MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE ABD ELHAFID BOUSSOUF MILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

POLYCOPIÉ PÉDAGOGIQUE

Algèbre 2

Préparé par : Dr. Bazeniar Abdelghafour

Année Universitaire : 2023 – 2024

Table des matières

Introduction

Avant toute discussion, ce cours est destiné aux étudiants de première année licence (MI), semestre 2. Il aborde une partie de la théorie d'algèbre linéaire (Algèbre 2), limité par le canevas proposé, accompagné par des exemples explicatifs. Puis, il est préférable aux étudiants de se retourner vers les notions déjà étudiées, au premier semestre, sur les structures algébriques et les polynômes. Ce document dispose d'une fenêtre sur des applications ou des interpretations géométriques de certains notions d'aspects abstraits, afin de faciliter la comprehension du sujet traité.

L'algèbre linéaire est plein de résultats qui sont intéressants dans les différents domains des mathématiques ou d'autres disciplines. Pour bien maîtriser la compréhension de l'algèbre linéaire, il existe deux phases à distinguée : les concepts et les techniques de calcul. En premier lieu, ne cherchez pas à comprendre directement avec des exemples sans s'attardez sur les concepts énoncés dans les définitions et les théorèmes. En second lieu, Donnez-vous du temps pour maîtriser et manipuler les différents techniques, qui nécessitent une pensée logique et cohérente référée à des procédés ou des calculs que vous connaissez déjà.

À la fin de ce cours, l'étudiant serai capable de répondre à des questions de l'ordre :

1 Que peut-on conclure de la relation entre deux espaces ?

2 À quoi correspondre une matrice ? De quel intérêt s'agit-il ?

3 Comment résoudre un système d'équations linéaires ?

N.B. L'objectif des preuves dans ce document est de familiariser l'étudiant avec les techniques de calcul, afin qu'il puisse bien se préparer pour les exercices des travaux dirigés.

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Introduction

L'espaces vectoriel se présente comme le sujet le plus important en algèbre linéaire. Il fournit un cadre abstrait et général pour l'étude des structures linéaires dans divers domaines des mathématiques et des sciences appliquées. En tant que outil puissant, on peut le qualifie comme le fondement de l'algèbre linéaire par sa capacité à cadrer et maîtriser l'étude des systèmes d'équations linéaires, les applications linéaires et les opérations sur les matrices.

Maîtriser les principes de ce chapitre permet de :

1 Identifier un espace vectoriel.

2 Définir un sous-espace engendré par des vecteurs.

3 Déterminer si un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant.

4 Obtenir une base pour un espace vectoriel.

5 Définir la dimension d'un espace vectoriel.

5 Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels.

Rappel sur les vecteurs

La force et l'accélération sont des quantités physiques qui possèdent des amplitudes et des directions. Comme illustration, ils sont représentés par des vecteurs (segments orientés ayant un point d'origine). On trouve, deux opérations élémentaires sur ces vecteurs :

1. **Addition** : Additionner deux vecteurs u et v revient à construire un parallélogramme dont $u + v$ est la diagonale (Figure 1.1).
2. **Multiplication** : Le produit de u par un scalaire λ est de multiplier la longueur de u par λ est de diriger le sens de l'orientation selon λ (Figure 1.1).

Soit $\mathbb{K}^n (= \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n)$, un ensemble des familles de n scalaires (ou n-uplets). Et soient $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ étant deux éléments de $\mathbb{K}^n$, On construit les opérations sur $\mathbb{K}^n$ comme suit :

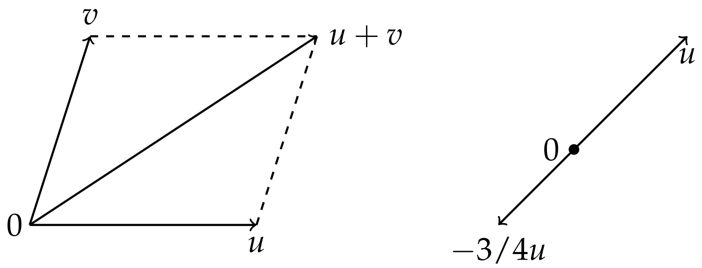

FIGURE 1.1 – Opérations élémentaires des vecteurs.

1. $X = Y \Leftrightarrow \forall i \in [1, \dots, n], X_i = y_i$.
2. $X + Y = (x_1, \dots, x_n)^t + (y_1, \dots, y_n)^t = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^t$.
3. $\lambda X = \lambda (x_1, \dots, x_n)^t = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)^t$.

1.2 Espaces vectoriels

L'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire définissent dans un ensemble E, une structure algébrique dite d'espace vectoriel. On verra dans le reste du chapitre la structure et les propriétés exigées qui permettent de définir amplement cet espace.

1.2.1 Définition

Définition 1.2.1. *(Espace vectoriel)*
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni de deux lois de compositions :

- *Une loi de composition interne notée $+$,*
- *Une loi de composition externe notée $\cdot$,*

et s'il vérifie les propriétés suivantes :

(i) $(E, +)$ *est un groupe commutatif,*
(ii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x,$
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y,$
(iv) $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x,$
(v) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x),$
avec $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

Remarques 1.2.1. *(Des remarques importantes).*

1. *Les éléments de E sont appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ des scalaires.*
2. *L'élément neutre du groupe $(E, +)$ est noté 0_E ou le vecteur nul de E.*
3. *On peut multiplier un vecteur par un scalaire mais pas deux vecteurs entre eux.*
4. *Un espace vectoriel contient toujours au moins le vecteur nul, il ne peut être vide.*

1.2.1.1 Propriétés élémentaires d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\forall x, y$ et $z \in E$, $\quad x + y = x + z$ alors $y = z$.
2. $\forall x \in E$, $\quad 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \lambda \cdot 0_E = 0_E$.
4. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$
5. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

Démonstration . *Cas par cas.*

1. *On ajoute* $-x$ *(la symétrie) à l'égalité, on obtient*

$$(-x) + (x + y) = (-x) + (x + z),$$

par l'associativité, on obtient $((-x) + x) + (y) = ((-x) + x) + (z)$,
mais, $((-x) + x) = 0_E$ *alors,* $0_E + y = 0_E + z$,
d'après l'axiome de l'élément neutre, $y = z$.

2. *On a,* $0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ *alors,* $(0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})x = 0_{\mathbb{K}} x$,
par la distributivité, $0_{\mathbb{K}} x + 0_{\mathbb{K}} x = 0_{\mathbb{K}} x = 0_{\mathbb{K}} x + 0_E$,
par la première propriété, $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.

3. *La même preuve que la deuxième propriété.*

4. *Dans la suite de la preuve, et pour chaque étape, on utilise l'une des axiomes,*
$\lambda(x - y) + \lambda y = \lambda((x - y) + y)$,
$\lambda(x - y) + \lambda y = \lambda(x + ((-y) + y)$,
$\lambda(x - y) + \lambda y = \lambda(x + 0_E)$,
$\lambda(x - y) + \lambda y - \lambda y = \lambda(x + 0_E) - \lambda y$, *(on ajoute la symétrie* $-\lambda y$*)*
$\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.

5. *Prouver* $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0_E$*, revient à montrer* $\lambda x = 0_E$ *et* $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = 0_E$.
$\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} 0$,
$(\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1} 0$, *(l'inverse)*
$1x = 0_E$, *(l'élément neutre)*
$x = 0_E$.

$\diamondsuit$

Exemple 1.2.1. *Soient* $\mathbb{K}$ *un corps et* n *un entier positif.*

1. *Tout sous-corps de* $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

2. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps. L'ensemble* $\mathbb{K}^n$ *de tous les n-tuples dont les éléments appartiennent à* $\mathbb{K}$*. Avec l'addition vectorielle et la multiplication scalaire définies par*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\text{et} \quad k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$$

est un k-espace vectoriel.

3. *Soit l'ensemble des polynômes* $\mathbb{K}[X]$ *tels que,*

$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \;\; \text{et} \;\; Q = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n,$$

On pose

$$P + Q = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n,$$
$$k \cdot P = \sum_{n \in \mathbb{N}} k a_n X^n,$$

alors $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

4. *Soit* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *l'ensemble de toutes les suites d'éléments de* $\mathbb{K}$*.* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *muni par la loi interne* $+$ *et la loi externe* $\cdot$ *définies par :*

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ & ((u_n), (v_n)) & \longmapsto & (u_n + v_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ & (k, (u_n)) & \longmapsto & (k \cdot u_n). \end{array}$$

est un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

5. *X un ensemble quelconque. Notons* $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ *toutes les fonctions de X dans K. Pour* $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ *et* $k \in \mathbb{K}$*, on pose*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\text{et le produit} \quad (kf)(x) = kf(x)$$

Le triplet $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Proposition 1.2.1. *Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ muni de l'addition,*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

et de la multiplication externe,

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n),$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2.2 Combinaisons linéaires

La notion élémentaire la plus importante sur laquelle est fondée le calcul linéaire dans les espaces vectoriels est celle de la combinaison linéaire. Elle s'effectue sur des vecteurs de E.

Définition 1.2.2. *(Calculs dans un espace vectoriel)*
E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires. On dit que le vecteur

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

est une combinaisons linéaire de la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Le vecteur v est construit à partir des scalaires par la loi externe et des vecteurs par la loi interne. Autrement dit, le sous-espace vectoriel F n'est autre que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(v)_{v \in F}$.

Remarque 1.2.1. *Les éléments de la famille $(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont appelés coefficients de la combinaison.*

Exemple 1.2.2. *On a l'égalité suivante,*

$$-6 - X - 7X^2 = -3(2 + X^2) + \frac{1}{2}(-2X - 8X^2),$$

alors, le vecteur $3 - 2X - 5X^2$ est une combinaison linéaire des vecteurs $2 + X^2$ et $4 - 2X - 8X^2$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 1.2.1. *(Combinaisons linéaires itérées)*
Soit E un K-espace vectoriel, $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Toute combinaison linéaire de combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est encore une combinaison linéaire des vecteurs de $(y_1, \ldots, y_n)$ dans E .

Démonstration . *Supposons avoir* $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ *et* $x_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,i} y_j$*, alors*

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,i} y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_{j,i} y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{j,i} y_j.$$

$\diamondsuit$

Définition 1.2.3. *On appelle combinaison convexe toute combinaison linéaire dont les coefficients sont non négatifs et de somme égale à* 1*. On peut définir l'ensemble des combinaisons convexes, pour tout* $\lambda \in (0, 1]$.

$$\lambda X + (1 - \lambda) Y = Y + \lambda (X - Y), \quad X, Y \in E.$$

1.3 Sous-espaces vectoriels

On appelle sous-espace vectoriel de E tout sous-ensemble de E qui est lui-même un espace vectoriel pour les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire définies dans E.

1.3.1 Théorèmes et Définitions

Définition 1.3.1. *(Sous-espace vectoriel)*
Soient E un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.* $F \subset E$ *est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

1. $0_E \in F$;
2. $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda x + y \in F.$

En d'autre terme, F est stable vis-à-vis des lois de compositions.

La première propriété est toujours vérifiée. Puisque F est non vide, alors il existe au mois $x_0 \in F$. Donc par la stabilité,

$$1.x_0 + (-1) x_0 = 0_E \in F.$$

Exemple 1.3.1. *(Des exemples explicatifs).*

1. $\{0_E\}$ *est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E.*
2. *Soit F un ensemble définie par,*

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}.$$

F est un sous-espace vectoriel, puisqu'il vérifié les deux conditions :

— $0_{\mathbb{R}^3} \in F$*, car* $0 + 0 - 0 = 0.$

— *Pour* $(x,y,z),(x',y',z') \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}(x,y,z)+\lambda(x',y',z') &= (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z'),\\ &= (x+\lambda x')+(y+\lambda y')-(z+\lambda z'),\\ &= (x+y-z)+\lambda(x'+y'-z'),\\ &= 0+\lambda\cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

donc $\lambda(x,y,z)+(x',y',z') \in F$.
D'où F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. $\mathbb{K}_n[X]$ *est l'ensemble des polynômes de degré* $\leq n$; $\mathbb{K}_n[X] := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$.
$-\deg 0 = -\infty \leq n$,
$-\forall P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on a*

$$\deg(\lambda P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\} \leq n.$$

Alors, $\mathbb{K}_n[X]$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 1.3.1. *(Stabilité)*
Soient F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel E et* $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *un k vecteurs de F. Alors toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient à F.*

Démonstration . *Procédant par une démonstration par recurrence.*
Pour $n = 1$ *l'égalité est vérifiée.*
Supposant qu'elle est vérifiée pour $n-1$, *et vérifiant pour* n.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i + \alpha_m v_m.$$

Par la propriété de la stabilité la combinaison appartient à F. $\diamondsuit$

Proposition 1.3.1. *Soient F un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel E. Les deux opérations élémentaires sur E engendre sur F un K-espace vectoriel.*

Remarque 1.3.1. *En pratique, dire qu'un ensemble est un espace vectoriel, revient à démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel.*

Théorème 1.3.2. *(Intersection de sous-espaces vectoriels)*
L'intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Démonstration . *(Appliquant la Définition).*
Soient $(F_i)_{i \in I}$ *une famille de sous espace vectoriels de E et* $F = \cap F_i$.

1. *Si* $0_E \in F_i$, *alors il est dans F.*

2. *Soient $x, y \in F$, on a la combinaison $x + \lambda y$ appartient à touts les F_i donc cette combinaison est dans F.*

De 1 *et* 2*, $F = \cap F_i$ est un sous espace vectoriel.* $\diamondsuit$

Exemple 1.3.2. *Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$:*

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \; et \; x + y - t = 0\}.$$

On peut écrire F sous la forme,

$$F = F_1 \cap F_2$$

où

$$F_1 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - t = 0\} \;\; et \;\; F_2 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z - t = 0\}.$$

Certe, F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Remarque 1.3.2. *La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel (voir le contre exemple en dessous).*

Exemple 1.3.3. *Soit le sous ensemble,*

$$G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 1 \;\; ou \;\; P(1) = 1\}.$$

On peut écrire G sous la forme,

$$G = G_1 \cup G_2,$$

où

$$G_1 := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 1\} \;\; et \;\; G_2 := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 1\}.$$

$$G_1 \not\subset G_2, \;\; car \;\; X + 1 \notin G_2.$$

$$G_2 \not\subset G_1, \;\; car \;\; X \notin G_1.$$

Alors, G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

1.3.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous espace vectoriels de E. On a affirmer que la réunion n'est toujours pas un espace vectoriel, mais leurs somme dans E contient nécessairement les vecteurs F et les vecteurs de G.

Définition 1.3.2. *(Somme)*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G, l'ensemble notée $F + G$, et qui vérifiée :

$$\forall z \in F + G \Leftrightarrow \exists x \in F, \exists y \in G, \;\; tq \;\; z = x + y.$$

Remarque 1.3.3. *En fait $F+G$ n'est autre que le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$.*

On peut généraliser la proposition précédente à la somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Théorème 1.3.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $F_1, \ldots, F_n$ n sous espaces vectoriels de E. Alors, la somme*

$$\forall z \in F_1 + \ldots + F_n \Leftrightarrow \exists x_1 \in F_1, \ldots, \exists x_n \in F_n, \ tq \ z = x_1 + \ldots + x_n.$$

est un sous-espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_n$.

Définition 1.3.3. *(Somme directe)*
Soit E un k-espace vectoriel et F et G deux sous espace vectoriels de E, alors les assertions suivante sont équivalentes :

1. *F et G sont en somme directe,*
2. *pour tout $z \in F+G$, il existe un unique couple de vecteurs $(x,y) \in F \times G$ tel que $z = x+y$,*
3. *L'intersection de F et G se réduit à $\{0_E\}$: $F \cap G = \{0_E\}$.*

Dans ce cas, on écrit $F \oplus G$.

Exemple 1.3.4. *Les sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:*

$$F = \{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} \quad et \quad G = \{(y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t - y - z = 0\}$$

sont en somme directe, car si (x,x,x) vérifié G, alors $x - x - x = 0 \Rightarrow x = 0$. Donc, $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Définition 1.3.4. *(Sous-espace supplémentaires)*
Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F est supplémentaire à G dans E si et seulement si,

$$E = F + G \quad et \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

Théorème 1.3.4. *(Existence)*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Tout sous-espace vectoriel de E admet au mois un sous-espace vectoriel supplémentaire.

Définition 1.3.5. *Soit X une partie (intersection des sous espace vectoriels) d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par X le plus petit sous-espace vectoriel contenant X. On le note* $\mathrm{Vect}(X)$.

Exemple 1.3.5. *(Des exemples explicatifs).*

1. $\mathrm{Vect}(0_E) = \{0_E\}$.
2. *Si $x \neq 0_E$, $\mathrm{Vect}(x)$, est la droite vectoriel engendré par x.*

3. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *Soient* $F = (1,0,0)$ *et* $G = (0,1,0)$ *alors,* $\mathrm{Vect}(F,G)$ *est le plan horizontal* $(x,y,0)$.

Théorème 1.3.5. *Soit* X *une partie non vide d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E. $\mathrm{Vect}(X)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille* $(x)_{x\in X}$.

Exemple 1.3.6. *(Des exemples explicatifs).*

1. *Les vecteurs* $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$ *engendrent l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$*. on peut écrire* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *sous forme de combinaison linéaire des* e_i *:*

$$(x,y,z) = x(l,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

2. *Le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par la famille* $X := \{(-3,2,0),(0,1,-2)\}$ *est*

$$\mathrm{Vect}(X) = \{x(-3,2,0) + y(0,1,-2) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{(-3x, 2x+y, -2y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}.$$

3. *Soient les vecteurs* $u = X - iX^2$ *et* $v = (1-i) + X$ *de* $\mathbb{C}_2[X]$*. Alors*

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(u,v) &= \{\lambda(X - iX^2) + \mu(1 - i + X) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{C}\}\\ &= \{\mu(1-i) + (\lambda+\mu)X - i\mu X^2 \mid \lambda,\mu \in \mathbb{C}\}.\end{aligned}$$

Théorème 1.3.6. $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n) = \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ *si et seulement si chaque vecteur de la famille* $(u_1,\dots,u_n)$ *est combinaison linéaire des vecteurs de la famille* $(v_1,\dots,v_p)$ *et chaque vecteur de la famille* $(v_1,\dots,v_p)$ *est combinaison linéaire des vecteurs de la famille* $(u_1,\dots,u_n)$.

Théorème 1.3.7. *Soient* X *et* Y *deux parties d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. Alors*

$$X \subset Y \Longrightarrow \mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(Y)$$

et

$$\mathrm{Vect}(X \cup Y) = \mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y).$$

1.4 Partie génératrice, Partie libre

1.4.1 Famille génératrice

Définition 1.4.1. *(Partie génératrice)*
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* X *une partie de* E*. On dit que la partie* X *est génératrice de* E *ou engendre* E *si tout élément de* E *est combinaison linéaire de* X*, on écrit*

$$E = \mathrm{Vect}\{X\}.$$

Théorème 1.4.1. *(Existence) Tout espace vectoriel E possède au moins une famille génératrice.*

Exemple 1.4.1. *(Des exemples explicatifs).*

1. *L'ensemble* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x+y-z=0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ z = x+y\} \\ &= \{(x,y,x+y) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \ , \ y,z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   F est engendré par $((1,0,1),(0,1,1))$.

2. *La famille* $((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$ *engendre le sous espace vectoriel suivant,*

$$\begin{aligned} H &= \{x(1,0,1) + y(0,1,1) + z(0,0,1) \ , \ x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,x+y+z) \ , \ x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ , \ x+y+z-t=0\}. \end{aligned}$$

Remarque 1.4.1. *Deux familles génératrices qui engendrent le même espace vectoriel E sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles contiennent le même nombre de vecteurs.*

1.4.2 Familles libres, familles liées

Définition 1.4.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est libre ou linéairement indépendante dans E si*

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad (\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}).$$

On dit que la famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est liée si elle n'est pas libre, ce qui signifie

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E \quad \text{avec } \lambda_i \ \text{ ne sont pas tous nuls.}$$

Proposition 1.4.1. *(Propriétés de familles libres)*

- *Si $(v_i)_{i \in F}$ est une famille quelconque de E, on dit que la famille $(v_i)_{i \in F}$ est libre, si toute sous-famille $(v_i)_{i \in H}$, où $H \subset F$ est un ensemble fini est libre.*
- *Si $(v_i)_{i \in F}$ est une famille libre quelconque de E, toute sous- famille $(v_i)_{i \in H}$, où $H \subset F$ est libre.*
- *Si $(v_i)_{i \in F}$ est une famille libre quelconque de E et si i et j sont deux éléments de F tels que $i \neq j$, alors $v_i \neq v_j$.*

Remarque 1.4.2. *Toute partie de E contenant le vecteur 0_E est liée.*

Exemple 1.4.2. *(Des exemples explicatifs).*

1. *La famille* $\{1, X, X^2, X^3\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}_3[X]$.

2. *La famille* $\{(-2,0),(-3,1),(1,-1)\}$ *est liée dans* $\mathbb{R}^2$*, car* $(-2,0)-(-3,1)=(1,-1)$.

Théorème 1.4.2. *Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

Démonstration . *Pour les deux sens :*

1. $\Rightarrow$*) Si la famille* $\{v_1,\dots,v_n\}$ *est liée, il existe des nombres non tous nuls* $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ *tels que* $\lambda_1 v_1,\dots,\lambda_n v_n=0$. *En supposant* λ_i *non nul et en résolvant par rapport à* v_i*, on obtient*

$$v_i=\frac{1}{\lambda_i}(-\lambda_1 v_1,\dots,\lambda_{i-1}v_{i-1},\lambda_{i+1}v_{i+1},\dots,\lambda_n v_n).$$

Cela montre que v_i *est combinaison linéaire des* v_j *avec* $i\neq j$.

2. $\Leftarrow$*), si* $v_i=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_{i-1}v_{i-1}+\lambda_{i+1}v_{i+1}+\dots+\lambda_n v_n$*, alors*

$$\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_{i-1}v_{i-1}-v_i+\lambda_{i+1}v_{i+1}+\dots+\lambda_n v_n=0,$$

ce qui montre que la famille $\{v_1,\dots,v_n\}$ *est liée, car au moins un coefficient de la combinaison linéaire est non nul.* $\diamondsuit$

Théorème 1.4.3. *Soit un espace vectoriel de dimension* n*, on a*

1. *toute famille libre ou génératrice a au plus* n *éléments,*

2. *toute famille libre ou génératrice de* n *élément est une base.*

Exemple 1.4.3. *(Exemples explicatifs)*

1. *La famille* $X=\{(0,-1,1),(4,0,1),(1,5,0)\}$ *est libre de* 3 *éléments, alors* $\dim X=3=\dim\mathbb{R}^3$.

2. *La famille* $Y=\{1,X,X^2\}$ *est libre de* 3 *éléments, alors* $\dim Y=3=\dim\mathbb{R}_2[X]$.

1.5 Bases

Définition 1.5.1. *(Base)*

Une base est toute famille de vecteurs à la fois génératrice et libre.

Exemple 1.5.1. *(Des exemples explicatifs).*

1. $\{1,i\}$ *est une base de l'espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

2. $\{e_1=(1,0,\dots,0),e_2=(0,1,\dots,0),\dots,e_n(0,0,\dots,1)\}$ *est une base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

3. *La famille* $\{1,X,X^2,\dots,X^n\}$ *est une base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$.

4. *La famille* $\{1,X,X^2,\dots,X^n,\dots\}$ *est une base canonique de* $\mathbb{R}[X]$.

5. *Les familles* $\{(1,0),(0,2)\}$, $\{(1,1),(0,1)\}$ *sont des bases de* $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1.5.1. *(Unicité)*
Tout élément u de E de dimension n s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de sa base e_i,

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad \text{où } \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Démonstration . *On sait que les vecteurs de base* $e_1, \ldots, e_n$, *engendrent E, donc tout vecteur v s'écrit sous la forme* $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. *D'autre part,* $e_1, \ldots, e_n$ *sont linéairement indépendants, la décomposition est unique.*

Réciproquement, si tout vecteur v s'écrit de manière unique sous la forme $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, *les vecteurs* $e_1, \ldots, e_n$, *engendrent E et ils sont linéairement indépendants, donc* $e_1, \ldots, e_n$ *est une base de E.* $\diamondsuit$

Théorème 1.5.2. *(Base d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels)*
Soient E un espace vectoriel et E_1 *et* E_2 *deux sous-espaces vectoriels de E tel que* $E = E_1 \oplus E_2$.
Alors, toute base de E_1 *concaténée avec toute base de* E_2 *forme une base de E.*

Exemple 1.5.2. *Considérons l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}^3$ *avec les sous-espaces vectoriels*

$$F = \{(x,y,0),\ x,y \in \mathbb{R}\}, \quad G = \{(0,0,z),\ z \in \mathbb{R}\},$$

On a $F \bigcap G = \{(0,0,0)\}$ *et* $F + G = \{(x,y,z)\}$.
Donc, $E = F \oplus G$.
Et comme la base de F est $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ *et la base de G est* $\{(0,0,1)\}$.
En concaténant ces bases, On obtient la base de $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Définition 1.5.2. *(Espace vectoriels de dimension finie)*
Soit E un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.*

Théorème 1.5.3. *(Existence du base)*
Tout espace vectoriel de dimension finie et non réduit au vecteur nul admet une base.

Démonstration . *Soit* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *une famille génératrice de E. Si E n'est pas réduit à* 0_E, *au moins un vecteur* v_i *n'est pas nul. Alors, on peut construire une base de E, on ajoutant au fur et à mesure à* v_i *un autre vecteur de E qui soit libre avec ceux qui lui précèdent.* $\diamondsuit$

Théorème 1.5.4. *(Dimension)*
La dimension d'un espace vectoriel E est le nombre d'éléments d'une base de E, on le note $\dim(E)$.

Exemple 1.5.3. *(Exemples explicatifs)*

1. *La dimension de l'espace nul est* 0.
2. $\dim \mathbb{K}^n = n$.
3. $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.

Théorème 1.5.5. *(Formule de Grassmann)*
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels. Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

F et G en somme directe si et seulement si

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Théorème 1.5.6. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors*

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

et

$$Si \quad \dim(F) = \dim(E), \quad alors \quad F = E.$$

Théorème 1.5.7. *(Sous espace complémentaire)*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, il existe un sous-espace vectoriel G de E (non unique) tel que E soit somme directe de F et G. On dit que F et G sont complémentaire.

Exemple 1.5.4. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un hyperplan de dimension $n - 1$. Tout vecteur n'appartient pas à F engendre une droite vectoriel G tel que $E = F \oplus G$*

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Introduction

Une application linéaire est une application d'un espace vectoriel dans un autre qui est compatible avec la structure d'espace vectoriel. Généralement les bases de ces deux espaces sont données. Ces applications linéaires s'identifient aux matrices, sera étudié dans le prochain chapitre, la composition des applications s'identifiant au produit matricielle.

La première section de ce chapitre est consacrée à des définitions et des propriétés élémentaires. La deuxième aborde les deux notions du Noyau et de l'image d'une application linéaire avec des exemples explicatifs, ainsi la notion du rang est discutée. Dans la dernière section, on définit des opérations sur les applications linéaires et on identifie ces opérations par quelques démonstrations utiles et aussi des exemples, afin de bien saisir les techniques de calcul.

Noté bien qui il existe un lien majeur entre les objets étudiés au chapitre précèdent : bases, sous-espaces vectoriels, dimension et les applications linéaires.

Maîtriser les principes de ce chapitre permet de :

1 Identifier une application linéaire.

2 Image et noyau d'une application linéaire.

3 Identifier la bijection d'une application via le noyau et l'Image.

4 Théorème du rang.

5 Opérations sur les applications linéaires.

N.B : Sources figures : sites internet.

2.2 Définitions et Théorèmes

Définition 2.2.1. *(Application)*
Soient E et F deux ensembles quelconques. Supposons qu'à chaque $e \in E$ on associe un élément de F. L'ensemble de ces correspondances est appelé une application de E dans F et on l'écrit $f : E \longrightarrow F$.

Remarque 2.2.1. *$f(E)$, est appelé l'image de f. De plus E est appelé le domaine de l'application.*

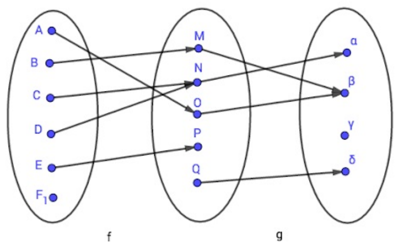

FIGURE 2.1 – L'application $f(g)$

Définition 2.2.2. *(Application linéaire)*
Une application $f : E \longrightarrow F$ entre deux espaces vectoriels E et F est dite linéaire si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) *$\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (additivité).*

(ii) *$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (homogénéité).*

En d'autre terme : les deux lois de l'espace vectoriel sont "respectés".

Appliquer la combinaison linéaire à des vecteurs puis f, ou d'abord f puis cette combinaison linéaire, revient au même.

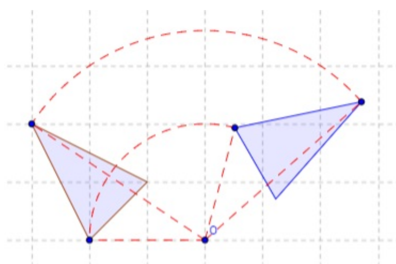

FIGURE 2.2 – Application linéaire de rotation

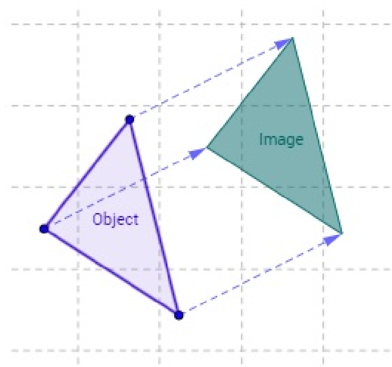

FIGURE 2.3 – Application linéaire de transition

Exemple 2.2.1. **1.** *L'application*

$$\begin{array}{cccc} f_1 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,0) \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$, car :

$$\begin{aligned} f_1((x,y,z)+(x',y',z')) &= f_1((x+x',y+y',z+z') \\ &= (x+x',y+y',0+0) \\ &= (x,y,0)+(x',y',0) \\ &= f_1(x,y,z)+f_1(x',y',z'). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f_1(\lambda(x,y,z)) &= f_1(\lambda x,\lambda y,\lambda 0) \\ &= \lambda(x,y,0) \\ &= \lambda f_1(x,y,z). \end{aligned}$$

2. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, car :

$$\begin{aligned} f_2(P+Q) &= (P+Q)' \\ &= P'+Q' \\ &= f_2(P)+f_2(Q). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f_2(\lambda P) &= \lambda P' \\ &= \lambda f_2(\lambda P). \end{aligned}$$

3. *L'application nulle*

$$\begin{array}{rccc} f_3 : & E & \longrightarrow & F \\ & & f_3(u)=0 & \end{array}$$

est une application linéaire.

4. *L'application identité*

$$\begin{array}{rccc} f_4 : & E & \longrightarrow & E \\ & & f_4(u)=u & \end{array}$$

est une application linéaire.

5. *La symétrie centrale*

$$f_5 : E \longrightarrow E$$
$$f_5(u) = -u$$

est une application linéaire.

6. *L'homothétie de rapport k*

$$f_6 : E \longrightarrow E$$
$$f_6(u) = ku$$

est une application linéaire.

7. *Lapplication*

$$\begin{array}{rccc} f_7 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

n'est pas linéaire de $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$, *car* $f_7(2(1,1)) = 8 \neq 4 = 2f_7(1,1)$.

Remarque 2.2.2. **1.** *On appelle monomorphisme toute application linéaire injective de E sur F.*

2. *On appelle épimorphisme toute application linéaire surjective de E sur F.*
3. *On appelle isomorphisme (d'espace vectoriel) de E sur F toute application linéaire bijective de E sur F.*
4. *Lorsque* $E = F$, *on parle plutôt d'automorphisme (d'espace vectoriel) de E.*

Théorème 2.2.1. *(Détermination d'un AL par les images d'une base)*
Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. *Soit* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *une base de E et soient* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *des vecteurs quelconques de F. Il existe alors une application linéaire unique* $g : E \longrightarrow F$ *telle que*

$$g(e_1) = f_1, g(e_2) = f_2, \ldots, g(e_n) = f_n.$$

Notations 2.2.1. **1.** $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ *désigne l'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F.*

2. $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ *désigne l'ensemble de toutes les endomorphismes de E.*
3. $Isom(E,F)$ *est l'ensemble des isomorphisme de E dans F.*
4. $GL(E)$ *est l'ensemble des automorphismes de E et appelé le groupe linéaire de E.*

Théorème 2.2.2. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, alors :*

1. $f(0_E) = 0_F$,
2. $f(-x) = -f(x)$, *pour tout* $x \in E$,
3. $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Démonstration . ***1 et 2)*** *Il suffit d'appliquer la définition de la linéarité avec* $\lambda = 0$, *puis avec* $\lambda = -1$.

3) $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i f(x_i)) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$

$\diamondsuit$

Théorème 2.2.3. *Soit f une application linéaire de E dans F. Soit (e_i) une base E.*

— *f est injective si et seulement si $(f(e_i))$ est libre,*
— *f est surjective si et seulement si $F = \text{Vect}\{(f(e_i))\}$,*
— *f est bijective si et seulement si $(f(e_i))$ est une base de F.*

Exemple 2.2.2. **1.** *Considérons l'application :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (y-z, x-2y, 3x-z). \end{array}$$

Soit $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.Comme

$$f((1,0,0)) = (0,1,3), \quad f((0,1,0)) = (1,-2,0) \quad \textit{et} \quad f((0,0,1)) = (-1,0,-1)$$

et $\{(0,1,3),(1,-2,0),(-1,0,-1)\}$ est libre, alors f est injective.

2. *Soit l'endomorphisme h défini par*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & P + XP''. \end{array}$$

$\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$g(1) = 1, \quad g(X) = X, \quad g(X^2) = 2X + X^2 \quad \textit{et} \quad g(X^3) = X^3 + 6X.$$

Comme $\{1, X, 2X+X^2, 6X+X^3\}$ est libre,
et $\dim \mathbb{R}_3[X]$=Card$\{1, X, 2X+X^2, 6X+X^3\} = 4$.
Alors, $\{1, X, 2X+X^2, 6X+X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et g est bijective.

La bijectivité est une propriété forte, ce qui la rend particulièrement utile dans de nombreuses applications mathématiques.

Théorème 2.2.4. *Soit f une application linéaire de E dans F de dimensions finies égales. Alors,*

$$f \textit{ est bijective} \iff f \textit{ est injective} \iff f \textit{ est surjective.}$$

Corollaire 2.2.1. *Pour que deux espaces vectoriels de dimensions finies soient isomorphes, il faut et il suffit qu'ils aient même dimension.*

Démonstration . *Soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme, alors l'image d'une base de E est une base de F. Donc* $\dim E = \dim F$.

Réciproquement, *Considérant $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E et $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base de F (E et F ont la même dimension).*

- *Pour tout $y \in F$ et $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$, on a*

$$\begin{aligned} y &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n \\ &= \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_n f(e_n), \\ &= f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) = f(x), \end{aligned}$$

  d'où $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = F$, alors f est surjective.

- *Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que, $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$, on a alors*

$$\begin{aligned} f(x) = 0_F &= f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n), \\ &= \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_n f(e_n) \\ &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n, \end{aligned}$$

  Mais, $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est base de F donc $x = 0_E$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ ce qui fait f est injective. Bref, f est un isomorphisme.

$\diamondsuit$

Exemple 2.2.3. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a, b, c) & \longmapsto & a + cX^2 \end{array}$$

est un isomorphisme, car $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$.

2.3 Image et noyau d'une application linéaire

L'Image et noyau fournissent des informations importantes sur la structure et le comportement de l'application linéaire.

2.3.1 Image d'une application linéaire

Définition 2.3.1. *Soit f une application linéaire de E dans F. L'image de f est défini par,*

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F : \; y = f(e) \; e \in E\},$$

Une autre façon de voir l'image,

$$y \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists e \in E, y = f(e).$$

L'Image est l'ensemble des vecteurs dans F qui sont obtenus en appliquant f à tous les vecteurs de l'espace E.

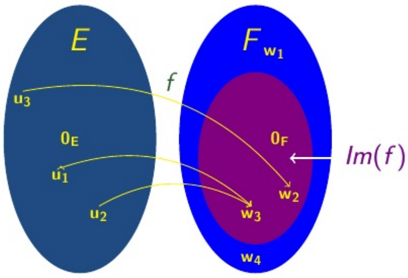

FIGURE 2.4 – Image d'une Application linéaire

Exemple 2.3.1. **1.** *Considérons l'application linéaire :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, y-z, -z). \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{f((x,y,z))\ ,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x+2y-z, y-z, -z)\ ;\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1,0,0) + y(2,1,0) + z(-1,-1,-1)\ ;\ x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(2,1,0),(-1,-1,-1)\}. \end{aligned}$$

2. *Soit g l'endomorphisme défini par :*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & (1+X)P''. \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(g) &= \{g(P)\ ;\ P \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{(1+X)P''\ ;\ P := a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{2a_2 + 6a_3 + 2a_2X + 6a_3X^2 \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{1, 2X, 6X^2\}. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.1. *(Image d'un sous espace vectoriel par une application linéaire)*
Soit f une application linéaire de E dans F. f est surjective si et seulement si,

$$\mathrm{Im}(f) = F.$$

Exemple 2.3.2. *Pour $n \geq 2$, soit f l'application linéaire :*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P & \longmapsto & XP''. \end{array}$$

Puisque

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \{XP'' \,;\; P \in \mathbb{K}_n[X]\}, \\ & = & \{2a_2X + 6a_3X^2 + \cdots + n(n-1)a_nX^{n-1} \mid a_2, a_3, \cdots, a_n \in \mathbb{K}\} \\ & = & \mathbb{K}_{n-1}[X], \end{array}$$

alors f est surjective.

Théorème 2.3.2. *(Image d'un Vect par une application linéaire)*
Soit f une application linéaire de E dans F. Si E possède une base $(e_i)_{i\in I}$,

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left\{(e_i)_{i\in I}\right\}.$$

Exemple 2.3.3. *Considérons l'application linéaire :*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, x-3y). \end{array}$$

Comme la famille $\{(1,0),(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ alors,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{f(1,0), f(0,1)\right\} = \mathrm{Vect}\left\{(1,1),(2,-3)\right\}.$$

2.3.2 Noyau d'une application linéaire

Définition 2.3.2. *(Noyau d'une application linéaire)*
Soit f une application de E dans F. Le noyau de f est défini par,

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E | f(x) = 0_E\},$$

Une autre façon de voir le noyau,

$$e \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(e) = \{0_F\}.$$

Le noyau est l'ensemble des vecteurs dans E qui sont envoyés sur le vecteur nul de F par f.

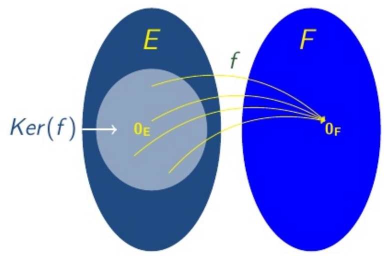

FIGURE 2.5 – Noyau d'une Application linéaire

Théorème 2.3.3. *Soit f une application linéaire de E dans F. f est injective sur E si et seulement si,*

$$\text{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Démonstration . 1. $\Rightarrow$) *f est injective : si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$.*
Supposons qu'il existe un vecteur v dans $\text{Ker}(f)$, c-à-d $f(v) = 0_F$.
Mais comme f est injective, $f(v) = f(0_E)$ alors $v = 0_E$ (Contradiction avec la supposition).
Donc,

$$\text{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

2. $\Leftarrow$) *Supposons maintenant que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.*
Et soient $x, y \in E$, on a

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0_F \Rightarrow f(x - y) = 0_F.$$

Et comme $\text{Ker}(f) := \{0_E\}$, alors $x - y = 0_E$,
ce qui signifie que $x = y$.

Ainsi, la démonstration est achevé. $\diamondsuit$

Exemple 2.3.4. *L'ensemble $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 2x + z - 4t = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(f) &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | -2x + z - 3t = 0\}, \\
&= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | z = 3t + 2x\}, \\
&= \{(x, y, 3t + 2x, t), \ x, y, t \in \mathbb{R}\}, \\
&= \{x(1, 0, 2, 0) + y(0, 1, 0, 0) + t(0, 0, 3, 1), \ x, y, t \in \mathbb{R}\}, \\
\text{Ker}(f) &= Vect\{(1, 0, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 3, 1)\}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.3.1. *Si f est une application linéaire injective de E vers F, alors elle transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.*

Définition 2.3.3. *(Application singulière)*
Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est dite singulière s'il existe un vecteur e non nul,

$$f(e) = 0, \ \ e \in E.$$

2.4 Théorème du rang

Définition 2.4.1. *(Rang d'une application linéaire)*
Le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ est la dimension de son image, noté $\mathrm{rg}(f)$.

Proposition 2.4.1. *Si E est de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors*

$$\mathrm{rg}(f) = rg(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

$$\mathrm{rg}(f) \leq \inf(\dim E, \dim F).$$

Théorème 2.4.1. *(Théorème du Rang (théorème noyau-image))*
Si E est de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. Alors,

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f). \tag{2.1}$$

Ce théorème est primordiale, puisque elle nous permet de retrouver immédiatement un certain nombre de résultats à savoir.

Corollaire 2.4.1. *Soit f une application linéaire de E dans F de dimensions finies.*

1. *f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim F$.*
2. *f est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim E$.*

Démonstration . • *<u>Si f est injective :</u> Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E. Comme f est injective, alors la famille $\{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\}$ est libre de F donc libre de $\mathrm{Im}(f)$. Mais, c'est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, alors c'est une base de F et $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim E$.*

• *<u>Si f est surjective :</u> Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Alors, $\mathrm{Im}(f)$ est engendrée par*

$$\{f(\varepsilon_{p+1}), f(\varepsilon_{p+2}), \cdots, f(\varepsilon_n)\}.$$

Maintenant, La famille $\{f(\varepsilon_{p+1}), f(\varepsilon_{p+2}), \cdots, f(\varepsilon_n)\}$ est-elle libre ?
Puisque f est linéaire, alors

$$\lambda_{p+1} f(\varepsilon_{p+1}) + \lambda_{p+2} f(\varepsilon_{p+2}) + \cdots + \lambda_n f(\varepsilon_n) = f(\lambda_{p+1}\varepsilon_{p+1} + \lambda_{p+2}\varepsilon_{p+2} + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n) = 0.$$

Cela nous donne

$$\lambda_{p+1}\varepsilon_{p+1} + \lambda_{p+2}\varepsilon_{p+2} + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_p\varepsilon_p,$$

donc $\{f(\varepsilon_{p+1}), f(\varepsilon_{p+2}), \cdots, f(\varepsilon_n)\}$ *forment une base de* $\mathrm{Im}(f)$ *et* $\dim \mathrm{Im}(f) = n - p$.
Ces deux cas nous permet d'achever la démonstration. $\diamondsuit$

Théorème 2.4.2. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f : E \to F$ une application linéaire. E étant de dimension finie, soit G un supplémentaire de* $\mathrm{Ker}(f)$, *alors*

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus G.$$

2.5 Opérations sur les applications linéaires

On peut combiner entre les applications linéaires de différentes manières, de façon à obtenir de nouvelles applications linéaires.

Théorème 2.5.1. *Soient f une application linéaire de E dans F et g de F dans G et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a alors*

$$\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F).$$

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G).$$

Démonstration . 1. $\forall x, y \in E, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$, *on a*

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)(\alpha x + y) &= (\lambda f)(\alpha x + y) + (\mu g)(\alpha x + y) = \lambda f(\alpha x + y) + \mu g(\alpha x + y), \\
&= \lambda f(\alpha x) + \lambda f(y) + \mu g(\alpha x) + \mu g(y) \\
&= \lambda \alpha f(x) + \lambda f(y) + \alpha \mu g(x) + \mu g(y), \\
&= \alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) + (\lambda f(y) + \mu g(y)), \\
&= \alpha(\lambda f + \mu g)(x) + (\lambda f + \mu g)(y).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
g \circ f(x, y) &= g(f(x, y)) = g(f(x) + f(y)), \\
&= g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda x) &= g(f(\lambda x)), \\ &= g(\lambda f(x)) = \lambda(g \circ f)(x). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Corollaire 2.5.1. *(Anneau $\mathcal{L}(E)$)*

1. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ *est un anneau (non commutatif et non intègre en général). De plus* $1_{\mathcal{L}(E)} = Id_E$,
2. $GL(E)$ *est le groupe des inversibles de l'anneau* $\mathcal{L}(E)$.

Corollaire 2.5.2. *(Anneau $\mathcal{L}(E)$)*
$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (F, G) \in \mathcal{L}(E, F)^2$,

1. $G \circ (F + F') = G \circ F + G \circ F'$
2. $(G + G')oF = G \circ F + G' \circ F$
3. $\alpha(G \circ F) = (\alpha G) \circ F = G \circ (\alpha f)$.

Remarque 2.5.1. *Comme dans tout anneau, les deux formules suivantes sont vraies dans* $\mathcal{L}(E)$ *:*

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \qquad \text{et} \qquad f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-k-1}.$$

Exemple 2.5.1. *Considérons*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,0,z) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (0,y,0). \end{array}$$

On a $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ *et pourtant* $g \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ $g \circ f = f \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

Définition 2.5.1. *(Endomorphisme nilpotent)*
Soit E un K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. *On dit que* f *est nilpotent si* $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ *pour un certain* $k \in \mathbb{N}^*$. *Le plus petit de ces entiers k est alors appelé l'indice de nilpotence de* f.

Exemple 2.5.2. *L'endomorphisme*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

est nilpotent d'indice $\leq n+1$, *car :* $P^{(n+1)} = 0$, *donc* $f^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])}$.

Théorème 2.5.2. *(isomorphisme)*
Soit E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels,* f *un isomorphisme de* E *dans* F,

1. $(e_1, \ldots, e_n)$ *est libre si et seulement si* $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ *est libre.*
2. $(e_1, \ldots, e_n)$ *est liée si et seulement si* $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ *est liée.*
3. $(e_1, \ldots, e_n)$ *engendre* E *si et seulement si* $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ *engendre* F.
4. $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base de* E *si et seulement si* $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ *est une base de* F.
5. *Toute relation linéaire entre les vecteurs de la famille* $(e_1, \ldots, e_n)$ *donne lieu à une relation linéaire analogue entre ceux de la famille* $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ *et vice-versa.*

Théorème 2.5.3.
1. *Si* f *est un isomorphisme de* E *sur* F*, alors* f^{-1} *est un isomorphisme de* F *sur* E.
2. *Si* f *est un isomorphisme de* E *sur* F *et* g *un isomorphisme de* F *sur* G*, alors* $g \circ f$ *est un isomorphisme de* E *sur* G.

Démonstration .
1. *On considère* $z \in F : z = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y), \quad x, y \in E.$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \\
&= \lambda f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)), \\
&= \lambda x + y, \\
f^{-1}(f(z)) &= z = f^{-1}(\lambda x + y) = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y).
\end{aligned}
$$

2. *réfléchissez et procédez.*

$\diamondsuit$

Règle de calcul 2.5.1. *Pour montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme, on peut utiliser différentes méthodes,*

1. *On montre que l'application linéaire est injective et surjective.*
2. *Si* $\dim E = \dim F$ *et l'application linéaire est injective ou surjective.*
3. *On montre que* $\dim E = \dim Im(f)$*, c'est à dire le noyau se réduit à* 0_E.
4. *Si la matrice associée à l'application linéaire est inversible, alors l'application est un isomorphisme (voir chapitre des matrices).*

Chapitre 3

Matrices

3.1 Introduction

Les matrices sont bien plus que de simples tableaux de nombres. Elles sont investies dans de vastes domaines des mathématiques, de la physique, de l'informatique et de l'ingénierie. Dans notre contexte, elles jouent un rôle crucial en algèbre linéaire et sont essentielles pour résoudre des systèmes d'équations, effectuer des changement de bases et analyser des données.

Maîtriser les principes de ce chapitre permet de :

1 Identifier une matrice.

2 Effectuer des opérations sur les matrices.

3 Inverser une matrice. Quel intérêt s'agit il ?

4 Manipuler des matrices en effectuant des opérations élémentaires.

N.B : Sources figures : sites internet.

3.2 Matrice associée à une application linéaire

Définition 3.2.1. *(Matrice associée)*
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finies n et m respectivement. Notons $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E et $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ une base F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de f dans les base B et B', notée $M_{B,B'}(f)$ la matrice $(a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ M_{B,B'}(f) = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_m \end{array} \end{array}$$

Où

$$f(e_j) = a_{1,j}e'_1 + a_{2,j}e'_2 + \cdots + a_{m,j}e'_m, \quad j = \overline{1, m}.$$

On peut l'interpréter comme une transformation linéaire d'un espace vectoriel dans un autre. Les colonnes de la matrice représentent les vecteurs images des vecteurs de base de l'espace d'origine. Dont chaque vecteur image est une combinaison linéaire des vecteurs de base de l'espace d'arrivé.

FIGURE 3.1 – Représentation d'espaces Matricielle.

Exemple 3.2.1. **1.** *Soit f l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x - y, x + y - z). \end{array}$$

On sait que $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \{(1,0), (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{rclcl} f((1,0,0)) & = & (1,1) & = & 1 \times (1,0) + 1 \times (0,1), \\ f((0,1,0)) & = & (-1,1) & = & -1 \times (1,0) + 1 \times (0,1), \\ f((0,0,1)) & = & (0,-1) & = & 0 \times (1,0) - 1 \times (0,1). \end{array}$$

Alors,

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. *Soit l'endomorphisme*

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 2XP''. \end{array}$$

La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ *est* $B = \{1, X, X^2, X^3\}$. *Alors*

$$g(1) = 0, \quad g(X) = 0, \quad g(X^2) = 4X \quad \textit{et} \quad g(X^3) = 12X^2,$$

donc

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.2.1. **1.** *Si* $E = F$, *on prend la même base* $B = B'$ *et on écrit* $M_B(f)$,

2. *Les éléments d'une matrice peuvent être : des nombres complexes, des fonctions, des symboles,*

3. $\dim(E) =$ *nombre de colonnes de la matrice*, $\dim(F) =$ *nombre de lignes de la matrice,*

4. $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *est l'ensemble des matrices à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *de taille* $n \times m$,

5. *Si* $n = m$, *on parle de matrices carrées de taille* n,

6. *On parle de matrice ligne ou vecteur ligne si* $n = 1$ *et de vecteur colonne si* $m = 1$,

7. *La matrice dont tous les éléments sont égaux à* 0 *est la matrice nulle.*

Exemple 3.2.2. **1.** $A = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1 - 1/2i & -2 + i \end{pmatrix}$ *est une matrice carrée de taille* 2 *à coefficients dans* $\mathbb{C}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & e \\ 0 & -2 & 3\pi \end{pmatrix}$ *est une matrice de taille* 2×3 *à coefficients dans* $\mathbb{R}$.

3. $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *est un vecteur colonne,* $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *est un vecteur ligne.*

Définition 3.2.2. *Deux matrices* A *et* B *sont égales lorsqu'elles ont la même dimension et que pour chaque ligne* i *et chaque colonne* j, *l'élément* $a_{i,j}$ *de la matrice* A *est égal à l'élément* $b_{i,j}$ *de la matrice* B.

Théorème 3.2.1. *Pour toute matrice* A, *il existe une et une seule application linéaire* f *de* E *dans* F *telle que* $M_{B,B'}(f) = A$. *On dit application linéaire associée à* A *relativement aux bases* B *et* B'.

3.3 Opérations sur les matrices

3.3.1 Somme de deux matrices

Définition 3.3.1. *(Somme de deux matrices).*
Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On appelle somme de A et B et on note $A + B$, la matrice $C = (c_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dont les termes sont,

$$(a_{ij} + b_{ij}).$$

Exemple 3.3.1. ***1.*** *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, *alors*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & 0-1 & -3+2 & 2-6 \\ -1+0 & 1+3 & -2+1 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. *Si* $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 11 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$, *alors $A + B$ n'est pas définie.*

Propriétés 3.3.1. *Propriétés sur la somme :*

- *La somme matricielle est commutative et associative,*

$$A + B = B + A, \quad A + (B + C) = (A + B) + C.$$

- *La matrice nulle est l'élément neutre de l'addition. L'opposé de A est la matrice $-A = (-a_{ij})$.*
- *La soustraction matricielle de deux matrice est $A - B = a_{ij} - b_{ij}$.*

3.3.2 Produit Matricielle

Définition 3.3.2. *(Multiplication d'une matrice par un scalaire)*
On appelle produit du nombre λ par la matrice A la matrice, notée $\lambda(A)$, dont les termes sont ceux de A multipliés par λ. Tel que, $\lambda(A) = (\lambda a_{ij})$.

Exemple 3.3.2. *Si* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, *alors* $\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times a & \frac{1}{2} \times b & \frac{1}{2} \times c \\ \frac{1}{2} \times d & \frac{1}{2} \times e & \frac{1}{2} \times f \end{pmatrix}.$

Propriétés 3.3.2. *Propriétés*

Soient A et B deux matrices de même taille et soient α et λ deux scalaires. On a

1. $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A.$

2. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$

3. $\alpha(\lambda A) = (\alpha\lambda)A.$

3. $(-1)A = -A, \ \ \lambda \times 0 = 0.$

Définition 3.3.3. *(Produit de deux matrices)*

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. On appelle produit de A et B, et on note AB, la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Définition 3.3.4. *(Vue d'espace vectoriel)*

Muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension nm. La base canonique de tel espace est les matrices dont un des termes est égal à 1 et les autres sont nuls.

Exemple 3.3.3. *La base canonique le l'ensemble des matrice de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est,*

$$B_A = \{e_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$$

Le produit de chaque ligne de A par chaque colonne de B s'effectue de la manière suivante,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{1,j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{1,p} \end{pmatrix}$$

Dans un produit de deux matrices le nombre de colonne de A doit égale au nombre de lignes de B. Une manière de représenter un produit matricielle est donnée comme suit,

$$\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & b_{k,j} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,m} \end{pmatrix} \\ A & C = AB \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,k} & \cdots & c_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & c_{i,j} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,k} & \cdots & c_{n,m} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 3.3.4. *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & i \\ -2 & 1-i & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comme A et B sont bien représentés, alors

$$AB = \begin{pmatrix} 5+i & 7+2i & -5+3i & -15+4i \\ 4-2i & -2i & -6+2i & 2+4i \\ -1 & 3 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.3.1. 1. *la multiplication est toujours possible entre matrices carrées du même ordre.*

2. *La multiplication matricielle n'est pas une opération commutative $AB \neq BA$, voir l'exemple en dessous.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés 3.3.3. *Propriétés sur le produit*

- *la multiplication matricielle est une opération associative,*

$$A(BC) = (AB)C.$$

- *la multiplication matricielle est une opération distributive,*

$$A(B+C) = AB + AC.$$

$$(B+C) = BA + CA.$$

- *Pour tout* $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, $(\alpha\lambda)(AB) = (\alpha\lambda)AB.$

Exemple 3.3.5. *Considérons les applications*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(0)) \end{array} \quad et \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x, 2y). \end{array}$$

On a $B = \{1, X, X^2, X^3\}$, $B' = \{(1,0),(0,1)\}$ *et* $B'' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *les bases canoniques des* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels respectivement. On a*

$$f(1) = (1,0), \quad f(X) = (1,1), \quad f(X^2) = (1,0), \quad f(X^3) = (1,0),$$

$$g(1,0) = (1,1,0), \quad g(0,1) = (1,0,2),$$

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad M_{B',B''}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M_{B,B''}(g \circ f) = M_{B',B''}(g) M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.3.5. *(Puissances)*
le produit $AA \ldots A$ *(k facteurs) est désigné par* A^k *et appelé puissance k-ième de* A*. Tel que*

$$A^k A^l = A^{k+l} \quad et \quad (A^k)^l = A^{k+l}.$$

Par convention, $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ *est la matrice identité.*

Définition 3.3.6. *(Matrice nilpotente)*
D'une manière générale, on appelle matrice nilpotente toute matrice carrée A telle que $A^k = 0$ pour un entier positif k.

Exemple 3.3.6. *La matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est nilpotente car,*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Matrice transposée

Définition 3.3.7. *(Matrice transposée)*
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. La transposée de la matrice A, notée A^t, est la matrice dont l'entrée a_{ij} est a_{ji}.

Exemple 3.3.7.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.3.1. *(Propriétés de la transposition)*
Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \lambda \in \mathbb{K}$,

1. ${}^t(\alpha A + \lambda B) = \alpha\ A^t + \lambda\ {}^tB$.
2. ${}^t(A^t) = A$.
3. *Pour tous $C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$:* ${}^t(AC) = {}^tCA^t$.
4. *Pour tous k entier :* $(A^t)^k =^t (A^k)$.

Définition 3.3.8. *(Matrice symétrique)*
Une matrice carrée A est symétrique si $A^t = A$.

Exemple 3.3.8. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, *et* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
On a $A = A^t$, Donc A est symétrique.

Théorème 3.3.2. *(Propriétés de la symétrie)*
Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \lambda \in \mathbb{K}$,

1. *Si A est matrice carrée, alors $A + A^t$ est une matrice symétrique.*
2. *Soit A une matrice quelconque, alors AA^t et AA^t sont symétriques.*

Définition 3.3.9. *(Matrices semblables)*
Deux matrices carrées A et B d'ordre n sont dites semblables si il existe une matrice inversible P d'ordre n, telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Remarque 3.3.2. *Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.*

3.4 Déterminant

3.4.1 Déterminant d'une matrice carrées

Définition 3.4.1. *(Déterminant)*
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A et on note $\det(A)$ ou $|A|$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}|.$$

Où A_{1j} est la sous-matrice obtenue en supprimant la première ligne et la j^{ime} colonne de A.

Exemple 3.4.1.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+1} a|(A_{1j}| = a \det |A_{11}| - b|A_{12}| + c|A_{13}| \\
&= a \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}, \\
&= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge), \\
&= aei + bgf + cdh - ahf - bdi - cge.
\end{aligned}$$

Propriétés 3.4.1. **1.** *Si une ligne (ou colonne) d'un matrice A est nul alors $\det(A) = 0$.*

2. *Si deux lignes (ou deux colonnes) forment une combinaison linéaire alors le déterminant est nul.*

3. *Le déterminant change de signe si deux lignes (ou colonnes) sont échangées.*

4. *Le déterminant reste inchangé si un multiple constant d'une ligne est ajouté à une autre ligne. Il sera de même pour les colonnes.*

5. *Si on fixe la ligne (colonne) et on ajoute autant de fois les éléments correspondants d'une autre ligne (colonne), la valeur du déterminant reste inchangée.*

Définition 3.4.2. *La matrice A est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0, i > j$. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure.*

Exemple 3.4.2. *On a*

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

puisque $\quad C_1 = -2C_2 + C_3.$

Définition 3.4.3. *La trace de A est défini comme*

$$trA = a_{11} + \ldots + a_{nn}.$$

Où les éléments a_{ii} constituent le diagonal de la matrice.

Exemple 3.4.3. *La trace de la matrice*

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{est} \;\; trA = -1 - 1 + 2 = 0.$$

Le déterminant joue un rôle crucial dans de nombreuses opérations matricielles. Il permet de caractériser certaines propriétés importantes de la matrice, telles que son inversibilité ou son rang. Voici un théorème qui présente les différents propriétés d'un déterminant.

Théorème 3.4.1. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a*

1. $\det(A) = \det(\,A^t)$.
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. *A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.
5. *Si A est inversible, alors* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

3.4.2 Opérations élémentaires sur une matrice

Les opérations élémentaires sur une matrice A sont,

- Échanger deux lignes (resp. deux colonnes) de A.
- Multiplier une ligne (resp. colonne) de A par un scalaire non nul.
- Ajouter ou soustraire un multiple d'une ligne (resp. colonne) à une autre ligne (resp. colonne) de A.

Définition 3.4.4. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on dit que B est équivalente en ligne à A si B peut être obtenu à partir de A par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.*

Règle de calcul 3.4.1. *(règle de Sarrus)*
La règle de Sarrus est une méthode pratique pour calculer le déterminant d'une matrice 3×3*. Elle est souvent utilisée car elle permet d'effectuer le calcul rapidement sans avoir recours à des formules plus générales. Voici comment elle fonctionne :*

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

Ensuite, nous additionnons les produits diagonaux allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit, et nous soustrayons les produits diagonaux allant du coin supérieur droit au coin inférieur gauche,

$$det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Interprétation du determinant
L déterminant est qu'il représente le volume (ou l'aire dans le cas des matrices $2x2$) du parallélépipède engendré par les vecteurs colonnes de la matrice. En d'autres termes, le déterminant mesure le volume de la région de l'espace définie par les vecteurs de base de l'espace vectoriel.

— Un déterminant positif conserve le sens de l'orientation.
— Un déterminant nul indique que la transformation linéaire écrase le volume en un espace de dimension inférieure.
— Un déterminant négatif inverse le sens de l'orientation.

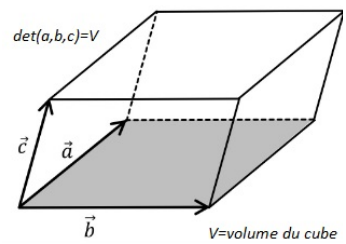

FIGURE 3.2 – Interprétation du déterminant.

3.5 Rang d'une matrice

Définition 3.5.1. *(Rang d'une matrice)*
Le rang de la matrice A*, noté* $\mathrm{rg}\, A$*, est la dimension de sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$ *engendré par ses vecteurs colonnes. Autrement dit est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants parmi ses vecteurs colonnes (ou lignes).*

Remarque 3.5.1. *Le rang d'une matrice est toujours inférieur ou égal au nombre minimum de lignes et de colonnes de la matrice.*

Exemple 3.5.1. *Considérons la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\begin{cases} -\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 0\gamma = 0 \\ 0\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0),$$

alors $\dim \mathrm{Vect}\{(-1, 1, 0), (4, 1, -2), (1, 0, 1)\} = 3$*. Donc* $\mathrm{rg}(A) = 3$*.*

Règle de calcul 3.5.1. *Les opérations élémentaires transforment une matrice A en une matrice de même rang que A.*

Exemple 3.5.2. *On a*

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \longrightarrow L_2 + L_1 \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad L_3 \longrightarrow 5L_2 + L_1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

On voit bien que tous les lines et même les colonnes sont L.I.

Une autre façon : det$(A) = -7 \neq 0$*, alors* $\mathrm{rg}\, A = 3$*.*

Théorème 3.5.1. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B une matrice de $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, on a*

$$\mathrm{rg}(AB) \leq \inf(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B).$$

Théorème 3.5.2. *Une matrice et sa transposée ont le même rang.*

3.6 Matrice inversible

Définition 3.6.1. *(Matrice identité)*
La matrice carrée

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice identité.

Définition 3.6.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, On appel B une matrice inversible s'elle vérifié,*

$$AB = BA = I_n.$$

Théorème 3.6.1. *(Unicité de l'inverse)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, alors il existe une seule matrice A^{-1} telle que,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Démonstration. Par définition A est inversible,alors qu'il existe une matrice B telle que

$$AB = BA = I.$$

Supposons qu'il existe une deuxième matrice vérifiant,

$$AC = CA = I.$$

Maintenant, on va prouver que $B = C$?

Par multiplication à gauche de l'égalité $AC = I$, on aura $BAC = BI$
Par multiplication à droite de l'égalité $AC = I$, on aura $ACB = IB$

Cala indique que $BAC = B = ACB$, et comme $BA = I$ on a donc $B = C$. □

Exemple 3.6.1. *La matrice* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ *est inversible et son inverse est la matrice* $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$*, puisque,*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer l'inverse d'une matrice A d'ordre n, on effectue des opérations élémentaires en ligne sur A et I simultanément en construisant une *matrice augmentée*

$$[A|I] \to [I|A^{-1}].$$

Ce procédé s'appel l'élimination de Gauss-Jordan qui s'effectué sur la matrice augmentée $[A|I]$ de taille $n \times 2n$. On applique à cette matrice augmentée des transformations élémentaires sur lignes de sorte que les n premières colonnes se transforment en I_n, dès lors les n dernières colonnes transformée forment la matrice inverse de A.

Exemple 3.6.2. *Calculons l'inverse de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.
Les transformations élémentaires effectuées sur la matrice augmentée sont,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \longrightarrow \tfrac{-1}{2} L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \longleftrightarrow L_3 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \longrightarrow L_2 + 3L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{-3}{2} & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right),$$

donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & \frac{-3}{2} & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.6.2. *(Propriétés)*

1. *Si A est inversible, alors son inverse est unique.*
2. *Si A est inversible, alors A^{-1} est aussi inversible et on a $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.*
3. *Si A et B deux matrice inversibles de même taille, alors AB est inversible et on a*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4. *Si A est inversible, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A^k est inversible et on a $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.*
5. *Si A est inversible, alors A^t est inversible et on a $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*
6. *Si A est inversible et c un scalaire non nul, alors cA est inversible et $(cA){-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.*

Démonstration. On donne ici quelques preuves, le reste sera laissé aux étudiants.

3. Par définition $(AB)(BA)^{-1} = I$.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Donc,

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

4. Par induction,

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{k+1} = (A^{-1})^k A^{-1} &= (A^k)^{-1}A^{-1}, \\ &= (AA^k)^{-1}, \\ &= (A^{k+1})^{-1}.\end{aligned}$$

□

Définition 3.6.3. *Si A est inversible et n un entier, alors A^{-n} est définie par,*

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}.$$

Définition 3.6.4. *(Groupe linéaire)*
Le groupe des matrices inversibles $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est un groupe linéaire de degré n sur $\mathbb{K}$, noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Théorème 3.6.3. *(Structure d'anneau)*
La structure $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ représente un anneau dont l'élément neutre pour la multiplication est la matrice identité I_n.

3.6.1 Inversibilité et Déterminant

L'inversibilité d'une matrice et le déterminant sont étroitement liés. Comme on a expliqué dans la section du déterminant qu'il représente un certain volume formé par les vecteurs colonnes de la matrice en question. cela implique que si le déterminant est nul, cela signifie que l'espace est complètement aplati dans au moins une direction, ce qui rend impossible l'inversion de l'application linéaire.

Théorème 3.6.4. *(L'inversibilité)*
Une matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Démonstration. 1. $\Rightarrow$) Par définition, A est inversible, cela signifie que 'il existe une matrice $AB = BA = I$,
Alors,

$$det(AB) = det(A)det(B) = det(I) = 1,$$

Donc, $det(A) \neq 0$.

2. $\Leftarrow$) Par contradiction. Supposons que $det(A) = 0$, cela signifie que les vecteurs colonnes formants la matrice sont pas linéairement indépendants.
alors, l'inversion de l'application linéaire est impossible et la matrice A associée n'est pas inversible. □

Exemple 3.6.3. **1.** *La matrice* $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ *est inversible puisque* $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

2. *En outre* $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 9 \\ 2 & -5 & -10 \end{vmatrix} = 0$ *cela signifie* $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 9 \\ 2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$ *n'est pas inversible.*

Définition 3.6.5. *Une matrice triangulaire est une matrice carrée dans laquelle tous les éléments situés au-dessus ou en dessous de la diagonale principale sont nuls. Le déterminant de cette matrice est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

3.6.1.1 Méthode de Cramer

La méthode utilise les déterminants et principalement utilisée pour les petites matrices en raison de sa complexité des calculs.

Définition 3.6.6. *(Comatrice d'une matrice)*
On appelle cofacteur associé à a_{ij} de A, le nombre $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$. *tous les cofacteurs La forment la comatrice de A, noté* $\mathrm{com}(A)$.

Exemple 3.6.4. *La comatrice de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *est*

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \\ -3 & -23 & -5 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.6.5. *Si A est une matrice inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{com}(A)^t.$$

Exemple 3.6.5. *Soit la matrice précédente* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice B est inversible, puisque $\det(A) = 18 \neq 0$.
Par conséquent,

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -25 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Observons que la connaissance du rang fournit le critère d'inversibilité suivant :

Théorème 3.6.6. *(Rang et inversibilité)*
Une matrice de A est inversible si et seulement si son rang est n.

Exemple 3.6.6. *Soit* $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Comme* $\mathrm{rg}(A) = 3$*, alors A est inversible.*

3.7 Interprétations des Matrices

Interprétation des Matrices porte un grand intérêt puisque elle nous facilite la résolution des problèmes géométriques. On peut citer,

1. Matrice et espace vectoriel : Une matrice peut représenter un changement de base dans un espace vectoriel. Les colonnes de la matrice sont les coordonnées des vecteurs de

base de la nouvelle base exprimées dans l'ancienne base. La relation entre les coordonnées de u dans les bases B et u' dans la base B' est donnée par,

$$u = P \cdot u',$$

où P est la matrice de passage de B à B'.

2. Application linéaire : Chaque colonne de la matrice représente la façon dont un vecteur de base est transformé par l'application linéaire.
   — Soient $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications linéaires, B et B' des bases de E et F respectivement. Alors on a

   $$M_{B,B'}(f+g) = M_{B,B'}(f) + M_{B,B'}(g).$$

   — Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires, B et B' et B'' des bases de E, F et G respectivement. Alors on a

   $$M_{B,B''}(g \circ f) = M_{B',B''}(g) M_{B,B'}(f).$$

3. Graphe : Les matrices d'adjacence et d'incidence sont largement utilisées pour représenter des graphes et des réseaux. Chaque élément de ces matrices indique la présence ou l'absence d'une arête ou d'une liaison entre deux nœuds ou sommets.

Chapitre 4

Systèmes d'équations linéaires

4.1 Introduction

Al-Khwarizmi (IXe siècle), a contribué à la formalisation de l'algèbre et à la résolution de systèmes d'équations. Au $XIIIe$ siècle, Leonardo Fibonacci a introduit la méthode de substitution pour résoudre des systèmes d'équations. Ensuite plus tard le développement de l'Algèbre linéaire a permis une meilleure compréhension et une généralisation des systèmes d'équations linéaires. Les méthodes de résolution ont été développées au fil de temps de la façons suivante : *Méthodes d'élimination, Méthode de substitution, Règle de Cramer, Méthode d'élimination gaussienne et enfin des Algorithmes numériques (Jacobi, Gauus-Seidel,...).*

Les systèmes linéaires forment une partie importante dans l'algèbre linéaire. En applications des mathématiques, on rencontre souvent des systèmes de très grande taille. Il est donc primordiale de savoir comment résoudre de tels systèmes.
Une équation linéaire sur le corps $\mathbb{R}$, est donnée par l'expression,

$$a_1x_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

les x_i sont les indéterminées (ou inconnues ou variables). Les scalaires a_i sont appelés les coefficients des x_i, et b est le terme constant.

4.2 Définitions et propriétés

Définition 4.2.1. *On appelle système de m équation linéaire à n inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$, tout système de la forme :*

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

où les $(x_j)_{1\leq j\leq n}$ sont les inconnues et les $(a_{ij})_{1\leq i\leq m 1\leq j\leq n}$, $b_j \in \mathbb{K}$.

Remarque 4.2.1. — *$AX = B$ est dit l'écriture matricielle du système (S).*

— *On dira que le système est **homogène** lorsque les données b_i sont nulles pour $i = \overline{1, m}$.*

— *Le rang du système linéaire $AX = B$ est le rang de A.*

4.2.1 Étapes de résolution

Les systèmes sont équivalents si et seulement si ils ont le même ensemble de solutions. Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire :

1. En multipliant une équation par une constante non nulle,
2. En ajoutant à une équation une combinaison linéaire des autres,
3. En permutant des équations,
4. En permutant des inconnues, mais en conservant leurs coefficients respectifs.

Remarque 4.2.2. *l'inconnue X n'intervient pas dans les calculs, sauf si l'on est conduit à permuter les éléments de $(x_1, \ldots, x_p)$.*

Exemple 4.2.1. ***1.*** *Le système*

$$\begin{cases} x - 3y + z + 2t & = & 1 \\ x + z + 4t & = & \frac{1}{2} \\ x + y & = & 11 \end{cases}$$

est un système de trois équations linéaires et de quatre inconnues. L'écriture matricielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 11 \end{pmatrix}.$$

2. *Le système*

$$\begin{cases} -x^2 - y & = & 9 \\ y^2 & = & -2 \end{cases}$$

n'est pas un système d'équations linéaires.

Définition 4.2.2. *(Solution d'un système)*
Une solution de (S) consiste à trouver un vecteur x tel que toutes les équations soient satisfaites simultanément. L'ensemble des solutions est appelé solution générale du système.

Exemple 4.2.2. *Considérons dans $\mathbb{R}$ le système*

$$\begin{cases} 5x - 2y + z &= 2 \\ -2x + y + z &= 2 \end{cases} \tag{4.1}$$

le triplet $(0,0,2)$ est une solution du système (4.1), par contre le triplet $(0,0,1)$ n'est pas une solution de (4.1). L'ensemble des solutions du système (4.1) est :

$$\{(20 - 15z, 10 - 5z, 5z), z \in \mathbb{R}\}.$$

4.3 Résolution par la méthode de Cramer

La méthode de Cramer est une méthode de résolution de systèmes d'équations linéaires à l'aide des déterminants. Cette méthode est applicable lorsque le système d'équations est carré (autant d'équations que d'inconnues) et lorsque le déterminant de la matrice des coefficients est non nul.

Exemple 4.3.1. *Le système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 2 \\ -x - 3z &= -4 \end{cases}$$

est de Cramer, car $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$

Théorème 4.3.1. *Soient (S) un système de Cramer et A sa matrice associé. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de A et B le vecteur colonne du second membre. (S) admet une solution unique $(x_1, \ldots, x_n)$ donnée par :*

$$x_i = \frac{\det(C_1, \cdot, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \cdot, C_n)}{\det(A)}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Exemple 4.3.2. *Soit le système :*

$$(S) \begin{cases} 2x + y + 3z &= 1 \\ 6x + 2y &= 1 \\ -x - 2y + 2z &= 1 \end{cases}$$

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Puisque* $\det(A) = -34$, *alors* (S) *est de Cramer et sa solution unique est donnée par :*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{-34} = -10, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-34} = 13 \quad et \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-34} = -9.$$

4.4 Résolution par la méthode de Gauss

La méthode de Gauss, également connue sous le nom d'élimination de Gauss, est une technique courante pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Du la matrice augmentée à la solution finale en passant par la forme réduite, ainsi la méthode procède. Elle est généralement préférée pour les grands systèmes car elle peut être programmée de manière efficace. La méthode de Gauss consiste à transformer un système linaire

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

en un système équivalent (ayant les mêmes solutions) dits **échelonnés**, dont la résolution est simple.

Définition 4.4.1. *Transformer un système linéaire donné par des opérations élémentaires sur les lignes ne modifie pas l'ensemble de ses solutions.*

Théorème 4.4.1. *Si* A *et* B *sont des matrices de* $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *équivalentes en ligne, les systèmes homogènes d'équations linéaires* $AX = 0$ *et* $BX = 0$ *ont exactement les mêmes solutions.*

La mise en œuvre de la méthode de Gauss peut être résumée an ces deux principales étapes.

— **Premièrement :** Échanger les équations de telle sorte que la première inconnue x_1 ait un coefficient non nul dans la première équation, ainsi $a_1 \neq 0$.

— **Deuxièmement :** Pour chaque $i > 1$, appliquer

$$L_i \to -a_{i1}L_1 + a_{11}Li,$$

Ce sont les systèmes pour lesquels tous les coefficients sous la diagonale sont nuls, écrit sous la forme :

$$(S') \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & a'_{13}x_3 & + & \cdots & + & a'_{1r}x_r & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_3 & + & \cdots & + & a'_{2r}x_r & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & & & a'_{33}x_3 & + & \cdots & + & a'_{3r}x_r & + & \cdots & + & a'_{3n}x_n & = & b'_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a'_{rr}x_r & + & \cdots & + & a'_{rn}x_n & = & b'_r \\ & & & & & & & & & & & & 0x_n & = & b'_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & 0x_n & = & b'_m \end{array} \right.$$

Exemple 4.4.1. *Réduisons le système suivant,*

$$\begin{aligned} 2x+y-2z+3t &= 1 \\ 3x+2y-z+2t &= 4 \\ x+3y+3z-3t &= 5. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+y-2z+3t &= 1 \\ y+4z-5t &= 5 \\ 3y+12z-15t &= 7. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+y-2z+3t &= 1 \\ y+4z-5t &= 5 \\ 0 &= -8. \end{aligned}$$

Le système initial est impossible et donc n'a aucune solution.

D'un point de vu matricielle. Le système (S) est représenté par la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}.$$

Et le système (S') est représenté par la matrice échelonnée,

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & \cdots & a'_{1p} & | & b'_1 \\ & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & \cdots & a'_{2p} & | & b'_2 \\ \vdots & & & \vdots & & & | & \vdots \\ 0 & \cdot & & a'_{rr} & \cdots & a'_{rp} & | & b'_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & | & b'_{r+1} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & | & b'_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.4.2. *La résolution du système revient à échelonner la matrice associée au système,*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & | & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & | & 5 \end{pmatrix}$$

$L_2 \to 3L_1 - 2L_2, \quad L_3 \to 3L_1 - 2L_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & | & 5 \\ 0 & 3 & 12 & -15 & | & 7 \end{pmatrix}$$

$L_3 \to L_3 - 3L_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -8 \end{pmatrix}.$$

Le système initial est impossible et donc n'a aucune solution.

Théorème 4.4.2. *Dans un système réduit à une forme échelonnée, on peut distinguer deux cas :*

1. $m = n$ *: il y a autant d'équations que d'inconnues. Le système admet alors une solution unique.*
2. $m < n$ *: il y a moins d'équations que d'inconnues. on attribue alors arbitrairement des valeurs aux* $n - m$ *inconnues libres et on obtient une solution du système.*

Exemple 4.4.3. 1. *Réduisons le système suivant,*

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13 \\ 2x + 6y + 2z &= 22. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y - 2z + 3t &= 1 \\ y + 4z &= 7 \\ y + 2z &= 5 \\ 2y + 8z &= 14 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y - 2z + 3t &= 1 \\ y + 4z &= 7 \\ 2z &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi le triplet $(1, 3, 1)$ *est la solution unique du système.*

2. *Réduisons le système suivant,*

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z + 3t &= 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4t &= 5 \\ 5x + lOy - 8z + llt &= 12 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y - 2z + 3t &= 2 \\ z - 2t &= 1 \\ 2z - 4t &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y - 2z + 3t &= 2 \\ z - 2t &= 1 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de solution est $\{(-2y + t + 4, y, 2t + 1, t); \;\; y, t \in \mathbb{R}\}$.
Ainsi le triplet $(9, -2, 3, 1)$ *est une solution du système.*

4.4.1 Intersection de deux plans affines de l'espace

Soient deux plans affines de l'espace définis par les deux équations,

$$a_1 X + b_1 y + c_1 z = d_1, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2.$$

— Ou ces deux plans sont parallèles : ils sont confondus si et seulement si leurs équations sont proportionnelles.
— Ou leur intersection est une droite.

4.4.2 Intersection de trois plans affines de l'espace

Étant donnés les plans de l'espace P_1, P_2, P_3 d'équations respectives,

$$a_1X + b_1y + c_1z = d_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \quad a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

Soient,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{'} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & | \, d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & | \, d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & | \, d_3 \end{pmatrix}$$

- Ou bien la matrice A est de rang 1 et les plans sont parallèles : ils sont confondus si et seulement si la matrice A' est également de rang 1.
- Ou bien la matrice A est de rang 2, dans ce cas :
  — Si la matrice A' est de rang 2, les plans se coupent suivant une droite ,
  — Si la matrice A' est de rang 3, l'intersection des plans est vide : mais au moins deux des plans se coupent suivant une droite parallèle au troisième.
- Ou bien la matrice A est de rang 3 : l'intersection des plans est réduite à un point.

Conclusion

L'algèbre linéaire constitue le langage universel de l'analyse des structures et des relations linéaires omniprésentes dans de nombreux domaines scientifiques et techniques. Elle est essentielle dans des domaines aussi variés : Algorithmes de traitement du signal, Modèles de machine learning, la simulation de systèmes dynamiques et la conception de circuits électriques. Aussi, sa puissance consiste dans le traitement des systèmes complexes qui reflètent le monde qui nous entour.

L'intelligence artificielle dont le monde parle actuellement, utilise l'algèbre en générale et l'algèbre linéaire en particulier pour bien analyser et manipuler des données massives de manière efficace. De la compréhension des espaces vectoriels et les applications linéaires à l'étude des systèmes d'équations linéaires en passant par les reductions d'endomorphism, ainsi l'algèbre linéaire est structuré pour ce niveau d'étude.

Pour simplifier l'étude des applications linéaires sur un espace vectoriel. La réduction d'endomorphismes est une technique largement utilisée en algèbre linéaire. C'est le sujet à traiter pour le prochain cycle d'étude.

Bibliographie

[1] C. Antonini, *Algèbre*, De Boeck, Bruxelles, 2015.

[2] E. Azoulay et J. Avignant, *Mathématiques. Tome4, Algèbre*, McGraw-Hill, Paris, 1984.

[3] T. S. Blyth and E. F. Robertson, *Basic linear Algebra*, Springer-Verlag, London, 2002.

[4] C. Dufetrelle et V. Gaggioli, *Algèbre linéaire en dimension finie*, Vuibert, Paris, 1997.

[5] R. Dupont, *Algèbre linéaire : rappels de cours et exercices*, Vuibert, Paris, 1992.

[6] J. P. Escofier, *Toute l'algèbre de la licence : cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 2006.

[7] D. Étienne, *Exercices corrigés d'algèbre linéaire, Tome 1*, De Boeck, Bruxelles, 2006.

[8] D. C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, 5 ed, Pearson Education, Inc. 2021.

[9] S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 1 ed, Pearson Education, Inc. 2002.

[10] S. Lipschutz, *Algèbre linéaire, Coure est problème*, McGraw-Hill Inc, New York, 1973.

[11] H. Roudier, *Algèbre linéaire, cours et exercices*, Vuibert, Paris, 2008.