكل تلك النقاط ونعوضها في دالة الهدف، ونأخذ النقطة التي تعطي أكبر قيمة لها (راتول، 2008، صفحة 28).

ن- نعوض قيمتي المتغيرتين المحصل عليهما في دالة الهدف فنحصل على القيمة العظمى لهذه الدالة.

ملاحظة: في حالة عدم التمكن من تحديد آخر نقطة يصل إليهـــا المستقيم، بسبب عدم التمكن من تميزها، نوجد قيم المتغيرات عند النقاط المشـــتبه فيها ثم نعوضـــها في دالة الهدف ونأخذ النقطة التي تعطي أعظم قيمة للدالة الاقتصادية.

المثال (02): أوجد حل للبرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$Max: Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$S/C \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 96 \\ x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

نستخرج المستقيمات المولدة وذلك بتحويـــل المتراجحات إلى معادلات كما يلي:

$8x_1 + 6x_2 = 96$	$6x_1 + 9x_2 = 108$	$8x_1 + 2x_2 = 40$

ب- على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نصل بينهما لنحصل على الشكل 2-1 أدناه.

المستقيم 1.

$8x_1 + 6x_2 = 96$	
x_1	x_2
0	20
5	0

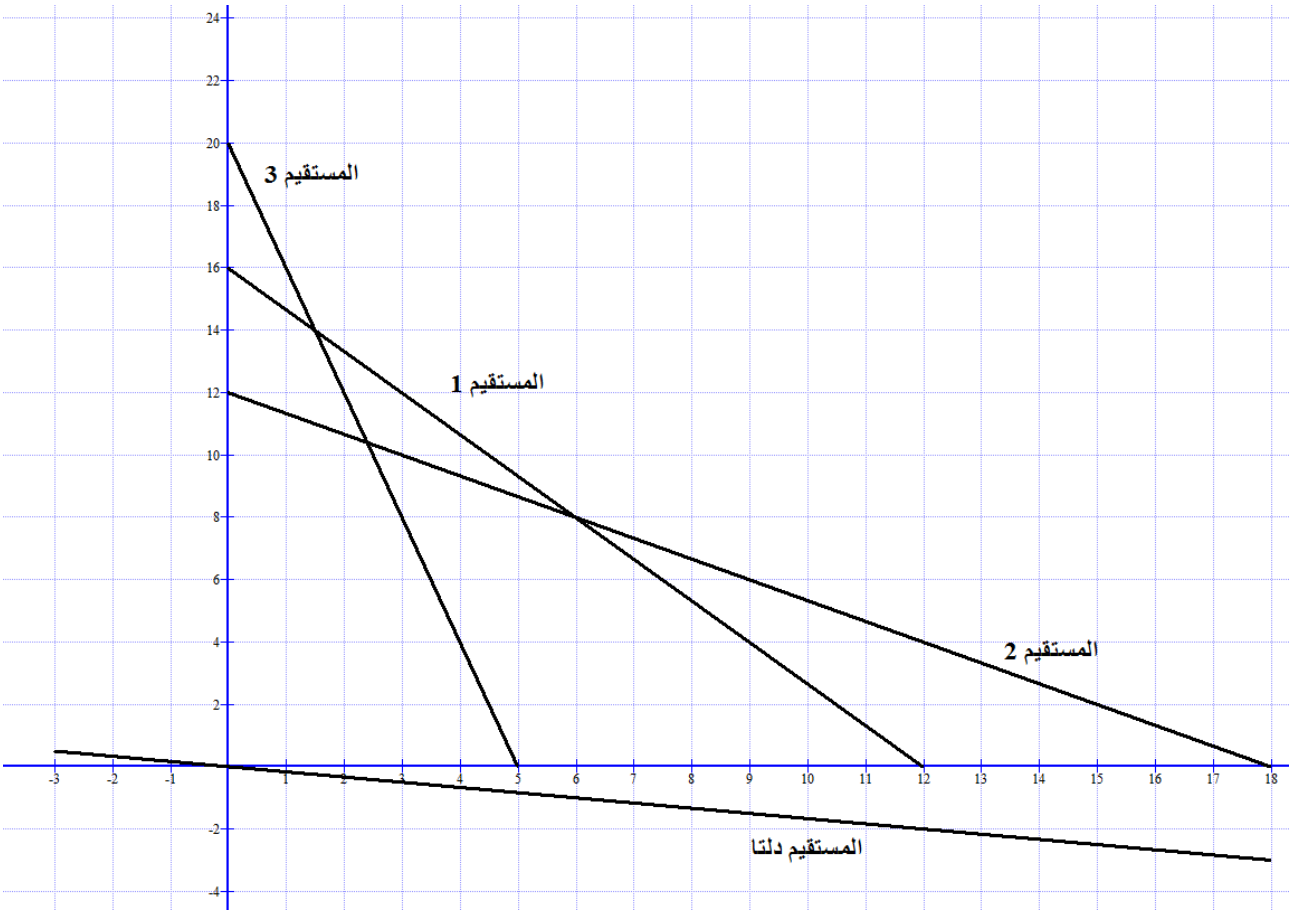
المستقيم 2.

$6x_1 + 9x_2 = 108$	
x_1	x_2
0	12
18	0

المستقيم 3.

$8x_1 + 2x_2 = 40$	
x_1	x_2
0	16
12	0

المحور الثالث: الطريقة البياني



الشكل 1

ج- على نفس المعلم نرسم المستقيم Δ. وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الاقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: $Z = 0$ أي : $Z = 100x_1 + 60x_2 = 0$

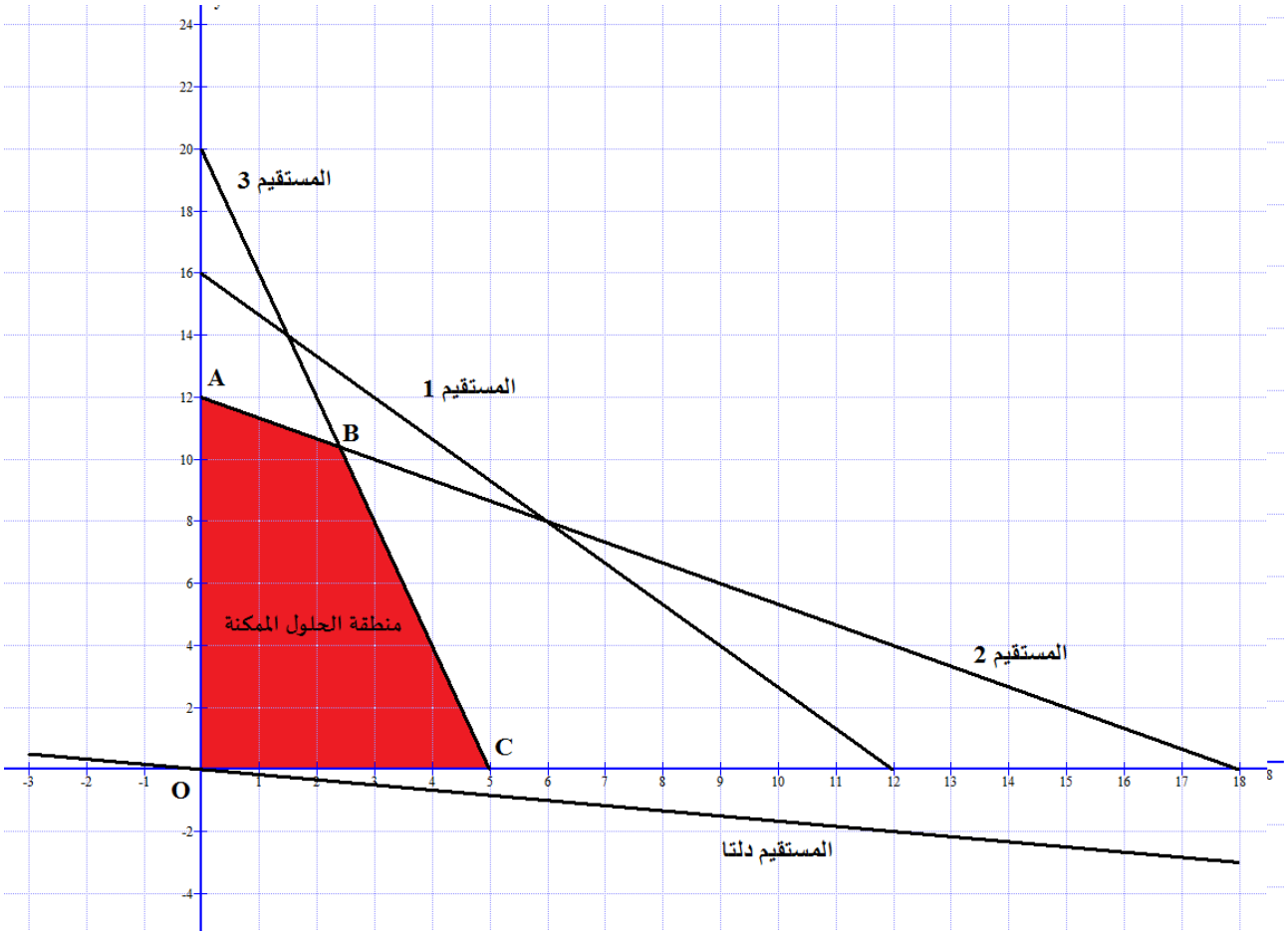
المستقيم Δ يمر من النقطتين:

$100x_1 + 60x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	-5
-3	5

ويكفي تحديد نقطة واحدة فقط لكونه يمر إلزامًا بنقطة المبدأ.

بعد رسم المستقيمات المولدة نشطب المناطق التي لا تحقق جميع القيود كما يظهر في الشكل 2-2.

المحور الثالث: الطريقة البياني



الشكل 2

من خلال الشكل نلاحظ أن أية نقطة توجد إلى يمين المستقيم (1) لا تحقق القيد، فلو أخذنا النقطة J على سبيل المثال حيث: $x_1 = 4$ و $x_2 = 16$ لوجدنا أن:

$$8x_1 + 2x_2 = 8 \times 4 + 2 \times 16 = 64 > 40$$

فالقيد إذًا غير محقق على اليمين، لكن أية نقطة على يسار المستقيم (1) فهي تحقق القيد، فلو أخذنا النقطة على سبيل المثال حيث: $x_1 = 2$ و $x_2 = 8$ لوجدنا أن:

$$8x_1 + 2x_2 = 8 \times 2 + 2 \times 8 = 32 < 40$$

فالقيد إذًا محقق وظهر هناك فرق في الطاقة بقيم 8 وحدات. ومن جهة أخرى فإن أية نقطة على طول المستقيم (1) تحقق القيد بالتمام أي تحقق المساواة، وهي بذلك تستنفد كل الطاقة المتاحة.

بتطبيق نفس المبدأ نجد أن كل المناطق الموجودة على يمين المستقيمات (1) ، (2) و (3) لا تحقق القيود، بينما كل المناطق التي هي على يسار كل مستقيم فهي تحقق القيد، وبمعنى آخر فإن أية نقطة على المستقيم (1) أو على يساره تحقق متراجحة القيد وأي نقطة على يمينه لا تحقق تلك المتراجحة، وأية نقطة على المستقيم (2) أو

المحور الثالث: الطريقة البياني

على يساره تحقق متراجحة القيد وأية نقطة على يمينه لا تحقق تلك المتراجحة، وبالمثل فإن أية نقطة على المستقيم (3) أو على يساره تحقق متراجحة القيد وأية نقطة على يمينه لا تحقق تلك المتراجحة.

كما أن قيد عدم السالبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور الأفقي وكل المناطق التي هي إلى يسار المحور العمودي مرفوضة وبالتالي فإنه لا توجد سوى منطقة واحدة هي التي تحقق القيود آنيا وتشمل جميع النقاط الموجودة داخل المنطقة OAEG أي (المنطقة غير المشطبة) وتسمى هذه المنطقة **بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة الحلول المقبولة.**

عند تحريك المستقيم Δ إلى الأعلى نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقطة E وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة وهي نقطة تقاطع المستقيمين (1) و (2) إذ نجد قيمة المتغيرين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة x_1 وإمداد مستقيم موازي للمحور الأفقي انطلاقا من النقطة E فنجد قيمة x_2 عند نقطة تقاطعه مع المحور العمودي، و إما أن نجد قيمة المتغيرين بحل معادلتي المستقيمين حلاً مشتركًا كما يلي:

مستقيم (1) $8x_1 + 2x_2 = 40$

مستقيم (2) $6x_1 + 9x_2 = 108$

بضرب معادلة المستقيم (1) في 3 ومعادلة المستقيم (2) في -4 نجد:

$$\begin{array}{r} 24x_1 + 6x_2 = 120 \\ -24x_1 - 36x_2 = -432 \\ \hline -30x_2 = -312 \end{array}$$

بجمع المعادلتين نجد :

ومنه يكون: $x_2 = \frac{-312}{-30} = 10.4$

بالتعويض في إحدى المعادلات نجد: $x_1 = 2.4$

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذان يحققان أعلى قيمة للدالة الاقتصادية هما: $x_1 = 2.4$, $x_2 = 10.4$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: $8 \times 2.4 + 2 \times 10.4 = 40$ قيد محقق تماما.

القيد الثاني: $6 \times 2.4 + 9 \times 10.4 = 108$ قيد محقق تماما.

القيد الثالث : $8 \times 2.4 + 26 \times 10.4 = 81.6 < 96$ قيد محقق وتبقى طاقة غير مستعملة قيمتها 14.4 ساعة عمل.

ولمعرفة القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصـــــل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي: $Z = 100x_1 + 60x_2 = 100 \times 2.4 + 60 \times 10.4 = 864$

وهي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية ولا يمكن أن توجد أية قيـم أخرى للمتغيرتين تعطيان أعلى من هذه القيمة للدالة الاقتصادية وتحقق في نفس الوقت جميع القيود.

نظرية: إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرتين، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضـلع منطقة الحل الممكن (راتول، 2008، صفحة 31).

ثانيا: حالة التدفئة: لإيجاد الحل الأمثل بالطريقة البيانية في حالة التدنئة نتبع الخطوات التالية:

أ- نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات.

ب- نرسـم الخطوط المسـتقيمة لمعادلات الخطوة (أ) على معلم متعامد، تسـمى المسـتقيمات المحصـل عليها **بالمستقيمات المولدة** .

ج- نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهـي توجـــد إلى يسار المستقيمات في حالة كون القيد **أكبر من** وإلى يمينه في حالة **القيد أقل من.**

د – نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود وهي في الغالب توجد إلى يمين المسـتقيمات المولدة والحلول الممكنة أو حيز الإمكان.

هـ-نجعل دالة الهدف معدومة أي نساويها إلى الصفر، ونرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسميه **المستقيم Δ.**

و- نحرك المسـتقيم Δ بصـفة متوازية اتجاه رؤوس المنطقة التي تحقق القيود المحصـل عليها من المسـتقيمات المولدة في الخطوة د، وتكون النقطة التي تحقق أقل قيمة للدالة الاقتصـادية – دالة الهدف- هي أول نقطة يصـل إليها المستقيم Δ عند تحريكه إلى الأعلى بصفة موازية لأصله، وهي نقطة حاصلة من نقاطع عدة مستقيمات.

ل- نوجد إحداثيات هذه النقطة إما بالحل المشـترك أو بالإسـقاط الهندسـي، فنحصـل بذلك على قيمة المتغيرتين اللتين تدنيان الدالة الاقتصادية.

م- نعوض قيم المتغيرات المحصل عليها في دالة الهدف فنحصل على القيمة الدنيا لها.

ملاحظة: في حالة عدم التمكن من تحديد أول نقطة يصـل إليها المسـتقيم، بسـبب عدم التمكن من تمييزها، نوجد قيم المتغيرات عند النقـــــاط المشـتبه فيها ثم نعوضـها في دالة الهدف، ونأخذ النقطة التي تعطي أقل قيمة للدالة الاقتصادية.

المحور الثالث: الطريقة البياني

المثال (03): أوجد حل أمثل للبرنامج التالي باستعمال الطريقة البيانية:

$$Min: Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل: المستقيمات المولدة المحصل عليها هي:

$3x_1 + 2x_2 = 6$	$6x_1 + x_2 = 6$	$x_2 = 2$

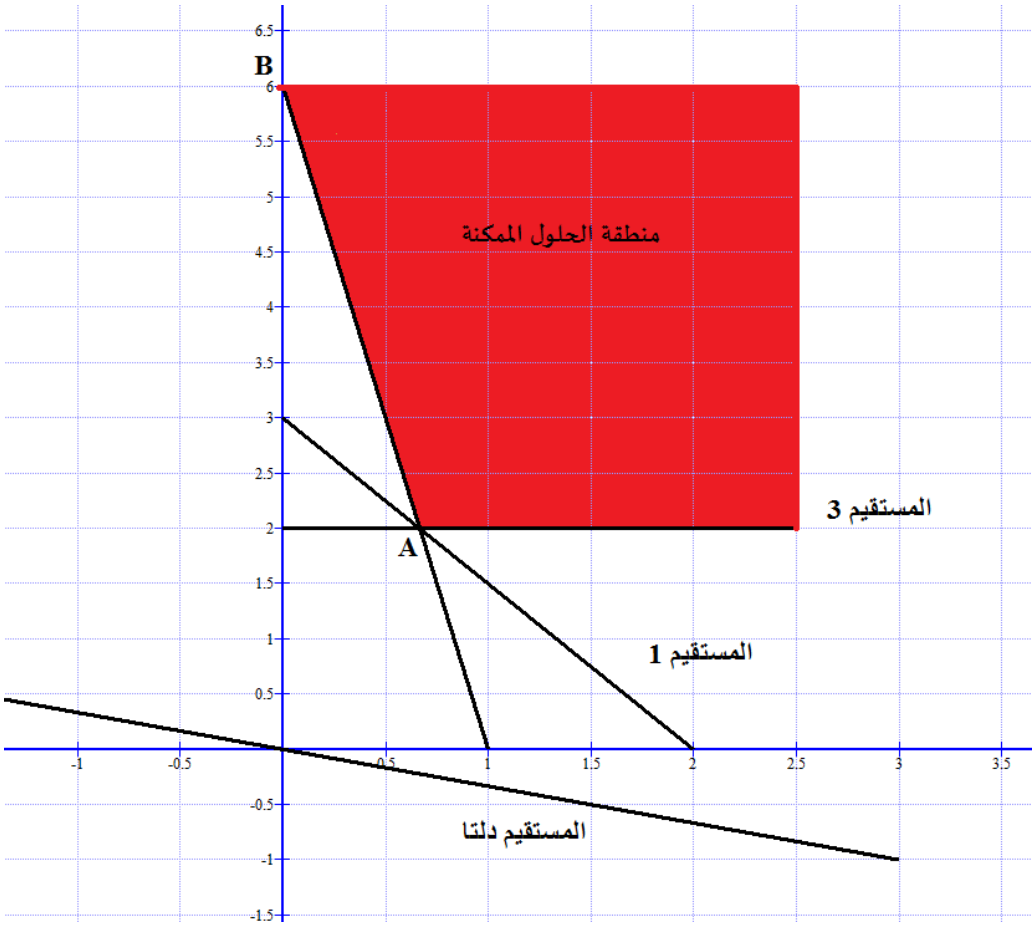
المستقيم 3.	
$3x_1 + 2x_2 = 6$	
x_1	x_2
0	3
2	0

المستقيم 2.	
$6x_1 + x_2 = 6$	
x_1	x_2
0	6
1	0

المستقيم Δ.	
$Z = 10x_1 + 30x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	-1
-3	1

نقوم برسم هذه المستقيمات على معلم متعامد ونحدد منطقة الحل المقبول، وهي المنطقة غير المشطبة في الشكل 2−3 فتكون أية نقطة على الخط 2 أو إلى يمينه غير المشـطب تحقق جميع القيود وأية نقطة على الخط 3 أو إلى أعلاه غير المشـطب تحقق جميع القيود، غير أنه بالنسـبة للخط 2 فإنه لا توجد سـوى نقطة واحدة فقط وهي التي تحقق جميع القيود (شكل 2−3)، وعليه يكون الحل في أحد الرأسين إما A و B ، غير أنه عند تحريك المستقيم Δ إلى أعلى نجد أن أول رأس يصـــل إليه في منطقة الحل المقبول هو A وبالتالي فقيم المتغيرتين اللتين تحققان أدنى قيمة للدالة الاقتصادية هي نقطة التقاطع بين المستقيمات الثلاثة ولإيجادها يكفي أن ننزل من هذه النقطة شـــاقولاً على المحور الأفقي فنجد قيمة x_1 المقابلة.

المحور الثالث: الطريقة البياني



شكل 2-3

ونمد خط موازي للمحور x_1 فيتقاطع مع المحور العـودي عنـد نقطة تحدد قيمة x_2 ، أو أن نحل معادلات هذه المستقيمات حلاً مشتركًا، وعليه نجد القيمتين التاليتين: $x_1 = 2/3 = 0.66$, $x_2 = 2$

وهما قيمتان تجعلان الدالة الاقتصـادية في أدنى قيمة لها وفي نفس الوقت تجعلان كل القيود محققة، حيث نجد القيمة العظمى للدالة الاقتصادية وهي:

$$Z = 10x_1 + 30x_2 = 10(0.66) + 30(2) = 66.66$$

ثالثا: حالات خاصة في الحل البياني:

يمكن أن نصادف عدة حالات خاصة أثناء إيجاد الحل بالطريقة البيانية منها ما يلي:

1- تعدد الحلول: يمكن أحيانًا أن نصـادف أكثر من حل واحد، وهي المسـماة بتعدد الحلول، وفيها نجد على الأقل أن رأسـين من رؤوس مضـلع حيز الإمكان يتماسـان في آن واحد مع المسـتقيم Δ بحيث يكونا آخر رأسـين يصلهما في حالة التعظيم أو أول رأسين يصلهما في حالة التدنئـة، كما يوضح ذلك المثال التالي (بداوي، 2022، صفحة 74):

المحور الثالث: الطريقة البياني

المثال (04): أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$Max: Z = 2x_1 + 4x_2$$

$$S/C \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

معادلات المستقيمات المولدة هي:

نستخرج المستقيمات المولدة وذلك بتحويـــل المتراجحات إلى معادلات كما يلي:

$4x_1 + 8x_2 \leq 40$	$x_1 \leq 6$	$x_2 \leq 4$

المستقيم الأول يرسم من خلال النقطتين التاليتين:

الأولى: $x_1 = 0\ ,\ x_2 = 5$

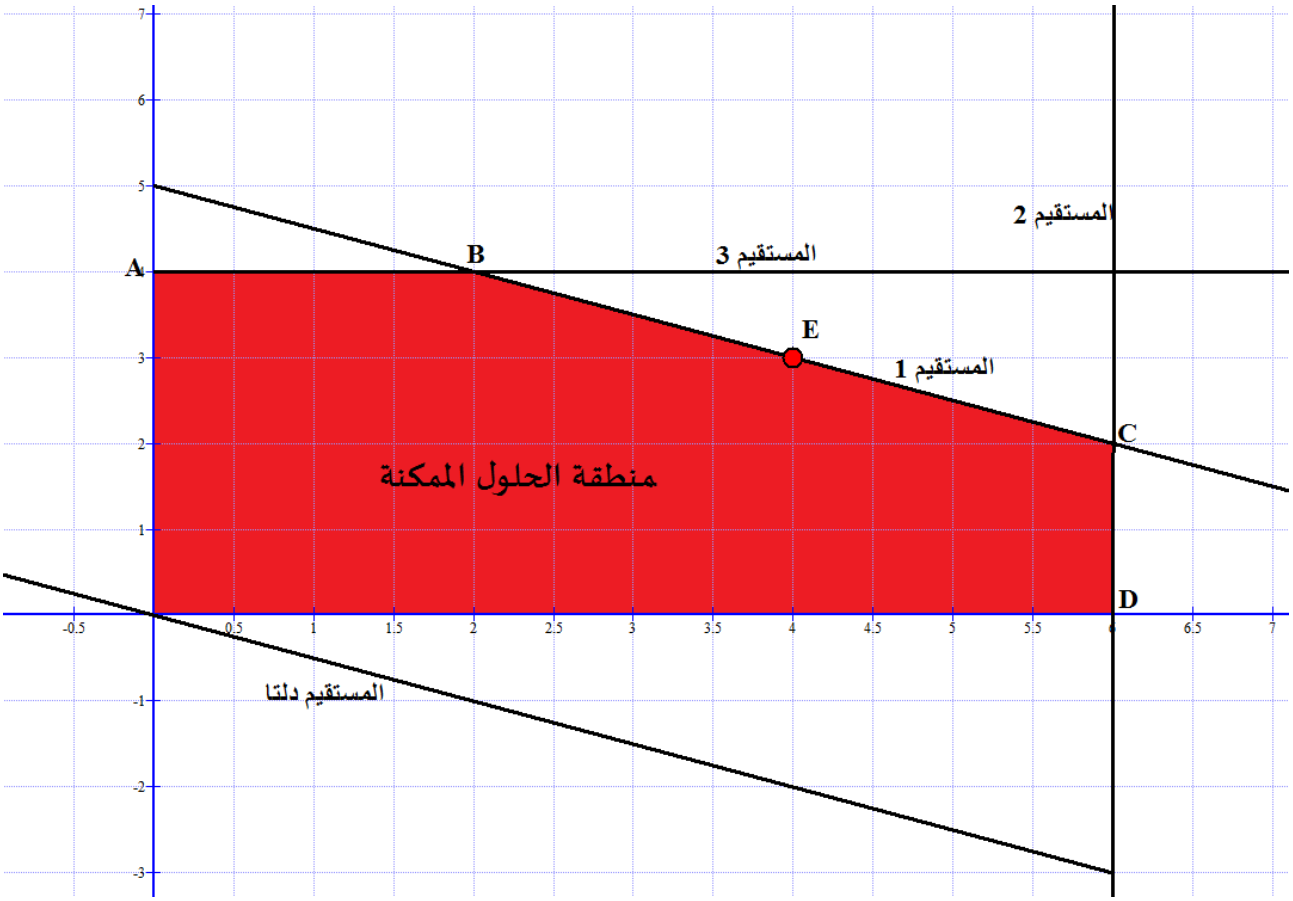
الثانية: $x_1 = 10\ ,\ x_2 = 0$

يلاحظ من خلال الشكل 2-4 أنه عند تحريك المستقيم Δ إلى اليمين فإنه يلتقي مع رأسي منطقة الحل الممكن B و C في نفس الوقت، وبالتالي فإن كلا النقطتين تعطيان حلاً أمثلا للدالة الاقتصادية.

ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض في هذه الدالة.

النقطة B تعطي : $x_1 = 2\ ,\ x_2 = 4$

المحور الثالث: الطريقة البياني



شكل 2-4.

وقيمة دالة الهدف عندها هي: $Z = 2x_1 + 4x_2 = 2 \times 2 + 4 = 20$

النقطة C تعطي : $x_1 = 6, \quad x_2 = 2$

وقيمة دالة الهدف عندها هي : $Z = 2x_1 + 4x_2 = 2 \times 6 + 4 \times 2 = 20$

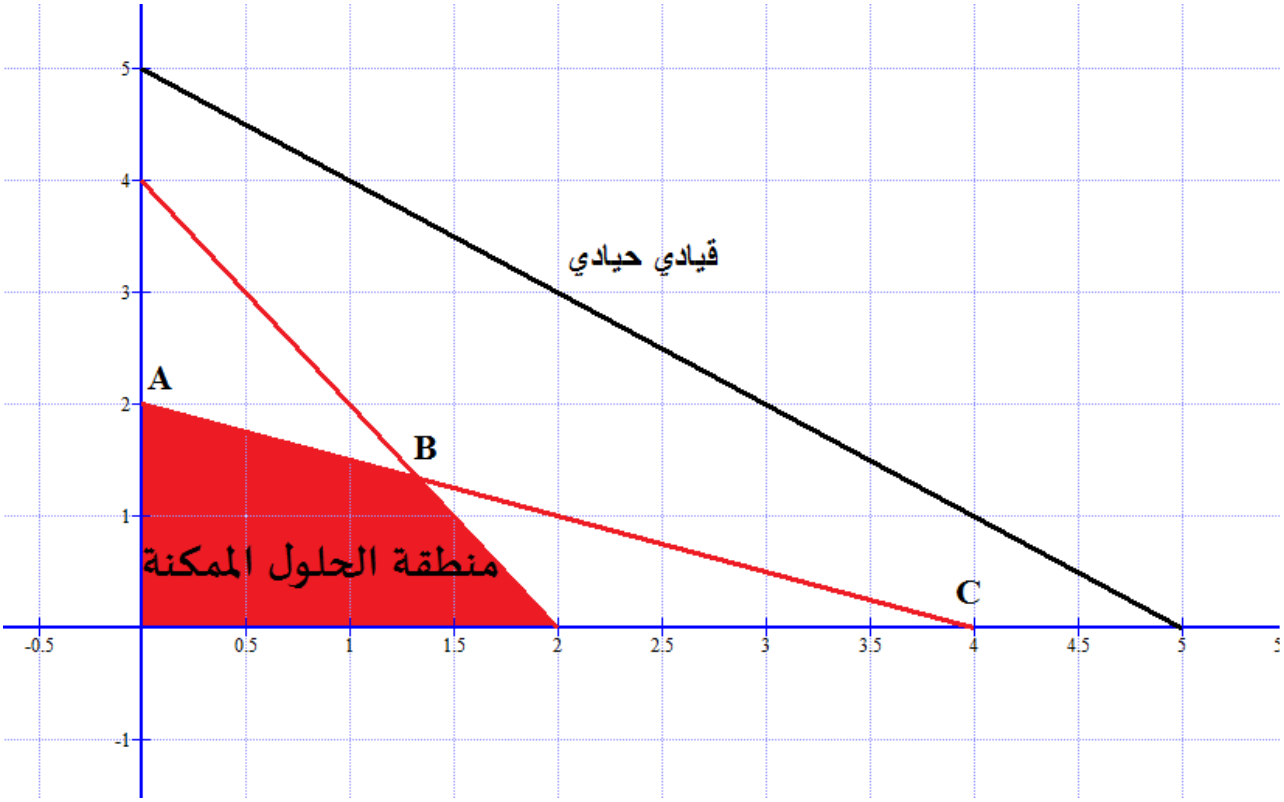
ويلاحظ أن النقطتين أعطتا نفس القيمة للدالة الاقتصادية. والواقع أنه ليست هتين النقطتين فقط تعطيان أكبر قيمة للدالة الاقتصادية، لكن أية نقطة أخرى موجودة على طول المستقيم BC. فلو أخذنا النقطة E على سبيل المثال حيث: $x_1 = 4, \quad x_2 = 3$ فإن قيمة دالة الهدف هي: $Z = 2x_1 + 4x_2 = 20$

وهي نفس القيمة المحصل عليها عند رأسي منطقة الحل الممكن.

تفيد هذه الحالة المُسيِّر في أنها توفر له المرونة في اتخاذ القرار لكونها تتيح له بدائل عديدة.

تصادف هذه الحالة خاصة عندما يكون المستقيم Δ موازيًا لأحد المستقيمات المولدة في سقف منطقة الحل الممكن في اتجاه اليمين في حالة التعظيم أو في أرضية منطقة الحل الممكن في اتجاه اليسار في حالة التدنئة، حينئذ يكون ميل هذا المستقيم وميل المستقيم Δ متساويان (راتول، 2008، صفحة 33).

2- حالة حياد أحد القيود: عند تعدد القيود فإنه يمكن أن نجد أحد مستقيمات هذه القيود لا يلمس منطقة الحل الممكن في أية نقطة وحينها يكون هذا القيد حياديًا تمامًا، حيث يمكن حذفه كلية من البرنامج دون أن يحدث ذلك أي تأثير على النظام وتظهر هذه الحالة كما في الشكل 2-5.



3-حالة استحالة الحل: الحالة التي تكون فيها القيود متناقضة، حيث لا تتحقق لنا أية منطقة للحل الأمثل، كما في المثال التالي (بداوي، 2022، صفحة 77):

مثال 2-4:

$$Max\ Z = 20x_1 + 4x_2$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 20 \\ x_1 \geq 0\ , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4- لا نهائية الحالة الاقتصادية: في حالة التعظيم تكون غالبية القيود أقل أو تساوي مقدار ثابت، غير أنه في بعض الأحيان يكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود، فتكون هذه الأخيرة كلها أكبر أو تساوي في حالة التعظيم، وهذا ما يجعل دالة الهدف تأخذ قيمة لانهائية، ولا يمكن حينئذ تحديد حل نهائي ومحدد للدالة.

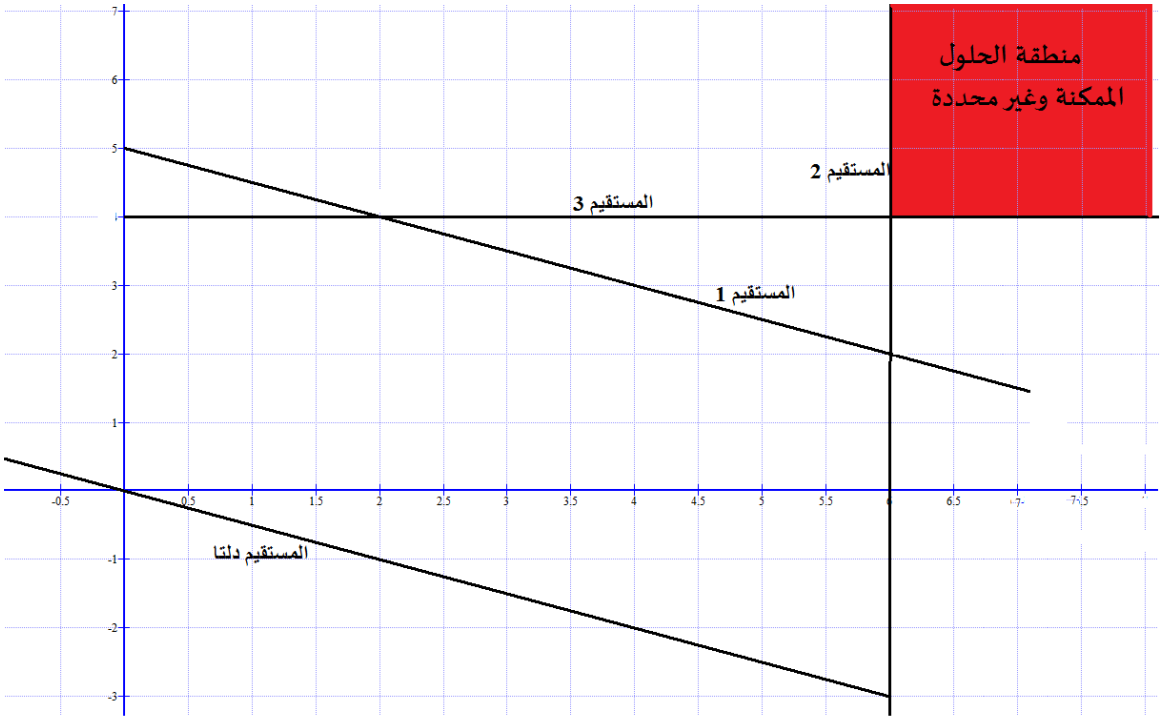
المثال (05): حدد منطقة الحل الممكن للبرنامج التالي. ماذا تستنتج؟.

$$Max : Z = 2x_1 + 4x_2$$

المحور الثالث: الطريقة البياني

$$S/C \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \geq 40 \\ x_1 \geq 6 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وباستعمال الطريقة البيانية نلاحظ من خلال الشكل 2-6 أنه توجد منطقة لانهائية تحقق دالة الهدف، فأية قيمة في اتجاه السهم تحقق دالة الهدف، وبالتالي نقول أن دالة الهدف لانهائية.



شكل 2-6.

تمارين:

تمرين 1: مؤسسة صناعية تنتج أجهزة الطبخ الكهربائية وأجهزة الطبخ الغازية، بغية معرفة الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين. لتحقيق أعظم ربح ممكن قامت بجمع البيانات التالية:

1 - المنتوجان يمران عبر ورشتين أساسيتين، هما ورشة التركيب يعمل بها 5 عمال، وورشة الإعداد النهائي ويعمل بها 4 عمال، طاقة العمل اليومي القصوى لكل عامل 8 ساعات.

2- أن المنتوج الأول يتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى و2 ساعة عمل في الورشة الثانية، بينما المنتوج الثاني يتطلب 2 ساعة عمل في الورشة الأولى و4 ساعات عمل في الورشة الثانية.

3-سعر المنتوج الواحد من النوع الأول هو 500 دج ويكلف 200 دج وسعر المنتوج الواحد من النوع الثاني هو 300دج ويكلف 100 دج.

المحور الثالث: الطريقة البياني

المطلوب:

1- اكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المؤسسة.

2- باستعمال الطريقة البيانية، أوجد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين لتعظيم ربح المؤسسة.

تمرين 2: مصـنع للإلكترونيات الصـغيرة ينتج نموذجين من الآلات الحاسـبة هما: مصـنع الحاسـبة هما: 1- الحاسب التجاري. -2 الحاسب العلمي.

كل نوع من الحاسبين يمر عبر 3 أقسام هـي:

- قسم التسليك: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 55 ساعة عمل يوميا.
- قسم التجميع عدد ساعات العمل المتاحة به هو 72 ساعة عمل يوميًا.
- قسم الاختبار: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 20 ساعات عمل يوميًا.

الحاسب التجاري الواحد يتطلب 2 ساعة عمل في قســـم التسليك و12 ساعة عمل في قسم التجميع و2 ساعة عمل في قسم الاختبار.

الحاسب العلمي الواحد يتطلب 4 ساعات عمل في قسم التسليك، 6 ساعات عمل في قسم التجميع، و4 ساعات عمل في قسم الاختبار.

إذا كان ربح الحاسب التجاري الواحد هـو 25 دينار وربح الحاسب العلمي الواحد هو 30 دينار.

المطلوب:

1- اكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المصنع.

2- أوجد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين والتي تجعل الربح في أعظم قيمة باستخدام الطريقة البيانية.

3- حدد الطاقات غير المستغلة في كل قسم إن وجدت.

تمرين 3: أوجد حل للتمرين رقم 5 من سلسلة تمارين الفصل السابق باستعمال الطريقة البيانية.

تمرين 4: باستخدام الطريقة البيانية أو جد حل لبرامج التعظيم التالية:

$$Max: Z = x_1 + x_2$$
$$S/C \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Max: Z = 10x_1 + 10x_2$$
$$S/C \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Max: Z = 150x_1 + 200x_2$$

$$Max: Z = 4x_1 + 3x_2$$

المحور الثالث: الطريقة البياني

$$S/C\begin{cases}20x_1+30x_2\le 240\\10x_1+25x_2\le 500\\15x_1+40x_2\le 550\\x_1\ge 0\,,x_2\ge 0\end{cases}\qquad S/C\begin{cases}x_1+35x_2\le 9\\2x_1+x_2\le 8\\x_1+x_2\le 6\\x_1\ge 0\,,x_2\ge 0\end{cases}$$

تمرين5: باستخدام الطريقة البيانية أوجد حل لبرامج التدنئة التالية إن أمكن:

$Min: Z=80x_1+100x_2$ $S/C\begin{cases}8x_1+6x_2\ge 24\\10x_1+4x_2\ge 20\\6x_1+12x_2\ge 24\\x_1\ge 0\,,x_2\ge 0\end{cases}$	$Min: Z=25x_1+30x_2$ $S/C\begin{cases}4x_1+7x_2\ge 1\\8x_1+5x_2\ge 3\\6x_1+9x_2\ge -2\\x_1\ge 0\,,x_2\ge 0\end{cases}$	$Min: Z=20x_1+30x_2$ $S/C\begin{cases}2x_1+14x_2\ge 4\\16x_1+10x_2\ge 8\\3x_1+9x_2\ge 6\\x_1\ge 0\,,x_2\ge 0\end{cases}$

المحور الرابع: البرمجة الخطية – طريقة السمبلكس

لأي مشـــكلة في البرمجة الخطية هناك مجموعة من الحلول الأســـاســـية الممكنة. هذه المجموعة من الحلول الأســـاســـية الممكنة هي النقاط المتطرفة في المنطقة الممكنة وليس كلها المنطقة الممكنة (والتي لديها مجموعة لا حصر لها من الحلول) (Ling–Chieh, p. 4). الفكرة العامة للطريقة البسيطة هو الانتقال من حل أساسي ممكن إلى حل أساسي آخر ممكن بحيث الحل الأساسي الجديد الممكن له قيمة أفضل. هذه النقطة القصوى في الحل الأساسي الممكن تتوافق مع الحل الأمثل في طريقة التمثيل البياني يصعب حل المسائل التي يزيد عدد متغيراتها عن اثنين، ولكن غالباً ما تكون المتغيرات في المسائل أكثر من متغيرين، لذا نلجأ إلى الطريقة المبسطة السمبلكس لحل مثل هذه المســـائل (الهزاع الصـــمادي ,2009صـــفحة44) ، وهي طريقة للعالم الأمريكي جورج وانتزج، الذي استخدمها عام 1945 .

حيث تتلخص طريقة الحل باستخدام Simplex Method بالخطوات التالية :

1. بناء النموذج الرياضي للمسألة.
2. إعادة كتابة النموذج الرياضي حسب الشكل القياسي Standard forum.

وهو على الصورة العامة التالية:

$$Min\ (Max)Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

$$S.T:$$

$$\begin{matrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots . + a_{1n}X_n = b_1 \\ \begin{bmatrix} a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots . a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \end{bmatrix} \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m \end{matrix}$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots X_n \geq 0$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots\dots\dots b_m \geq 0$$

3. إيجاد الحل الأولي الممكن .Initial Feasible Solution.
4. ترتيب الحل الأولي في الجدول.
5. اتباع خطوات معينة لإيجاد الحل الأمثل والتي سنوضحها في المثال التالي:

معلومة: يمكن إعادة كتابة الصورة العامة بطريقة المصفوفة كالتالي:

$$Max(Min)Z = C^TX$$

$$AX = b$$

$$X_i \geq 0 \quad i = 1,2, \dots\dots, n$$

$$b_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots..,m$$

المثال (06): اكتب النموذج الرياضي التالي حسب الشكل القياسي:

$$Max\ Z = 5X_1 + 3X_2$$

$$S.T: \quad 2X_1 + X_2 \leq 10$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 24$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

$$MAX \quad Z - 5X_1 - 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

$$S.T: 2X_1 + X_2 + S_1 = 10$$

$$4X_1 + 3X_2 + S_2 = 24$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

هنا نلاحظ أنه قد تم تحويل القيود (المتباينات) ذات العلاقة أقل أو يساوي (≤) إلى معادلات بإضافة متغير حر Slack Variable (S) إلى كل قيد من القيود التي تحمل إشارة ≤ ، وهذا المتغير يعني الفرق بين الوقت اللازم للإنتاج والوقت المتوفر للمصنع أو الفرق بين الكمية المستخدمة في الإنتاج والكمية المتوفرة للمصنع (نور الشمرتيوآخرون ,2007صفحة45) .

المثال (07): اكتب النموذج الرياضي التالي حسب الشكل القياسي:

$$MIN \ \ Z = 2X_1 + X_2$$

$$S.T: 3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + X_2 \geq 2$$

$$X_1, X_2, \geq 0$$

الحل:

$$Min\ Z - 2X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

$$S.T: 3X_1 + X_2 - S_1 \geq 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_2 \geq 6$$

$$X_1 + X_2 - S_3 \geq 2$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

استخدام طريقة السمبلكس Simplex Method في حل مسائل تعظيم الأرباح Maximization:

المثال (08): مستخدمًا طريقة السمبلكس أوجد الحل الأمثل للنموذج الرياضي التالي:

$$MAX\ Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$S.T:$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: في هذا المثال سنوضح كل خطوة بالتفصيل:

1. تحويل دالة الهدف Z إلى دالة صفرية أي مساوية للصفر كالتالي:

$$Z - 2X_1 - 3X_2 = 0$$

2. تحويل جميع القيود من متباينات إلى معادلات وذلك بإضافة متغير حر جديد يسمى بالمتغير الإضافي Slack Variable وسوف نرمز له بالرمز S_i وذلك بعدد المعادلات. حيث تمثل i عدد المتغيرات.

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 20$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 12$$

3. إضافة شرط عدم السلبية إلى جميع المتغيرات في المسألة.

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

يمكننا ترتيب الخطوات السابقة مع بعضها البعض على النحو التالي:

$$MAX\ Z - 2X - 3X = 0$$

$$S.T:$$

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 20$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 12$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

4. نكون جدولاً يتضمن معاملات المتغيرات في دالة الهدف والقيود بالصيغ الجديدة ويسمى هذا الجدول بجدول الحل الابتدائي كما يلي:

Basic Variable	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	1	-2	-3	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	20
S_2	0	1	1	0	1	12

من الجدول يمكن إيجاد الحل الابتدائي وذلك كما يلي:

$$X_1 = X_2 = 0$$
$$S_1 = 20\,, S_2 = 12$$
$$Z = 0$$

- لإيجاد قيم المتغيرات في هذا الجدول وفي أي جدول آخر نأخذ المتغيرات الموجودة في عمود Basic Variable ونقارنها بما يقابلها من قيم في عمود Solution
- تسمى المتغيرات الأساسية X_1, X_2 متغيرات داخلة **Entering variable** وهي المتغيرات التي تؤثر على قيمة دالة الهدف.
- أما المتغيرات S_1, S_2, فهي المتغيرات الخارجة **Leaving Variable** وهي لا تؤثر على قيمة دالة الهدف.

معلومة:

1. طريقة الســـمبلكس تفترض عند بدء الحل أن يكون الفرق بين عدد المتغيرات ويرمز له بالرمز n وعدد قيود المسألة ويرمز له بالرمز m مساوياً للصفر (الهزاع الصمادي ,2009صفحة47) .

ففي المثال أعلاه عدد المتغيرات يساوي أربعة X_1, X_2, S_1, S_2 أي أن $n = 4$ وعدد القيود يساوي اثنين أي أن $m = 2$ وعليه فإن $n - m = 2$، وبما أن الناتج لا يساوي صفرًا يجب أن نضيف متغيرين بناءً على الفرق بين m و n وتكون قيمة هذين المتغيرين صفر كي يتم البدء في حل أساسي ممكن Basic.Feasible Solution.

2. وفي طريقة السمبلكس تكون قيم المتغيرات الأصلية مساوية للصفر في بداية الحل ففي المثال أعلاه كانت قيمة $X_1 = 0,\ X_2 = 0$.

3. يتم تحويل المتغيرات من متغيرات غير أساسية (مساوية للصفر) إلى متغيرات أساسية (لها قيمة معينة)، حسب قواعد وشروط كما في النقطة رقم 5.

5. اختيار المتغيرات الداخلة Entering Variable والمتغيرات الخارجة Leaving Variable.

معلومــة:

- **المتغير الداخل:** هو متغير غير أساسي والمراد تحويله إلى متغير أساسي مثل X_1, X_2.
- **المتغير الخارج:** هو متغير أساسي يراد تحويله إلى متغير غير أساسي S_1, S_2

كيفية تحديد المتغير الداخل:

المتغير الداخل هو: المتغير الذي يشتمل على أكبر معامل سالب في دالة الهدف بجدول الحل وفي مثالنا يكون المتغير X_2 هو المتغير الذي يشــتمل على أكبر معامل بإشــارة ســالبة $3-$ في معادلة دالة الهدف Z وعليه يكون المتغير الداخل هو X_2.

. كيفية تحديد المتغير الخارج:

نحدد المتغير الخارج وذلك عن طريق تقســـيم الثوابت تحت عمود الحل Solution في الجدول على المعاملات إزاء كل منها والموجودة تحت عمود المتغير الداخل مع إهمال المعاملات الســـالبة والصـــفرية. ويكون المتغير في الصف الذي يمثل أقل نسبة ناتجة عن تقسيم الثوابت على المعاملات الموجبة تحت المتغير الداخل ويمكن تلخيص هذه الخطوة بالجدول التالي:

$Basic\ Var$ متغيرات أساسية	عمود المتغير الداخل X_2	Solution	ناتج القسمة
S_1	2	20	$20/2 = 10$
S_2	1	12	$12/1 = 12$

المتغير الداخل هو X_2، والمتغير الخارج هو S_1 (أقل نسبة ناتجة عن تقسيم الثوابت على المعاملات).

6. لبناء الجدول رقم 2:

- نقوم بتقســـيم جميع القيم إزاء المتغير الخارج S_1 أو معادلة S_1 على العنصـــر الممهد Pivot Element ويسمى ناتج القسمة بالمعادلة الممهدة Pivot Equation ويتم وضعها في الجدول رقم2

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	1	$-1/2$	0	$3/2$	0	30
X_2	0	$1/2$	$2/2=1$	$1/2$	0	$20/2=10$
S_1	0	$1/2$	0	$-1/2$	1	2

جدول رقم 2

–نقوم بتعبئة بقية القيم في الجدول بعد تحديد معادلة العنصر الداخل الجديد X_2 على النحو التالي:

القانون (المعادلة):

سطر القيم الجديد=سطر القيم القديم – سطر القيم المقابلة تحت عمود المتغير الداخل × المعادلة الممهدة.

وبالتالي نملأ الجدول رقم 2 كالتالي:

- لإيجاد معادلة Z الجديدة.

معادلة Z الجديدة = سطر القيم القديم لـ Z – المعادلة الممهدة × 3

$$-3\times\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 10\\\hline\end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -2 & -3 & 0 & 0\\\hline\end{array} =$$

لتصبح معادلة Z الجديدة = $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -1/2 & 0 & 3/2 & 0 & 30\\\hline\end{array}$

لإيجاد معادلة S_2 الجديدة = معادلة S_2 القديمة – المعادلة الممهدة × 1

1×	1/2	1	1/2		0	10	–	1	1	0	1	12
1/2	0	−1/2	1	2	∴ المعادلة الجديدة لـS_2 =						

معلومة هامة: نعرف بأننا وصلنا إلى الحل الأمثل في حالة مسائل:

1. التعظيم Maximization عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف في جدول الحل الأمثل أكبر من أو تساوي صفر $(0 \geq)$، نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، أما في حالة في وجود معاملات سالبة في دالة الهدف فإن الحل لم ينته ويجب إعادة الخطوات السابقة.

2. التقليل Minimizations: عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف في جدول الحل الأمثل أقل من أو تساوي صفر $(0 \leq)$، نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل أما في حالة وجود معاملات موجبة في دالة الهدف فإن الحل لم ينتهِ ويجب إعادة الخطوات السابقة.

7–في المثال السابق لم نصل إلى الحل الأمثل بعد وذلك لوجود معامل سالب في دالة الهدف وهو معامل X_1 و يساوي $1/2-$ لذلك نكرر الخطوات 5 و 6 كالتالي:

العنصر الداخل هو X_1 وذلك لأنه يمتلك أعلى معامل سالب ويساوي $1/2 -$ ولتحديد المتغير الخارج نقوم بقسمة الثوابت تحت عمود الحل على المعاملات تحت عمود المتغير الداخل X_1 كالتالي:

$Basic\ Varible$ متغيرات أساسية	عمود المتغير الداخل X_1	Solution	ناتج القسمة
X_2	$1/2$	10	$10(1/2) = 20$
S_2	$1/2$	2	$2(1/2) = 4$

لذا يكون العنصر الخارج S_2 لأن ناتج القسمة أقل ويحل محله X_1 العنصر الممهد هو $1/2$ ومن ثم نقسم معادلة S_2 على العنصر الممهد $1/2$.

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	1	0	0	1	1	32
X_2	0	0	1	1	-1	8
X_1	0	1	0	-1	2	4

تم ملء القيم في الجدول السابق كالتالي:

1. معادلة Z الجديدة = سطر القيم القديم لـZ – المعادلة الممهدة $\times (-1/2)$

$-1/2\times$	1	0	-1	2	4	-	$-1/2$	0	$3/2$	0	30	=

معادلة Zالجديدة =

0	0	1	1	30

2. معادلة X_2الجديدة :سطر القيم القديم لـX_2 – المعادلة الممهدة $\times (1/2)$

$(1/2)\times$

1	0	-1	2	4	-	1/2	1	1/2	0	10	=

0	1	1	-1	8	∴ السطر الجديد لـX_2 =

يتضـــح من الجدول رقم 3 أن جميع معاملات دالة الهدف Z موجبة. لذا فإننا قد توصـــلنا إلى الحل الأمثل للمسألة وعليه تكون قيم المتغيرات كالتالي: $X_1 = 4 \quad , \quad S_1 = 0$

$$X_2 = 8 \quad , \quad S_2 = 0$$

وقيمة الأرباح: $Z = 32$

المثال (09): أوجد الحل الأمثل للنموذج الرياضي التالي مستخدماً طريقة السمبلكس Simplex Method

$$MAX\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$S.T:$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 460$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 420$$

$$X_1, X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل: نكتب النموذج على الصورة القياسية مع جعل معادلة $Z = 0$.

$$3X_1 - 2X_2 - 5X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 + S_1 = 430$$

$$3X_1 + 2X_3 + S_3 = 460$$

$$X_1 + 4X_2 + S_3 = 420$$

$$X_1, X_2, X_20$$

$$S_1, S_2, S_3 =\geq 0$$

ثم تقوم بتعبئة جدول الحل الابتدائي كما يلي:

Basic	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_2	**Solution**
Z	1	−3	−2	−5	0	0	0	0
S_1	0	1	2	1	1	0	0	430
S_2	0	3	0	2	0	1	0	460
S_3	0	1	4	0	0	0	1	420

2. العنصـر الداخل هو X_3 لأنه يمتلك أكبر معامل سـالب والعنصـر الخارج هو S_2 وأيضـا العنصـر الممهد يمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

$Basic\ Var$ متغيرات أساسية	عمود المتغير الداخل X_3	Solution	ناتج القسمة
S_1	1	430	$430/1 = 430$
S_2	2	460	$460/2 = 230$
S_3	0	420	لا يجوز القسمة على صفر

لتصبح البيانات الجديدة كما هي في الجدول رقم 2 التالي:

Basic	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Solution
Z	1	$9/2$	2−	0	0	$5/2$	0	1150
S_1	0	$-1/2$	2	0	1	$-1/2$	0	200
X_3	0	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
S_3	0	1	4	0	0	0	1	420

جدول رقم 2

واضــح من الجدول رقم 2 أننا لم نصــل إلى الحل الأمثل لوجود معاملات ســالبة في دالة الهدف وعليه يكون العنصـر الداخل هو X_2 والعنصـر الخارج هو S_1 والعنصـر الممهد هو 2. قم بإجراء الحسـابات اللازمة لينتج لديك الجدول رقم 3 التالي:

Basic	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Solution
Z	1	4	0	0	1	2	0	1350
X_1	0	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
X_2	0	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
S_3	0	2	0	0	2−	0	1	20

يتضــح من الجدول رقم 3 أننا قد توصــلنا إلى الحل الأمثل وذلك لأن جميع معاملات دالة الهدف أكبر أو تســاوي صفر.

وعليه يكون الحل الأمثل على النحو التالي:

$$X_1 = 0, \qquad S_1 = 0$$
$$X_2 = 100, \qquad S_2 = 0$$
$$X_3 = 230, \qquad S_3 = 20$$

وقيمة دالة الهدف: $Z = 1350$

المثال (10): مستخدمًا الطريقة المبسطة أوجد الحل الأمثل للنموذج الرياضي التالي:

$$MAX\ \ Z = 3X_1 + 2X_2$$
$$S.T: X_1 + 2X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + X_2 \leq 8$$
$$-X_1 + X_2 \leq 1$$
$$X_2 \leq 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: نقوم بتعبئة الجدول الابتدائي مباشرة.

$Basic\ Var$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Solution	ناتج القسمة
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	0	لا يجوز القسمة على سالب
S_1	0	1	2	1	0	0	0	6	$6/1 = 6$
S_2	0	2	1	0	1	0	0	8	$8/2 = 4$
S_3	0	$1-$	1	0	0	1	0	1	لا يجوز القسمة على سالب
S_4	0	0	1	0	0	0	1	2	لا يجوز القسمة على صفر

من ناتج القســمة يكون العنصــر الداخل هو X_1 ومعامله $3-$ والعنصــر الخارج هو S_2 وخارج القســمة 4، والعنصر الممهد = 2.

$\boldsymbol{Basic\ Var}$	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{S_1}$	$\boldsymbol{S_2}$	$\boldsymbol{S_2}$	$\boldsymbol{S_3}$	**Solution**	**ناتج القسمة**
Z	1	0	$-1/2$	0	$3/2$	0	0	12	لا يجوز القسمة على سالب
S_1	0	0	$3/2$	1	$-1/2$	0	0	2	$2(3/2) = 4/3$
X_1	0	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4	$4(1/2) = 8$
S_3	0	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5	$5(3/2) = 10/3$
S_4	0	0	1	0	0	0	1	2	$2/1 = 2$

لم نصل إلى الحل الأمثل لأنه ما يزال معامل X_2 سالب ويساوي $1/2-$. لذلك العنصر الداخل الآن هو X_2 والخارج هو S_1 والعنصر الممهد هو 2/3.

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_2	S_3	Solution
Z	1	0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	$38/3$
X_2	0	1	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$4/3$
X_1	0	0	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$10/3$
S_3	0	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$2/3$

يتضح من الجدول أن الحل الذي توصلنا إليه هو الحل الأمثل لأن جميع معاملات Z أكبر أو يساوي صفر ولا يوجد معاملات سالبة وتكون قيمته تساوي $38/3$ وذلك عندما تكون قيم المتغيرات كالتالي:

$$X_1 = 10/3, \quad X_2 = 4/3\,, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \qquad S_3 = 3, S_4 = 2/3\,, \qquad Z = 38/3$$

المثال (11): أوجد الحل الأمثل للنموذج الخطي الرياضي التالي مستخدمًا الطريقة المبسطة.

$$MAX \;\; Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$S.T:$$

$$3X_1 + X_2 \leq 1500$$

$$X_1 + X_2 \leq 1000$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: سوف نبني الجدول مباشرة:

$\boldsymbol{Basic}$	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{S_1}$	$\boldsymbol{S_2}$	**Solution**	**ناتج القسمة**
Z	1	-3	-2	0	0	0	لا يجوز القسمة على سالب
S_1	0	3	1	1	0	1500	$1500/3 = 500$
S_2	0	1	1	0	1	1000	$1000/1 = 1000$

لاحظ أن المتغير الداخل هو X_1 بينما العنصر الخارج هو S_1، والعنصر المحوري هو 3 .

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution	ناتج القسمة
Z	1	0	-1	1	0	1500	لا يجوز القسمة على سالب
X_1	0	1	$1/3$	$1/3$	0	500	$500/(1/3) = 1500$
S_2	0	0	$2/3$	$-1/3$	1	500	$500/(2/3) = 750$

المتغير الداخل هو X_2 والمتغير الخارج هو S_2 والعنصر الممهد هو $2/3$.

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	1	0	0	$1/2$	$2/3$	2250
X_1	0	1	0	$1/2$	$-1/2$	250
X_2	0	0	1	$-1/2$	$2/3$	750

من الجدول السابق يتضح أننا قد وصلنا إلى الحل الأمثل وعليه تكون قيمة المتغيرات هي:

$$X_1 = 250,\ X_2 = 750, \qquad S_1 = S_2 = 0$$

وقيمة الأرباح $Z = 2250$

استخدام طريقة السمبلكس في حل مسائل تخفيض التكاليف Minimizations Problems:

عملية تحويل المتباينات من إشارة أكبر أو يساوي إلى إشارة المساواة تتطلب طرح متغيرات فائضة Surplus Variable من الطرف الأيسر (عبد الله ,2018صفحة52) .

المثال (11): $2X_1 + 3X_2 \geq 1500$

لتحويل القيد التالي إلى قيد مساواة نحتاج إلى طرح المتغير الفائض S_1 من الطرف الأيسر:

$$2X_1 + 3X_2 - S_1 = 1500$$

معلومة:

1. من الشروط الأساسية للبرمجة الخطية ما يسمى بشرط عدم السلبية لجميع المتغيرات مهما كان نوعها.

2. بناءً على النقطة السابقة فإنه في حال التعامل مع المتغيرات الفائضة فإننا نواجه مشكلة في إيجاد الحل الأولي الممكن Starting Solution، حيث يفترض أن تكون قيم جميع المتغيرات سواء كانت أساسية أو مضافة (الحرة أو الفائضة) غير سالبة، فإذا افترضنا أن $X_1 = 0,\ X_2 = 0$ فهذا يعطي قيمة $S_1 = 1500$ وهذا يعني تحقق شرط عدم السلبية، أي أننا لا نستطيع استخدام معادلة القيد بوظيفتها الحالية، وفي هذه الحالة يوجد مشكل في الحل.

3. لحل المشكلة السابقة نضيف متغيرات مصطنعة ونرمز لها بالرمز R وتكون هذه المتغيرات سالبة في دالة الهدف، وعليه يصبح القيد السابق بعد إضافة المتغير المصطنع R إلى المعادلة كالتالي:

$$X_1 + 3X_2 \qquad S_1 + R_1 = 1500$$

4. بعد إضافة المتغير المصطنع فإننا نأخذ هذا المتغير R_1 كمتغير قاعدي في الحل الأولي بطريقة السمبلكس بدل S_1، وبالتالي فإن قيمة R_1 يجب ألا تكون ضمن متغيرات قاعدة الحل الأمثل أي أن قيمة R يجب أن تساوي صفر في الحل الأمثل.

المثال (12): اكتب النموذج الرياضي بالشكل القياسي باستخدام المتغيرات الاصطناعية:

$$Min\ Z = 4X_1 + 5X_2$$

$$S.T:$$

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

$$Min \quad Z = 4X_1 + 5X_2 - MR_1 - MR_2$$

$$S.T: 3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

وعندما تكون $(X_1, X_2, S_1 = 0)$ فإن قيم المتغيرات القاعدية المستعلة لقيود المسألة في الحل الأولي الممكن هي: $R_1 = 3, R_2 = 6, S_2 = 4$

لاحظ أننا أضفنا متغير قاعدة R_2 للقيد الأول والذي يحتوي على إشارة المساواة، وللقيد الثاني تم طرح متغير Slack Variable (S) وإضافة متغير قاعدي R_2.

معلومة: يمكن حل مسائل تخفيض التكاليفMinimization أو المسائل التي تحتوي على إشارة $\geq$ أو = بغض النظر عن نوعية المسألة MIN و MAX بإحدى الطرق التالية:

1. طريقة BIG-M.
2. طريقة المرحلتين Tow Phase Method.

وسوف نتناول هذه الطرق بالصفحات التالية:

أولاً: طريقة BIG-M

نضيف المتغيرات الاصطناعية إلى دالة الهدف وذلك على النحو التالي:

1- في مسائل التخفيض Minimization: يعطى معامل R في دالة الهدف قيمة كبيرة جدًا بحيث يكون وجود أية قيمة لـ R في قاعدة الحل تسبب عدم أمثلية الحل ويرمز إلى هذه القيمة بالرمز M ويعرف بإشارة موجبة كالتالي:

$$MIN\ Z = 20X_1 + 30X_2 + MR_1 + MR_2$$

2- في مسائل التعظيم Maximization: يعرف معامل R في دالة الهدف بالرمز M وتكون إشارته سالبة، وذلك لتسهيل خروجه من قاعدة الحل مباشرة ودخول المتغيرات الأساسية التي تحقق عائداً أكبر بالدخول إلى قاعدة الحل:

$$MAX\ Z = 4X_1 + 5X_2 - MR_1 - MR_2$$

المثال (13): أوجد الحل للنموذج الرياضي التالي باستخدام طريقة BIG - M :

$$MAX\ \ Z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$$

$$S.T: X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 5$$

$$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 2$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل: الشكل القياسي للمسألة:

$$MAX\ Z = -5X_1 + 12X_2 - 4X_3 + OS_1 + MR_1 = 0$$
$$S.T: X_1 + 2X_3 + X_3 + S_1 \leq 5$$
$$2X_1 - X_2 + 3X_3 + R_1 = 2$$
$$X_1, X_3, S_1, R_1 \geq 0$$

ونلخص هذه المعلومات في الجدول الآتي:

Basic	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	R_1	Solution
Z	1	-5	-12	-4	0	1	0
S_1	0	1	2	1	1	0	5
R_1	0	2	-1	3	0	1	2

إن استعمال متغير اصطناعي Artificial Variable من شأنه أن يسبب خرقاً لمنطقة المشكلة موضوع الدراسة، لذا يتوجب التخلص من هذه المتغيرات بالســـرعة الممكنة، حيث نلاحظ أن معامل R_1 في دالة الهدف لا يســـاوي صفر مع أنها تمثل حلاً ابتدائياً، لذا يجب جعلها (=) صفر وذلك بضرب معادلة R_1 بـM ثم جمعها إلى معادلة Z فينتج الجدول التالي:

$\boldsymbol{Basic}$	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{X_3}$	$\boldsymbol{S_2}$	$\boldsymbol{R_1}$	**Solution**	**ناتج القسمة**
Z	1	$-5-2M$	$M-12$	$-4-3M$	0	0	0	
S_1	0	1	2	1	1	0	5	$5/1=5$
R_1	0	2	-1	3	0	1	2	$2/3=2/3$

ويتضح من الجدول السابق أن العنصر الداخل هو X_2 والعنصر الخارجي هو R_1 والعنصر المحوري هو3

$Basic$	Z	X_1	X_2	X_3	S_2	R_1	Solution	ناتج القسمة
Z	1	$7/3$	$-40/3$	0	0	$(4/3)+m$	$3/8$	
S_1	0	$1/3$	$7/3$	0	1	$-1/3$	$13/3$	$(13/3)/(7/3)$ $-17/3$
R_1	0	$2/3$	$-1/3$	1	0	$1/3$	$2/3$	لا يجوز القسمة على سالب

العنصر الداخل هو X_2 والعنصر الخارج هو S_1 والعنصر المحوري هو $7/3$

Basic	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	R_1	Solution
Z	1	$-3/7$	0	0	$40/7$	$(-4/7)+m$	$192/7$
X_2	0	$1/7$	1	0	$3/7$	$-1/7$	$13/7$
X_3	0	$5/7$	0	1	$1/7$	$2/7$	$9/7$

العنصر الداخل هو X_1 والعنصر الخارج هو X_3 والعنصر المحوري هو $5/7$

Basic	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	R_1	Solution
Z	1	0	0	$3/5$	$29/5$	$(-2/5)+m$	$141/5$
X_2	0	0	1	$-1/5$	$2/5$	$-1/5$	$8/5$
X_1	0	1	0	$7/5$	$1/5$	$2/5$	$9/5$

الحل الأمثل هو عندما $X_1 = 9/5$ و $X_2 = 8/5$ و $Z = 141/5$

مثال 2: أوجد الحل للنموذج الرياضي التالي باستخدام طريقة BIG – M:

$$MIN\ Z = 4X_1 + X_2$$
$$3X_1 + X_2 + X_3 = 3\ S.T:$$
$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: نكتب النموذج على الصورة القياسية:

$$MIN\ Z - 4X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_1 - MR_2 = 0$$
$$S.T:$$
$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 3$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

ثم نقوم بتلخيص هذه المعلومات في الجدول رقم 1 التالي:

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution
Z	1	-4	-1	0	0	$-M$	$-M$	0
R_1	0	3	1	0	0	1	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	0	1	6
S_2	0	1	2	0	1	0	0	3

جدول 1

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution	ناتج القسمة
Z	1	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	$9M$	
R_1	0	3	1	0	0	1	0	3	$3/3=1$
R_2	0	4	3	-1	0	0	1	6	$1.56/4=$
S_1	0	1	2	0	1	0	0	3	$33/1=$

جدول 2

في الجدول رقم (2) العنصـر الخارج هو R_1 والعنصـر الداخل هو X_1 (أكبر معامل موجب) والعنصـر الممهد هو3.

$\boldsymbol{Basic}$	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{S_1}$	$\boldsymbol{S_2}$	$\boldsymbol{R_1}$	$\boldsymbol{R_2}$	**Solution**	**ناتج القسمة**
Z	1	0	$(1+5M)/3$	$-M$	0	$(4-7M)/3$	0	$4-2M$	
X_1	0	1	$1/3$	0	0	$1/3$	0	1	
R_2	0	0	$5/3$	-1	0	$-4/3$	1	2	$2(5/3)=(6/3)$
S_2	0	0	$5/3$	0	1	$-1/3$	0	2	$2(5/3)=(6/3)$

نلاحظ أن ناتج القسمة متساويات للمتغيرين R_2 و S_1 فنختار أولاً المتغير الاصطناعي R_1 ، وعليه العنصر الداخل هو X_2 و العنصر الخارج هو R_2 ، العنصر الممهد هو $5/3$.

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution
Z	1	0	0	$1/5$	0	$(8/5)-M$	$-1/5-M$	$18/5$
X_1	0	1	0	$1/5$	0	$3/5$	$-1/5$	$3/5$
X_2	0	0	1	$-3/5$	0	$-4/5$	$3/5$	$6/5$
S_2	0	0	0	1	1	1	-1	0

جدول 4

العنصر الداخل هو S_1 و الخارج هو S_2 والعنصر المحوري هو 1.

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution
Z	1	0	0	0	$-1/5$	$7/5-M$	$-M$	$18/5$
X_1	0	1	0	0	$-1/5$	$2/5$	0	$3/5$
X_2	0	0	1	0	$3/5$	$-1/5$	0	$6/5$
S_2	0	0	0	1	1	1	-1	0

جدول 5

الحل الأمثل كما هو واضح من جدول 5هو $Z = 18/5$ وقيم المتغيرات هي:

$$X_1 = 3/5, X_2 = 6/5\ ,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ \ R_1 = R_2 = 0$$

مثال 3:

$$MIN\ \ Z = 4X_1 + X_2$$

$$S.T\colon 3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: $MIN\ Z - 4X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_1 - MR_2 = 0$

$$S.T: 3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$$
$$X_1, X_2, R_1, R_2, S_1, S_2 \geq 0$$

نلاحظ أننا أضفنا متغيرات اصطناعية R_1, R_2 للمتباينات الأولى والثانية لاحتوائها على إشارة = وإشارة أكبر من أو يساوي ≥، ونلخص المعلومات في الجدول التالي:

Basic	***Z***	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Solution**	**ناتج القسمة**
Z	*1*	-4	-1	0	0	$-M$	$-M$	0	
R_1	0	3	1	0	0	1	0	3	
R_2	0	4	3	-1	0	0	1	6	
S_2	0	1	2	0	1	0	0	4	
Z	1	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	$9M$	
R_1	0	3	1	0	0	1	0	3	$3/3 = 1$
R_2	0	4	3	-1	0	0	1	6	$6/4 = 1.5$
S_2	0	1	2	0	1	0	0	4	$44/1 =$

المتغير الداخل هو X_1 أكبر معامل موجب وبناءً على ناتج القسمة يكون المتغير الخارج هو R_1.

Basic	***Z***	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Solution**	**ناتج القسمة**
Z	*1*	0	$(1+5M)/3$	$-M$	0	$(4-7M)/3$	0	$4+2M$	
X_1	0	1	$1/3$	0	0	$1/3$	0	1	$1/(1/3) = 3$
R_2	0	0	$5/3$	-1	0	$-4/3$	1	2	$2/(5/3) = 6/5$
S_2	0	0	$5/3$	0	1	$-1/3$	*0*	3	$3/(5/3) = 9/5$

العنصر الداخل هو X_2 والخارج هو R_2

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution	ناتج القسمة
Z	*1*	0	0	$1/5$	0	$(8/5) - M$	$(-1/5) - M$	$18/5$	
X_1	0	1	0	$1/5$	0	$3/5$	$-1/5$	$3/5$	$(3/5)/(1/5) = 3$
X_2	0	0	1	$-3/5$	0	$-4/5$	$3/5$	$6/5$	لا يجوز القسمة على سالب
S_2	0	0	0	1	1	1	*-1*	1	$1/1 = 1$

العنصر الداخل هو S_1 العنصر الخارج هو S_2

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution
Z	*1*	0	0	0	$-1/5$	$(7/5) - M$	$-M$	$17/5$
X_1	0	1	0	0	$-1/5$	$2/5$	0	$2/5$
X_2	0	0	1	0	$3/5$	$-1/5$	0	$9/5$
S_1	0	0	0	1	1	1	*-1*	1

الحل الأمثل هو $Z = 17/5$ وهي أقل تكلفة حيث قيم المتغيرات هي:

$$R_1 = 0\ , \quad R_2 = 0, \quad S_2 = 0,$$
$$X_1 = 2/5, \quad X_2 = 9/5, \quad S_1 = 1$$

مثال 4: أوجد الحل الأمثل للنموذج الرياضي التالي باستخدام طريقة الـBIG- M:

$$MIN\ Z = 10X_1 + 5X_2$$
$$S.T:$$
$$5X_1 + 4X_2 \geq 20$$
$$2X_1 + 5X_2 \geq 15$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: نضع النموذج بالشكل القياسي :

$$MIN\ Z - 10X_1 - 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_1 - MR_2 = 0$$

$$S.T:$$

$$5X_1 + 4X_2 - S_1 + R_1 = 20$$

$$2X_1 + 5X_2 - S_2 + R_2 = 15$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

ثم نقوم بعمل الجدول التالي:

Basic	***Z***	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Solution**
Z	*1*	-10	-5	0	0	$-M$	$-M$	0
R_1	0	5	4	-1	0	1	0	20
R_2	0	2	5	0	-1	0	1	15

Basic	***Z***	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Solution**	**ناتج القسمة**
Z	*1*	$-10 + 7M$	$-5 + 9M$	$-M$	$-M$	0	0	$35M$	لا يجوز القسمة على سالب
R_1	0	5	4	-1	0	1	0	20	$20/4 = 5$
R_2	0	2	5	0	-1	0	1	15	$315/5 =$

العنصر الداخل هو X_2 و الخارج هو R_2 والعنصر الممهد هو 5.

Basic	***Z***	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Solution**
Z	*1*	$(17\,M/5) - 8$	0	$-M$	$(4\,M/5) - 1$	0	$(-9\,M/5) + 1$	$8M + 15$
R_1	0	$17/5$	0	-1	$4/5$	1	$-4/5$	8
X_2	0	$2/5$	1	0	$-1/5$	0	$1/5$	3

العنصر الداخل هو X_1 و الخارج هو R_1 العنصر الممهد هو $17/5$

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution	ناتج القسمة
Z	1	0	0	$-40/17$	$15/17$	$-M + (40/17)$	$-M - (15/17)$	$320/17 + 15$	
X_1	0	1	0	$-5/17$	$4/17$	$5/17$	$-4/17$	$40/17$	$(40/17)/(4/17) = 10$
X_2	0	0	1	$3/17$	$-3/17$	$-2/17$	$5/17$	$35/17$	لا يجوز القسمة على سالب

العنصر الداخل هو S_2 والخارج هو X_1 العنصر المحوري هو $17/4$

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution
Z	1	$-15/4$	0	$-5/4$	0	$-M + (5/4)$	$-M$	25
S_1	0	$17/4$	0	$-5/4$	1	$5/4$	-1	10
X_2	0	$5/4$	1	$1/4$	0	$1/4$	0	5

الحل الأمثل يكون عندما $Z = 25$ وهي أقل تكلفة وهذا عندما تكون قيم المتغيرات كالتالي:

$$S_1 = 0,\quad X_1 = 0\,,\quad R_1 = 0,\quad R_2 = 0,\ S_2 = 0,\quad X_2 = 9/5$$

ثانياً: طريقة المرحلتين Two-Phase Method

تختلف هذه الطريقة عن BIG-M في أنها لا تستخدم المتغير M وتعتمد في إيجادها الحل الأمثل على مرحلتين (علي حسن الدش ,2012صفحة144) :

المرحلة الأولى:

1. نقوم بتحديد المتغيرات الاصطناعية.
2. إذا كانت المسألة:

أ) مسألة تعظيم Maximization فإننا نكتب دالة الهدف على الصيغة:

$$MAX\ r = -R_1 - R_2 - R_3 - \cdots .. - R_n$$

ب) مسألة تخفيض التكاليف Minimization فإننا نكتب دالة الهدف على الصيغة:

$$MIN = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots .. + R_n$$

3. إعطاء دالة الهدف قيمة تعتمد على مجموع المتغيرات الاصطناعية.
4. إيجاد الحل الابتدائي أي أن تصبح قيمة دالة الهدف (r) الجديدة مساوية للصفر.
5. ننتقل إلى المرحلة الثانية وذلك بوضع قيمة دالة الهدف Z في المسألة الرئيسة بدلاً من معادلة r.
6. نقوم بحل النموذج بطريقة السمبلكس البسيطة.

معلومـــة: بقية القيود سواء كانت المسألة $MINMAX$ or لا تختلف معالجتها عن طريقة الـ BIG-M

مثال 1: أعد حل المثال رقم 4 السابق بطريقة المرحلتين.

$$MIN\ Z = 10X_1 + 5X_2$$

$$S.T:$$

$$5X_1 + 4X_2 \geq 20$$

$$2X_1 + 5X_2 \geq 15$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: تحول إلى الصيغة التالية:

$$MIN\ r - R_1 - R_2 = 0$$

$$S.T:$$

$$5X_1 + 4X_2 - S_1 + R_1 = 20$$

$$2X_1 + 5X_2 - S_2 + R_2 = 15$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution
r	1	0	0	0	0	-1	-1	0
R_1	0	5	4	-1	0	1	0	20
R_2	0	2	5	0	-1	0	1	15

نلاحظ أن معاملات R_2, R_1 في دالة الهدف r لا تساوي صفراً، مع أنها تمثل حلاً ابتدائياً، لذا يجب جعلها تساوي صفراً، وذلك بجمع معادلة R_2, R_1 إلى دالة الهدف r فينتج الجدول التالي:

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution	ناتج القسمة
r	1	7	9	-1	-1	0	0	35	لا يجوز القسمة على سالب
R_1	0	5	4	-1	0	1	0	20	$20/4 = 5$
R_2	0	2	5	0	-1	0	1	15	$315/5 =$

الآن نبدأ بحل الجدول بطريقة السمبلكس السابقة.

العنصر الداخل هو X_2 و الخارج هو R_2 والعنصر الممهد هو5.

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution	ناتج القسمة
r	1	$17/5$	0	-1	$4/5$	0	$-9/5$	8	
R_1	0	$17/5$	0	-1	$4/5$	1	$-4/5$	8	$8/(17/5) = 40/17$
X_2	0	$2/5$	1	0	$-1/5$	0	$1/5$	3	$3/(2/5) = 15/2$

العنصر الداخل هو X_1 و الخارج هو R_1 والعنصر الممهد هو17/5.

$Basic$	r	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution
r	1	0	0	0	0	-1	-1	0
X_1	0	1	0	$-5/17$	$4/17$	$5/17$	$-4/17$	$40/17$
X_2	0	0	1	$2/17$	$-5/17$	$2/17$	$5/17$	$35/17$

بنهاية هذا الجدول انتهت المرحلة الأولى، الآن نأخذ الجدول دون المتغيرات الاصـطناعية مع وضـع Z القديمة محل r الحالية:

$$Z = 10X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$Z - 10X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

نلاحظ في الجدول أعلاه أن المعادلة r عادت كما كانت في بداية الحل، أي قيمة $r = 0$

	Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	**Solution**
هنا وضعنا معادلة Z بدلاً من معادلة r	Z	1	-10	-5	0	0	0
	X_1	0	1	0	$-5/17$	$4/17$	$40/17$
	X_2	0	0	1	$2/17$	$-5/17$	$35/17$

نلاحظ أن معاملات X_1, X_2 في دالة الهدف لا تساوي صفر ورغم أنها متغيرات أساسية (نور الشمرتيوآخرون ,2007صفحة147) ، لذا يجب جعلها= صفر ، وذلك بضرب معادلة X_1 بـ 10 ومعادلة X_2 بـ 5 ثم جمعها إلى معادلة Z فينتج الجدول التالي:

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	**Solution**	**ناتج القسمة**
Z	*1*	0	0	$-40/17$	$15/17$	$575/17$	
X_1	0	1	0	$-5/17$	$4/17$	$40/17$	$(40/17)/(4/17) = 10$
X_2	0	0	1	$2/17$	$-5/17$	$35/17$	لا يجوز القسمة على سالب

العنصر الداخل هو S_2 و الخارج هو 1 العنصر المحوري هو $4/17$.

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	**Solution**
Z	1	$-15/4$	0	$-5/4$	0	25
S_2	0	$17/4$	0	$-5/4$	1	10
X_2	0	$5/4$	1	$-1/4$	0	5

الحل الأمثل يكون عندما تكون $Z = 25$ وهي أقل تكلفة وذلك عندما تكون قيم المتغيرات كالتالي:

$$S_1 = 0 \quad X_1 = 0 \quad S_2 = 10 \quad X_2 = 5$$

مثال 2: باستخدام طريقة المرحلتين أوجد الحل الأمثل للنموذج:

$$MIN\ Z = 4X_1 + X_2$$

$$S.T: 3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

$$MIN\ r = -R_1 - R_2 = 0$$

$$S.T: 3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$$

$$X_1, X_2, R_1, R_2, S_1, S_2 \geq 0$$

$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution
r	0	0	0	0	-1	-1	0
R_1	3	1	0	0	1	0	3
R_2	4	3	-1	0	0	1	6
S_2	1	2	0	1	0	0	4

نلاحظ أن المتغيرات R_2, R_1 تمثل حلاً للنموذج الرياضي ومع ذلك فإن معاملاتها سالبة "لا تساوي صفراً" في دالة الهدف، لذلك يجب جعلها تساوي صفر وذلك بإضافة معادلة R_2, R_1 إلى معادلة دالة الهدف r، ليصبح الجدول الابتدائي مطابقاً للجدول التالي:

$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution	ناتج القسمة
r	7	4	-1	0	0	0	9	
R_1	3	1	0	0	1	0	3	$3/3 = 1$
R_2	4	3	-1	0	0	1	6	$6/4 = 1.5$
S_2	1	2	0	1	0	0	4	$4/1 = 4$

العنصر الداخل هو X_1 والعنصر الخارج هو R_1 والعنصر المحوري هو 3.

$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution	ناتج القسمة
r	0	$5/3$	-1	0	$-7/3$	0	2	
X_1	1	$1/3$	0	0	$1/3$	0	1	$1/(1/3) = 3$
R_2	0	$5/3$	-1	0	$-4/3$	1	2	$2/(15/3) = 6/5$
S_2	0	$5/3$	-1	1	$-1/3$	0	3	$3/(5/3) = 9/5$

العنصر الداخل هو X_2 والعنصر الخارج هو R_{21} والعنصر المحوري هو $5/3$.

$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution
r	0	0	0	0	-1	-1	0
X_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$	$-1/5$	$3/5$
X_2	0	1	$-3/5$	0	$-4/5$	$3/5$	$5/6$
S_2	0	0	1	1	1	-1	1

انتهت المرحلة الأولى.

نلاحظ من خلال الجدول أن قيمة r الناتجة تساوي صفر، بناءً على ذلك يكون لهذا النموذج حل.

المرحلة الثانية: نقوم بإلغاء المتغيرات الاصـطناعية من الجدول السـابق ونعوض مكان قيمة معادلة R معادلة Z السابقة على النحو التالي:

$$MIN\ Z = 4X_1 + X_2$$

$$Z - 4X_1 + X_2 = 0$$

ليصبح الجدول الجديد كالتالي:

$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	-4	-1	0	0	0
X_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$
X_2	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
S_2	0	0	1	1	1

نلاحظ من الجدول أن X_1, X_2 هما حلا المسألة "متغيرات أساسية"، ومع ذلك فإن معاملات كل منهما في Z لا تساوي صفراً، لذا يجب قبل كل شيء جعل معاملاتهما تساوي صفرا وذلك بطريقة ضرب معادلة X_1 بـــ 4 ومعادلة X_2 بـ 1 ثم جمعهما إلى معادلة Z لتنتج معادلة Z الجديدة كما في الجدول التالي:

$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution	ناتج القسمة
Z	0	0	$1/5$	0	$18/5$	
X_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$	$(3/5)/(1/5) = 3$
X_2	0	1	$-3/5$	0	$5/6$	لا يجوز القسمة على سالب
S_2	0	0	1	1	1	$1/1 = 1$

المتغير الداخل هو S_1 والمتغير الخارج هو S_2 والعنصر الممهد هو1. والحل ليس أمثلاً لأن S_1 متغير أساسي ومعامله في معادلة دالة الهدف Z أكبر من صفر لذلك يكون جدول الحل الأمثل على النحو التالي:

$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	0	0	0	$-1/5$	$17/5$
X_1	1	0	0	$-1/5$	$2/5$
X_2	0	1	0	$9/5$	$9/6$
S_2	0	0	1	1	1

بناءً على الجدول السابق فإن القيم الموجودة في عمود الـSolution تمثل الحل الأمثل. وهي:

$$X_1 = 2/5, X_2 = 9/5, Z = 17/5$$

مثال 3: باستخدام طريقة المرحلتين أوجد الحل الأمثل للنظام الرياضي التالي:

$$MIN\ Z = 4X_1 + X_2$$

$$S.T:$$

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

$$MIN\ r = -R_1 + R_2 = 0$$

$$S.T: 3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 3$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

Basic	r	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Solution**
r	*1*	0	0	0	0	-1	-1	0
R_1	0	3	1	0	0	1	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	0	1	6
S_2	0	1	2	0	1	0	0	3

Basic	r	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Solution**	**ناتج القسمة**
r	*1*	7	4	-1	0	0	0	9	
R_1	0	3	1	0	0	1	0	3	$3/3 = 1$
R_2	0	4	3	-1	0	0	1	6	$6/4 = 1.5$
S_2	0	1	2	0	1	1	0	3	$3/1 = 3$

المتغير الداخل هو X_1 والخارج هو R_1 والعنصر المحوري هو 3.

Basic	r	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Solution**	**ناتج القسمة**
r	*1*	0	$5/3$	-1	0	$-7/3$	0	2	
X_1	0	1	$1/3$	0	0	$1/3$	0	1	$1/(1/3) = 3$
R_2	0	0	$5/3$	-1	0	$-4/3$	1	2	$2/(5/3) = 6/5$
S_2	0	0	$5/3$	0	1	$-1/3$	0	2	$2/(5/3) = 6/5$

المتغير الداخل هو X_2 والخارج هو R_2 والعنصر المحوري هو $5/3$.

$Basic$	r	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Solution	ناتج القسمة
r	1	0	0	0	0	-1	-1	0	
X_1	0	1	0	$1/5$	0	$3/5$	$-1/5$	$3/5$	$(3/5)/(1/5)=3$
X_2	0	0	1	$-3/5$	0	$-4/5$	$3/5$	$6/5$	لا يجوز القسمة على سالب
S_2	0	0	0	1	1	1	-1	0	$0/1=0$

إلى هنا انتهت المرحلة الأولى وتبدأ المرحلة الثانية، حيث نسقط من الجدول السابق أعمدة المتغيرات الاصطناعية R_2, R_1 وذلك باستخدام دالة Z بدل دالة r ، أي بدل $r = R_1 + R_2$ أخذ: $Z = 4X_1 + X_2$

ليصبح الجدول كالتالي:

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	1	-4	-1	0	0	0
X_1	0	1	0	$1/5$	0	$3/5$
X_2	0	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
S_2	0	0	0	1	1	0

نلاحظ من الجدول أن المتغيرات X_2, X_1 هما حلان، ولكن معاملاتها في معادلة Z لا تساوي صفر، لذا يجب جعل معاملات Z بالنسبة لـ X_2, X_1 = صفر، وذلك بضرب معادلة X_1 بـ 4 ومعادلة X_2 بـ 1 وجمعها إلى معادلة Z:

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	1	0	0	$1/5$	0	$18/5$
X_1	0	1	0	$1/5$	0	$3/5$
X_2	0	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
S_2	0	0	0	1	1	0

المتغير الداخل هو S_1 و الخارج هو S_2 و العنصر المحوري هو 1.

$Basic$	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	1	0	0	0	$-1/5$	$18/5$
X_1	0	1	0	0	$-1/5$	$3/5$
X_2	0	0	1	0	$3/5$	$6/5$
S_2	0	0	0	1	1	0

انتهت المرحلة الثانية والحل هو $Z = 18/5$ وذلك عندما تكون قيم المتغيرات كالتالي:

$$X_1 = 3/5, \qquad X_2 = 6/5, \qquad S_2 = 0$$

حالات خاصة في طريقة السمبلكس لحل النموذج الرياضي:

1- دورانية الحل "التكرار" : Degeneracy.

2- عدم وجود حل ممكن: Infeasible Solution.

3- تعدد الحلول المثلى: Multiple Optimal Solution.

4- منطقة الحل غير محدودة: Unbounded Solution.

أولاً- دورانية الحل

تحدث هذه الحالة عندما يكون هناك قيد فائض لا حاجة له.

مثال:

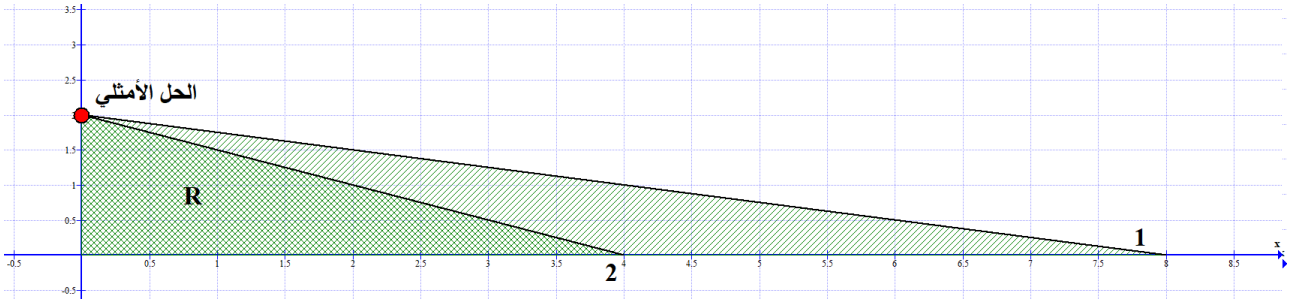
$$MAX\ Z = 3X_1 + 9X_2$$

$$S.T:$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 8$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



من الشـكل نجد أن القيد الأول $X_1 + 4X_2 \leq 8$ غير ضـروري لأنه قد تحددت منطقة الحل باسـتخدام القيد الثاني دون الحاجة إلى القيد الأول، وبطريقة السمبلكس نستطيع أن نبين حالة الدوران هذه كما يلي:

رقم الجدول	$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
0	Z	-3	-9	0	0	0
	S_1	1	4	1	0	8
	S_2	1	2	0	1	4
1	Z	$-3/4$	0	$9/4$	0	18
0	X_2	$1/4$	1	$1/4$	0	2
	S_2	$1/2$	0	$-1/2$	1	0
2	Z	0	0	$3/2$	$3/2$	18
	X_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	2
	X_1	1	0	-1	2	0

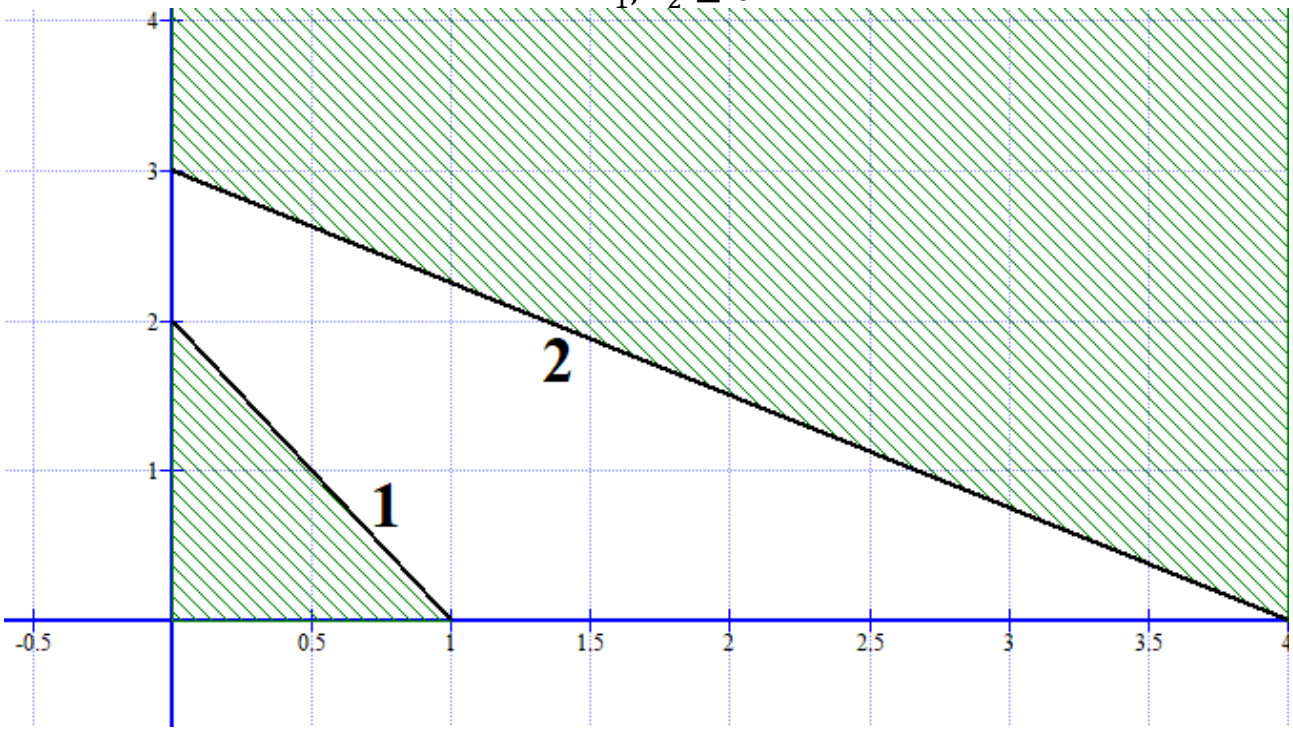
نلاحظ من الجدول أن قيمة Z لم تتغير مع خروج ودخول المتغير X_1، ولكنها بقيت نفس القيمة، وهذا ما يدعى بدورانية الحل.

ثانيا – عدم وجود حل ممكن Infeasible Solution :

وتحدث هذه الحالة عندما يكون أحد قيود المسـألة من نوع أصـغر من أو يسـاوي ≤ والقيد الآخر من نوع أكبر من أو يساوي ≤.

المثال (14):

$$MAX\ Z = 3X_1 + 2X_2$$
$$S.T: 2X_1 + X_2 \leq 2$$
$$3X_1 + 4X_2 \geq 12$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$



وبطريقة السمبلكس يمكن توضيحها كما يلي:

رقم الجدول	*Basic*	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	Solution
-1	Z	0	0	0	0	M	0
	S_1	2	1	1	0	0	2
	R_1	3	4	0	-1	1	12
0	Z	$-3-3m$	$-2-4$m	0	M	0	$-12m$
	S_1	2	1	1	0	0	2
	R_1	3	4	0	-1	**1**	12
1	Z	$1+5m$	0	$2+4$M	M	**0**	$4-4m$
	X_2	2	1	1	0	0	2
	R_1	-5	0	-4	-1	1	**4**

من الجدول يتضح أنه لا يوجد حل للمشكلة وذلك من خلال قيمة R_1 الموجبة، مع ملاحظة أن جميع معاملات دالة الهدف موجبة والتي تمثل حالة الحل الأمثل.

ملاحظة: إذا كانت المسألة Minimize عندها لن يكون هناك حل إذا كانت قيمة سالبة R_1، وتكون جميع معاملات دالة الهدف سالبة.

ثالثاً: تعدد الحلول المثلى Multiple Optimal Solution

وهو وجود أكثر من قيمة للمتغيرات لحل دالة الهدف.

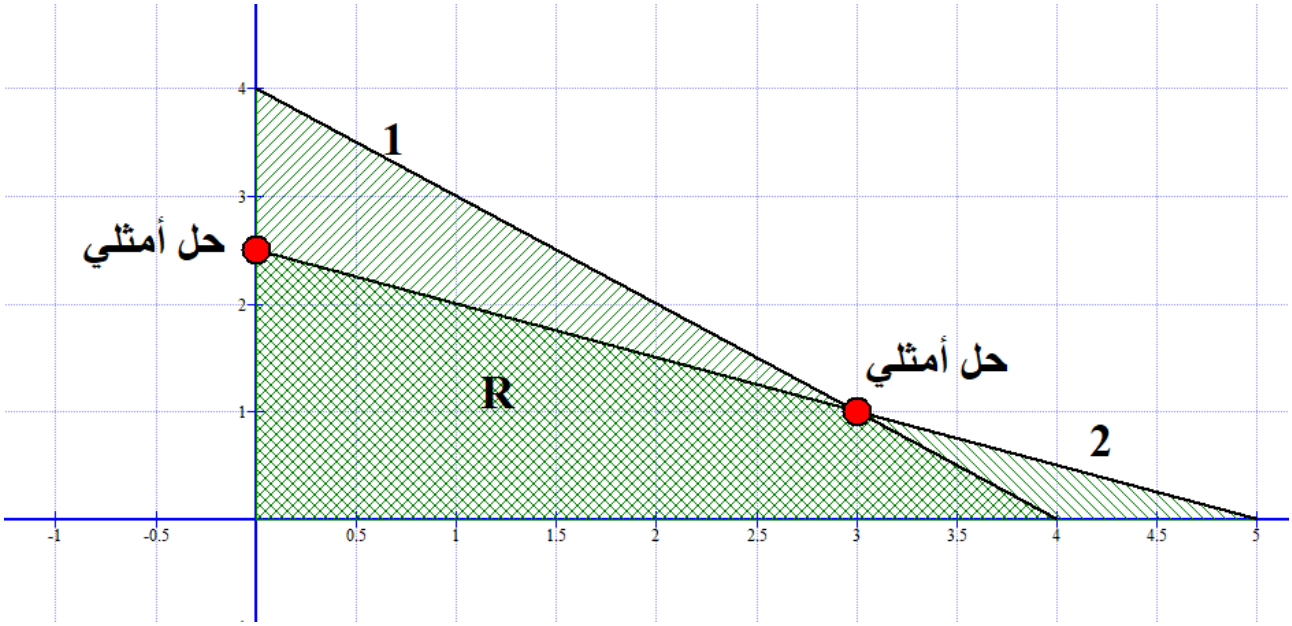
$$MAX\ \ Z = 2X_1 + 4X_2$$

$$S.T:$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 5$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



وبطريقة السمبلكس يمكن توضيحها بالحل التالي:

رقم الخطوة	$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution	
0	Z	-2	-4	0	0	0	
	S_1	1	2	1	0	5	
	S_2	1	1	0	1	4	
1	Z	0	0	2	0	10	الحل الأمثل الأول
	X_2	$1/2$	1	$1/2$	0	$5/2$	
	S_2	$1/2$	0	$-1/2$	1	$3/2$	
2	Z	0	0	2	0	10	الحل الأمثل الثاني
	X_2	0	1	1	-1	1	
	X_1	1	0	-1	2	3	

من الجدول يتضح أن هناك حلين لهذه المسألة الأول ينتج من الخطوة رقم1 وهو:

$$X_2 = 5/2\,, X_1 = S_1 = 0,\ \ S_2 = 3/2\ \ and\ Z = 10$$

أما الحل الثاني فهو: $S_1 = S_2 = 0,\ \ X_1 = 3,\ \ X_2 = 1\ \ \ and\ Z = 10$

هذه النوعية من المسائل تفيد الإدارة في اتخاذ القرار المناسب ضمن البدائل المتاحة.

رابعًا – منطقة الحل غير المحدودة:

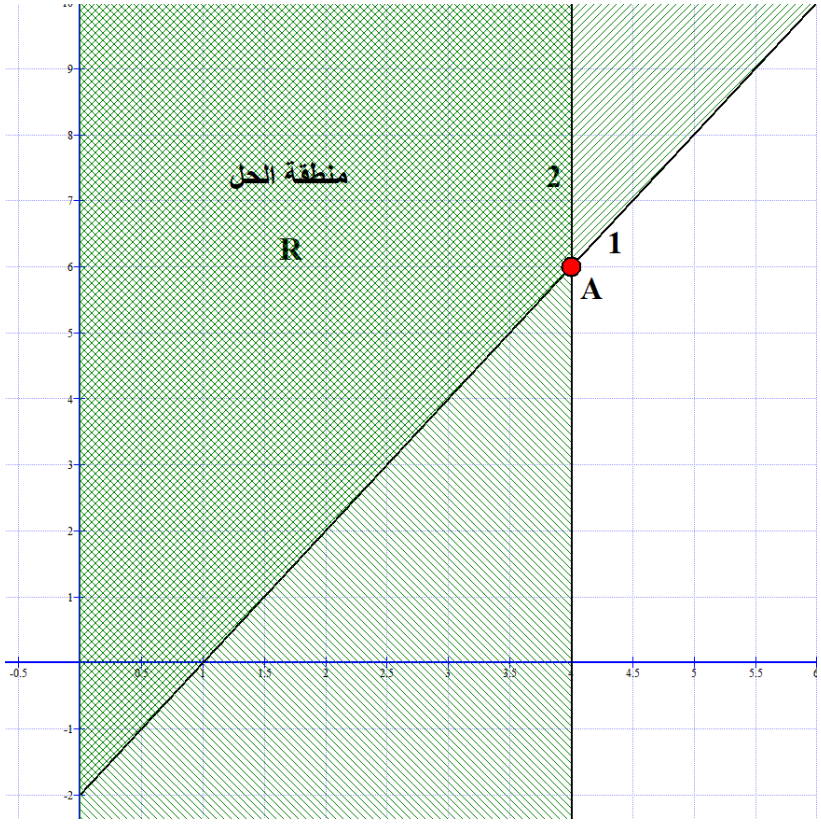
المثال (14):

$$MAX\ \ Z = 6X_1 - 2X_2$$

$$S.T: \qquad 2X_1 - X_2 \geq 2 \ldots.1$$

$$X_1 \leq 4 \ldots..2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



رقم الخطوة	$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
0	Z	-6	2	0	0	0
خارج ←	S_1	2	$\mathbf{-1}$	1	0	2
	S_2	1	$\mathbf{0}$	0	1	4
1	Z	0	$\mathbf{-1}$	3	0	6
	X_2	1	$1/2$	$1/2$	0	1
خارج ←	S_2	0	$1/2$	$-1/2$	1	3
2	Z	0	0	2	2	12
	X_1	1	0	0	1	4
	X_2	0	1	-1	2	6

من خلال الجدول نستطيع أن نعرف أن منطقة الحل غير محدودة، وذلك إذا ظهرت معاملات سالبة في أعمدة المتغيرات الداخلة "غير السالبة" Non Basic في جدول الحل الابتدائي، كما يشير المستطيل في هذا المثال إلى هذه الحالة.

نستطيع القول أنه إذا كان معامل Z للمتغير الداخل موجبًا والعمود الذي تحته يحتوي على متغيرات سالبة فإن هناك حلاً مثاليًا وحيدًا رغم أن منطقة الحل غير محدودة، أما إذا وجد معامل Z سالبًا وعمود المتغيرات أيضاً يحتوي على سالب في جدول الحل الابتدائي، فإن منطقة الحل تكون غير محدودة، كما في المثال التالي:

$$MAX\ Z = 2X_1 + X_2$$

$$S.T:$$

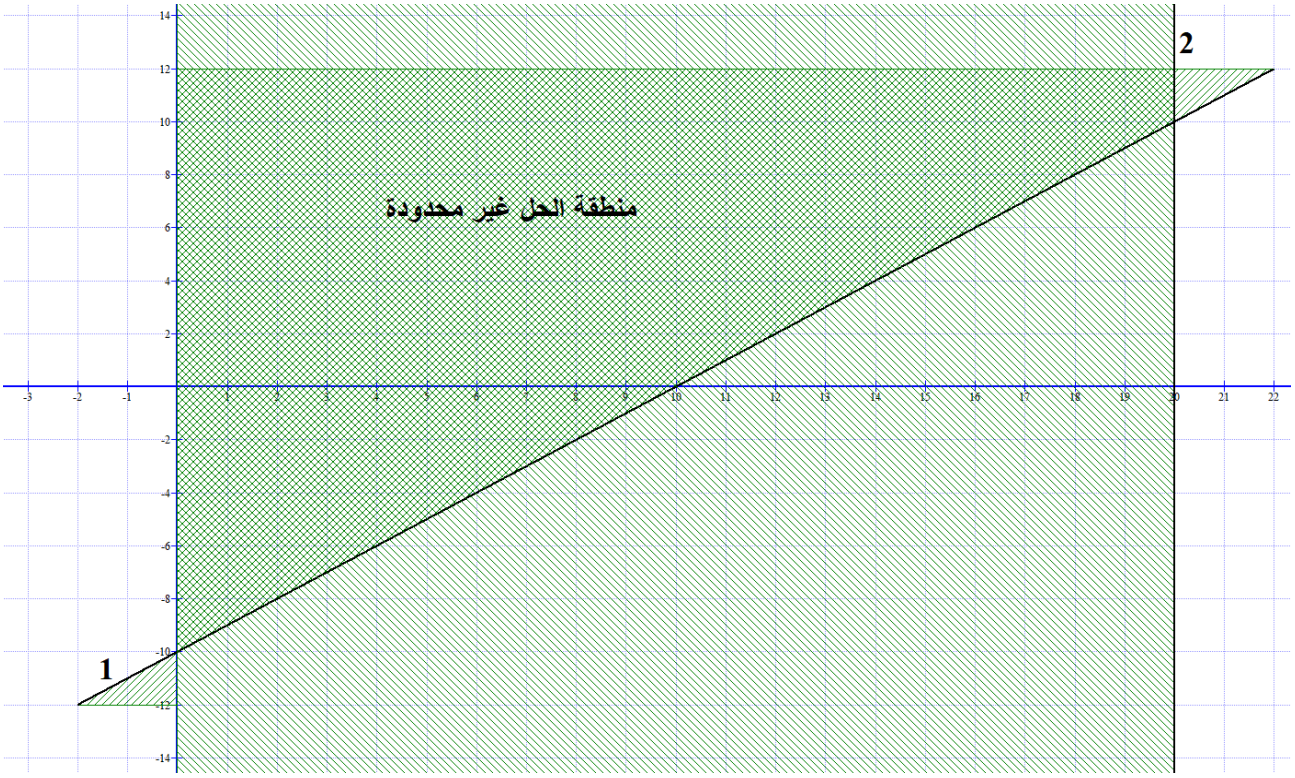
$$X_1 - X_2 \leq 10$$

$$2X_1 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

رقم الخطوة	$Basic$	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
0	Z	-2	-1	0	0	0
	S_1	1	$\mathbf{-1}$	1	0	10
	S_2	2	**0**	0	1	40
1	Z	0	$\mathbf{-3}$	2	0	20
	X_1	1	-1	1	0	10
	S_2	0	2	-2	1	20
2	Z	0	0	-1	$3/2$	50
	X_1	0	0	0	$3/2$	20
	X_2	0	1	-1	$1/2$	10

والرسم التالي يوضح هذه الحالة:


منطقة الحل غير محدودة
1
2

المحور الخامس: البرمجة الخطية – الثنائية او الإزدواجية

تمهيد:

المسائل التي تم التطرق إليها في الفصول الماضية، تعرف بالمسائل الأصلية (Primal Problems)، لذا رمزنا بالرمز P (P اختصار لكلمة Primal)، ولكل مسألة أصلية توجد مسألة ثنائية (problem Dual).

المسائل الثنائية لها نفس المعطيات والخصائص المطبقة على الأصلية كما يمكن وصف الثنائية بالتبيان التالي، لكل مسألة برمجة خطية على صورة Max توجد مسألة معادلة لها على صورة Min، كما أنه لكل مسألة برمجة خطية على صورة Min توجد مسألة معادلة لها على صورة .Max.

وحسب رأينا يمكن إعطاؤها التصور التالي: أن المسألة الأصلية تعالج الجوانب الاقتصادية الكمية (مثل حجم الانتاج، حجم الطلب، حجم الدخل، حجم الخدمات، حجم المخزون، حجم النقل... إلخ.) بينما المسألة الثنائية تعالج الجوانب المالية، حيث تتطرق إلى التأثيرات والتغيرات المالية التي تحدث على دالة الهدف نتيجة الزيادات الممكنة أو النقص الممكن في الموارد المتاحة (بوقرة ,2009صفحة100) .

1) صياغة المسألة الثنائية:

الشكل الأساسي لعلاقة الثنائية يمكن التعبير عنه كالآتي:

لمسائل الأصلية على الصورة Max:

$$Max\ Z_p = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

حيث:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

الشكل المعياري للمسألة الأصلية هو:

$$Max\ Z_p = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

حيث:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + S_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + S_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + S_3 = b_3 \\ X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{gathered}$$

الثنائية تكون كالتالي:

$$Min\ Z_d = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$$

حيث:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 \geq c_1$$
$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 \geq c_2$$
$$a_13u_1 + a_23u_2 + a_{33}u_3 \geq c_3$$
$$u_1\ , u_2\ , u_3 \geq 0$$

حيث $(u_1\ , u_2\ , u_3)$ تمثل متغيرات الثنائية

من هذا التحول يلاحظ أن استنتاج الثنائية من الأصلية كان بالطرق التالية:

أ. تغيير المتغيرات الأصلية x_i بمتغيرات ثنائية u_j.

ب. وضع معاملات الهدف للأصلية كطرف أيمن لقيود الثنائية.

ج. وضع الطرف الأيمن لقيود الأصلية كمعاملات هدف للثنائية.

د. وضع مقلوب أو منقول مصفوفة الطرف الأيسر للقيود للأصلية كقيود ثنائية.

هـ. كما أن الجدول التالي يوضح لنا بعض التغييرات الأخرى التي تحدث بين الأصلية والثنائية.

الأصليـة	**الثنائيـة**		
هدف الأصلية في الشكل المعياري	**الهـدف**	**القيـود**	**المتغيـرات**
$Max\ Z_p$	$Min\ Z_d$	$\geq$	غير مقيد
$Min\ Z_p$	$Max\ Z_d$	$\leq$	غير مقيد

لتوضيح ذلك نأخذ المثال التطبيقي التالي:

$$Max\ Z_p = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

حيث:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3\ \geq 0$$

لإيجاد الثنائية، نحول الأصلية إلى الصورة المعيارية.

$$Max\ Z_p = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0s_1 - Mt_2$$

حيث:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + t_2 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, t_3 \geq 0$$

لإيجاد الثنائية من الأصلية هناك بعض النقاط يجب أن تحفظ:

أ. عدد المتغيرات للثنائية يساوي عدد القيود للأصلية.

ب. عدد قيود الثنائية يساوي عدد متغيرات الأصلية.

ج. الطرف الأيمن للقيود للأصلية يكون معاملات الهدف للثنائية.

د. معاملات الهدف للأصلية يكوّن الطرف الأيمن للثنائية.

هـ. الطرف الأيسر لقيود الثنائية يتكون من مقلوب أو منقول المصفوفة للطرف الأيسر لقيود الأصلية.

و. ثنائية الثنائية أصلية.

الثنائية:

$$Min\ Z_d = 10u_1 + 8u_2$$

حيث:

$$u_1 + 2u_2 \geq 5$$
$$2u_1 - u_2 \geq 12$$
$$u_1 + 3u_2 \geq 4$$
$$u_1 \geq 0$$
$$u_2 \geq -M$$

هذا يستلزم أن u_2 غير مقيد.

2) العلاقة بين الأصلية الثنائية:

هناك مجموعة من العلاقات التي تربط بين الأصلية والثنائية تتمثل في (بوقرة ,2009صفحة105) :

أ. إذا كان يوجد حل أمثل للأصلية فإنه بالضرورة يوجد حل أمثل للثنائية.

ب..من خلال حل (الأصلية، الثنائية)، فإن هدف الأصلية يساوي هدف الثنائية أي أن:

$$Min\ Z_p = Max\ Z_d \quad و \quad Max\ Z_p = Min\ Z_d$$

ج. مسائل Max للأصلية تبدأ قيمة الهدف لها في تزايد من جدول إلى آخر وصولاً إلى الحل الأمثل، بينما الثنائية لها، قيمة الهدف تبدأ في تناقص من جدول إلى آخر وصولاً إلى الحل الأمثل والعكس في حالة Min

د. لأي زوج للأصلية وللثنائية حل عملي.

هـ. يمكن إيجاد متغيرات الأصـلية من الحل الأمثل للثنائية مباشـرة والعكس صـحيح، وهذا عن طريق العلاقة التالية:

الفرق بين الطرف الأيسر والأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية	=	عناصـــر الســـطر Z_p لمصـــفوفة المتغيرات الأساسية للأصلية

وتكون هذه العلاقة صالحة بتغيير مصطلحات الثنائية والأصلية لكل حالة.

و. كما يمكن اختصار بعض الاختلافات بين الأصلية والثنائية في الجدول التالي:

	الأصلية	الثنائية
المتغيرات	وحدات منتجة نهائية	هامش القيمة للمورد (قيمة الوحدة للمورد) أو مقدار زيادة دالة الهدف في حالة إضـــافة وحدة واحدة من المورد
دالة الهدف	تعظيم الربح أو تخفيض التكلفـة (عـدد الوحـدات المنتجـة) (هـامش الربح للوحدة أو هامش التكلفة)	تخفيض هـامش القيمـة أو العكس (قيمـة الوحدة للمورد) (المادة المستعملة)
القيود	قيود على استعمال الموارد النادرة	لزوم لزيادة الربح لكل منتج

كما يمكن إعطاء ملخص عام حول العلاقة بين (الأصلية، الثنائية) وهذا حسب الجدول التالي:

عمود الأساس	متغيرات البرنامج				عمود الطرف الأيمن للقيود
	x_1	x_2	$\ldots . x_i$	$\ldots . x_n$	
S_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots . a_{1i}$	$\ldots . a_{1n}$	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots . a_{2i}$	$\ldots . a_{2n}$	b_2
S_i	a_{j1}	a_{j2}	$\ldots . a_{ji}$	$\ldots . a_{jn}$	b_i
S_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots . a_{mi}$	$\ldots . a_{mn}$	b_n
Z_p	c_1	c_2	$\ldots . c_l$	$\ldots . c_n$	

الطرف الأيمن لقيود الثنائية

معاملات الهدف للثنائية

مقلوب المصفوفة للطرف الأيسر لقيود الثنائية

من الحل الأمثل للأصلية لدراسة الحالة في الفصل الأول والثاني يمكن استخلاص النتائج التالية:

أ) في الجدول النهائي (الحل الأمثل) $Max\ Z_p = Min\ Z_d = 46/4$

ب) قيمة Z_p تبدأ في تزايد إلى أن تصـــل إلى $46/4$، بينما قيمة Z_d تبدأ في التناقص إلى أن تصـــل إلى $46/4$، هذه النتيجة تتطلب الوصـــول إلى نقطة التعادل، والوصـــول إلى نقطة التعادل يكمن في حالة تعادل قيمة دالتي الهدف للأصـــلية والثنائية، وحالة التعادل تمثل الحل الأمثل. هاتين النتيجتين يمكن أن تعمم على أي زوج (الأصلية – الثنائية):

- لأي زوج حل عملي للأصلية والثنائية أي أن:

$$\left(\text{قيمة دالة الهدف في } Max\ Z_p\right) \geq \left(\text{قيمة دالة الهدف في } Min\ Z_d\right)$$

- عند الحل الأمثل للأصلية والثنائية:

$$\left(\text{قيمة دالة الهدف في } Max\ Z_p\right) = \left(\text{قيمة دالة الهدف في } Min\ Z_d\right)$$

قيمة دالة الهدف في Max) < قيمة دالة الهدف في Min Za

- إيجاد قيم الثنائية من الحل الأمثل للأصلية عن طريق العلاقة:

معاملات دالة الهدف في الحل الأمثل للأصلية = الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية

- وتكون هذه العلاقة صالحة لإيجاد قيم الأصلية من الحل الأمثل للثنائية:

معاملات دالة الهدف في الحل الأمثل للثنائية = الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لقيد الأصلية المشارك مع المتغير الأساسي للثنائية

في جدول الأصـــلية المتغيرات الأســـاســـية هي s_1, s_2, s_3 ومعاملاتها في الدالة Z_p هي على التوالي: $1/2$ و $1/2$ و 0

أما قيود الثنائية المشاركة مع s_1, s_2, s_3هي على التوالي: $u_1 \geq 0\ ,\ u_2 \geq 0\ ,\ u_3 \geq 0$

المتغيرات الأساسية للأصلية	s_3	s_2	s_1
معادلات دالة الهدف في الحل الأمثل للأصلية	$1/2$	$1/2$	0
الفرق بين الطرف الأيســـر والطرف الأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية	$u_3 - 0$	$u_2 - 0$	$u_1 - 0$

إذا وضعنا:

$$u_1 - 0 = 0 \ \Rightarrow u_1 = 0$$

$$u_2 - 0 = 1/2 \Rightarrow u_2 = 1/2$$
$$u_3 - 0 = 1/2 \Rightarrow u_3 = 1/2$$

نفس الشـي يمكن أن يطبق على إيجاد قيم الأصـلية من الثنائية وهذا بعكس المصـطلحات السـابقة كما تمت الإشارة إليه سابقا.

2) المعنى الاقتصادي للمتغيرات الثنائية:

من وجهة نظر الجانب التطبيقي للبرمجة الخطية يلاحظ أن أهمية المسألة الثنائية تكمن في المعنى الاقتصادي لمتغيراتها والتي يطلق عليها قيمة الوحدة للمورد أو أسـعار الظل في حين يطلق اسـم تكلفة الخسـارة البديلة (Opportunity Cost) على متغيرات الطاقة العاطلة في الثنائية.

إذا كانت القيمة المثلى لدالة الهدف للثنائية هي Z_d وحيث أن: $Z_d = \sum b_j\, u_j$

ما دامت Z_p تمثل قيمة نقدية و b_j تمثل وحدات (القيمة) للمورد j، إذًا u_j يجب أن تمثل قيمة نقدية للوحدة للمورد j لأن: $\left(\text{الربح}\right) = \left(\text{مجموع الوحدات المورد } j\right)\left(\text{القيمة النقدية/وحدة المورد } j\right)$

وهذا المتغير الثنائي لما يمثل قيمة الوحدة للمورد j والتي تسمى بسعر الظل كما أشرنا سابقا

في دراسة الحالة السابقة ($u_1 = 0\ ,\ u_2 = 1/2\ ,\ u_3 = 1/2$) تدل على أنه، لزيادة قيمة Z_p المثلى، المورد الثاني والثالث هما المعنيين بالزيادة لكي تزيد Z_p

إذا افترضـنا الآن أن قيمة الموارد بالنسـبة للقيد u_i قد تغيرت بمقدار Δb_j فهذا يحدث تغيرا في قيمة Z_d مقداره: $\Delta Z_d = u_j(\Delta b_j) \Rightarrow u_j = \Delta Z_d/\Delta b_j$

وبما أنه عند الحل الأمثل لكل من الأصلية والثنائية متساوي لكل: $Z_p = Z_d$ فإن: $u_j = \Delta Z_d/\Delta b_j$

أي أن القيمة المثلى للمتغير في الثنائية هي عبارة عن نسـبة التغيير الذي يحدث في قيمة دالة الهدف إذا غيرنا كمية الموارد بالنسبة لـu_j بمقدار وحدة واحدة مع الاحتفاظ بالمعطيات الأخرى كما هي.

هذا التحليل يقودنا إلى ملاحظة هامة جدًا وهي أنه للحلول العملية غير المثالية يوجد: $Z_p < Z_d$

وبتعبير اقتصادي فإن: $\left(\text{الربح}\right) < \left(\text{عائد المورد}\right)$

عدم التسـاوي يبين أنه ما دام الربح أقل من عائد المورد، الحل لا يكون أمثلاً، الأمثلية نصـل إليها عندما يتسـاوى الربح مع عائد المورد، وهنا يمكن التفكير في البرمجة الخطية كنظام مدخلات ومخرجات، الموارد تمثل المدخلات والربح يمثل المخرجات، النظام يبقى غير متوازن إذا كانت المدخلات تفوق المخرجات، التوازن يتحقق عندما يكون الربح يساوي عائد المورد.

في دراسة الحالة السابقة $u_2 = 1/2$ معناه اقتصاديا، أنه إذا استطاعت المؤسسة زيادة وحدة واحدة من المورد الثاني فإنه بإمكانها زيادة الربح أو قيمة الهدف بـ $1/2$ وحدة نقدية. نفس الشيء يمكن أن يقال عن u_3

إن التعبير الاقتصادي لمتغيرات الثنائية له فائدة كبيرة بالنظر إلى u_1 ، u_2 ، u_3 في دراسة الحالة السابقة لاحظنا أن u_2 يساوي $1/2$، هذا معناه (بافتراض أن العملية تمثل ساعات عمل على آلات) أن ساعة إضافية على الآلة 1 قيمتها $1/2$ وحدة نقدية، فإذا كانت المؤسسة لا تملك ساعات إضافية على الآلة 1، والتكلفة الفعلية لاستئجار ساعة واحدة هي β حيث $1/2 \geq \beta$ فإن المؤسسة ستزيد من ربحها بمقدار $(1/2 - \beta)$ ولكن إذا كانت الأسعار في سوق β حيث $1/2 \leq \beta$ فعلى المؤسسة أن تفكر في إيجاد مستأجرين لآلاتها، حيث من الممكن أن هذه العملية ستضمن لها أرباح إضافية أكبر من الأرباح التي تحققها إذا استعملت تلك الساعة في الإنتاج (بوقرة ,2009صفحة109) .

4–المعنى الاقتصادي لقيود الثنائية:

كما أشرنا سابقا فإنه في أي جدول سمبلكس، هدف معامل متغير الأصلية X_i هو الفرق بين الطرف الأيسر والأيمن لقيد الثنائية j. هذا يعني أن:

$$\left(\text{هدف معامل}\right)\ x_i = \sum a_{ji} \,.\, u_j - c_i$$

وحيث أن c_i هو ربح الوحدة لمخرجات النشاط x_i، هذا يعني أن c_i له قدر القيمة النقدية للوحدة وما دام c_i يمثل ربح الوحدة للمخرجات فإن $\sum a_{ji} \,.\, u_j$ تمثل تكلفة، وما دامت a_{ji} تمثل مقدار المورد j المستعمل بوحدة واحدة للنشاط i. إذًا u_j يجب أن تمثل تكلفة منسبة لوحدة المورد j ، وبهذا تكون $\sum a_{ji} \,.\, u_j$ تكلفة مناسبة لكل الموارد المستعملة من أجل إنتاج وحدة واحدة من النشاط i

هذا التحليل يؤدي إلى المساواة التالية:

(الربح أو التكلفة) للوحدة = (التكلفة) للوحدة – (الربح) للوحدة

من هذه المساواة يمكن ملاحظة أن الطرف الأيمن يمكن أن يمثل ربح أو تكلفة وهذا متوقف على إشارة الطرف الأيسر موجبة أو سالبة.

في حالة التعظيم لمسائل البرمجة الخطية فإن شرط الأمثلية في طريقة السمبلكس تلاحظ أنه عند مستوى النشاط i الذي يظهر غير أساسي يكون يساوي صفر لأن معامله في السطر Z_p سالب اقتصاديا هذا يعني أن:

$$\sum a_{ji} \,.\, u_j - c_i < 0$$

أي أن:

$$(\text{الربح للوحدة } i) - (\text{التكلفة المنسبة للموارد المستعملة للوحدة } i) < 0$$

هذا يعني أن:

$$(\text{الربح للوحدة } i) < (\text{التكلفة المنسبة للموارد المستعملة للوحدة } i)$$

وبالتالي وحيث أن الربح يفوق التكلفة المنسبة، مستوى النشاط يجب أن يفوق الصفر. وهذا يمكن استنتاجه من السطر Z_p حيث يتم زيادة معامل النشاط غير الأساسي من مستوى سالب إلى مستوى الصفر، أي جعله في الجدول اللاحق نشاط أساسي.

نموذج البرمجة الخطية كما أشرنا سابقا يمثل نظام مدخلات ومخرجات مع العناصر الأساسية التالية:

المدخلات = الموارد المتاحة.

المخرجات = مساهمة النشاط لهدف الدالة.

النموذج = تحويل الموارد المحدودة لنشاطات.

نظام المدخلات والمخرجات لمسائل Max يمكن أن يؤدي إلى:

- زيادة في مساهمة النشاط لدالة الهدف.
- زيادة في إتاحة الموارد المحدودة.
- تخفيض في استهلاك النشاط للموارد المحدودة.

عندما لا يظهر أحد النشاطات في عمود الأساس هذا يعني أن قيمته تساوي صفر كما يعني اقتصاديا أنه غير مربح لذا لم يتم إنتاجه، وهذا يدل على أن التكلفة المنسبة لهذا النشاط أكبر من وحدة الربح.

لتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

الربح اليومي: $Max\ Z_p = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

حيث:

العملية 1: $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 340$

العملية 2 : $3x_1 + 0x_2 + 2x_3 \leq 460$

العملية 3: $x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 420$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل الأمثل للبرنامج معطى بالجدول التالي:

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل الأمثل
X_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
X_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
X_3	2	0	0	-2	1	1	20
Z_p	4	0	0	1	2	0	1350

من خلال الحل للبرنامج نلاحظ أن $x_1 = 0$ هذا يعني أنه غير مربح ويعني كذلك أن التكلفة المنســـبة له أكبر من وحدة الربح أي أن: $u_1 + 3u_2 + u_3 > c_1$

يمكن وضـــع x_1 مربح وهذا بتخفيض قيمة معاملات $(u_1 + 3u_2 + u_3)$ أي بتخفيض اســتعمالات المنتج الأول للعمليات الثلاثة، هذه الاستعمالات معطاة بمعاملات $(u_1 ، u_2 ، u_3)$

جدول الحل الأمثل أعطى لنا، $u_1 = 1$ و $u_2 = 2$ و $u_3 = 0$

التخفيض في الاستعمال للعملية الثالثة يكون غير مجدٍ أو فعال ما دامت التكلفة المنسبة للوحدة تساوي صفر $(u_3 = 0)$. إذًا التخفيض يكون للعملية الثانية والثالثة.

من التحاليل السابقة نجد أن الأولوية تعطى للعملية الثانية لأن قيمة الوحدة للمورد لها أكبر من العملية الأولى.

بافتراض أننا مهتمين بتحديد مقدار التخفيض في الاستعمال للعملية الثانية التي تجعل المنتج الأول مربح.

إذا وضعنا δ_1 تمثل التخفيض للمنتج الأول على العملية الثانية وحيث أن المنتج الأول يكون مربح فقط عندما تكون $u_1 + 3u_2 + u_3 < c_1$ إذًا: $u_1 + (3 - \delta_2)u_2 + u_3 < c_1$

بالتعويض بقيم المتغيرات الثنائية وقيمة معامل الهدف الأصلية أو الطرف الأيمن لقيد الثنائية المشارك مع X_1 نجد أن:

$$(1).1 + (3 - \delta_2).2 + (1).0 < 3$$
$$7 - 2\delta_2 < 3$$
$$\delta_2 > 2$$

وهذا يعني أن الاســـتعمال للعملية الثانية يجب أن يخفض بأكبر من 2 وحدة لكي يكون المنتج الأول أي X_1 مربح.

5) طريقة الـ Simplex للثنائية:

في الأجزاء السابقة وضحنا أنه عند أي جدول للأصلية $(Z_i - c_i)$ معامل الهدف لـــ: X_i يساوي الفرق بين الجهة اليسرى واليمنى لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية، في حالة Max، جدول الأصلية لا يكون مثالي في حالة $Z_i - c_i < 0$ لمتغير واحد على الأقل، إلا في الحالة المثلى يكون $Z_i - c_i \geq 0$ لكل المتغيرات.

إذا نظرنا للحالة هذه من وجهة نظر الثنائية يكون لدينا:

$$Z_i - c_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} u_j - c_i$$

في حالة ما تكون: $Z_j - c_j < 0$ فإن: $\sum_{j=1}^{m} a_{ji} u_j < c_i$

وهذا معناه أن جدول الثنائية ليس عملي في حالة ما الأصلية غير مثالية.

وفي حالة ما الطرف الأيسر أكبر من أو يساوي الصفر فإن الطرف الأيمن يكون أكبر من أو يساوي c_i هذا يعني أن الثنائية تكون عملية عندما تكون الأصلية مثالية.

هذه الحالة تستوجب طريقة جديدة للحل للبرمجة الخطية التي تبدأ بالجدول غير عملي (لكن أحسن) من أن يكون مثالي.

هذه الطريقة الجديدة في الحل سواء للبرامج الأصلية أو البرامج الثنائية تسمى بطريقة الـــ Simplex للثنائية، وتمثل طريقة حل، وأنها مهمة جدا في تحليل الحساسية Sensitivity Analysis أي تصحيح الانحرافات.

مثال تطبيقي على طريقة السمبلكس للثنائية:

$$Min\ Z_p = 2x_1 + x_2$$

حيث:

$$3x_1 + x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$x_1\ , x_2 \geq 0$$

الخطوة الابتدائية تتطلب تحويل القيود إلى $\leq$ وإدخال المتغيرات الأساسية أي وضع البرنامج على الشكل المعياري: $Min\ Z_p = 2x_1 + x_2$

حيث:

$$-3x_1 - 2x_2 + s_1 = -3$$
$$-4x_1 - 3x_2 + s_2 = -6$$
$$x_1 + 2x_2 + s_3 = 3$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

المتغيرات (s_1, s_2, s_3) تمثل المتغيرات الأساسية في جدول Simplex T_0، هذا الجدول ليس جدول أول عملي لأن عمود الموارد توجد به قيم سالبة، أي أن شرط العملية غير محقق بينما شرط الأمثلية محقق مما يتطلب الحل بطريقة السمبلكس للثنائية:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_0
S_1	-3	-1	1	0	0	-3
S_2	-4	-3	0	1	0	-6
S_3	1	2	0	0	1	3
Z_p	-2	-1	0	0	0	0

من أهم أسس Simplex، طريقة الحل تكون مبينة على تحقيق شرط العملية وتتحقق الأمثلية عند الوصول للحل الأمثل.

حالة العملية: تحدد المتغير الأساسي الخارج، أي تحدد سطر الدوران، حيث المتغير الأساسي الخارج هو المتغير الذي له أكبر قيمة متبوعة بإشارة سالبة، إذا كانت كل عناصر العمود موجبة، الحل عملي.

حالة الأمثلية: تحدد المتغير الداخل، أي تحدد عمود الدوران، المتغير غير الأساسي الداخل يختار من ضمن المتغيرات غير الأساسية بالطريقة التالية (بوقرة ,2009صفحة112) :

قسمة عناصر سطر الدوران على عناصر السطر Z_p، لا يتم التعامل مع عناصر سطر الدوران الأكبر من أو تساوي الصفر، المتغير الداخل إذًا هو الذي له أقل ناتج قسمة موجبة في حالة ما إذا كان البرنامج على الشكل Min، أو أقل قيمة مطلقة للنسب أي أكبر نسبة متبوعة بإشارة سالبة، إذا كان البرنامج على الصورة Max.

إذا كانت كل عناصر السطر صفر أو موجبة، يتم اختيار سطر آخر وفي حالة عدم وجود سطر آخر، البرنامج لا يوجد له حل عملي وبالتالي لا يوجد له حل أمثل.

المتغير الخارج هنا s_2 مادام المورد يساوي (-6)

لإيجاد المتغير الداخل نضع الجدول التالي:

المتغيرات	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
السطر Z_p	-2	-1	0	0	0
السطر S_2	-4	-3	0	1	0
ناتج القسمة	$1/2$	$1/3$	$-$	$-$	$-$

ما دامت أقل نسبة هي $1/3$ فإن المتغير الداخل هو X_2.

الآن بعد تعيين المتغير الخارج والمتغير الداخل، يتم إتباع طريقة السملكس العادية لحساب الجدول الجديد.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_1
S_1	$-5/3$	0	1	$-1/3$	0	$1-$
X_2	$4/3$	1	0	$-1/3$	0	2
S_3	$5/3$	0	0	$2/3$	1	-1
Z_p	$-2/3$	0	0	$-1/3$	0	2

هنا ظهرت حالة انحراف وبالتالي يمكن اختيار أي واحد من المتغيرات الأساسية إما s_1 أو s_3.

وحيث أن عناصر s_1 يوجد بها قيم سالبة بينما عناصر s_3 لا توجد بها قيم سالبة فهذا يعني اختيار السطر الأول كسطر دوران:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_2
X_1	1	0	$-3/5$	$1/5$	0	$3/5$
X_2	0	1	$4/5$	$-3/5$	0	$6/5$
S_3	0	0	-1	1	1	0
Z_p	0	0	$-2/5$	$-1/5$	0	$12/5$

الجدول الأخير تحقق فيه شـــرط العملية وفي نفس الوقت له شـــرط الأمثلية محقق، مما يعني أنه جدول حل أمثل، حيث:

$$x_1 = 3/5$$
$$x_2 = 6/5$$
$$Z_p = 12/5$$

ملاحظة: يمكن الانتقال من الحل بطريقة السـمبلكس للثنائية إلى طريقة السـمبلكس العادية في نفس المسـألة. كما أن طريقة السمبلكس للثنائية عادة ما تستعمل في تحليل الحساسية عند استعمال الثنائية في التحليل.

6) حسابات مهمة للأصلية – الثنائية

يمكن استعمال المصـفوفات لاسـتخراج بعض الحسـابات المهمة للأصـلية– الثنائية، بحث أن المتغيرات التي تدخل ضمن المصفوفة تكون حسب الجدول التالي:

T	$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad \ldots$	$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \ldots$	
عمود الموارد	مصفوفة المتغيرات الأساسية	معاملات المتغيرات للقيود للطرف الأيسر	S_1 S_3 S_3
	عناصر سطر دالة الهدف		Z_p

سنقسم الحسابات إلى قسمين:

أ–حسابات تخص عناصر المصفوفة: في أي مرحلة من المراحل لجدول السميلكس (أصلي أو ثنائي) عناصر القيود وعمود دالة الهدف للجدول تحسب كما يلي:

$$\text{عمود عند } T_i = \left(\text{عمود النموذج الأصلي}\right)\left(\text{مصفوفة المتغيرات الأساسية عند } T_i\right)$$

لكل $i = 1,2, \ldots . , n$

ب) حسابات تخص سطر دالة الهدف: لأي جدول من جداول السمبلكس العنصر i في سطر دالة الهدف للمتغير يحسب كما يلي:

$$\text{العنصر } x_i \text{ في دالة الهدف} = \left(\text{الطرف الأيسر لقيد الثنائية المماثل}\right) - \left(\text{الطرف الأيمن لقيد الثنائية المماثل}\right)$$

ونقصد بالمماثل في نفس رتبة الجدول.

لحساب المعاملات عدديا، نحتاج لقيم عددية لمتغيرات الثنائية.

ما دامت معاملات دالة الهدف تختلف من جدول إلى آخر، يمكن اســتعمال المعادلة التالية التي تعطي متغيرات الثنائية عند أي جدول:

$$\text{متغيرات قيم الثنائية عند } T_i = \left(\text{مصفوفة المتغيرات الأساسية للأصلية عند } T_i\right)\left(\text{معاملات المتغيرات الأساسية للأصلية عند } T_i\right)$$

7) تحليل الحساسية:

من أجل مواصلة تحليل الحساسية Sensitivity Analysis لهذا الفصل يمكن وضع الخطوات التالية:

1. إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي.
2. من أجل أي اقتراح للتغيير في البرنامج الأصـلي، وبعد إعادة الحسـاب للعناصـر الجديدة للجدول الأمثل المسجل في الخطوة (1) باستعمال حسابات الأصلية – الثنائية، أو الحسابات العادية توجه إلى الخطوة (3)
3. إذا كان الجدول الجديد غير أمثل، توجه إلى الخطوة (4). أما إذا كان غير عملي توجه إلى الخطوة (5) وإلا يتم تسجيل الجدول كجدول حل أمثل، قف.
4. استعمل طريقة السمبلكس العادية للجدول الجديد من أجل الوصول إلى جدول الحل الأمثل الجديد، قف.
5. اسـتعمل طريقة السـمبلكس للثنائية للجدول الجديد من أجل الوصـول إلى جدول الحل الأمثل الجديد، أو قف.

رجوعا إلى دراسة الحالة في الفصل الأول فإن الحل الأمثل المسجل هو:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_2
S_1	0	0	1	$-7/4$	$19/4$	$29/4$
X_1	1	0	0	$-1/4$	$-5/4$	$5/4$
X_2	0	1	0	0	1	3
Z_p	0	0	0	$1/2$	$1/2$	$64/4$

7-1. تغيرات لها تأثير على العملية: هناك نوعين من التغيرات التي يمكنها أن تؤثر على الحل الأمثل الحالي:

أ) تغيرات في الموارد المتاحة: افترض أنه حدث تغير في النموذج الأصـــلي في المورد الثاني من 20 إلى 22. من حسـابات (الأصـلية– الثنائية) أن التغيرات في الموارد المتاحة تؤثر فقط على الجهة اليمنى للجدول الأمثل (عمود الموارد) أي أن التغير يؤثر فقط على العملية.

حساب الجهة اليمنى على أساس التغيير الجديد تتم كالتالي:

$$\begin{matrix} s_1 \\ X_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ X_1 = \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -7/4 & 19/4 \\ 0 \quad 1/4 & -5/4 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad 28 \times 3 \quad \begin{matrix} 22 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 15/4 \\ = \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 7/4 \end{matrix}$$

كيفية حساب عناصر العمود:

$$1 * 28 - 7/4 * 22 + 19/4 * 3 = 15/4$$
$$0 * 28 + 1/4 * 22 - 5/4 * 3 = 7/4$$
$$0 * 28 + 0 * 22 + 1 * 3 = 3$$

مادامت عناصـــر الجهة اليمنى بقيت موجبة، المتغيرات الأســاســية الحالية تبقى ثابتة ما عدى التغيير الذي يحدث يكون على أساس النتائج الجديدة فقط.

$$s_1 = 15/4$$
$$x_2 = 7/4$$
$$x_3 = 3$$
$$Z_p = 77/4$$

الآن افترض أنه حدث تغير في المورد الثاني والثالث على التوالي من 20 إلى 22 ومن 3 إلى 5

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 5 \begin{bmatrix} 28 \\ 22 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

التغيرات التي حدثت جعلت الجدول الجديد غير عملي، الآن يمكن اســتعمال طريقة Simplex للثنائية لإيجاد الحل الجديد.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_3
S_1	0	0	1	$-7/4$	$19/4$	$53/4$
X_1	1	0	0	$+1/4$	$-5/4$	$-3/4$
X_2	0	1	0	0	1	5
Z_p	0	0	0	$1/2$	$1/2$	$54/4$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_4
S_1	$19/5$	0	1	$-4/5$	0	$52/5$
S_3	$-4/5$	0	0	$+1/5$	0	$3/5$
X_2	$4/5$	1	0	$1/5$	1	$22/5$
Z_p	0	0	0	$3/5$	0	$66/5$

وهذا هو جدول الحل الأمثل حيث:

$$s_1 = 52/5$$
$$s_3 = 3/5$$
$$x_2 = 22/5$$
$$z_p = 66/5$$

ب. إضافة قيد جديد يمكن أن تنتج عنها حالتين:

*) القيد يكون مشبع بالحل الحالي أي يحقق الشرط أي أن القيد يكون متوفر حيث لا يؤثر على الحل الأمثل.

**) القيد لا يكون مشبعًا بالحل الحالي أي لا يحقق الشرط أي أنه يكون غير متوفر (نادر) وهنا يتم استعمال طريقة السمبلكس للثنائية.

لإيجاد الحل في الحالة (*) إذا افترضنا أنه أضيف قيد جديد للبرنامج الأصلي (دراسة الحالة السابقة) حيث $x_2 \leq 4$. مادام في الحل الأمثل $x_2 = 3$ فهذا يعنى أن القيد يحقق الشرط والحل الحالي لا يتغير (بوقرة ,2009صفحة120) .

أما عند الحالة (**) فإذا افترضنا أن القيد الجديد كان $x_2 \leq 2$ في هذه الحالة القيد لا يحقق الشرط وبالتالي يتم تحويل القيد إلى الصورة المعيارية له وهذا بإضافة متغير أساسي أو إضافي إذا استدعى باستعمال s_4 كمتغير أساسي نجد الشكل المعياري للقيد: $x_2 + s_4 = 2$ حيث: $s_4 \leq 0$

مادام x_2 في الحل الحالي متغير أساسي إذًا يكون لدينا: $x_2 + 0s_1 + 0s_2 + s_3 = 3$

$$x_2 = 3 - s_3$$

الأساسية كالتالي:

بالتعويض في القيد السابق المحول إلى الشكل المعياري نجد أن:

$$3 - s_3 + s_4 = 2$$
$$-s_3 + s_4 = -1$$

وعلى أساس هذا التغيير يصبح الجدول كالتالي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	T_2
S_1	0	0	1	$-7/4$	$19/4$	0	$53/4$
X_1	1	0	0	$+1/4$	$-5/4$	0	$-3/4$
X_2	0	1	0	0	1	0	5
S_4	0	0	0	0	-1	1	-1
Z_p	0	0	0	$+1/2$	$+1/2$	0	$54/4$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
S_1	0	0	1	$-7/4$	0	$19/4$	$10/4$
X_1	1	0	0	$+1/4$	0	$-5/4$	$10/4$
X_2	0	1	0	0	0	1	2
S_3	0	0	0	0	1	-1	1
Z_p	0	0	0	$+1/2$	0	$1/2$	11

الجدول يمثل جدول حل أمثل ويكون فيه:

$$x_1 = 10/4$$
$$x_2 = 2$$
$$Z_p = 11$$

7-2. تغييرات لها تأثير على الأمثلية:

هناك حالتين أساسيتين كذلك يمكن أن تؤثر على الأمثلية، للحل الحالي:

1. تغييرات في دالة الهدف: إذا كانت التغيرات تشمل معاملات المتغيرات الأساسية للحل الأمثل الحالي يتم تحديد القيم الجديدة للثنائية ثم تستعمل هذه القيم لحساب عناصر السطر Z_p

أما إذا كان التغير يشمل المتغيرات غير الأساسية فقط، يتم استعمال قيم الثنائية للحل الأمثل الحالي لحساب عناصر السطر Z_p للمتغيرات غير الأساسية فقط، لا تظهر أي تغيرات في الجدول الحالي.

بافتراض أنه حدث تغيير في دالة الهدف للبرنامج الأصلي كالتالي: $Z_p = 3x_1 + 5x_2$

التغيير هنا شمل x_1 و x_2 التي ظهرت كمتغيرات أساسية في الحل الأمثل الحالي، وبالتالي يجب تحديد قيم الثنائية الجديدة:

u_1, u_2, u_3	=	$0\ ,3\ ,5$	$\begin{matrix}1 & -7/4 & 19/4\\ 0 & 1/4 & -5/4\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}$	=	$0\ ,3/4\ ,5/4$

كيفية عناصر السطر:

$$(1*0+0*3+0*5),(-7/4*0+1/4*3+0*5),(19/4*0-5/4*3+1*5)=(0,3/4\ ,5/4)$$

إذا قيم كل من: $u_1=0\ ,\ u_2=3/4\ ,\ u_3=\ 5/4$

الآن يتم حساب معاملات Z بأخذ الفرق بين الجهة اليسرى واليمنى لقيود الثنائية، المشاركة مع المتغيرات للأصلية.

معامل x_1: $7u_1+4u_2-3=7.0+4.3/4-3=12/4-3=0$

معامل x_2: $4u_1+5u_2+u_3-5=20/4-5=0$

معامل s_1 : $u_1-0=0-0=0$

معامل s_2 : $u_2-0=3/4$

معامل s_3 : $u_3-0=5/4$

مادام البرنامج على شكل Max وأن عناصر السطر Z_p أكبر من أو تساوى صفر فإن التغيرات فى المعاملات x_1, x_2 تدل على أنه لم يحدث أي تغير في أمثلية المتغيرات وقيمها.

إذًا التغير الوحيد الذي يحدث هو في قيمة Z_p حيث تصبح:

$$Z_p\ =\ 3.5/4\ +\ 5.3\ =\ 15/4\ +\ 15\ =\ 75/4$$

ب) إضافة نشاط جديد أي متغير قراري جديد: إضافة نشاط جديد مكافئ لإحداث تغيرات في دالة الهدف وفي الموارد.

افترض أنه حدث تغيير للبرنامج كالتالي:

$$Max\ Z_p=2x_1+3x_2+2x_3$$

حيث:

$$7x_1+4x_2+x_3\le 28$$
$$4x_1+5x_2+2x_3\le 20$$
$$x_2-x_3\le 3$$
$$x_1,x_2,x_3\ \ge 0$$

في البداية يتم التحقق مع قيد الثنائية المشارك مع x_3، حيث حسب المتغير الجديد x_3 فإن قيد الثنائية يصبح:

$$u_1 + 2u_2 - u_3 \geq 2$$

مادام x_3 متغير غير أساس في الحل الأمثل الحالي، فيتم استعمال قيم الثنائية للحل الأمثل الحالي، وبالتالي يكون معامل x_3 في الجدول الأمثل الحالي:

$$1.0 + 2.1/2 - 1/2 - 2 = 1 - 1/2 - 2 = 3/2$$

كما يمكن حساب عمود x_3 كالتالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29/4 \\ 7/4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بهذا التغيير والحسابات يصبح الجدول الجديد كالتالي:

	X_1	X_2	x_3	S_1	S_2	S_3	T_3
S_1	0	0	$-29/4$	1	$-7/4$	$29/4$	$19/4$
X_1	1	0	$-7/4$	0	$1/4$	$-5/4$	$5/4$
X_2	0	1	-1	0	0	1	3
Z_p	0	0	$-3/2$	0	$1/2$	$1/2$	$64/4$

شرط الأمثلية غير محقق مما يتطلب البحث عن الحل الأمثل الجديد باستعمال طريقة السملكس العادية:

	X_1	X_2	x_3	S_1	S_2	S_3	T_4
S_1	$29/7$	0	0	1	$-5/7$	$-1/7$	$97/7$
X_3	$4/7$	0	1	0	$1/7$	$-5/7$	$5/7$
X_2	$4/7$	1	0	0	$1/7$	$2/7$	$26/7$
Z_p	$6/7$	0	0	0	$5/7$	$-4/7$	$88/7$

	X_1	X_2	x_3	S_1	S_2	S_3	T_5
S_1	5	$3/2$	0	1	-1	1	$136/7$
X_3	2	$5/2$	1	0	1	0	$70/7$
X_2	2	$7/2$	0	0	$1/2$	1	13
Z_p	$6/2$	2	0	0	1	0	$140/7$

حل أمثل حيث:

$$s_1 = 136/7$$
$$x_3 = 70/7$$
$$s_3 = 13$$
$$Z_p = 130/7$$

المحور السادس: برمجة الأعداد الصحيحة – طريقة القطع

تأتي الأمثلة التطبيقية المتضمنة في هذا الفصل لتوضح بأسلوب مبسط ومتعمق معا أبرز الطرق والاجتهادات المختلفة التي قدمها الباحثون لحل مسائل البرمجة الخطية ذات الأعداد الصحيحة للمسائل ذات الطبيعة الخاصة.

1-مقدمـــة:

تهتم البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة، بحيث تصبح كل قيم المتغيرات عند الحل الأمثل أعدادًا صحيحة أو جزء منها أعداد صـــحيحة مع فرضـــية أن النتائج كلها موجبة، وبالتالي يطلق عليه أحيانًا البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة الصافية أو مخلوطة وهذا يعتمد على الشروط الأولية لحل المسألة.

إنَّ مشكلة البرمجة العددية هي في الحقيقة مشكلة برمجة خطية فقدت صفة الخطية لوجوب التخلي عن شروط القابلية للتجزئة بضـــرورة اتخاذ المتغيرات أو بعضـــها لقيم غير كســـرية وقد تكون مشـــكلة البرمجة العددية مشـــكلة مختلطة بمعنى أنه يلزم أن تتخذ بعض المتغيرات قيم غير عشـــرية بينما البعض الآخر يمكن أن يتخذ قيماً كســـرية وأن تكون مشـــكلة برمجة عددية صـــرفة بمعنى أنه يلزم أن تتخذ كل المتغيرات قيماً كســـرية. وهناك طرق مختلفة واجتهادات عديدة قدمها الباحثون لحل مسائل البرمجة الخطية ذات الأعداد الصحيحة للمسائل ذات الطبيعة الخاصة (مسعود الشيخ، 2009، صفحة 235).

فمثلاً عدد الســيارات التي تنتج يوميًا أو أجهزة الإذاعة المرئية ... الخ التي يمكن أن تنتج منها كســر عشــري لأنه لا يفي بالوظيفة الأساسية لإنتاجها، وتوجد حالات خاصــة من استخدام البرمجة الخطية الصــحيحة التي يتخذ فيها القرار (نعم) أو (لا) وتسمى هذه الحالات الخاصة (1،0) حيث تعني 0 (لا)، 1 (نعم) وبمعنى آخر أنك تختار هذا المشــروع أو لا تختاره، تختار هذا الطريق أو لا تختاره، نســتخدم هذا النوع من الآلات أو لا تختاره ولتوضــيح بعض المشاكل العملية التي يستخدم فيها نظام البرمجة الخطية الصحيحة يمكن التدليل ببعض الأمثلة فيما بعد.

مثال 1: من المعروف أن أي تخطيط إنتاجي يحتوي على N منتوجات تكاليف الإنتاج للمنتج J والتي يمكن أن تحتوي على تكاليف ثابتة K_1 والتي لا تعتمد على كمية الإنتاج وتكاليف متغيرة C_j للوحدة المنتجة. فإذا كان x_j مستوى الوحدات المنتجة للمنتج J فإن تكاليف المنتج من المعطيات السابقة:

$$C_j(x_j) = \begin{cases} k, +c, x & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0 \end{cases}$$

إن دالة الهدف يمكن أن تصاغ إلى النحو الآتي: $Minimize \quad z = \sum_{j=1}^{N} c_j(x_j)$

وأن الخاصية x_j غير الخطية تأتي من عدم استمرارية دالة الهدف من وجهة نظر التحليل الرياضي.

والمسألة يمكن أن تكون أكثر سهولة تحليلية وذلك باقتراح الحلول للمتغيرات على النحو التالي:

$$yi = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x_j > 0 \end{cases}$$

وهذه الشروط يمكن شرحها من نقطة قيود الخطية على النحو الآتي: $x_j \leq My_i$

حيث $M > 0$ وتكون كبيرة جدًا بحيث تكون $x_j \leq$ M وعليه يمكن إعادة كتابة دالة الهدف على نمط أكثر وضوح.

$$Minimize \quad z = \sum_{j=1}^{N} (c_j x_j + k_i y_i)$$

$$S.T.$$

$$0 \leq x_i \leq My_i \quad (J) \text{لكل}$$

$$y_1 = 0 \text{ أو } 1 \quad (J) \text{لكل}$$

ولتوضيح أن $x_j \leq My_i$ نلاحظ أن: $y_i = 1 \ , \ x_j > 0$

و k_j تكلفة ثابتة تضاف إلى دالة الهدف. فإذا كان $x_j = 0$ و y_i تساوي صفر أو 1 ولكن بما أن $k_j > 0$ و z تصغير ∴ y_1 يجب أن تساوي صفر.

مثال 2: في خطوط الإنتاج المحدد نلاحظ أن n من العمليات الإنتاجية يمكن أن تعمل على آلة واحدة في أقل زمن ممكن. وفي نهاية كل عملية إنتاجية ينتقل المنتج من عملية إنتاجية إلى أخرى حتى آخر عملية إنتاجية ليحقق الزمن اللازم للإنتاج.

وعليه فإن القيود التي تحدد مسار هذه العملية الإنتاجية لها الاشتراطات الآتية:

1-التسلسل.

2-عدد اختلاط العمليات.

3-تحقيق الزمن اللازم للإنتاج.

والشروط الأخرى أنه من الممكن أن تقام عمليتين إنتاجيتين على الآلة الواحدة (بالتناوب).

فمثلاً لو فرضـــنا أن النوع الأول x_j الزمن المحدد لبداية العملية الإنتاجية الأولى J وأن a_j هو الزمن اللازم للعملية الإنتاجية J.

فإذا كانت العملية I تسبق العملية J فإن نتيجة التسلسل تعني الآتي: $x_i + a_i \leq x_j$

أما إذا اعتبرنا الشرط الثاني فإن: $x_j - x_i \geq a_i$ أو $x_i + x_j \geq a_i$

وهذا يعتمد على أن i أو x أو J ثابتاً في الحل الأمثل للمسألة.

أما القيد الثالث:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان العملة } j \text{ تسبق } i \\ 1 & \text{إذا كان العملة } i \text{ تسبق } j \end{cases}$$

للتعرف بأن M قيمة عالية جدًا:

$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq a_j$$
$$M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq a_i$$

أما عن زمن إتمام العملية الإنتاجية فيمكن تعريفه بالمعادلة التالية: $x_j + a_i \leq d_j$

حيث d_j الزمن اللازم لتكميل المنتج.

فإذا عرفنا t بأنها الزمن الإجمالي لإنهاء جميع العمليات الإنتاجية فإن المسألة تصاغ على النحو الآتي:

$$Minimize \quad z = t$$
$$S.T.$$
$$x_j + a_j \leq 1 \qquad , \qquad j = 1,2, \dots \dots, n$$

2- طرق حل البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة:

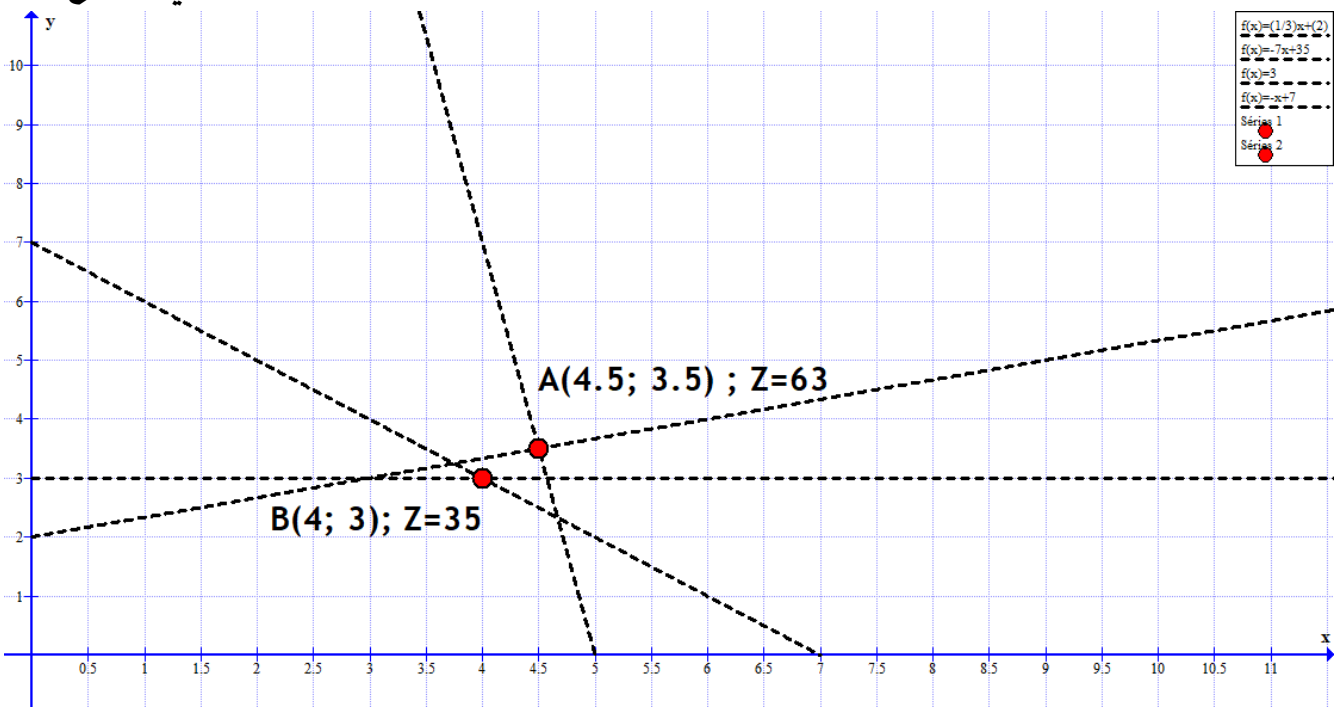
أ-طريقة قطاع مستوى:

تهتم هذه الطريقة بحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة حل المسائل بواسطة الرسم.

مثال:

$$Max \quad Z = 7x_1 + 9x_2$$
$$S.T.$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 6$$
$$7x_1 + x_2 \leq 35$$

وأعداد صحيحة: $x_1 , x_2 \geq 0$



وإذا بحثنا عن الحل في الزوايا للمساحة المحصورة مع إهمال شرط الحصول على الأعداد الصحيحة فإنه سوف يعطي: $z = 63 \quad , \quad x_2 = \frac{7}{2} \quad , \quad x_1 = \frac{9}{2}$

ومن الواضح أن هذا الحل يعطي أعدادًا غير صحيحة.

إن فكرة قطع المستويات تعتمد على تغير الدالة المقعرة للحل إلى حل يعطي أعدادًا صحيحة والذي سوف يؤثر على المساحة المحدودة لإعطاء الحل بأعداد صحيحة، ويعني هذا الاستغناء عن الكسور العشرية ويصبح الحل كما هو موضح بالرسم ويصبح الحل: $z = 55 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad x_1 = 4$

أما عن التعبير عن هذه الطريقة بواسطة السمبلكس فسوف نوضحها في المثال التالي:

المثال (15): بالإشارة إلى المثال السابق الذي تم حلّه بواسطة الرسم نلاحظ أن الجدول النهائي (الحل الأمثل) سوف يكون على الصورة التالية:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	63
x_2	0	0	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{2}$
x_1	1	1	$\frac{-1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{2}$

بما أن الحل ذو أعداد غير صحيحة:

$$Ox_1 + x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{7}{22}x_4 = 3\frac{1}{2}$$

$$\left(0 + \frac{7}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{22}\right)x_4 = \left(3 + \frac{1}{2}\right)$$

$$S_1 = \frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 = -\frac{1}{2}$$

بإضافة هذه المعادلة إلى الجدول السابق وفق قواعد قطع المستويات (مسعود الشيخ، 2009، صفحة 243).

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	الطرف الأيمن
z	0	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	0	63
x_2	0	0	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	$\frac{7}{2}$
x_1	1	1	$\frac{-1}{22}$	$\frac{3}{22}$	1	$\frac{9}{2}$
S_1	1	0	$\frac{-7}{22}$	$\frac{-1}{22}$	1	

السمبلكس الثاني يعكي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	الحل
z	0	0	0	1	0	63
x_2	0	0	0	0	0	0
x_1	1	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$4\frac{4}{7}$
x_3	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-22}{7}$	$1\frac{4}{7}$

ما دام الحل ما زال غير ذي أعداد صحيحة:

∴ يمكن كتابة المعادلة x_1 على النحو التالي:

$$x_1 + \left(1 + \frac{1}{7}\right)x_4 + \left(-1 + \frac{6}{7}\right)S_1 = \left(4 + \frac{4}{7}\right)$$

$$S_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}S_1 = -\frac{4}{7}$$

بإضافة هذا القيد إلى آخر جدول نحصل على الآتي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
z	0	0	0	1	8	0	59
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	$4\frac{4}{7}$
x_3	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-22}{7}$	0	$1\frac{4}{7}$
S_2	1	0	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-6}{7}$	1	$\frac{-4}{7}$

إن استخدام طريقة السمبلكس الثنائي يؤدي إلى الآتي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
z	0	0	0	1	2	7	35
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	-1	1	4
x_3	0	0	1	0	-4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	-7	4

وهذا الجدول يعطي الحل الأمثل للأعداد الصحيحة حيث:

$$x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad z = 55$$

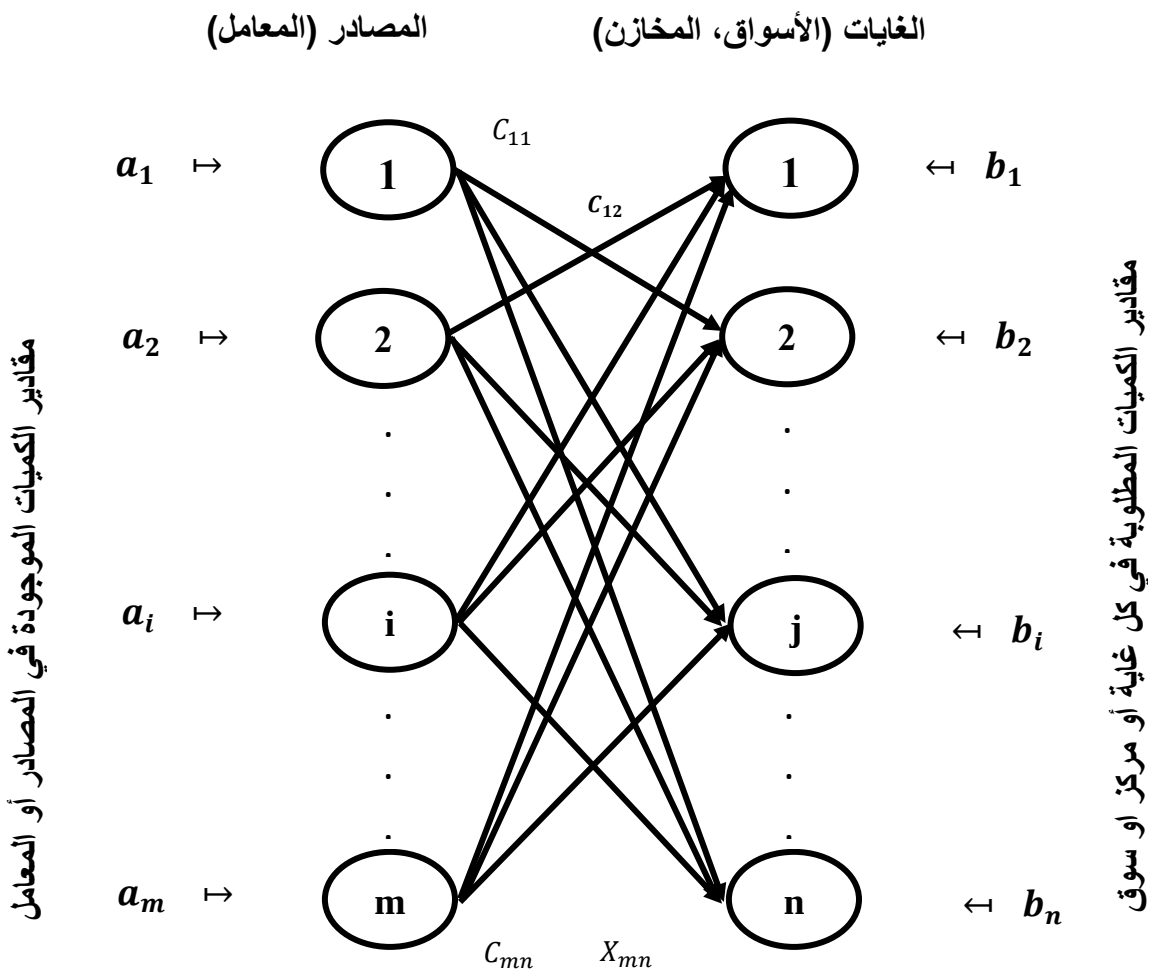
المحور السابع: برمجة الاعداد الصحيحة مشاكل النقل

مقدمة:

بدأت المعالجة العلمية لنماذج النقل منذ فترة طويلة وذلك لطبيعتها الخاصـــة – من مســـائل البرمجة الخطية العامة. بدأت أول دراسة لها بواسطة ف–هينشكوك عام 1941 ثم تلتها أخرى بواسطة ت – كويمانز عام 1947، وتعتبرا من الدراسات الهامة في مجال مسألة النقل، ولدينا العديد من الطرق التي نستخدمها لحل مسالة النقل. وقد يطبق على مسالة النقل جميع الافتراضات الخاصة بالبرمجة الخطية من حيث توافر الخطية في كل من دالة الهدف والقيود، ويمكن تلخيص مسألة النقل الكلاسيكية على النحو الآتي (نور الشمرتي، 2010، صفحة 151):

لدينا مجموعة من المصـــادر (Sources) ومن الممكن أن تكون مَعامل أو موانئ مثلاً، يوجد فيها كميات معينة من البضـــائع والمواد المراد توزيعها على مناطق الحاجة أو الأســـواق، كما يوجد لدينا في الجهة الأخرى مجموعة من المراكز أو الغايات Destinations ومثلا قد تكون أســـواق أو مناطق طلب على الحاجة المتوفرة في المصادر، والتي من الأرجح أن توزع عليها هذه الكميات أو المواد، ويستوعب كل مركز من هذه المراكز كمية معينة يجب اســتيفائها والمطلوب نقل الكميات الموجودة والمتاحة في المصـــادر (Sources) لاســتيفاء كل ما تســتوعبه الغايات (كلا على انفراد) Destinations، وذلك بتحقق أقل كلفة ممكنة، وبصفة عامة يمكن أقول ان مشكلة النقل عبارة نقل العناصـــر من مجموعة معينة من نقاط التوريد إلى مجموعة معينة من نقاط الوجهات (Singh، صـــفحة 4).

لنفرض أن لدينا (m) من المصادر (المعامل) و (n) من الغايات (الأسواق) وكما في المخطط الآتي:



ومن المخطط أعلاه يتضح لنا (E & Li, p. 4):

m: من المصادر والتي هي مناطق الإنتاج (المعامل).

n: من الغايات والتي هي مناطق التوزيع (الأسواق).

وفي كل مصـــدر أو معمل موجود $a_m, \ldots, a_3, a_2, a_1$ من الكميات المعروضـــة في مناطق الإنتاج وفي كل من الغايات يوجد $b_n, \ldots, b_3, b_2, b_1$ ، كميات مطلوبة في الأسواق.

C_{ij}: كلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج من منطقة الإنتاج (i) إلى الســـوق (j)، ونهدف إلى إيجاد جدول النقل الأمثل لنقل المنتج من مناطق الإنتاج إلى كل الأسواق مع تحقيق أقل كلفة ممكنة.

X_{ij}: الكمية التي ســـتنقل من منطقة الإنتاج المصـــادر (Sources).(i) إلى الأســـواق (j) (الغايات Destination) ويكون $i = 1,2,\ldots,m.$ ،$j = 1,2,..,n$ كما أن الذي يجب ملاحظته هو أن عدد متغيرات مشكلة النقل هو (nm) من المتغيرات.

ويمكن تمثيل أي مشكلة نقل كما في الجدول الآتي:

جدول رقم (2): الغايات (المراكز) الأسواق

	D_1	D_2	…	D_j	…	D_n	الكميات المعروضة Supply
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	….	C_{1j} X_{1j}	…..	C_{1n} X_{1n}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	….	C_{2j} X_{2j}	…..	C_{2n} X_{2n}	a_2
. .	. .	. .	. .	. .	. . . . . .	. .	. .
S_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	. .	C_{ij} X_{ij}		C_{in} X_{in}	a_i
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	. . .	C_{mj} X_{mj}	. . .	C_{nm} X_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة Demand	b_1	b_2	. . .	b_j	. . .	b_n	Q Q

ويمكن صياغة مشكلة النقل باستخدام صيغة البرمجة الخطية.

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$S.T.$$

1. قيد لضمان أن الكمية المطلوبة لن تزيد عن الكمية المعروضة في المصدر i: $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i$

2.قيد لضمان أن الكمية المنقولة تحقق أقل طلب ممكن من المورد j: $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \geq b_j$

$$X_{ij} \geq 0\ \ for\ all\ i,j \ldots\ldots\ldots (13)$$

وإذا كانت الكمية المعروضة تفي بأقل احتياجات ممكنة للأسواق فمعنى ذلك أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i \ \ldots\ldots\ldots (14)$$

ووفقا لهذه الفرضية يصبح النموذج في هذه الحالة على الشكل القياسي standard form ويدعى هذا النموذج بمشكلة النقل المتوازنة (balanced transportation) وهي أن كل القيود تصبح معادلات.

$$Min\ \ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$S.T.$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = a_i \ldots\ldots\ldots (15)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$$

$$X_{ij} \geq 0$$

ولابد من حل مشكلة النقل باستخدام البرمجة الخطية أن تكون القيود الهيكلية على شكل متساويات.

25 حل مشاكل النقل Solution of Transportation problem:

لا يمكن استخدام طريقة السمبلكس (Simplex method) في حل مشاكل النقل وذلك للتكوين الخاص لمصفوفة النقل حيث تكون معاملات المتغيرات إما واحد أو صفر. ولتسهيل عملية اختبار متغير غير أساسي

(كمتغير) (داخل) أو (استبعاد متغير أساسي)، ولهذا ممكن استخدام طرق أخرى لحل مشكلات النقل يكون أفضل ولذلك يتطلب الأمر جعل القيود على شكل متساويات (كما مر ذكره في النموذج العام)، ولذلك سوف يكون الحل على مرحلتين وكما يأتي (نور الشمرتي، 2010، صفحة 160):

5-2-1. أولاً: إيجاد حل أساسي مبدئي ممكن

تحتوي مشكلة النقل على $(n + m)$ من القيود الهيكلية و (nm) من المتغيرات، وفي طريقة السمبلكس كان عدد المتغيرات الأساسية مساويا لعدد القيود الهيكلية. أما في مشكلة النقل فإن عدد المتغيرات الأساسية يكون $((n + m - 1)$ حيث أن المشكلة تحتوي على هذا العدد من المعادلات وبالإمكان إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن بالاستعانة بإحدى الطرق الآتية:

أ. طريقة الركن الشمالي الغربي North − west corner

ب. طريقة الأقل كلفة Least cost .

ج. طريقة الجزاء (فوجل) (Penality method) Vogl's method

(Vogl's Approximation method) (VAM)

وفيما يلي توضيح لكل طريقة من هذه الطرق ومميزاتها:

أ. طريقة الركن الشمالي الغربي North - west corner method:

تعد هذه الطريقة من أسهل الطرق على الإطلاق، إذ لا يستخدم فيها أي منطق علمي لتوزيع الكميات المتوفرة في المصادر (المعامل) Sources لتلبية احتياجات الغايات Destination، إذ تبدأ عملية إيجاد الحل الأساسي الأولي من الزاوية الشمالية الغربية ولذلك سميت هذه الطريقة بهذا الاسم، ويتلخص عمل الطريقة فيما يأتي:

ابتداءً نبدأ نقارن الكمية المطلوبة (عند المراكز أو الغايات أو الأسواق) بالكمية المتاحة عند المصادر (مراكز الإنتاج)، في أول خانة أو مربع من الركن الشمالي الغربي من الجدول رقم (2) في نماذج النقل – أي نقارن الكمية المطلوبة عند D_1 – بالكمية المتاحة عند S_1 – ونضع في هذه الحالة أقل الكميتين، ثم ننتقل إلى الخلية الثانية على نفس الصف وهي الخلية S_1D_2 – والكمية المتاحة لدينا هي الكمية المتبقية بعد وضع الكمية في الخلية الأولى – S_1D_1 – وأيضا نقارن هذه الكمية المتبقية بالكمية المطلوبة عند – D_2 – ونختار أقل كمية، وبذلك نكون قد

استهلكنا أو نقلنا كل الكميات المتاحة عند المصدر S_1 – لذلك ننتقل إلى الصف الثاني على نفس العمود D_2 – أي عند الخلية S_2D_2 ونقارن أيضـا الكمية المتبقية لاسـتيفاء متطلبات D_2 بالكمية المتاحة عند S_2 ونختار أقل كمية ونكرر هذا العمل حتى نفي بكل الاحتياجات عند الغايات D_j $(j = 1,2, \dots n)$ وبذلك ننقل كل الكميات المتاحة عند المصادر S_i $(i = 1,2, \dots m)$. هذا الحل يسمى الحل الأساسي الابتدائي ويكون حلاً أساسيًا يمكن تحسينه مباشرة إذا توفر الشرط الآتي:

مجموع الخلايا المشغولة بالكميات $= m + n - 1$

m: عدد المصادر

n: عدد الغايات

مثال (52):

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	10 X_{11}	0 X_{12}	20 X_{13}	11 X_{14}	15
S_2	12 X_{21}	7 X_{22}	9 X_{23}	20 X_{24}	25
S_3	0 X_{31}	14 X_{32}	16 X_{33}	18 X_{34}	5
	5	15	15	10	45 / 45

قبل البدء بحل المثال أعلاه يجب التأكد من أن مشكلة النقل متوازنة، أي أن:

مجموع ما تحتويه المصادر = مجموع احتياجات الغايات = 45

10 $X_{11}=5$	0 $X_{12}=10$	20 $X_{13}=0$	11 $X_{14}=0$	15
12 $X_{21}=0$	7 $X_{22}=5$	9 $X_{23}=15$	20 $X_{24}=5$	25
0 $X_{31}=0$	14 $X_{32}=0$	16 $X_{33}=0$	18 $X_{34}=5$	5
5	15	15	10	45 / 45

المتغيرات الأساسية: $X_{11}=5,\ X_{12}=10,\ X_{22}=5,\ X_{23}=15,\ X_{24}=5,\ X_{34}=5$

المتغيرات غير الأساسية: $X_{13}=X_{14}=X_{21}=X_{31}=X_{32}=X_{33}=0$

وتكون الكلفة الكلية للنقل كما يلي: $Min\ \ Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_{ij}X_{ij}$

$$Z=5*10+10*0+5*7+15*9+5*20+5*18=410$$

وتكون عدد الخلايا المشغولة $m+n-1=6$

مثال 53: استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأساسي لمشكلة النقل الآتية:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	10 $X_{11}=5$	0 $X_{12}=5$	20 $X_{13}=0$	11 $X_{14}=0$	10
S_2	12 $X_{21}=0$	7 $X_{22}=5$	9 $X_{23}=0$	20 $X_{24}=0$	5
S_3	0 $X_{31}=0$	14 $X_{32}=0$	16 $X_{33}=8$	18 $X_{34}=7$	15
	5	10	8	7	30 / 30

المتغيرات الأساسية: $X_{11}=5,\ X_{12}=5,\ X_{22}=5,\ X_{23}=0,\ X_{33}=8,\ X_{34}=7$

المتغيرات غير الأساسية: $X_{13} = X_{14} = X_{21} = X_{24} = X_{31} = X_{32} = 0$

لا يوجد مانع أن يكون $X_{32} = 0$ بدلا من $X_{23} = 0$ (ضمن الحل ووفقا لتحقيق المسار في هذه الطريقة)

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}X_{ij}$$

$$Z = 5 * 10 + 5 * 0 + 5 * 7 + 0 * 9 + 8 * 16 + 7 * 18 = 339$$

وتكون عدد الخلايا المشغولة $m + n - 1 = 6$

المثال (16): استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأساسي لمشكلة النقل المبينة في المتغيرات الأساسية:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	37 $X_{11} = 75$	27 $X_{12} = 25$	28 $X_{13} = 0$	34 $X_{14} = 0$	30 $X_{15} = 0$	100
S_2	29 $X_{21} = 0$	32 $X_{22} = 35$	32 $X_{13} = 70$	27 $X_{24} = 20$	28 $X_{25} = 0$	125
S_3	34 $X_{31} = 0$	27 $X_{32} = 0$	37 $X_{33} = 0$	30 $X_{34} = 60$	30 $X_{35} = 90$	150
	75	60	70	80	90	375 / 375

المتغيرات الأساسية:

$$X_{11} = 75, \quad X_{12} = 25, \quad X_{22} = 35, \quad X_{23} = 70, \quad X_{24} = 20, \quad X_{34} = 60, X_{35} = 90$$

المتغيرات غير الأساسية: $X_{13} = X_{14} = X_{15} = X_{25} = X_{31} = X_{33} = 0$

ولكن الكلفة الكلية لمشكلة النقل هي: $Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}X_{ij}$

$$Z = 30 * 90 + 30 * 60 + 20 * 27 + 32 * 70 + 32 * 35 + 25 * 27 + 75 * 37 = 11850$$

ويجب أن يتحقق الشرط الآتي، وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يساوي: $m+n-1=7$

لذلك فإن هذه المشكلة وما سبقها هي مشاكل من النوع القابلة للحل الأمثل بدون أية إجراءات إضافية ويطلق على هذا النوع من مشـــاكل النقل التي يتحقق فيها الشـــرط المذكور وهو [عدد الخلايا المملوءة (المشـــغولة) $m+n-1$] بأنها مشاكل غير منحلة (non degenerate)، أما المشاكل التي لا يتحقق فيها الشرط أعلاه ستكون من نوع المشـــاكل المنحلة (degenerate)، وهنا لا يمكن إيجاد الحل الأمثل لهذا النوع الأخير من المشـــاكل إلا بعد إجراءات إضافية أخرى.

مميزات طريقة الركن الشمالي الغربي:

توجد خاصـية في طريقة الركن الشـمالي الغربي بأنها تنتج دائماً عنها أفضـل عدد من الخلايا المشـغولة وهي في نفس الوقت تمثل عدد المتغيرات الأساسية (Basic variables). ولبرهنة ما ورد أعلاه نأخذ المثال الآتي:

مثال (55): استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأساسي لمشكلة النقل الآتية:

	D_1	D_2	D_3	
S_1	10 $X_{11}=150$	35 $X_{12}=0$	25 $X_{13}=0$	150
S_2	80 $X_{21}=0$	5 $X_{22}=50$	20 $X_{23}=50$	100
	150	50	50	250 / 250

المتغيرات الأساسية: $X_{11}=150,\ X_{12}=0,\ X_{22}=50,\ X_{23}=50$

المتغيرات غير الأساسية: $X_{13}=\ X_{21}=0,$ أما التكلفة الكلية فتكون:

$$Min\quad Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_{ij}X_{ij}=150*10+0*35+50*5+50*20=2750$$

المثال المار الذكر الأخير من خلال الحل بطريقة الركن الشـــمالي حصـــلنا على أقل كلفة ممكنة وهي التي نحصـــل عليها من خلال الحل الأمثل فيما لو طبقت طريقة من طرق التحقق من الحل الأمثل (بيان ذلك فيما بعد) بالإضافة إلى تحقيق معادلة (عدد الخلايا المملوءة $= m + n - 1$)، بينما لو تم الحل بطريقة فوجيل سوف يعطي الكلفة نفسها ولكن بثلاث خلايا مشغولة (أي حل منحل degenerate)، وسوف يتم معالجة ذلك فيما بعد.

ب. طريقة الأقل كلفة The least cost method:

لا شـك في أن طريقة الأقل كلفة هي الطريقة المفضـلة على طريقة الركن الشـمالي الغربي حيث يتم اختيار وتوزيع الخلايا المشـغولة على أسـاس أقل كلفة، حيث يتم مشـاهدة جدول التكاليف وإيجاد أقل الكلف وبعد ذلك يتم تخصـيص الكمية المطلوبة في الغاية مقابل المربع أو الخلية الذي يحتوي أقل كلفة، وبعد أن ننتهي من تخصـيص الاحتياجات المطلوبة أو انتهاء ما تحويه المصادر، نقوم بملاحظة جدول الكلف مرة أخرى ورصد أقل كلفة أخرى لم يتم اختيارها ويتم توزيع ما يبقى من المصـادر من كميات وحسـب احتياجات الغايات بالطريقة نفسـها. وسـنوضـح طريقة الأقل كلفة لإيجاد الحل الأساسي لمشكلة (نور الشمرتي، 2010، صفحة 159).

المثال (17): اسـتخدم طريقة الأقل كلفة لإيجاد الحل الأسـاسـي لمشـكلة النقل المبينة في الجدول الآتي: (سنحاول أولا حل الجدول التالي بطريقة الركن الشمالي الغربي واستخراج الكلفة الكلية ومقارنتها بالكلفة الكلية لنفس الجدول وبطريقة الأقل كلفة).

أولا: الحل بطريقة الركن الشمالي الغربي:

	D_1	D_2	
S_1	4 $X_{11} = 60$	2 $X_{12} = 0$	60
S_2	7 $X_{21} = 40$	5 $X_{22} = 0$	40
S_3	3 $X_{31} = 5$	10 $X_{32} = 65$	70
	105	65	170 / 170

متغيرات أساسية: $X_{11} = 60,\ X_{21} = 40,\ X_{31} = 5,\ X_{32} = 65$

متغيرات غير أساسية: $X_{12} = \ X_{22} = 0$

وتكون التكلفة الكلية كما يلي:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}X_{ij}$$

$$Z = 10 * 65 + 5 * 3 + 40 * 7 + 60 * 4 = 1185$$

ويكون عدد الخلايا المشغولة $m + n - 1 = 4$

ثانيا: الحل بطريقة الأقل كلفة

	D_1	D_2	
S_1	4 $X_{11} = 0$	2 $X_{12} = 60$	60
S_2	7 $X_{21} = 35$	5 $5X_{22} =$	40
S_3	3 $X_{31} = 70$	10 $X_{32} = 0$	70
	105	65	170 / 170

متغيرات أساسية: $X_{12} = 60, \ \ X_{21} = 35, \ X_{22} = 5, \ X_{31} = 70$

متغيرات غير أساسية: $X_{11} = \ X_{32} = 0$

وتكون التكلفة الكلية كما يلي:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}X_{ij} = 60 * 2 + 5 * 5 + 35 * 7 + 70 * 3 = 600$$

ويكون عدد الخلايا المشغولة $m + n - 1 = 4$

المثال (18): أوجد الحل الأساسي الأولي لجدول النقل باستخدام طريقة أقل كلفة:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	37 $X_{11}=0$	27 $X_{12}=60$	28 $X_{13}=40$	34 $X_{14}=0$	30 $X_{15}=0$	100
S_2	29 $X_{21}=0$	32 $X_{22}=0$	32 $X_{23}=0$	27 $X_{24}=80$	28 $X_{25}=45$	125
S_3	34 $X_{31}=75$	27 $X_{32}=0$	37 $X_{33}=30$	30 $X_{34}=0$	30 $X_{35}=45$	150
	75	60	70	80	90	375 / 375

متغيرات أساسية:

$$X_{12}=60,\ X_{13}=40,\ X_{24}=80,\ X_{25}=45, X_{31}=75, X_{33}=30,\ X_{35}=30$$

متغيرات غير أساسية: $X_{11}=X_{14}=X_{15}=X_{22}=X_{32}=X_{21}=X_{23}=X_{34}=0$

توضيح لطريقة الحل:

يتم تحديد أقل كلفة موجودة ضمن جدول النقل وهي (27) في الخلايا التالية: S_1D_2, S_2D_4, S_3D_2

وهنا سنختار المربع أو الخلية S_2D_4 لنقل كمية مقدارها (80) وبعدها سوف نختار S_1D_2 لنقل كمية مقدارها (60)، إلى أن ننقل جميع الكميات الموجودة في المصادر لتلبية احتياجات الغايات لجميع خلايا الجدول.

ملاحظة: الذي يؤخذ سلبًا على طريقة الأقل كلفة هي أن هذه الطريقة، تبدأ باختيار أقل كلفة لنقل أعلى الكميات من خلال الخلايا أو المربعات التي تتمتع بأقل التكاليف، مما يضطرنا بالأخير إلى استخدام المربعات التي تحتوي على أعلى التكاليف، وهذا ما حصل لنا في حل المثال السابق (الأخير) في توزيع ما يحتويه المصدر الثالث على احتياجات النهايات الأولى والثالثة والخامسة ذات الكلف المرتفعة نسبيًا.

وتكون الكلفة الكلية:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}X_{ij}$$

$$Z = 60 * 27 + 40 * 28 + 80 * 27 + 45 * 28 + 75 * 24 + 30 * 37 + 45 * 30 = 11170$$

ويكون الخلايا المشغولة يساوي: $m + n - 1 = 7$

المثال (19): استخدم طريقة الأقل كلفة لإيجاد الحل الأساسي الأولي لجدول النقل الآتي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	2 $X_{11} = 6$	3 $X_{12} = 0$	11 $X_{13} = 0$	7 $X_{14} = 0$	6
S_2	1 $X_{21} = 1$	0 $X_{22} = 0$	6 $X_{23} = 0$	1 $X_{24} = 0$	1
S_3	5 $X_{31} = 0$	8 $X_{32} = 5$	15 $X_{33} = 3$	9 $X_{34} = 2$	10
	7	5	3	2	17 / 17

متغيرات أساسية: $X_{11} = 6,\ X_{21} = 1,\ X_{32} = 5,\ X_{33} = 3,\ X_{34} = 2$

متغيرات غير أساسية: $X_{12} = X_{13} = X_{14} = X_{22} = X_{23} = X_{24} = X_{31} = 0$

وهنا عدد الخلايا المشغولة $= 5 \neq m + n - 1$

ويكون نوع الحل لجدول النقل أعلاه من النوع المنحل، وسوف يتم تحسين هذا النوع من الحلول فيما بعد وفقا لطريقة معينة.

ج. طريقة فوجيل (الجزاء) Penality method::Vogel's Approximation method (AM)

يلزمنا في هذا الأســـلوب تحديد الفرق بين أقل كلفتين في كل صـــف وفي كل عمود، وبعد ذلك يجب اختيار الفرق الأكبر من فروق الصفوف والأعمدة، وتبعا لهذا سوف يتم تحديد صف أو عمود والذي يقابل أكبر الفروق بعد

هذا يتم اختيار المربع الذي يحتوي على أقل كلفة في الصـــف أو العمود المختار في الخطوة الســـابقة، بعد هذا يتم تخصيص أكبر كمية متيسرة لتسديد احتياجات الغاية أو نفاذ موجودات المصدر.

لغرض اتمام الحل بدون أدنى إشكال أو خطأ، يستلزم بنا إلغاء مرحليا الصف أو العمود الذي يتم استيفاء كل احتياجاته أو نفاد كل ما موجود في غاية العمود، ونكرر العمل بالجدول الجديد حتى يتم ملء كافة الخلايا التي تستخدم في نقل ما موجود في المصدر إلى تسديد احتياجات الغايات.

وتعد طريقة فوجيل من أهم طرق تحديد الحل الأســاســـي المبدئي على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة للوصول إلى الحل الأمثل أو الحل القريب من الحل الأمثل، ونادرًا ما تكون طريقتي أقل كلفة والشمالي الغربي أفضل من طريقة فوجيل، ويقصد بالأفضلية في هذا المجال هو الوصول إلى الحل بأسرع وقت ممكن وهنا الطريقة تحتاج إلى عمليات حسابية أطول.

ولتوضيح خطوات هذه الطريقة نأخذ المثال الآتي:

المثال (20): أوجد الحل الأساسي المبدئي لمشكلة النقل الآتية مستعينا بطريقة فوجيل:

.1

	D_1	D_2		الفروق للصفوف Penality
S_1	4	2	60	2
S_2	7	5	40	2
S_3	3	10	70	7
	105	65	170 / 170	
الفروق للأعمدة Penality	1	3		

.2

	D_1	D_2	
S_1	4	2	60
S_2	7	5	40
S_3	3 70	10	70
	105	65	

$X_{31} = 70$

.3

	D_1	D_2		Penality الفروق للصفوف
S_1	4	2 60	60	2
S_2	7	5	40	2
S_3	3	10	70	
	105	65	170 170	
Penality	3	3		

$X_2 = 60$

.4

	D_1	D_2	
S_2	7 35	2 5	40

$$X_{21} = 35$$

$$X_{22} = 5$$

ومن ثم تتم العودة إلى مشكلة النقل الأساسية لتوزيع كافة الكميات على الخلايا المشكلة الأصلية.

	D_1	D_2	
S_1	4 $X_{11} = 0$	2 $X_{12} = 60$	60
S_2	7 $X_{11} = 35$	5 $X_{22} = 5$	40
S_3	3 $X_{31} = 70$	10 $X_{32} = 0$	70
	105	65	170 170

وتكون الكلفة الكلية لمشكلة للنقل:

$$Min\ Z = 3 * 70 + 35 * 7 + 5 * 5 + 60 * 2 = 60$$

المثال (21): أوجد الحل الأساسي المبدئي لمشكلة النقل الآتية باستخدام طريقة فوجيل Vogel's :

.1

	D_1	D_2	D_3	D_4		Penality الفروق للصفوف
S_1	20	22 40	17	4	120	13
S_2	24	37	9	7	70	2
S_3	32	37	20	15	50	5
	60	40	30	110	240 240	
Penality الفروق للأعمدة	4	15	8	3		

$X_{12} = 40$ ↑

وهنا سوف يحذف العمود الثاني (الغاية رقم 2) مرحليا.

.2

	D_1	D_3	D_4		Penality
S_1	20	17	4 80	80	13
S_2	24	9	7	70	2
S_3	32	20	15	50	5
	60	30	110	200 200	
Penality	4	8	3		

$X_{14} = 80$

3. وهنا سوف يتم حذف الصف الأول (المصدر رقم 1) ومرحليا:

	D_1	D_3	D_4		Penality
S_2	24	9 30	7	70	2
S_3	32	20	15	50	5
	60	30	30	120 120	
Penality	11	11	8		

$X_{23} = 30$ ↑

4. وهنا سوف يتم حذف العمود الثالث (الغاية رقم 3):

	D_1	D_4		Penality
S_2	[24] 10	[7] 30	40	17
S_3	[32] 50	[15]	50	17
	60	30	90 / 90	
Penality	8	8		

$$X_{21} = 10,\ X_{24} = 30,\quad X_{31} = 50$$

وهنا سوف يتم العودة إلى الجدول الأصلي لمشكلة النقل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	[20] $X_{11} = 0$	[22] $X_{12} = 40$	[17] $X_{13} = 0$	[4] $X_{14} = 80$	120
S_2	[24] $X_{21} = 10$	[37] $X_{22} = 0$	[9] $X_{23} = 30$	[7] $X_{24} = 30$	70
S_3	[32] $X_{31} = 50$	[37] $X_{32} = 0$	[20] $X_{33} = 0$	[15] $X_{34} = 0$	50
	60	40	30	110	240 / 240

وتكون الكلفة الكلية للمشكلة كما يلي:

$$Min\ Z = 40 * 22 + 80 * 4 + 10 * 24 + 30 * 9 + 30 * 7 + 50 * 32 = 3520$$

وعدد الخلايا المشغولة $= m + n - 1 = 6$

المثال (22): أوجد الحل الأساسي المبدئي لمشكلة النقل الآتية باستخدام طريقة فوجيل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5		Penality
S_1	[10]	[7]	[4]	[1]	[4]	100	3
S_2	[2] 200	[7]	[10]	[6]	[11]	250	4
S_3	[8]	[5]	[3]	[2]	[2]	200	1
S_4	[11]	[8]	[12]	[16]	[13]	300	3
	200	200	100	100	250	850 / 850	
Penality	6	6	1	1	2		

$X_{21} = 200$ ↑

وهنا سوف تحذف الغاية الأولى D_1 مرحليا:

	D_2	D_3	D_4	D_5		Penality
S_1	7	4	1	4	100	3
S_2	7	10	6	11	50	1
S_3	5	3	2	2	200	1
S_4	8 200	12	16	13	300	4←
	200	100	100	250	650 650	
Penality	2	1	1	2	$X_{42} = 200$	

وفي هذه الخطوة سوف يتم حذف الغاية الثانية D_2:

	D_3	D_4	D_5		Penality
S_1	4	1	4	100	3
S_2	10	6 50	11	50	4
S_3	3	2	2	200	1
S_4	12	16	13	100	1
	100	100	250	450 450	
Penality	2	1	1	2	$X_{24} = 50$

وهنا سوف يتم حذف المصدر الثاني S_2:

	D_3	D_4	D_5		Penality
S_1	4	1 50	4	100	3
S_3	3	2	2	200	1
S_4	12	16	13	100	1
	100	50	250	400 400	
Penality	1	1	2	$X_{14} = 50$	

وهنا سوف يتم حذف الغاية رقم 4، D_4:

	D_3	D_5		Penality
S_1	4	4	50	0
S_3	3	2 200	200	1
S_4	12	13	100	1
	100	250	350 350	
Penality	1	2		

$X_{35} = 200$

وهنا سوف يتم حذف المصدر الثالث S_3:

	D_3	D_5		Penality
S_1	4	4 50	50	0
S_4	12 100	13	100	1
	100	50	150 150	
Penality	8	9		

$X_{14} = 50, \quad X_{43} = 100$

وبالرجوع إلى الجدول الأصلي لمشكلة النقل وتوزيع الكميات عليه نحصل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	10 $X_{11} = 0$	7 $X_{12} = 0$	4 $X_{13} = 0$	1 $X_{14} = 50$	4 $X_{15} = 50$	100
S_2	2 $X_{21} = 200$	7 $X_{22} = 0$	10 $X_{23} = 0$	6 $X_{24} = 50$	11 $X_{25} = 50$	250
S_3	8 $X_{31} = 0$	5 $X_{32} = 0$	3 $X_{33} = 0$	2 $X_{34} = 0$	2 $X_{35} = 200$	200
S_4	11 $X_{41} = 0$	8 $X_{42} = 200$	12 $X_{43} = 100$	16 $X_{44} = 0$	13 $X_{45} = 0$	300
	200	200	100	100	250	850 850

وتكون الكلفة الكلية لمشكلة النقل أعلاه كما يلي:

$$Min\ Z = 50 * 1 + 50 * 4 + 200 * 2 + 50 * 60 + 200 * 72 + 200 * 8 + 100 * 12 = 4150$$

وكما يهمنا لفت عناية الطالب العزيز إلى أن الكلفة الكلية باســـتخدام طريقة الركن الشـــمالي الغربي وللمثال نفسه بلغت: $Z = 9650$

ويكون عدد الخلايا المملوءة $= 7 \neq m + n - 1$

وكذلك بلغت الكلفة الكلية وباستخدام طريقة الأقل كلفة كانت: $Z = 4300$

وليتحقق طالبنا العزيز من النتائج الواردة أعلاه

ثانيًا: اختبار الحل الأساسي الأولي والوصول به إلى الحل الأمثل لمشاكل النقل

لا نحصل من خلال استخدام الطرق الثلاثة وهي: طريقة الركن الشمالي الغربي، وطريقة الأقل كلفة، وطريقة فوجيل، إلا على الحل الأساسي الأولي، ويعتمد استخدام طريقة دون أخرى على الطالب ولو أن ترتيب الأفضلية في استخدامها يتناسب طرديًا على ترتيبهم الذي مر بنا.

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية الحل للمشكلة (أي الحصول على الحل الأمثل)، وإنما يجب أن نستخدم أساليب أخرى لاختبار هل أن الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة، هل هو الحل الأمثل، أي الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه، أم أن هناك حلولا أخرى أمثل منه، وللوصول إلى هكذا حلول، هناك طريقتان لاختبار أمثلية الحل وهما (نور الشمرتي، 2010، صفحة 172):

1. طريقة المسار المتعرج Stepping - Stone method

2 طريقة التوزيع المعدل Modified distribution method.

1. طريقة المسار المتعرج Stepping - Stone method:

نطلق على المربعات المشغولة في مشكلات النقل بالمتغيرات الأساسية والمربعات غير المشغولة بالمتغيرات غير الأساسية اذ يتم حساب التكاليف غير المباشرة في كل مربع مشغول.

وفقا لآلية العمل في هذه الطريقة، ولمعرفة هل أن المربعات غير المشغولة يمكن الاستفادة منها في النقل بدلا من بعض المربعات المشغولة، فإذا كانت أفضل فإنه يتم نقل المواد عبر المربعات غير المشغولة، ولكي تدخل الحل وضمن المتغيرات الأساسية.

وللتعرف عن كثب على آلية العمل في هذه الطريقة نستخدم المثال الذي تم حله (إيجاد الحل الأساسي المبدئي) بواسطة طريقة الركن الشمالي الغربي وكما يلي:

المثال (23): استخدم طريقة الأقل كلفة لإيجاد الحل الأساسي الأولي لجدول النقل الآتي:

	D_1	D_2	
S_1	4 $X_{11}=60$	2 $X_{12}=0$	60
S_2	1 $X_{21}=40$	5 $X_{22}=0$	40
S_3	3 $X_{31}=5$	10 $X_{32}=65$	70
	105	65	

من خلال ملاحظة حل التمرين وبطريقة الركن الشمالي الغربي يظهر أن عدد المربعات المشغولة في الجدول هي أربعة مربعات أي أن الشرط (عدد الخلايا المشغولة $= m+n-1=4$) متحقق، وعند تحقيق هذا الشرط هو التأكيد التام على أنه ممكن تحسين الحل الحالي والوصول به إلى الحل الأمثل وهذه المربعات المشغولة هي:

$$X_{11}=60\,, X_{21}=40,\ X_{31}=5,\ X_{32}=65$$

إن هذه المتغيرات ولهذه المرحلة تسمى بالمتغيرات الأساسية، أما المتغيرات X_{12} و X_{22} فهما عبارة عن متغيرين غير أساسيين.

المرحلة القادمة هي اختبار الاستفادة من المربعين غير المشغولين، لكي نلاحظ ذلك نفترض نقل وحدة واحدة عبر المربع S_2D_2 ، تكلف (5) وحدات، فإذا تم نقل وحدة واحدة عبر المربع المذكور ولغرض الموازنة فإن كمية ما

موجود في المصادر (أي زيادة الكمية الموجودة في المصدر الثاني S_2 وحدة واحدة) ولاستحالة ذلك، لذلك سوف يتم طرح وحدة واحدة من المربع S_2D_1 (من الكمية المنقولة خلاله)، ليبقى (39) وحدة، وأن تكلفة نقل وحدة واحدة عبر هذا المربع تساوي (7) وحدات والممكن أن احتياجات الغاية رقم (1) يجب أن تقل بمقدار وحدة واحدة (لغرض الموازنة وحسب الكميات في التمرين أو المشكلة)، لذلك يجب نقل وحدة من خلال المربع S_1D_1، ولكي لا يختل التوازن بين الاحتياجات وما متوفر في المصادر من كميات وهذا العمل يؤدي إلى طرح وحدة واحدة من الوحدات المنقولة عبر المربع المقابل والذي يكون المربع S_3D_2 ليصبح (64) وحدة، ومن خلال ذلك نجد الكلفة الكلية للنقل ستتغير وفقا للمسار الجديد، أي أن مقدار التغيير في الكلفة يحسب عن طريق المربعات التي تم تغيير الكميات المنقولة من خلالها.

فإذا أضيفت وحدات جديدة فإن الكلفة في ذلك المربع يكون بالموجب وإذا طرحت وحدات جديدة في ذلك المربع فإن الكلفة تكون بالسالب كما مبين وكما يأتي:

$$S_2D_2 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_2$$

ووفقا لذلك يكون ناتج التغير في الكلفة كما يلي: $5 - 7 + 3 - 10 = -9$

وبنفس الطريقة نلاحظ أنه إذا تم نقل وحدة واحدة عبر المربع S_1D_2 فإن نتيجة هذا النقل عبر هذا المربع تؤدي إلى تغيير في عدد الوحدات المنقولة عبر المربعات S_1D_1 و S_3D_1 و S_3D_3، وتبعاً لذلك سيكون التغيير في الكلفة الكلية كما يلي: $S_1D_2 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_3$

ووفقا لذلك يكون مسار تغيير الكلف والخاصة بالمربعات المذكورة ونتيجة التغيير كما يأتي:

$$2 - 4 + 3 - 10 = -9$$

فإذا كانت نتيجة التغيير في الكلفة الكلية موجبة أو تساوي صفر، فالاستنتاج بأن الحل الموجود هو الحل الأمثل، وبما أن المربع كان غير مشغول (أي فارغ) فالحل الأمثل له يجب أن يبقى فارغًا.

أما إذا كانت نتيجة التغيير في الكلفة الكلية قيمًا سالبة فالاستنتاج يعني أن الحل لهذا المربع غير المشغول غير أمثل أي يجب ملؤه (أي نقل كميات عبر هذا المربع). وهذا يعني أن النقل عبر هذه المربعات غير المشغولة يكون أفضل (أي يحقق أقل كلفة، ولذلك سوف نختار المربع غير المشغول، الذي سيحدث تغيير (انخفاض) في الكلفة نتيجة للنقل عبره. سنبدأ بالمربع غير المشغول ابتداءً بالذي يتمتع من خلال الاختبار بأقل كمية لكلفة نتيجة التغيير.

في المثال السابق يوجد مربعان غير مشغولين وإن مقدار التغيير في المربعين (-9) ومتساويين، وهذا يعني أن نقل وحدة واحدة عبر هذا المربع سيجعل الكلفة الكلية تقل بمقدار حاصل ضرب، مقدار التغيير المستخرج (النتيجة النهائية) نتيجة نقل وحدة واحدة في الكمية التي ستنقل عبر هذا المربع غير المشغول.

وهنا سوف يتم اختيار المربع S_1D_2, ليكون المربع ذو المتغير الأساسي. نبدأ من المربع المرشح للاختبار وهنا S_1D_2 وبخط مستقيم باتجاه المربع الأفقي المجاور أو العمودي المجاور وبشرط أن يكون المربع المجاور مربعا مشغولا، ولنأخذ المسار باتجاه المربع المجاور S_1D_1 بحيث يغير عند هذا المربع المسار عموديا إلى أول مربع مشغول يكون مسارًا مغلقا إذا تم النقل من خلاله. وهنا لا يمكن المرور بالمربع S_2D_1 لأنه لا يمكن المرور أفقيا خلال هذا المربع إلى مربع مشغول آخر سيكون المسار من المربع S_1D_1 الى المربع S_3D_1 ومن ثم الى S_3D_2 والرجوع إلى المربع المرشح S_1D_2 نفسه أي تكوين مسار مغلق يبدأ وينتهي بالمربع S_1D_2 فالمسار عند تكوينه يجب أن يكون:

من المربع الذي يخضع للاختبار ← إلى مربع مشغول مع تغيير الاتجاه (عموديا أو أفقيا) ← ثم إلى مربع آخر مشغول مع تغيير الاتجاه ← ثم إلى مربع مشغول (مع تغيير الاتجاه) ← ثم الى مربع مشغول مع تغيير الاتجاه.... ← والانتهاء من المسار بالمربع الذي بدأ به (المربع الخاضع للاختبار).

كيفية تحديد الكمية التي ستنقل من خلال المربع الخاضع للاختبار:

نحتاج الآن إلى تحديد الكمية التي سيتم نقلها من خلال المربع الخاضع للاختبار (المرشح للنقل من خلاله) ولاسيما بعد أن ظهرت نتيجة تغيير الكلفة الكلية سالبة أي الحل غير أمثل (يجب أن يملأ)، ويجب تحديد الكمية المنقولة خلال المربع الذي يتمتع بالحل غير الأمثل بحيث لا تؤثر على توازن ما متوفر في المصادر من كميات واحتياجات الغايات ويكون كما يأتي:

نفرض الكمية التي سيتم نقلها خلال ذلك المربع المرشح للملء هي (k) وحدة، لكي تبقى المشكلة متوازنة بحيث نطرح k من الوحدات من عدد الوحدات المنقولة عبر المربع S_1D_1 (السير على نفس اتجاه المسار المغلق الذي استخدم للاختبار)، وكذلك اضافة k من الوحدات إلى المربع S_3D_2، وكذلك طرح k وحدة من المربع S_3D_2، ثم نختار أكبر قيمة إلى k بحيث تبقى المشكلة متوازنة. وهنا يتم تحديد أكبر قيمة إلى k من خلال قيم المربعات في زوايا المسار المغلق والتي تم طرح k منها.

	D_1	D_2	
S_1	$60-k$ ←	k	60
S_2	↓	↓	40
S_3	$5+k$ →	$65-k$	70
	105	65	

إن قيم المربعات في زوايا المسار المغلق التي طرح الـــ K منها فيها القيمتان (65,60) فإن قيمة الـ k هي ما بين هاتين القيمتين أي $\left[k=\begin{Bmatrix}60\\65\end{Bmatrix}\right.$ ونختار أقل هاتين القيمتين ليمثل قيمة k أي هناك الـــ $k=60$. والآن نبدأ بالتعويض عن قيمة $k=60$ في المسار المغلق المرسوم أعلاه في جدول مشكلة النقل وتكون الكميات المنقولة عبر المربعات في مشكلة النقل كما يلي:

	D_1	D_2	
S_1	$X_{11}=0$	$X_{12}=60$	60
S_2	$X_{21}=40$	$X_{22}=0$	40
S_3	$X_{31}=65$	$X_{32}=5$	70
	105	65	

نلاحظ بوضوح أن مشكلة النقل ستبقى متوازنة أي مجموع ما موجود في المصادر مساوٍ لمجموع احتياجات الغايات وتكون الكلفة الكلية نتيجة لنقل الكميات من المصادر إلى غاياتها وفقا للكميات الجديدة هي:

$$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_{ij}X_{ij}$$

$$Z=5*10+65*3+40*7+60*2=645$$

وبتطبيق الطريقة نفسها إذا كان المربع الذي في النية أشغاله أو في النية استخدامه للنقل وهو المربع S_2D_2 فيكون المسار هو: $S_2D_2 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_2 \rightarrow S_2D_2$

ويمكن تحديد قيمة الـ k التي ستضاف إلى المربع المرشح من بين القيمتين: 5 و 40

وبما أن الاختبار يتم بين أقل القيمتين فسيتم اختيار القيمة $k = 5$.

	D_1	D_2	
S_1		60	60
S_2	$40 - k$	k	40
S_3	$65 + k$	$5 - k$	70
	105	65	

وبذلك تكون الكميات النهائية في جدول النقل كما يلي:

	D_1	D_2	
S_1	4 $X_{11} = 0$	2 $X_{12} = 60$	60
S_2	7 $X_{21} = 30$	5 $X_{22} = 5$	40
S_3	3 $X_{31} = 70$	10 $X_{32} = 0$	70
	105	65	

وبذلك تكون الكلفة الكلية نتيجة التغيير:

$$Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}X_{ij} = 60 * 2 + 35 * 7 + 5 * 5 + 70 * 3 = 600$$

ولذلك فإن مجموع التكاليف الكلية ستقل عن المرحلة السابقة وبمقدار $45 = 5 * 9$ أي بمقدار 45.

المثال (24): اختبر الحل الأساسي الابتدائي لمشكلة النقل الآتية مستخدما طريقة المسار المتعرج stepping stone، وأوجد بعد ذلك الحل الأمثل لمشكلة النقل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	37 $X_{11} = 0$	27 $X_{12} = 30$	28 $X_{13} = 70$	34 $X_{14} = 0$	30 $X_{15} = 0$	100
S_2	$45 + k$ 29 $X_{21} =$	32 $X_{22} = 0$	32 $X_{13} = 0$	$-k$ 27 $X_{24} = 20$	28 $X_{35} = 0$	125
S_3	34 $X_{31} = 30 - k$	27 $X_{32} = 30$	37 $X_{33} = 0$	$+k$ 30 $X_{34} = 0$	30 $X_{35} = 90$	150
	75	60	70	80	90	375 / 375

وبذلك تكون الكلفة الكلية للحل الأساسي:

$$Min\ \ Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}X_{ij}$$

$$Min\ Z = 30 * 27 + 70 * 28 + 45 * 29 + 80 * 27 + 30 * 34 + 30 * 27 + 90 * 30 = 10765$$

وهنا يبدأ الحل باختبار الخلايا الفارغة من خلال وضع المسارات المتعرجة وكما يلي:

1. نبدأ باختبار الخلية S_1D_2 الفارغة، ويكون المسار المتعرج لها كما يلي:

$$S_1D_1 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_3D_2 \rightarrow S_3D_1$$

لذلك يكون التغيير في الكلفة كما يلي: $37 - 27 + 27 - 34 = 3$

وبما أن نتيجة التغيير في الكلفة موجبة إذًا الحل لهذه الخلية أمثل، ويعني أنها يجب أن تبقى فارغة.

2. نختبر الخلية S_1D_4 (فارغة)، ويكون المسار المتعرج لاختبارها كما يلي:

$$S_1D_4 \rightarrow S_2D_4 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_2 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow$$

ويكون التغيير في الكلفة لهذه الخلية كما يلي: $34 - 27 + 29 - 34 + 27 - 27 = 2$

إذًا الحل الأمثل لهذه الخلية.

(إشارة الكلف تكون بالتناوب ابتداءً بالموجب وبعدها بالسالب ثم بالموجب وهكذا.....)

3. وبالطريقة نفسها يتم اختيار الخلية S_1D_5 ويكون المسار لها:

$$S_1D_5 \rightarrow S_3D_5 \rightarrow S_3D_2 \rightarrow S_1D_2$$

يكون نتيجة التغيير للكلفة كما يلي: $30 - 30 + 27 - 27 = 0$

إذًا الحل أمثل لهذه الخلية.

4. اختبار S_1D_5 ويكون المسار لها: $S_2D_5 \rightarrow S_3D_5 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_2D_1$

$$28 - 30 + 34 - 29 = 3$$

إذًا الحل أمثل لها. وأيضًا الحل أمثل لهذه الخلية.

5.وبالمثل بالنسبة للخلية S_3D_3 ويكون المسار المتعرج لها: $S_3D_3 \rightarrow S_3D_2 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_1D_3$

وتكون نتيجة التغيير في الكلفة لها كما يلي: $37 - 27 + 27 - 28 = 9$

إذًا الحل أمثل لها.

6. وبنفس الطريقة للخلية S_3D_4 ويكون المسار لها كما يلي: $S_3D_4 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_2D_4$

وتكون نتيجة التغيير بالكلفة كما يلي: $30 - 34 + 29 - 27 = -2$

وهنا تظهر النتيجة السالبة بأن الحل غير أمثل لهذه الخلية ومعنى هذا أنه يجب أن تشغل بكمية معينة (وحسب قاعدة الـ k).

7. ويتم الاختبار للخلية S_2D_2 ويكون المسار لها: $S_2D_2 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_2$

وتكون نتيجة التغيير في الكلفة: $32 - 29 + 34 - 27 = 10$

إذًا الحل أمثل لهذه الخلية.

8. وأخيرا نختبر الخلية S_2D_3 ويكون المسار لها:

$$S_2D_3 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_2 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_1D_3$$

وتكون نتيجة التغيير في الكلفة غير المباشرة: $32 - 29 + 34 - 27 + 27 = 9$

ويكون الحل أمثل بالنسبة لهذه الخلية ومعنى هذا يجب أن تبقى فارغة.

وبالعودة للفقرة (6) من الاختبارات وبما أن الحل غير أمثل للخلية (S_3D_4)، فيجب ملء هذه الخلية وفقا لمسارها بعد إضافة k إلى الخلية الفارغة ومن ثم طرح وإضافة k وبالتعاقب في كل زاوية من زوايا المسار، وسوف يكون هنا k مقدارها ($k = 30$).

وهنا يتم اضـــافة $k = 30$ إلى الخلية ثم طرح وإضـــافة $k = 30$ إلى زوايا المســـار وبالتعاقب (الذي حدد بالفقرة 6)، ولذلك تكون الكميات وتوزيعها في جدول النقل الجديد كما يلي:

[وهنا تم تحديد قيمة k بما يلي، نرصـــد كميات الزوايا التي طرحت منها K وهنا كانت 80 و 30، والطريقة هي أن نأخذ أقل الكميات وللتبسيط بعد أكثر نأخذ $\left[k = \begin{Bmatrix}80\\30\end{Bmatrix}\right]$ ومن ثم نختار أقلها وهي الكمية $k = 30$]

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	37 $X_{11} = 0$	27 $X_{12} = 30$	28 $X_{13} = 70$	34 $X_{14} = 0$	30 $X_{15} = 0$	100
S_2	$45 + k$ 37 $X_{21} =$	32 $X_{22} = 0$	32 $X_{23} = 0$	$-k$ 27 $X_{24} = 20$	28 $X_{25} = 0$	125
S_3	34 $X_{31} = 0$	27 $X_{32} = 50$	37 $X_{33} = 0$	$+k$ 30 $X_{34} = 30$	30 $X_{35} = 90$	150
	75	60	70	80	90	375 / 375

والآن وفقا لتوزيع الكميات الجديد سوف تنخفض الكلفة الكلية للنقل وبمقدار: $2 * 30 = 60$

2= مقدار نتيجة التغير في الفقرة (6)

30 : هي كلفة الخلية التي أشغلت حديثا.

وتكون الكلفة النهائية تساوي: $10765 - 60 = 10705$

والحل السابق هو الحل الأمثل، إذ لا توجد مربعات غير مشغولة فيها نتيجة الكلفة غير المباشرة بالسالب.

2. طريقة التوزيع المعدل Modified distribution:

تعتمد هذه الطريقة على أســـاس افتراض المتغيرات الثنائية لكلفة النقل، إذ تســـتخدم هذه المتغيرات لتقييم المربعات غير المشـغولة كما سـنلاحظ ذلك، فإن هذه الطريقة أسـهل من الطريقة السـابقة وأكفأ منها ولها تطبيقات واسعة باستخدام الحاسبات الالكترونية خاصة.

كانت الخطوات في الطريقة السابقة منصبة على تحديد مسار مغلق لا يؤثر على توازن الكميات في مشكلة النقل ولكل مربع (خلية) غير مشــغول، على أنه الطريقة الحالية فإنها تســاعدنا على تحديد المربع غير المشــغول (الذي يؤدي إلى الوصول إلى الحل الأمثل عند إشغاله أو استخدامه لنقل الكميات) وبوقت أسرع وسنورد مثالاً لشرح آلية العمل لهذه الطريقة وتوضيح كافة التفصيلات الخاصة بهذه الطريقة.

المثال (25): جد التوزيع الأمثل لجدول النقل التالي مع العلم أن الحل الأساسي المبدئي الممكن تم الحصول عليه بطريقة الركن الشمالي الغربي:

	D_1	D_2	
S_1	4 $X_{11} = 60$	2 $X_{12} = 0$	60
S_2	7 $X_{21} = 40$	5 $X_{22} = 0$	40
S_3	3 $X_{31} = 5$	10 $X_{32} = 65$	70
	105	65	

الآن نبدأ بتحديد المتغيرات غير الأساسية (مربعات غير مشغولة) أي أن الكميات المنقولة عبر هذه المربعات تساوي صفرا: $X_{22} = 0\ ,\ X_{12} = 0$

أما المتغيرات الأساسية (مربعات مشغولة) بحسب الحل الأساسي المبدئي الممكن:

$$X_{11} = 60\ , X_{21} = 40, \qquad X_{31} = 5, \qquad X_{32} = 65$$

نفترض أن يكون جدول التكاليف بتسمية C_{ij} أي أن مصفوفة التكاليف المباشرة تكون C_{ij} وتكتب كما يلي:

	V_1	V_2
U_1	4	2
U_2	7	5
U_3	3	10

$= C_{ij}$

حيث أن قيم جدول C_{ij} ممكن أن تكون موجبة أو صفرا أو سالبة.

نبدأ الآن بمجموعة من المتغيرات الثنائية إذ نعرف U_i لتمثل الصفوف أو (الصف i) حيث أن $(i = 1,2, \dots, m)$ ، وكذلك نعرف (V_j) تمثل الأعمدة أو (العمود j) حيث $(j = 1,2, \dots, n)$. وكذلك نجعل كلفة كل خلية هي في الحقيقة مجموع مركبتين التي هي كلفة الصف وكلفة العمود وهذه حقيقة واقعية، أي أن مجموع كلف التحميل والخاصة بالصفوف (المصادر) وكلفة التفريغ الخاصة بالأعمدة (الغايات الأسواق) هي المكونات للكلفة الكلية للنقل (C_{ij}) أي أن:

الكلفة الكلية للنقل = كلفة التحميل (المصادر، معامل) + كلفة التفريغ (غايات أسواق)

وبالرموز تكون: $C_{ij} = U_i + V_j$

فمثلا المربعات المشغولة للمثال السابق هي أربعة مربعات لذلك سنحصل على (4) معادلات ، وكما مبين ذلك في أدناه:

$$U_1 + V_1 = 4$$
$$U_2 + V_1 = 7$$
$$U_3 + V_1 = 3$$
$$U_3 + V_2 = 10$$

وهذه المعادلات الأربع كونت على أســـاس المربعات المشـــغولة (المتغيرات الأســـاســـية) فقط. ولحل هذه المعادلات نفترض ابتداءً $U_1 = 0$ ، ولذلك سوف ستكون قيم بقية المتغيرات كما يأتي:

$$U_1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = 4$$
$$U_2 + 4 = 7 \quad \rightarrow \quad U_2 = 3$$
$$U_3 + 4 = 3 \quad \rightarrow \quad U_3 = -1$$
$$-1 + V_2 = 10 \quad \rightarrow \quad V_2 = 11$$

$$U_1 = 0 \quad , \quad V_1 = 4$$
$$U_2 = 3 \quad , \quad V_2 = 11$$
$$U_s = -1$$

ويكون توزيعها على جدول النقل كما يلي:

	$V_1 = 4$	$V_2 = 11$
$U_1 = 0$	4	2
$U_2 = 3$	7	5
$U_3 = -1$	3	10

وهنا تستخرج التكاليف غير المباشرة $\bar{C}_{ij}$ ولكل المربعات لجدول النقل وبالاستعانة بقيم المتغيرات U_i و V_j وكما يلي:

$$\bar{C}_{ij} = U_i + V_j$$
$$\bar{C}_{11} = U_1 + V_1 = 0 + 4 = 4$$
$$\bar{C}_{12} = U_1 + V_2 = 0 + 11 = 11$$
$$\bar{C}_{22} = U_2 + V_2 = 3 + 11 = 14$$
$$\bar{C}_{21} = U_2 + V_1 = 3 + 4 = 7$$
$$\bar{C}_{31} = U_3 + V_1 = -1 + 4 = 3$$
$$\bar{C}_{32} = U_3 + V_2 = -1 + 11 = 10$$

وهنا يجب ملاحظة قيم $C_{ij} = \bar{C}_{ij}$ في حالة المتغيرات الأساسية (المربعات المشغولة). ونحسب بعد ذلك الفرق بين جدول الكلف أي: $\bar{C}_{ij} - C_{ij}$

فاذا كانت قيم $\bar{C}_{ij} - C_{ij} \leq 0$ ولجميع قيم i و j فإن الحل الحالي هو الحل الأمثل، وإذا كانت بعض القيم الموجبة فمعنى هذا أن الحل لهذه الخلايا (المربعات) هو غير أمثل ولذلك نختار أكبر قيمة موجبة، وكما في طريقة

السمبلكس في حالة كون دالة الهدف من نوع Minimize اي نختار $Max[(\bar{C}_{ij} - C_{ij}) \geq 0]$ ولتسهيل ما ورد أعلاه نحسب: $\bar{C}_{ij} - C_{ij}$:

4	11		4	2		0	9
7	14	−	7	5	=	0	9
3	10		3	10		0	0

ولملاحظة ناتج الطرح فيوجد هناك مربعان موجبان، لذلك نحتار أحدهما. ويكون أولهما الذي يتمتع بأكبر قيمة موجبة، وبما أن للمربعين كميات موجبة متساوية، فنختار أحدهما بصورة اعتباطية ولنختبر المربع S_1D_2 ونكرر العمل معه كما سبق في طريقة المسار المتعرج stepping stone ، واختبار مسار مغلق لا يؤثر على التوازن في جدول النقل. لاختبار الكمية التي تشغل المربع S_1D_2 وهي قيمة k.

	D_1	D_2	
S_1	$60-k$ ←	$+k$ ↓	60
S_2	40 →	↓	40
S_3	$5+k$	$65-k$	70
	105	60	

كما في طريقة المسار المتعرج نجد أن قيمة $k = 60$ وأن جدول التوزيع الجديد للنقل يكون كما يأتي:

	D_1	D_2	
S_1		60	
S_2	$40-k$ ↓	k ← ↑	
S_3	$65+k$ →	$5-k$	
	105	65	

ولاختبار المربع S_2D_2 واختيار مسار مغلق لإيجاد قيمة k وسوف تكون $k = 5$

ويكون جدول توزيع الكميات في جدول النقل الأمثل كما يأتي:

	D_1	D_2	
S_1	4	2 60	60
S_2	7 35	5 5	40
S_3	3 70	10	70
	105	65	

كما أن الكلفة الكلية :

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}X_{ij} = 600$$

والآن يجب أن نختبر الحل في الجدول الأخير (الحل الأمثل) وللخلايا المشغولة (المتغيرات الأساسية) فقط ووفق المعادلة الآتية: $U_i + V_j = C_{ij}$

وتكون النتائج كما يأتي:

$$U_1 + V_2 = 2$$
$$U_2 + V_2 = 5$$
$$U_2 + V_1 = 7$$
$$U_3 + V_1 = 3$$

$$U_1 = 0 \quad , \quad V_1 = 4$$
$$U_2 = 3 \quad , \quad V_2 = 2$$
$$U_3 = -1$$

لذا فإن مصفوفة التكاليف غير المباشرة $\bar{C}_{ij}$ تكون كالآتي، وحسب القيم التي تم الوصول إليها لـU_i و V_j

$\bar{C}_{ij} =$

	$V_1 = 4$	$V_2 = 2 =$
$U_1 = 0$	4	2
$U_2 = 3$	7	5
$U_3 = -1$	3	1

وللتأكد من الاختبار في المرحلة الثانية نستخرج الفرق بين $\bar{C}_{ij} - C_{ij}$

4	2		4	2		0	0
7	5	−	7	5	=	0	0
3	1		3	10		0	9−

وبما أن جميع قيم $\bar{C}_{ij} - C_{ij} \leq 0$ لجميع قيم i ، j فإن الحل الحالي هو الحل الأمثل .

كما ويصلح استعمال الصيغة الآتية $\left[\bar{C}_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}\right]$ باعتبار أن $[\bar{C}_{ij}]$ هو التاتج الأخير لعملية الطرح بين U_i و V_j المستخرجة عن طريق حل المعادلات. و C_{ij} هي كلفة الخلية الأصلية وهذا سيكون الحل الأمثل ، إذا كانت جميع قيم $\left[\bar{C}_{ij} = U_i + V_j - C_{ij} \geq 0\right]$ وبتطبيقها على مثالنا الحالي تكون نواتج قيم $\bar{C}_{ij}$ وكما يأتي:

$$\bar{C}_{ij} = U_1 + V_1 - C_{11} = 0 + 4 - 4 = 0$$

$$\bar{C}_{12} = U_1 + V_2 - C_{12} = 0 + 11 - 2 = 9$$

$$\bar{C}_{21} = U_2 + V_1 - C_{21} = 3 + 4 - 7 = 0$$

$$\bar{C}_{22} = U_2 + V_2 - C_{22} = 3 + 11 - 5 = 9$$

$$\bar{C}_{31} = U_3 + V_1 - C_{31} = -1 + 4 - 3 = 0$$

$$\bar{C}_{32} = U_3 + V_2 - C_{32} = -1 + 11 - 10 = 0$$

وبما أن جميع القيم لـــــ $\bar{C}_{ij}$ هي أكبر أو مساوية للصفر فهذا يعني أن الحل الحالي هو الحل الأمثل (نور الشمرتي، 2010، صفحة 180).

المثال (26): اختبر الحل الأســاســي لمشــكلة النقل الآتية، أو أوجد الحل الأمثل لحل مشــكلة النقل الآتية مستخدما طريقة التوزيع المعدل.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
S_1	37 $X_{11}=0$	27 $X_{12}=30$	28 $X_{13}=70$	34 $X_{14}=0$	30 $X_{15}=0$	100
S_2	29 $X_{21}=45$	32 $X_{22}=0$	32 $X_{23}=0$	27 $X_{24}=80$	28 $X_{25}=0$	125
S_3	34 $X_{31}=30$	27 $X_{32}=30$	37 $X_{33}=0$	30 $X_{34}=0$	30 $X_{35}=90$	150
	75	60	70	80	90	375 / 375

ولأجل التأكد من أنه يجوز اســتخدام طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution، يجب أن نتأكد من أن الشـرط، عدد الخلايا المشـغولة $= m+n-1=7$، ولذلك نفترض أن كلفة كل خلية تسـاوي $C_{ij}=U_i+V_j$ وللخلايا المشـغولة أو المتغيرات الأسـاسـية فقط . وحيث توجد سـبع خلايا مشـغولة وهذا يعني وجود سـبعة متغيرات أساسية وسبع معادلات وكما يأتي:

$$U_1+V_2=27$$
$$U_1+V_3=28$$
$$U_2+V_1=29$$
$$U_2+V_4=27$$
$$U_3+V_1=34$$
$$U_3+V_2=27$$
$$U_3+V_5=30$$

وبهذا تكون قيم U_i و V_j كما يأتي :

$$U_1=0 \quad V_1=34 \quad V_4=32$$
$$U_2=5 \quad V_2=27 \quad V_5=30$$
$$U_3=0 \quad V_3=28$$

ويكون توزيع قيم U_i و V_j كما يأتي على جدول النقل:

$V_1 = 34 \quad V_2 = 27 \quad V_3 = 28 \quad V_4 = 32 \quad V_5 = 30$

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
$U_1 = 0$ S_1	37	27	28	34	30	100
$5U_2 = 0$ S_2	29	32	32	27	28	125
$U_3 = 0$ S_3	34	27	37	30	30	150
	75	60	70	80	90	375 / 375

والآن يتم حساب $\bar{C}_{ij} - C_{ij}$ وتكون مصفوفة الناتج كما يأتي :

$$\bar{C}_{ij} - C_{ij} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & -9 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

فإذا كانت نتائج الجدول هي أقل أو مساوية للصفر فمعنى هذا أن الخلايا المتمتعة بهذه الخاصية، هي خلال يجب إبقاؤها كما هي، أو بعبارة أخرى أن الحل أمثل. عدا التي ظهرت لها قيم موجبة $\left[\bar{C}_{ij} - C_{ij} \geq 0\right]$ فهذا يدلل أن الحل لهذه الخلايا هو غير أمثل (كما ظهر في الخلية S_3D_4 ، أي كانت النتيجة =2)، أي يجب تغيير الكميات الموجودة فيها ونبدأ بها على أنها متغير داخل (كما هو متبع في طريقة السـمبلكس) لتكوين مسـار موجه مغلق، وهنا سوف يكون المسار كما يلي:

$$S_3D_4 \rightarrow S_2D_4 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_3D_1$$

ومن ثم العودة الى S_3D_4 وسيمثل ذلك بالرسم وكما يأتي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
S_1	37	27	28	34	30
S_2	29 $45+k$	32	32	27 $80-k$	28
S_3	34 $30-k$	27	37	30 k	30

وبهذا تكون قيمة $K = 30$ حسب ما تم شرحه بالتفصيل بالفقرات السابقة لموضوع المسارات المتعرجة وبهذا يكون جدول النقل الجديد والمتمتع بالحل الأمثل.

37 $X_{11}=0$	27 $X_{12}=30$	28 $X_{13}=70$	34 $X_{14}=0$	30 $X_{15}=0$
29 $X_{21}=75$	22 $X_{22}=0$	32 $X_{23}=0$	27 $X_{24}=50$	28 $X_{25}=0$
34 $X_{31}=30$	27 $X_{32}=30$	37 $X_{33}=0$	30 $X_{34}=30$	30 $X_{35}=90$

وبإمكان الطالب أن يختبر الحل في الجدول الأخير وسيجد أن الحل الأمثل .

3.مشاكل النقل غير المتوازنة Unbalanced Transportation Problems:

في حالات ليست قليلة في مشاكل النقل هناك عدم تساوي مجموع الكميات الموجودة في المصادر مع مجموع الكميات المطلوبة في الغايات، ويقال لمشكلة النقل أنها عديمة الاتزان/غير متوازنة وتكون على نوعين وكما يأتي:

1.مجموع ما تحتويه المصادر (المتيسرات) أكبر ممّا تحتاجه الغايات:

في حالة كون المتيسرات أكبر من الاحتياجات للغايات، ومن أجل موازنة المشكلة، بغية الحصول على الحل، ولإتمام ذلك والوصول به إلى الحل الأمثل، نفترض وجود غاية (Distination) أو نهاية وهمية، لكي تستوعب الفارق من الوحدات بين المتيسرات واحتياجات الغايات، ولأن البضائع سوف لا تنقل عبر هذه المربعات التي أضيفت مربعات الغاية الوهمية، فإن تكاليف النقل في تلك المربعات ستكون صفرا، وكما مبين في المثال الآتي:

المثال (27): أوجد الحل لمشكلة النقل الآتية:

	D_1	D_2	D_3	
S_1	2	1	2	20
S_2	1	2	3	9
S_3	4	2	1	11
	10	8	15	40 / 33

ومن الواضح أن مجموع ما تحتويه المصادر (مجموع المتيسرات) هو أكبر من مجموع الاحتياجات، فالمشكلة إذًا غير متوازنة وهنا نحتاج إلى نهاية وهمية تستوعب الفارق من الوحدات بين مجموع المتيسرات ومجموع الاحتياجات، أي تستوعب الغاية الوهمية (7 وحدات)، في مثالنا الحالي، وكما يلي (D_4) تسمى في بعض الأحيان (D_m)

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	2	1	2	0	20
S_2	1	2	3	0	9
S_3	44	2	1	0	11
	10	8	15	7	40 / 40

وهنا تحدث مشكلة نقل متوازنة، والآن نبدأ بتطبيق الطرق السابقة سواءً تلك كانت التي نحصل منها على الحل الأساسي الابتدائي أم الخاصة بالاختبار للحل الأمثل.

4.مجموع ما تحتويه المصادر (المتيسرات) أقل ما تحتاجه الغايات

في حالة كون مجموع المتيسرات (مجموع الكميات التي تحتويها المصادر) أقل من مجموع الاحتياجات (مجموع ما تحتاجه الغايات، ولأجل جعل المشكلة متوازنة ولغرض استخراج الحل الأمثل، نفترض وجود مصدر وهمي يحتوي على عدد من الوحدات تساوي الفارق بين مجموع ما تحتويه المصادر ومجموع احتياجات الغايات، وبما أن مجموع ما يتيسر في المصادر لا يكفي الاحتياجات لذا فإن تكاليف النقل في مربعات (أو خلايا) المصدر الوهمي تساوي صفرًا وكما هو واضح في المثال الآتي:

المثال (27): أوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل الآتية:

	D_1	D_2	D_3	
S_1	8	7	2	100
S_2	4	9	10	75
S_3	1	2	8	25
S_4	5	6	11	125
	150	125	130	325 / 405

وكما هو واضح أن الفارق من الوحدات بين مجموع ما يتيسر من المصادر ومجموع الاحتياجات هو 80 وحدة، لذلك نحتاج إلى افتراض مصدر وهمي يتيسر فيه 80 وحدة. ولذلك نفترض مصدر خامس وهو S_5 أو ما يسمى بعض الأحيان S_m .

	D_1	D_2	D_3	
S_1	8	7	2	100
S_2	4	9	10	75
S_3	9	2	8	25
S_4	5	6	11	125
S_5	0	0	0	80
	150	125	130	405 / 405

وهنا أصبحت مشكلة النقل متوازنة (أي مجموع ما تحتويه المصادر تساوي ما تطلبه الغايات) ، ولذلك لا يوجد مانع من استخدام الطرق السابقة للحصول على الحل الابتدائي الأساسي وكذلك الحصول على الحل الأمثل.

ومما تجدر الإشارة إليه أن الغايات الوهمية والمصادر الوهمية مساوية للمتغيرات المكملة (Complementary Variables)، والتي تمت إضافتها لمشكلات البرمجة الخطية لتحويلها إلى الصيغ القياسية (Standard Forms) والتي سبق توضيحها.

4. حالة الانحلال في مشكلات النقل Degenerate:

لقد تم التأكيد في بداية هذا الفصل وعند الحصول على الحل الأساسي الابتدائي لمشاكل النقل والتي تكون بإحدى الطرق الثلاث (الركن الشمالي، أقل كلفة، فوجيل)، والتي تكون فيها الخلايا المشغولة بقدر المعادلة $(m + n - 1)$، يكون من الممكن أو من السهل إتمام عملية الحصول على الحل الأمثل وبأحد الطريقتين اللتين ذكرتا وعلى افتراض أن : عدد الصفوف $= m$ ، عدد الأعمدة $= n$

وبكلام آخر فإذا كانت عدد الخلايا المشـغولة (المربعات المشـغولة = عدد المتغيرات الأسـاسـية) أقل من $(m+n-1)$، ففي هذا النوع من المشاكل يكون من المتعذر الحصول على الحل الأمثل، وأن مشكلة النقل تكون عبارة عن مشكلة منحلة Degenerate

وغالباً ما يحدث الانحلال في مشاكل النقل في حالتين:

1. يحدث الانحلال أثناء الحل في مرحلة الحل الأساسي الأولى.
2. ممكن أن يحدث الانحلال أيضًـا خلال إجراء عمليات الحل الأمثل وعندما تسـتوعب أحد المربعات كمية من المفترض أن تكون موزعة على أكثر من مربع واحد.

معالجة حالة الانحلال:

المعالجة هنا هي عبارة عن السعي لوضع كمية صغيرة جدًا ولنرمز لهذه الكمية الصغيرة بالرمز (εأيبسلون)، حيث يكون ε أكبر من الصفر وأن استخدامها في أي مربع لا يؤثر على توازن مشكلة النقل . وهنا يجب إضافتها إلى مربع واحد أو أكثر، بحيث يعد هذا المربع خلية مشغولة بحيث يتحقق الشرط وهو أن عدد المربعات المشغولة يجب أن يساوي $(m+n-1)$

(إن الكمية ε صـــغيرة جدًا بحيث إن تم إضـــافتها أو طرحها من أية كمية فلا تؤثر على تلك الكمية وبعبارة أخرى فمثلا $8+\varepsilon=8$ أو $12-\varepsilon=12$ ، لكن $\varepsilon-\varepsilon=0$) .

وطريقة حل أية مشكلة تحتوي على ε هي نفس الطريقة التي تم توضيحها في هذا الفصل وذلك بافتراض أن ε رقم صغير . وإذا وجد ε في أحد المربعات وكان الحل أمثلا فإن ε تعني لاشئ، بل يعد مربع ε مربعا مشغولاً ، ولا تؤخذ بنظر الاعتبار، لأن ε كمية صغيرة جدا تساعدنا في استخراج الحل الأمثل ولا تؤثر على توازن الكميات للمصادر والغايات الموجودة .

5. تحوير طريقة النقل في تعظيم الأرباح:

بالرغم من أن موضوع نماذج النقل يسعى إلى تقليل الكلفة الخاصة بالنقل وهذا ما تؤكده دالة الهدف الخاصة بنموذج النقل التي تكون دائما من نوع تقليل (تدنية) Minimizing، بل لا مانع من توظيف نماذج النقل لتعظيم الأرباح، وهنا يستوجب تعديل بعض المفاهيم التي استخدمت له في مجال تقليل التكاليف وهي كما يأتي:

1. اعتبار تكاليف النقل من وحدات الإنتاج إلى مراكز التسـويق التي كانت في مصـفوفة النقل السـابقة هي أسعار بيع الكميات من الوحدات إلى المراكز.
2. في طريقة الأقل كلفة (Least Cost) كان البحث عن أقل كلفة نقل وعند العثور عليها وكنا نضـع في ذلك المربع (صـاحب أقل كلفة) كل الاحتياج ولكن عندما يسـتهدف تعظيم الأرباح نبحث عن أعلى رقم (أعلى سعر) ونعطيه الأولوية باعتباره أعلى سعر ثم نتدرج لنأخذ الأسعار الأقل.
3. في طريقة فوجيل التقريبية بدلاً من البحث عن أقل كلفة والتي تليها لاسـتخراج الفرق، هنا نتجه إلى أعلى سعر والذي يليه واستخراج الفرق بينهما وسيتم توضيح ذلك بالمثال الذي سيتم التطبيق عليه لاحقا.
4. وفي حالة التحقق من الحل الأولي للوصـول إلى الحل الأمثل في طريقة المسـار المتعرج وطريقة التوزيع المعدل تعطى الأولوية للمربع أو الخلية الحاصـلة على أعلى رقم موجب وليس السـالب (كما هو متبع في الطريقتين في نماذج النقل) وبدلاً من أن تطرح قيمة ذلك المسار، تضاف إلى قيمة التوزيع الأولي.
5. تتوقف عن البحث عن الحل الأمثل عندما تكون جميع القيم المتحصـلة من المسـارات أكبر أو يسـاوي صفر.

ولتوضيح ما ورد أعلاه سيتم الاستعانة بالمثال الآتي:

المثال (28): فكر مستثمر في إقامة مشروع لإنتاج كاشـي السيراميك، وتتوزع وحداته الإنتاجية في كل من: بغداد، سليمانية، الموصل ثم تنقل بعد ذلك إلى مراكز تجمع رئيسية أربعة جاهزة: بعقوبة، الأنبار، تكريت، كركوك. ليتم توزيعه على تجار المفرد أو المسـتهلك. وقد وضـع خطة أولية للطاقة الإنتاجية لوحدة إنتاج بغداد هي (2000) طن والطاقة الإنتاجية لوحدة السـليمانية (1300) طن وطاقة وحدة الموصـل (1700) طن. أي أن إجمالي طاقة الوحدات الإنتاجية (5000) طن. وقد افترض أن جميع كميات الإنتاج في هذه الوحدات الثلاث، وسـيتم توزيعها على المراكز الأربعة بمقدار (1000) طن لمركز بعقوبة و(2000) طن لمركز الأنبار و(500) طن لمركز تكريت و(1500) طن لمركز كركوك، أي أن كمية الإنتاج (المعروض) تعادل الكمية المعدة للتوزيع (المطلوبة)، وقد لاحظ أن كلفة نقل الطن الواحد من الإنتاج إلى مراكز التوزيع بالدينار وكانت على النحو الآتي:

إلى / من	بعقوبة	الأنبار	تكريت	كركوك
بغداد	10	8	6	4
سليمانية	14	17	5	2
الموصل	18	7	11	9

1. أوجد أقل كلفة نقل بين الوحدات الإنتاجية ومراكز التجمع للتوزيع وحسب نماذج النقل.
2. أوجد أعلى إيراد ومن مبدأ تعظيم الأرباح.

1- أ: إيجاد الحل إلى المثال السابق بطريقة الزاوية الشمالية الغربية (NWC) .

إلى المراكز / من الوحدات	بعقوبة	الأنبار	تكريت	كركوك	الكميات المنتجة
بغداد	[10] 1000	[8] 1000	[6]	[4]	2000
سليمانية	[14]	[17] 1000	[5] 300	[2]	1300
الموصل	[18]	[7]	[11] 200	[9] 1500	1700
كميات التوزيع	1000	2000	500	1500	5000 / 5000

مجموع الإيرادات:

$$Z = 10 * 1000 + 8 * 1000 + 17 * 1000 + 5 * 300 + 11 * 200 + 9 * 1500$$
$$= 52200$$

وبالإمكان التحقق من أن الحل أعلاه هو الحل الأمثل بإحدى الطريقتين اللتين ورد ذكرهما سابقا أو بالاثنتين معًا، وسنبدأ باستخدام طريقة المسار المتعرج للمربعات الفارغة وبعد جدولين آخرين جرى التحقق فكانت جميع القيم موجبة وصفرية وبذلك تم الوصول بالحل إلى الحل الأمثل، والجدول الأخير يكون كما يأتي:

إلى المراكز / من الوحدات	بعقوبة	الأنبار	تكريت	كركوك	الكميات المنتجة
بغداد	10	8 700	6 500	4 800	2000
سليمانية	14	17 1300	5	2	1300
الموصل	18 1000	7	11	9 700	1700
كميات التوزيع	1000	2000	500	1500	5000 / 5000

$$Z = 8 * 700 + 6 * 500 + 4 * 800 + 17 * 1300 + 18 * 100 + 9 * 700 = 42000$$

1- ب: إيجاد الحل للمثال السابق بطريقة الأقل كلفة:

ووفقا لهذه الطريقة تعطى الأولوية للمربع ذي القيمة العالية، يتم التدرج نزولاً في الأسعار وبعد توزيع الكميات من وحدات الإنتاج إلى مراكز التوزيع كان الجدول الآتي:

إلى المراكز / من الوحدات	بعقوبة	الأنبار	تكريت	كركوك	الكميات المنتجة
بغداد	10	8 700	6	4 1300	2000
سليمانية	14	17 1300	5	2	1300
الموصل	18 1000	7	11 500	9 200	1700
كميات التوزيع	1000	2000	500	1500	5000 5000

ويكون مجموع الايرادات

$$Z = 8 * 700 + 4 * 1300 + 17 * 1300 + 18 * 1000 + 11 * 500 + 9 * 200 = 58200$$

وبعد تطبيق طريقة المسـار المتعرج ظهرت جميع القيم موجبة وصـفرية وتعتبر القيمة (58200) هي الإيراد الكلي الأمثل.

1-ج: ايجاد الحل الأساسي بطريقة فوجيل التقريبية:

في هذه الطريقة سيتم حساب قيم الندم، وهي الفرق بين أعلى قيمة والتي تليها وذلك على مستوى الصفوف والأعمدة، وتعطى الأولوية عادة للصف أو العمود ذو قيمة الندم الأعلى، وقد كان توزيع الكميات على النحو الآتي:

إلى المراكز / من الوحدات	بعقوبة	الأنبار	تكريت	كركوك	الكميات المنتجة	
بغداد	[10]	[8] 700	[6]	[4] 1300	2000	~~2~~ ~~2~~ ~~2~~ ~~2~~
سليمانية	[14]	[17] 1300	[5]	[2]	1300	3
الموصل	[18] 1000	[7]	[11] 500	[9] 200	1700	~~7~~ ~~7~~ ~~2~~
كميات التوزيع	1000	2000	500	1500	5000 / 5000	

~~4~~ 4

~~9~~ ~~1~~ ~~1~~ ~~1~~

~~5~~ ~~5~~ ~~5~~

~~5~~ ~~5~~ ~~5~~ ~~2~~

2-أ: ويكون الإيراد الكلي الأمثل كما يأتي:

$$Z = 8 * 700 + 4 * 1300 + 17 * 1300 + 18 * 1000 + 11 * 500 + 9 * 200 = 58200$$

وبعد تطبيق طريقة المسـارات المتعرجة للتأكد من وجود الحل الأمثل أم لا، وجد أن جميع قيم المسـارات المتعرجة موجبة أو صـفر ومن البديهي أن تكون تلك المسـارات للمربعات الفارغة أي للمتغيرات غير الأسـاسـية. وسيترك للطالب التأكد من وجود الحل الأمثل بتطبيق طريقة التوزيع المعدل ليتأكد بنفسه من وجود الحل الأمثل.

قائمة المراجع والمصادر

Bibliographie

1. E, W., & Li, T. (s.d.). *Simplex method for linear programming.* China: Princeton University.

2. Ling-Chieh, K. (s.d.). *Operations Research The Simplex Method.* Taiwan: Department of Information Management.

3. Singh, R. (s.d.). *OPERATIONS RESEARCH FOR BUSINESS DECISIONS.* India: Gorakhpur (UP).

4. الهزاع الصمادي, أ .(2009). *أساسيات بحوث العمليات* .عمان, الأردن: دار قنديد.

5. بداوي, م .(2022). *بحوث العمليات* .الجلفة, الجزائر: دار الضحى للنشر والاشهار.

6. بوقرة, ر .(2009). *بحوث العمليات* .مصر: مؤسسة شباب الجامعة.

7. راتول, م .(2008). *بحوث العمليات* .الجزائر, الجزائر العاصمة, الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.

8. صبحي, ا & .,ابراهيم, ن .(2007). *بحوث العمليات* .حلب, سوريا: جامعة حلب.

9. عبد الله, أ .(2018). *بحوث العمليات* .سوريا: الجامعة الإفتراضية السورية.

10. علي حسن الدش, ع .(2012). *بحوث العمليات واتخاذ القرارات* .القاهرة: مصر.

11. مسعود الشيخ, أ .(2009). *بحوث العمليات* .(éd.)الثانية .(القاهرة, مصر: المجموعة العربية للتدريب والنشر.

12. نور الشمرتي, ح .(2010). *بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا* .العراق: مكتبة الذاكرة.

13. نور الشـــمرتي, ح & .,الزبيدي, ع .(2007). *مدخل إلى بحوث العمليات* .دار مجدلاوي للنشـــر والتوزيع.