



N° Réf :.....

**Centre Universitaire
Abde lhafid Boussouf Mila**

Institut mathématique et informatique

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme
de Master en: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques appliquées**

**Méthode de support pour la résolution d'un problème de
contrôle optimal linéaire quadratique avec contraintes
intermédiaires**

Préparé par :

MOUZA Manel
CHELLOUG Cheyma

Devant le jury

BOUFELGHA Ibrahim	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
AZI Mourad	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
BAZANIAR Ebdlghafour	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire :2023/2024

Dédicace *MOUZA Manel*

Je dédie ce modeste travail qui est le fruit de plusieurs années d'étude à :

A ma très chère mère, la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur , ma vie et mon bonheur, **CHEBENA Hakima** que j'adore et que je ne cesse de la remercier pour tout ce qu'elle m'a donné, qu'Allah la récompense pour tous ces bienfaits.

A mon très chère papa, l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral, source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, **MOUZA Messaoude** qu'Allah lui procure bonne santé et longue vie.

A mes très chère frères Ali, Amira et Khadija, qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité, que Dieu vous garde.

Sans oublier les petits Eline, Adem, Anes et Ritel.

A mon fiancé Nazim, qui m'a toujours soutenu dans les moments difficiles et pour ses sacrifices et ses encouragements.

A mon proche amie BOUDEGHA Fatima.

A mon binôme CHELLOUG Cheyma.

A tous ceux qui m'ont enseigné tout le long de ma vie scolaire, et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce travail soit possible .

Dédicace *CHELLOUG Cheyma*

Je dédie ce modeste travail qui est le fruit de plusieurs années d'étude à :

A mon très chère papa, qui m'a toujours soutenu dans les moments difficiles et pour ses sacrifices et ses encouragements, que son âme repose en paix.

A ma très chère mère, mon profond amour, aucune dédicace ne saurait être assez éloquent pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis ma naissance, merci maman.

A mes très chères sœurs Ouiem, Rokia et Kaouthar, qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité, que Dieu vous garde.

Sans oublier les petits Mimi, Sidra, Abd arahman et Larnine.

A mon frère Yassine et sa famille.

A mon fiancé Adem.

Mes tantes, oncles, cousins et cousines.

A mon chère binôme MOUZA Manel.

A toutes mes amies, chacune de son nom.

A tous ceux qui m'ont fait apprendre une lettre et grâce à eux je suis arrivée à la réalisation de mon rêve.

Remerciements

"Celui qui ne remercie pas les gens, ne remercie pas Allah"

Le prophète Mohammed

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nous avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Ce travail n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Dr AZI Mourad**, on le remercie pour son encadrement exceptionnel, et pour sa patience et sa disponibilité.

Nos remerciements s'adressent également à tous les membres de jury **Dr BOUFELGHA Ibrahim et Dr BAZANIAR Abdelghafour**, et nous tenons à exprimer notre profonde gratitude pour votre bienveillance.

Nous devons remercier aussi tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Nos remerciements vont également à tous les enseignants qui ont assuré notre formation.

Nous remercions tous les amis.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة طريقة الداعم لحل مسألة التحكم الأمثل الخطي التريبيعي مع قيود في لحظات وسطية، قمنا بعرض بعض الجوانب المتعلقة بالصياغة الرياضية و عرض الشروط الضرورية و الكافية لتحقيق التحكم الأمثل بدون قيود و مع قيود. بعد ذلك قمنا بدراسة مسألة التحكم الأمثل الخطي التريبيعي، حيث تم وضع خوارزمية على أساس مفهوم الداعم. في النهاية قمنا بدراسة تعميمية لمسألة التحكم الأمثل الخطي التريبيعي بفرض قيود في أزمنة وسطية. وتستند هذه الطريقة إلى ثلاثة مراحل أساسية : تغيير التحكم، تغيير الداعم و المرحلة النهائية.

الكلمات المفتاحية :

التحكم الأمثل، خطي تريبيعي، طريقة الداعم، قيود في أزمنة وسطية.

Abstract

The objective of this work is to study the support method for solving a linear quadratic optimal control problem with intermediate constraints.

We interested on the optimal control problem. After presenting some aspects of the mathematical formulation of optimal control problems, and the necessary and sufficient optimality conditions for an optimal control problem without and with constraints. We presented an algorithm for solving a linear quadratic optimal control problem. After that, we studied a generalization of the linear quadratic optimal control problem by imposing constraints on the state at intermediates moments. This method is based on three essential procedures : control transformation, change of support and finishing procedure.

Key Words : Optimal control,linear-Quadratic, Support method, Intermediate constraints.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier la méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire quadratique avec contrainte intermédiaires. Après avoir présenté quelques aspects de la formulation mathématique des problèmes de contrôle optimal et les conditions nécessaires d'optimalité et celle suffisantes pour un problème de contrôle optimal sans et avec contraintes. Nous avons élaboré un algorithme de résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire quadratique, l'algorithme étudié est construit sur la base du concept du support. Par la suite, nous avons présenté une généralisation du problème de contrôle optimal linéaire quadratique en imposant des contraintes sur l'état aux instants intermédiaires. Cette méthode se base sur trois procédures essentielles : changement du contrôle, changement du support et procédure finale.

Mots Clés : Contrôle optimal, Linéaire quadratique, Méthode de support, Contraintes intermédiaires.

Table des matières

Introduction Générale	1
1 Rappels sur la théorie du contrôle optimal	3
1.1 Historique	4
1.2 Formulation mathématique d'un problème de contrôle optimal	7
1.2.1 Système de contrôle	7
1.3 Problème de contrôle optimal	11
1.3.1 Les classes de problèmes de contrôle optimal	12
1.4 Principe du maximum de Pontriaguine	13
1.4.1 Principe du maximum de Pontriaguine sans contraintes sur l'état	13
1.4.2 Principe du maximum de Pontriaguine avec contraintes sur l'état	15
1.5 Contrôle optimal d'un système dynamique avec contraintes intermédiaires	17
1.5.1 Principe du maximum d'un problème avec contraintes intermédiaires	18
2 Méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire quadratique	20
2.1 Position du problème et définitions	20
2.2 Critère d'optimalité et estimation de suboptimalité	22
2.2.1 Critère d'optimalité	23
2.2.2 Estimation de suboptimalité	23
2.3 Algorithme de la méthode	24
2.3.1 Changement de Contrôle	24
2.3.2 Changement de Support	25
2.3.3 Procédure Finale	28
2.4 Exemple numérique	29

3	Méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire quadratique avec contraintes intermédiaires	37
3.1	Position du problème	37
3.2	Critère d'optimalité	40
3.2.1	Algorithme de la méthode	42
3.3	Exemple numérique	46
	Conclusion générale	52

Table des figures

1.1	Commande en boucle ouverte	8
1.2	Commande en boucle fermée	8

Liste des tableaux

Introduction Générale

L'objectif d'un problème de contrôle est d'amener un système d'un état initial à un certain état final en respectant certaines contraintes. Cette théorie est appliquée dans de nombreux domaines des sciences, notamment l'ingénierie, la physique, la biologie, l'économie et la finance.

D'un point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. La théorie du contrôle optimal est un domaine des mathématiques appliquées, développé de façon à contrôler les systèmes dynamiques d'une manière optimale.

Plusieurs méthodes numériques performantes de résolution des problèmes de contrôle optimal ont vu le jour dans les années 1980, parmi ces méthodes, on distingue la méthode développée par [15], qui consiste comme toute méthode numérique en optimisation, à faire le passage d'une solution réalisable à une autre tout en améliorant la qualité de la solution.

Outre une introduction générale, ce mémoire contient trois chapitres, une conclusion générale et une bibliographie.

Dans le premier chapitre, nous présentons un aperçu historique de la discipline ainsi que la formulation mathématique d'un problème déterministe de contrôle optimal, nous fournissons un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour un problème de contrôle optimal sans et avec contraintes. Par la suite, nous exposons le principe du maximum de Pontriaguine pour un problème de contrôle optimal avec contraintes intermédiaires.

Le second chapitre comprend la méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire quadratique. Après avoir exposé les critères d'optimalité et esti-

mation de sub-optimalité nous exposons un algorithme construit sur la base du concept de support qui comprend trois procédures : changement du contrôle, changement du support et procédure finale. À titre d'illustration, un exemples d'application en mécanique a été traité.

Le dernier chapitre est consacré aux problème de contrôle optimal linéaire-quadratique avec contraintes aux instants intermédiaires et contrôle multivarié. La méthode numérique itérative étudié évite la discrétisation du système dynamique. En effet, en utilisant un contrôle constant par morceaux, le problème est transformé en un problème de programmation linéaire quadratique, qui peut être résolu efficacement par des méthodes standard.

Finalement, ce travail se termine par une conclusion générale et une bibliographie.

Chapitre 1

Rappels sur la théorie du contrôle optimal

Introduction

La théorie du contrôle optimal est née des besoins de la technologie moderne (automatique, aéronautique, navigation spatiale,...) qui a joué un rôle décisif dans l'émergence de cette nouvelle branche issue du calcul des variations [31, ?]. De ce point de vue, le contrôle optimal est considéré comme une branche de la théorie de l'optimisation, dédiée à l'étude et à la résolution de problèmes de maximisation ou de minimisation de fonctionnelles sur des systèmes dynamiques [1]. À l'heure actuelle, plusieurs domaines d'activité humaine sont confrontés à des problèmes de contrôle optimal allant de l'ingénierie financière jusqu'aux technologies de pointe telles que la navigation aérospatiale, les applications thérapeutiques en médecine, etc.

En effet, le contrôle optimal est étroitement lié au choix des contrôles les plus favorables (optimaux) dans des systèmes complexes, gouvernés par des équations aux dérivées partielles, ou des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires, qui seront discutés dans ce qui suit.

Dans ce chapitre nous allons commencer par un bref aperçu historique du contrôle optimal, par la suite nous décrivons la formulation mathématique du problème de contrôle et de contrôle optimal, finalement nous présentons les conditions d'optimalité d'un problème de contrôle optimal avec et sans contrainte ainsi que au problème avec contraintes intermédiaires.

1.1 Historique

Les mathématiques de la théorie du contrôle optimal ont leurs racines dans le calcul des variations. Nous évoquons, tout d'abord, l'histoire de ce dernier. Cette discipline importante de l'analyse mathématique a été créée dans la seconde moitié du *XVII* siècle. En 1662, Fermat a présenté la loi de la réfraction de la lumière comme solution d'un problème à temps minimale. Plus tard, en 1686, Newton a proposé et résolu le problème qui consiste à déterminer, en dimension trois, la forme optimale de la proue d'un navire, qui offre une résistance minimale lorsqu'il se déplace dans un milieu résistant. Le problème a une histoire très riche et il est bien documenté dans la littérature. Le problème et sa solution ont été donnés en 1687 dans son ouvrage "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (Mathematical Principles of Natural Philosophy).

Habituellement, le célèbre problème de la brachistochrone de Johann Bernoulli (1696) est considéré comme un point de départ du calcul des variations. Bernoulli a proposé ce problème comme un problème de défi mathématique, dont il a demandé aux mathématiciens les plus ingénieux de trouver le chemin en temps minimal d'un point de masse entre deux points du champ gravitationnel de la Terre. En 1697, son frère Jacob (James) Bernoulli publia sa solution et proposa un problème plus général. Outre les frères Bernoulli, Newton, Leibniz et l'hôpital ont également apporté des solutions correctes au problème de la brachistochrone. Entre 1696 et 1900, un grand nombre de savants ont travaillé dans ce domaine et le livre de H. H. Goldstine [16] fournit un traitement détaillé de cet ensemble de travaux. En particulier, les principales contributions importantes au cours de cette période ont été faites par John et James Bernoulli, Leonhard Euler, Isaac Newton, Joseph-Louis Lagrange, Gottfried Wilhelm Leibniz, Adrien Marie Legendre, Carl Jacobi, William Rowan Hamilton, Lejeune Dirichlet, et Karl Theodor Weierstrass. Cependant, Euler et Lagrange ont largement contribué au développement du domaine et ils sont considérés comme les pères fondateurs du calcul des variations. Au *XIX*e siècle, Hamilton, Weierstrass et Jacobi ont approfondi la théorie. Les méthodes qui en résultent ont été (et sont toujours) d'une grande valeur en mécanique analytique (c'est pourquoi nous parlons de "systèmes hamiltoniens"). L'essor du calcul des variations était étroitement lié aux problèmes de la physique. Il a fallu environ deux siècles et demi pour que les premières applications économiques soient faites. Evans (1924) [?] a étudié le problème de la tarification dynamique pour un monopoleur, tandis que Ramsey (1928) [?] a analysé l'accumulation du capital néoclassique en utilisant l'équation d'Euler.

Quelques dizaines d'années plus tard, des idées apparentées ont joué un rôle dans l'économie financière.

À la fin du 19^{ème} siècle et dans la première moitié du 20^{ème} siècle et suite aux travaux de David Hilbert (Allemagne), Oskar Bolza (Allemagne et USA), le problème fondamental de la minimisation d'une intégrale soumise à des contraintes d'équations différentielles est devenu un problème d'intérêt majeur en raison de diverses applications militaires aux États-Unis et en URSS. Ces problèmes ont nécessité le traitement de contraintes particulières qui étaient fondamentalement ignorées dans le calcul des variations et ont conduit à la théorie du contrôle optimal.

L'histoire du développement du contrôle optimal est moins précise et fait l'objet de divergences d'opinions. L'article "300 ans de contrôle optimal : de la brachistochrone au principe du maximum " de Sussmann et Willems [?] indique clairement que le contrôle optimal est né en 1697. Bien que tout le monde s'accorde à dire que le contrôle optimal est une extension du calcul classique des variations, d'autres spécialistes [?, 9] suggèrent que la théorie du contrôle optimal a commencé en 1956 avec la découverte du Principe du Maximum de Pontriaguine. Cependant, d'après J. A. Burns [10], pour passer des approches variationnelles classiques à la théorie moderne du contrôle, deux étapes importantes se sont produites dans deux travaux déterminants réalisés en 1924 et 1933. En effet, dans la thèse de L. M. Graves en 1924 [?], ce dernier a traité la dérivée comme une fonction indépendante et a donc distingué les variables d'état et celle du contrôle. En 1926, C. Caratheodory a donné la première formulation de la condition nécessaire classique de Weierstrass en termes de Hamiltonien [12]. Ce travail est considéré par J. A. Burns [10] comme la première bifurcation vers la théorie moderne du contrôle. Enfin, L. M. Graves en 1933 [?] a donné une formulation témoin de la condition de Weierstrass classique pour un problème de type Bolza. Ses idées sont essentielles pour comprendre la puissance des méthodes du contrôle optimal moderne.

La date la plus importante de l'histoire de la théorie de contrôle optimal est l'année 1958, avec le livre "The Mathematical Theory of Optimal Processes", écrit par les mathématiciens soviétiques Pontriaguine, Boltyanskii, Gamkrelidze, et Mischenko. L'importance de ce livre ne réside pas seulement dans l'étude rigoureuse des problèmes de contrôle optimal et du calcul des variations, mais également dans la formulation et la preuve du principe du maximum pour les problèmes du contrôle optimal, qui révolutionnent la théorie moderne de contrôle optimal et ouvrent un vaste portail de recherche dans cette discipline. Dans ce livre, Pontriaguine a démontré le principe du maximum pour les problèmes de contrôle avec la forme

de Lagrange.

Le principe du maximum du Pontryaguine a également ses racines dans les problèmes de l'ingénierie. Dans les années 1950, les ingénieurs de l'Union Soviétique étaient entrain de résoudre les problèmes de pilotage des avions. Ils ont discuté ces problèmes avec des mathématiciens de l'institut de mathématiques "Steklov" de Moscou. Pontryaguine et son groupe se sont intéressés à ce domaine et leurs recherches ont abouti au fameux Principe du Maximum. Ainsi, l'école russe a des contributions essentielles dans la théorie du contrôle, où à titre d'exemple, la variable de contrôle est souvent désignée par la lettre "u", tirée du mot russe "upravlenije" signifiant contrôle.

L'approche de Bellman, connue sous le nom de programmation dynamique, est une autre approche importante qui a contribué au développement de l'optimisation dynamique. Notons que cette approche a été introduite au début des années 1950 par Richard Bellman. Néanmoins, en 1994, Pesch et Bulirsch [30] ont découvert que les idées à la fois du principe maximum et de l'équation de Bellman, se trouvent déjà dans les travaux de Carathéodory (1926, 1935) [12, 11], et il s'est avéré que les conditions d'optimalité du problème du contrôle optimal sont des conséquences de ses résultats.

Les articles [?, ?] fournissent un joli résumé historique de ces résultats et de leur impact sur le contrôle optimal moderne. De toute évidence, tout le monde convient à un certain niveau que le calcul des variations est un point de départ pour la théorie moderne du contrôle optimal.

L'histoire du développement de la théorie du contrôle optimal est très intéressante [4].

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux travaux [7, 17, 18, 16, ?, ?, ?] .

1.2 Formulation mathématique d'un problème de contrôle optimal

La partie la plus importante dans la résolution de tout problème pratique est le processus de modélisation, qui exige une description mathématique suffisamment réaliste, simple et la plus fidèle possible à la situation réelle, qu'elle soit physique, économique ou autre. La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler, avec des contraintes physiques à imposer au système et la détermination du critère de performance à optimiser (objectif du contrôle). La théorie du contrôle s'intéresse à prédire la réponse du système à une entrée donnée et à expliquer l'influence du contrôle sur la dynamique du système [4].

1.2.1 Système de contrôle

Considérons un système différentiel explicite de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t) , \\ x(0) = x^0 , \end{cases} \quad (1.1)$$

dont l'état est décrit par un vecteur $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ dit variable d'état, x^0 étant l'état initial. Cette variable d'état dépend de la variable réelle $t \in [0, t^*]$ et vérifie des relations (souvent différentielles) appelées équations d'états, étant une fonction vectorielle de n composantes $f_i, i = \overline{1, n}$, pouvant être linéaire ou non linéaire.

Généralement, on souhaite agir sur le système 3.1 de façon à atteindre une cible ou un objectif donné. C'est pour cela que nous modifions le système 3.1 en introduisant une fonction (paramètre) $u(\cdot) \in \mathbb{R}^r$ qu'on appelle contrôle (commande), qui est une fonction localement intégrable, définie sur $[0, t^*]$. Ainsi, nous obtenons le système de contrôle explicite qui peut caractérisé par un ensemble d'équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), x(0)) = x^0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r. \quad (1.2)$$

Nous supposons que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions du théorème de Cauchy de telle sorte qu'on puisse assurer l'existence et l'unicité de la solution $x(x^0, u, t)$.

Stratégies de contrôle d'un système dynamique

Pour contrôler un système dynamique, on distingue deux types de stratégies :

- **Stratégie en boucle ouverte**

La stratégie en boucle ouverte consiste à chercher un contrôle admissible et qui ne dépend pas de l'état du système. Cette stratégie est schématisée par la figure suivante :

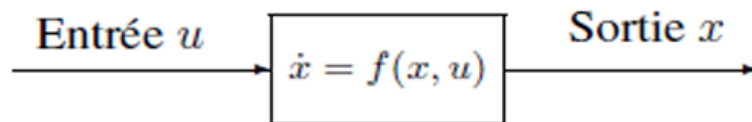


FIGURE 1.1 – Commande en boucle ouverte

- **La stratégie en boucle fermée**

Considérons un système donné par son équation d'état et un ensemble de contrôles. Dans la stratégie en boucle fermée, la loi du contrôle u est déterminée en fonction du temps mais aussi de l'état x . Autrement dit, l'état du système est pris en compte à chaque instant afin de déterminer en temps réel le contrôle. Le contrôle est alors appelé feedback. Cette stratégie peut se résumer par le schéma suivant :

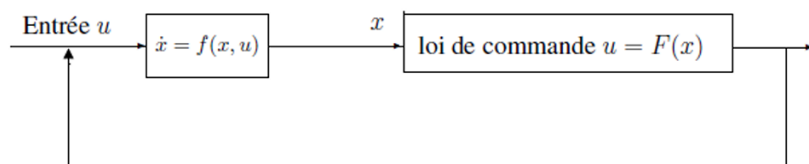


FIGURE 1.2 – Commande en boucle fermée

Classes des contrôlés admissibles

Généralement, les commandes admissibles peuvent être non bornées, bornées ou de type bang-bang.

• Commande bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les paramètres $u_j(t)$, $j = \overline{1, r}$, par des constantes. Considérons pour ce type de problème la contrainte $a_j \leq u_j \leq b_j$. Lorsque u est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1 . Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j en posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$, $j = \overline{1, r}$.

• Commande bang-bang

Dans la théorie du contrôle, un contrôle bang-bang est un feedback qui bascule brusquement entre deux valeurs, il est souvent utilisé pour contrôler un système qui accepte une entrée binaire. En d'autres termes, un contrôle $u \in \mathbb{R}^r$ est appelé contrôle bang-bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = \overline{1, r}$, on a $|u_j(t)| = 1$.

Contrôlabilité des systèmes dynamiques

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener à tout état prédéfini au moyen d'un contrôle.

Définition 1.1. (Contrôlabilité au sens de Kalman)

Le système 3.2 est complètement contrôlable si pour deux points quelconques x^0 et x^ de \mathbb{R}^n , on peut trouver un instant fini t^* est une commande admissible $u(t)$ telle que l'état $x(t)$ du système satisfait la condition $x(0) = x^0$ et $x(t^*) = x^*$.*

Les problèmes linéaire de contrôle ont été étudiés dans la littérature d'une manière très détaillée, mais l'analyse des systèmes non linéaires n'est pas assez développée comme dans le cas linéaire. Pour cela, on se concentre beaucoup plus dans cette section sur la contrôlabilité des systèmes linéaires définis par une équation différentielle linéaire suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x^0, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^r, \quad t \in [0, t^*]. \quad (1.3)$$

Contrôlabilité des systèmes linéaires stationnaires

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t .

Théorème 1.1. [33] *Le système stationnaire $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$, est contrôlable en temps t^* si et seulement si :*

$$\text{rang}C = \text{rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n,$$

où C est une matrice d'ordre $(n \times nr)$ appelée matrice de contrôlabilité de Kalman, et la condition $\text{rang} C = n$ est appelée condition de Kalman.

Contrôlabilité des systèmes linéaires non-stationnaires

Théorème 1.2. [33] *Considérons le système :*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x^0, \quad (1.4)$$

où les applications A, B, r sont supposées C^∞ sur $[0, t^*]$.

Définissons par récurrence :

$$B_0(t) = B(t) \quad \text{et} \quad B_{k+1}(t) = A(t)B_k(t) - \dot{B}_k(t).$$

- S'il existe un instant $t \in [0, t^*]$ tel que : $\text{rang}C = [B_0, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}] = n$, alors le système de contrôle 3.4 est contrôlable sur $[0, t^*]$;
- Si de plus les applications A, B, r sont analytiques sur $[0, t^*]$, alors le système 3.4 est contrôlable si et seulement si $\forall t \in [0, t^*], \text{rang}C = [B_0, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}] = n$.

Contrôlabilité des systèmes dynamiques non linéaires

Se prononcer sur la contrôlabilité des systèmes non linéaires reste jusqu'à présent une tâche très difficile. Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires, on utilise souvent le système linéarisé, partant du fait que la contrôlabilité du système linéarisé implique celle du système non linéaire d'une manière locale. La non contrôlabilité du système linéarisé implique pas forcément la non contrôlabilité du système non linéaire. [4]

Considérons un système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Théorème 1.3. [33] *Considérons le système 1.5 avec $f(x^0, u^0) = 0$. Notons*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0) \text{ et } B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0).$$

Si

$$\text{rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n,$$

alors le système 1.5 est localement contrôlable (contrôlable à partir des points de voisinage de x^0) en x^0 .

Outre la contrôlabilité, la théorie du contrôle peut avoir aussi comme objectif :

- 1- de stabiliser le système, c'est à dire, le rendre insensible aux perturbations, c'est ce qu'on appelle la stabilisation ;
- 2- de déterminer des solutions optimales pour un certain critère à optimiser ; c'est ce qu'on appelle le contrôle optimal, et c'est l'objectif principal de la section suivante.

1.3 Problème de contrôle optimal

Considérons le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t), x(0) = x^0, t \in [0, t^*] & \text{(équation d'état),} \\ u \in U & \text{(contraintes sur le contrôle),} \end{cases}$$

où U est un compact de \mathbb{R}^r .

Lors de la formulation d'un problème de contrôle, l'objectif est de fournir une motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système a atteint un état désirable. Donc, choisir une mesure de qualité est une traduction en termes mathématiques des exigences physiques du système au fil du temps. En d'autres termes, le problème de contrôle optimal a pour but d'amener le système d'un état initial $x(0) = x^0$ donné à un certain état final $x(t^*) = x^*$, tout en minimisant un certain critère tel que la fonctionnelle suivante :

$$\min_{t^*, u \in U} J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \quad (1.6)$$

où $F : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t^*)$ et t^* peuvent être libres ou fixés. On peut classer les fonctions objectifs en deux critères physiques de performance :

Temps optimal

On parle d'un problème en temps minimal lorsque $F(x(t), u(t), t) = 1$, $S(x(t^*), t^*) = 0$ et le temps final t^* est libre dans l'expression $\min_{u \in U} \int_0^{t^*} 1 dt$.

Coût optimal

On parle d'un problème en coût minimal lorsque le temps final t^* est fixé dans l'expression :

$$\min_{u \in U} J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \quad (1.7)$$

Il existe, évidemment, des problèmes qui combinent les deux critères physiques de qualité, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût minimal.^[4]

1.3.1 Les classes de problèmes de contrôle optimal

Selon la forme du critère de qualité, on distingue généralement trois types de problèmes de contrôle optimal :

a) Problème de Lagrange

Un problème de contrôle optimal est dit de Lagrange si le système dynamique est :

$$\dot{x}f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0 \quad (1.8)$$

où les contrôles $u(\cdot)$ sont des fonctions définies de $[0, t^*]$ dans $U \in \mathbb{R}^r$, et la fonction coût est comme suit :

$$\min_{t^*, u \in U} J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \quad (1.9)$$

où $F : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}$, et $x(0) = x^0$ est un état initial donné.

b) Problème de Mayer

Dans ce cas, le critère à optimiser dépend uniquement de la valeur terminale de l'état. Alors le problème de Mayer peut être défini comme suit :

$$\begin{cases} \min_{t^*, u \in U} J(u) = S(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (1.10)$$

c) Problème de Bolza

L'avantage du problème de Bolza est qu'il regroupe les deux précédentes formulations (Lagrange et Mayer). Le problème de Bolza est défini par :

$$\begin{cases} \min_{t^*, u \in U} J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Remarque 1.3.1. Les trois formulations sont équivalentes, c'est à dire qu'on peut passer de l'une à l'autre.

Le problème de Lagrange a été discuté pour la première fois en 1762, Mayer a considéré son problème en 1878, et le problème de Bolza a été formulé en 1913.[4]

1.4 Principe du maximum de Pontriaguine

Dans cette section, nous énonçons sans preuve les conditions nécessaires d'optimalité, pour des problèmes de contrôle optimal sans et avec contraintes sur l'état. Pour plus de détails, voir Pontriaguine et al. [32], Grass et al. [19], Sethi et al. [?] et E. Trélat [33].

1.4.1 Principe du maximum de Pontriaguine sans contraintes sur l'état

Considérons le problème de contrôle optimal suivant, avec un temps terminal t^* fixe :

$$\begin{cases} \min_{u \in U} J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in [0, t^*], \\ u \in U, \end{cases} \quad (1.12)$$

où U est un ensemble compact de \mathbb{R}^r .

La démonstration historique du principe du maximum est basée sur la maximisation du Hamiltonien, défini comme suit pour le problème 1.12 :

$$H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \psi_0 F(x(t), u(t), t) + \psi'(t) f(x(t), u(t), t), \quad (1.13)$$

où le vecteur $\psi(t) : [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur d'état adjoint ; ψ_0 est appelée variable duale du coût.

Conditions nécessaires d'optimalité

Théorème 1.4. [?] (*Principe du maximum*)

Soient $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$. Alors, il existe un réel $\psi_0^* \leq 0$ et un vecteur $\psi^*(t)$ tels que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), & x(0) = x^0, \\ \psi^*(t) = -H_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) & \psi^*(t^*) = \psi_0^* S_x(x^*(t^*)), \\ H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) \geq H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), v(t), t), & \forall v(t) \in U, t \in [0, t^*], \end{cases} \quad (1.14)$$

avec

$$H_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) = \frac{\partial H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)}{\partial x} \Big|_{x(t)=x^*(t), \psi_0=\psi_0^*, \psi(t)=\psi^*(t), u(t)=u^*(t)},$$

$$S_x(x^*(t^*)) = \frac{\partial S(x(t^*))}{\partial x} \Big|_{x(t^*)=x^*(t^*)}.$$

On voit bien que $u^*(t)$ va fournir un maximum global au Hamiltonien $H(x^*(t), \psi^*(t), v(t), t)$ Pour $v(t) \in U$. Pour cette raison, les conditions nécessaires 1.14 sont appelées "Principe du maximum"; ψ_0 est appelée variable duale du coût, généralement on choisit $\psi_0^* = -1$, correspondant au principe du maximum.

Remarque 1.4.1. On peut travailler avec $\psi_0^* > 0$ ($\psi_0^* = 1$) et la dernière inégalité des relations 1.14 sera inversée. On parle alors du principe du minimum.

Conditions suffisantes d'optimalité

Jusqu'à présent, nous avons énoncé les conditions nécessaires d'optimalité. Dans ce qui suit, nous énonçons sans preuve un théorème qui nous donne une condition suffisante d'optimalité pour un problème de contrôle optimal sans contraintes sur l'état. Ce théorème est important, car les modèles dérivés de nombreux problèmes de la physique et de sciences de gestion satisfont les conditions requises pour que les conditions nécessaires deviennent suffisantes. Définissons, tout d'abord, la fonction H^0 :

$$H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \max_{v(t) \in U} H(x(t), \psi_0, \psi(t), v(t), t). \quad (1.15)$$

Théorème 1.5. [?]

Si $(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t))$ satisfait les conditions nécessaires 1.14 pour tout $t \in [0, t^*]$, et si la fonction $H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)$ est convexe en x pour tout $t \in [0, t^*]$ et $S(x(t^*))$ est convexe en x , alors $u^*(t)$ est un contrôle optimal du problème 1.12 .

1.4.2 Principe du maximum de Pontriaguine avec contraintes sur l'état

Ici nous imposons au problème précédent des contraintes sur l'état et le contrôle. Pour tout instant $t \in [0, t^*]$, le couple $(x(t), u(t))$ doit satisfaire la contrainte :

$$g(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, t^*], \quad (1.16)$$

avec $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Avant d'aller plus loin, écrivons le problème de contrôle optimal à étudier :

$$\begin{cases} \min J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in [0, t^*], \\ g(x(t), u(t), t) \leq 0, \quad t \in [0, t^*], \quad u \in U = \mathbb{R}^r. \end{cases} \quad (1.17)$$

Conditions nécessaires d'optimalité

Introduisons le Lagrangien du problème 1.17 :

$$L(x(t), \psi_0, \psi(t), \lambda(t), u(t), t) = H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) + \lambda'(t)g(x(t), u(t), t), \quad (1.18)$$

où les composantes λ_i du vecteur λ sont appelées multiplicateurs de Lagrange. Ces multiplicateurs doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\lambda_i \geq 0 \quad \lambda_i(t)g_i(x(t), u(t), t) = 0, \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad \forall t \in [0, t^*]. \quad (1.19)$$

Le vecteur adjoint satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\psi}(t) = -L_x(x(t), \psi_0, \psi(t), \lambda(t), u(t), t), \quad \psi(t^*) = \psi_0 S_x(x(t^*)). \quad (1.20)$$

Théorème 1.6. [?] (Principe du maximum de Pontriaguine avec contraintes sur l'état)

Soit $u^*(t) \in \mathbb{R}^r$ un contrôle optimal et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$.

Alors il existe un réel $\psi_0^* \leq 0$, un vecteur adjoint $\psi^*(t)$ et un vecteur multiplicateur de Lagrange $\lambda^*(t)$ tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}f(x^*(t), u^*(t), t), \quad x(0) = x^0, \\ \psi^*(t) = -L_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), t), \quad \psi^*(t^*) = \psi_0^* S_x(x^*(t^*)), \\ H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) = \max_{v(t) \in \mathbb{R}^r | g(x^*, v, t) \leq 0} H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), v(t), t), \quad t \in [0, t^*], \\ \frac{\partial L_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), t)}{\partial u} \Big|_{u(t)=u^*(t)} = 0, \\ g(x^*(t), u^*(t), t) \leq 0 \quad t \in [0, t^*], \\ \lambda_i^*(t) \geq 0, \quad \lambda_i^*(t) g_i(x^*(t), u^*(t), t) = 0, \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad t \in [0, t^*]. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Conditions suffisantes d'optimalité

Le résultat de conditions suffisantes nécessite les concepts de fonctions convexe et quasi-convexe.

Définition 1.2. Soit f une fonction définie sur un ensemble convexe X de \mathbb{R}^n . La fonction f est dite convexe, si pour tous les points $x, y \in X$, et pour tout nombre réel $\lambda \in]0, 1[$ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (1.22)$$

La fonction f est dite quasi-convexe si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}. \quad (1.23)$$

En outre, on dit que f est strictement convexe si pour tous les points $x, y \in X, x \neq y$ et pour tout nombre réel $\lambda \in]0, 1[$, la relation 1.22 est vérifiée avec une inégalité stricte. De plus, on dit que f est concave, quasi-concave ou strictement concave si $(-f)$ est respectivement convexe, quasi-convexe ou strictement convexe.

Nous pouvons maintenant énoncer les conditions suffisantes d'optimalité concernant le problème de contrôle optimal avec contraintes. A cet effet, définissons la fonction suivante :

$$H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \max_{v(t) \in \mathbb{R}^r | g(x, u, t) \leq 0} H(x(t), \psi_0, \psi(t), v(t), t).$$

Théorème 1.7. [?] *Conditions suffisantes d'optimalité*

Soit $(x^*, u^*, \psi_0^*, \psi^*, \lambda^*)$ satisfaisant les conditions nécessaires 1.21.

Si $H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)$ est convexe en x pour tout $t \in [0, t^*]$, $S(x(t^*))$ est convexe pour toute trajectoire x admissible et la fonction $g(x(t), u(t), t)$ définie par 1.16 est quasi-convexe pour tout couple (x, u) admissible, alors (x^*, u^*) est optimal.

1.5 Contrôle optimal d'un système dynamique avec contraintes intermédiaires

Dans cette section, nous énonçons le principe du maximum de Pontriaguine pour un problème de contrôle optimal avec des contraintes aux instants intermédiaires. Pour plus de détails, voir [13].

Soient $k + 1$ nombres réels tels que $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k = t^*$, et définissons le vecteur :

$$p = ((x(t_0), t_0), (x(t_1), t_1), \dots, (x(t^*), t^*)).$$

Considérons maintenant sur l'intervalle $[t_0, t^*]$ le problème du contrôle optimal avec contraintes aux points intermédiaires, de la forme :

$$\begin{cases} \min J = \varphi_0(p), \\ \dot{x} = f(x, u, t), \quad u \in U, \\ \varphi_i(p) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ \eta_j(p) = 0, \quad j = \overline{1, q}, \end{cases} \quad (1.24)$$

où chaque nombre t_0, t_1, \dots, t_k peut ne pas être fixé, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r$, la fonction $x(\cdot)$ est absolument continue et $u(\cdot)$ est une fonction bornée mesurable, avec $u(t) \in U$.

On suppose que la fonction f est définie et continue sur l'ensemble ouvert $Q \subset \mathbb{R}^{n+r+1}$, et les fonctions $\varphi_i(p)$ et $\eta_j(p)$ sont définies sur l'ensemble ouvert $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{(k+1)(n+1)}$ et ont des dérivées continues sur cet ensemble. Ainsi, le problème (1.24) contient des contraintes d'égalité et d'inégalité qui dépendent des valeurs des variables d'état non seulement aux extrémités de $[t_0, t^*]$ mais aussi aux points intermédiaires t_1, t_2, t_{k-1} . Si $k = 1$, le problème (1.24) devient le problème classique bien connu de type Pontriaguine.

Dans cette section, nous présentons une généralisation du principe du maximum de Pontriaguine à une classe de problème avec contraintes sur l'état à des instants intermédiaires, développé dans [13], où l'auteur a montré que le problème (1.24) peut se réduire à un problème de contrôle optimal standard sans contraintes intermédiaires (juste des contraintes à l'instant terminal). En établissant une correspondance entre les processus admissibles et optimaux entre les deux problèmes, les conditions d'optimalité du problème (1.24) deviennent triviales.

1.5.1 Principe du maximum d'un problème avec contraintes intermédiaires

Présentons maintenant le principe du maximum de Pontriaguine du problème (1.24). Définissons tout d'abord :

- le Hamiltonien

$$H(x, u, \psi^x, \psi^t, t) = \langle \psi^x, f(x, u, t) \rangle + \psi^t;$$

- et la fonction de Lagrange aux points intermédiaires

$$l(p) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(p) + \sum_{j=1}^q \beta_j \eta_j(p).$$

Théorème 1.8. [13]

Supposons que le problème (1.24) atteint un minimum pour le processus $w^* = (x^*(t), u^*(t), p^*)$, $t \in \Delta^* = [t_0^*, t_k^*]$. Alors il existe un multi-vecteur $\lambda = (\alpha, \beta, \psi^x(\cdot), \psi^t(\cdot))$, où $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^q$, $\psi^x(\cdot)$ et $\psi^t(\cdot)$ sont des fonctions lipschitziennes par morceaux sur $\Delta^* = [t_0^*, t_k^*]$, tels que les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) la condition de non-trivialité : $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$;
- (b) la condition de non-négativité : $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{0, m}$;
- (c) la condition de complémentarité : $\alpha_i \varphi_i(p^*) = 0$, $i = \overline{1, m}$;
- (d) l'équation conjuguée : presque partout sur Δ^* , on a :

$$\dot{\psi}^x(t) = -H_x^* = -\psi^x(t) f_x(x^*(t), u^*(t), t),$$

$$\dot{\psi}^t(t) = -H_t^* = -\psi^x(t) f_t(x^*(t), u^*(t), t);$$

(e) la condition de transversalité aux extrémités de l'intervalle :

$$\begin{aligned}\psi^x(t_0^*) &= \frac{\partial l}{\partial x(t_0)}(p^*) = l_{x(t_0)}(p^*), & \psi^x(t_k^*) &= \frac{\partial l}{\partial x(t_k)}(p^*) = -l_{x(t_k)}(p^*), \\ \psi^t(t_0^*) &= \frac{\partial l}{\partial t_0}(p^*) = l_{t_0}(p^*), & \psi^t(t_k^*) &= \frac{\partial l}{\partial t_k}(p^*) = -l_{t_k}(p^*);\end{aligned}$$

(f) la condition de discontinuité de ψ^x et ψ^t aux points intermédiaires :

$$\begin{aligned}\Delta\psi^x(t_j^*) &= \psi^x(t_j^* + 0) - \psi^x(t_j^* - 0) = l_{x(t_j)}(p^*), \\ \Delta\psi^t(t_j^*) &= \psi^t(t_j^* + 0) - \psi^t(t_j^* - 0) = l_{t_j}(p^*), \quad j = \overline{1, k};\end{aligned}$$

(g) pour presque tout $t \in \Delta^*$:

$$H(x^*(t), \psi^x(t), \psi^t(t), u^*(t), t) = 0;$$

(h) la condition de maximisé de H pour tout $t \in \Delta^*$:

$$\max_{\{u \text{ admissible}\}} H(x^*(t), \psi^x(t), \psi^t(t), u(t), t) = H(x^*(t), \psi^x(t), \psi^t(t), u^*(t), t) = 0.$$

Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre quelques notions sur la théorie du contrôle optimal, notamment les outils nécessaires à la compréhension des chapitres suivants, à savoir le principe du maximum de Pontryaguine qui fournit les conditions nécessaires d'optimalité d'un problème de contrôle optimal sans et avec contrainte par la suite nous avons exposé les conditions suffisantes dans le cas des fonction convexe, finalement nous avons présenté le problème de contrôle optimal avec contraintes intermédiaire ainsi que les conditions d'optimalité.

Chapitre 2

Méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire quadratique

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire quadratique développée dans [22, 23]. L'algorithme exposé est construit sur la base du concept de support et comprend trois procédures : changement du contrôle, changement du support et procédure finale. À titre d'illustration, un exemple d'application en mécanique a été traité.

2.1 Position du problème et définitions

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min J(x) = c'x(t_*) + \frac{1}{2}x'(t_*)Dx(t_*), \quad (2.1)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^0, \quad (2.2)$$

$$Gx(t_*) = g, \quad d^- \leq u(t) \leq d^+, \quad t \in T = [0, t_*], \quad (2.3)$$

où A et D sont des matrices carrées d'ordre n avec $D' = D \geq 0$, B est une $n \times r$ -matrice, G est une $m \times n$ -matrice avec $\text{rank}(G) = m < n$. Les fonctions $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))'$ et $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))'$ représentent respectivement la valeur du contrôle multivariable et

l'état du système à l'instant t ; x^0 est un n -vecteur représentant l'état initial; c, g, d^- et d^+ sont des vecteurs de dimension correspondante. Le symbole (\prime) représente l'opérateur de transposition. Nous supposons que le système dynamique 2.2 est contrôlable au sens de Kalman .

La fonction continue par morceaux $u(t), t \in T$, et sa trajectoire correspondante $x(t), t \in T$, sont dites respectivement contrôle admissible et trajectoire admissible, si elles satisfont les contraintes 2.2 et 2.3.

Pour un contrôle admissible $u(t) t \in T$, l'état final via la formule de Cauchy est :

$$x(t_*) = F(t_*)x^0 + \int_0^{t_*} F(t_*)F^{-1}(t)Bu(t)dt = F(t_*)x^0 + \int_0^{t_*} q(t)u(t)dt, \quad (2.4)$$

où $F(t) = e^{At}$ et $q(t) = F(t_*)F^{-1}(t)B = e^{A(t_*-t)}B$.

La contrainte terminale s'écrit alors :

$$Gx(t_*) = g \Leftrightarrow \int_0^{t_*} Gq(t)u(t)dt = \int_0^{t_*} p(t)u(t)dt = g - Ge^{At_*}x^0, \quad (2.5)$$

où $p(t) = Gq(t)$, et la matrice $q(t), t \in T$, vérifie l'équation différentielle :

$$\dot{q}(t) = -Aq(t), t \in T, \quad q(t_*) = B. \quad (2.6)$$

Pour définir le support, nous choisissons dans l'ensemble T un sous-ensemble de moments isolés $T_s = \{t_j, j \in J_s\}, J_s = \{1, \dots, j_s\}, j_s \leq m$ et pour chaque moment $t_j \in T_s$ nous associons un ensemble d'indices $I_j \subset I$ tel que $\sum_{j \in J_s} |I_j| = m$, où $I = \{1, 2, \dots, r\}$. Nous posons $I_s = \{I_j, j \in J_s\}, Q_s = I_s, T_s$ et formons la matrice $P_s = P(Q_s) = (p_i(t_j), i \in I_j, j \in J_s)$, où $p_i(t)$ est la i^{th} colonne de la matrice $p(t) = Gq(t), t \in T$.

Définition 2.1. L'ensemble $Q_s = \{I_s, T_s\}$ est appelé support du problème 2.1 - 2.3, si la matrice P_s est régulière. Le couple $\{u, Q_s\}$ formé du contrôle admissible u et du support Q_s est appelé contrôle admissible de support.

Définition 2.2. Le contrôle de support $\{u, Q_s\}$ est dit non dégénéré, si pour tout moment t_j de T_s et pour tout indice $i \in I_j, j \in J_s$, une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- i) au voisinage de t_j , la composante $u_i(t), t \in T$, est non critique;
- ii) le point t_j est un point de discontinuité de la fonction $u_i(t), t \in T$.

Définition 2.3. Le contrôle admissible $u^\varepsilon(t), t \in T$, est dit ε optimal (ou suboptimal), s'il vérifie $J(u^\varepsilon) - J(u^0) \leq \varepsilon$, où u^0 est une solution optimale du problème 2.1 -2.3 et ε un nombre non négatif arbitraire, choisi comme une précision.

2.2 Critère d'optimalité et estimation de suboptimalité

Nous assignons au contrôle de support $\{u, Q_s\}$, le vecteur des multiplicateurs

$$y' = ((Dx(t_*) + c)' q_i(t_j), i \in I_j, j \in J_s) P_s^{-1}, \quad (2.7)$$

et la fonction $E(t)$ $t \in T$, appelée co-contrôle :

$$E'(t) = (E_1(t), E_2(t), \dots, E_r(t)) = y' p(t) - (Dx(t_*) + c)' q(t) t \in T, \quad (2.8)$$

où $q_i(t)$ est la $i^{\text{ième}}$ colonne de la $n \times r$ matrice $q(t) = F(t_*) F^{-1}(t) B$.

Soit $\{u, Q_s\}$ un contrôle de support, où $u(t), t \in T$, est un contrôle admissible et $x(t), t \in T$, sa trajectoire correspondante. Considérons un autre contrôle admissible quelconque $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T$, et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t), t \in T$. L'accroissement de la fonctionnelle définie dans 2.1 est :

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) &= \int_0^{t_*} (Dx(t_*) + c)' q(t) \Delta u(t) dt + \Gamma \\ &= \sum_{i=1}^r \int_0^{t_*} (Dx(t_*) + c)' q_i(t) \Delta u_i(t) dt + \Gamma, \end{aligned}$$

où $\Gamma = \frac{1}{2} \Delta x'(t_*) D \Delta x(t_*) \geq 0$. En vertu de la relation 2.8 et $G \Delta x(t_*) = 0$, nous avons :

$$(Dx(t_*) + c)' q(t) = y' p(t) - E'(t),$$

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= \int_0^{t_*} y' p(t) \Delta u(t) dt - \int_0^{t_*} E'(t) \Delta u(t) dt + \Gamma \\ &= 0 - \int_0^{t_*} E'(t) \Delta u(t) dt + \Gamma = - \sum_{i=1}^r \int_0^{t_*} E_i(t) \Delta u_i(t) dt + \Gamma. \end{aligned}$$

Notons $T_i^+ = \{t \in T : E_i(t) > 0\}$, $T_i^- = \{t \in T : E_i(t) < 0\}$, $i = 1, \dots, r$. Ainsi, l'accroissement de la fonctionnelle prend la forme suivante :

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = - \sum_{i=1}^r \int_{T_i^+} E_i(t) (\bar{u}_i(t) - u_i(t)) dt - \sum_{i=1}^r \int_{T_i^-} E_i(t) (\bar{u}_i(t) - u_i(t)) dt + \Gamma \quad (2.9)$$

2.2.1 Critère d'optimalité

Théorème 2.1. (Critère d'optimalité). *Soit les relations suivantes :*

$$\begin{cases} u_i(t) = d_i^+, & \text{si } E_i(t) > 0, \\ u_i(t) = d_i^-, & \text{si } E_i(t) < 0, \\ u_i(t) \in [d_i^-, d_i^+], & \text{si } E_i(t) = 0, \end{cases} \quad t \in T, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.10)$$

sont suffisantes, et dans le cas de la non dégénérescence sont aussi nécessaires, pour l'optimalité du contrôle de support $\{u, Q_s\}$.

Prouve. (Suffisance).

Soit $\{u, Q_s\}$ un contrôle de support vérifiant les relations 2.10. Considérons un autre contrôle admissible $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T$. En vertu de la relation 2.9 et en utilisant les relations 2.10, nous obtenons

$$\Delta J(u) = \sum_{i=1}^r \int_{T_i^+} E_i(t) (d_i^+ - \bar{u}_i(t)) dt + \sum_{i=1}^r \int_{T_i^-} E_i(t) (d_i^- - \bar{u}_i(t)) dt + \Gamma \geq 0. \quad (2.11)$$

Alors, la solution u est optimale pour le problème 2.1- 2.3. La démonstration de la nécessité est similaire à la méthode décrite dans [6].

Nous pouvons aussi écrire $E'(t) = \psi'(t)B$, où $\psi(t), t \in T$, est la solution du système conjugué

$$\dot{\psi}(t) = -A'\psi(t), \quad \psi(t_*) = G'y - Dx(t_*) - c. \quad (2.12)$$

En formant le Hamiltonien $H(x, \psi, u) = \psi'(Ax + Bu)$, nous avons le principe du maximum de support suivant :

Théorème 2.2. (principe du maximum de support).

Soit $\{u, Q_s\}$ un contrôle de support admissible. Pour l'optimalité du contrôle u , il est suffisant, et aussi nécessaire dans le cas de la non dégénérescence de $\{u, Q_s\}$, que la condition du maximum suivante soit vérifiée :

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d^- \leq v \leq d^+} H(x(t), \psi(t), v), t \in T. \quad (2.13)$$

2.2.2 Estimation de suboptimalité

Soit u^0 une solution optimale du problème 2.1 et 2.3. En substituant dans la formule d'accroissement 2.9 le vecteur \bar{u} par u^0 , nous obtenons :

$$J(u) - J(u^0) = \sum_{i=1}^r \int_{T_i^+} E_i(t)(u_i^0(t) - u_i(t))dt + \sum_{i=1}^r \int_{T_i^-} E_i(t)(u_i^0(t) - u_i(t))dt - \Gamma.$$

Puisque $d_i^- \leq u_i^0(t) \leq d_i^+$ et $\Gamma \geq 0$ alors :

$$J(u) - J(u^0) \leq \sum_{i=1}^r \int_{T_i^+} E_i(t)(d_i^+ - u_i(t))dt + \sum_{i=1}^r \int_{T_i^-} E_i(t)(d_i^- - u_i(t))dt.$$

La quantité

$$\beta(u, Q_s) = \sum_{i=1}^r \int_{T_i^+} E_i(t)(d_i^+ - u_i(t))dt + \sum_{i=1}^r \int_{T_i^-} E_i(t)(d_i^- - u_i(t))dt \quad (2.14)$$

est appelée estimation de suboptimalité et vérifie toujours inégalité :

$$J(u) - J(u^0) \leq \beta(u, Q_s). \quad (2.15)$$

Ainsi, si $\beta(u, Q_s) \leq \varepsilon$, alors u est une solution ε -optimale du problème 2.1 et 2.3

2.3 Algorithme de la méthode

L'algorithme traité est construit sans discrétisation du système dynamique continu 2.2. Le processus de résolution consiste à résoudre un problème d'optimisation linéaire quadratique auxiliaire. La solution de ce dernier nous permettra de construire un contrôle de support admissible (\bar{u}, \bar{Q}_s) tel que $J(\bar{u}) < J(u)$. Ensuite, nous déterminons via une méthode duale un nouveau support \bar{Q}_s satisfaisant la relation $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s) \leq \beta(\bar{u}, \bar{Q}_s)$. Ces transformations sont répétées jusqu'à ce que les conditions de passage à la procédure finale soient obtenues. Au final, nous résolvons un système d'équations dans le but d'obtenir la solution optimale du problème.

2.3.1 Changement de Contrôle

Soient $\varepsilon \geq 0$ et $\{u, Q_s\}$ un contrôle de support initial tel que $\beta(u, Q_s) > \varepsilon$.

Faisons une itération $\{u, Q_s\} \rightarrow \{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$ telle que $J(\bar{u}) < J(u)$. Choisissons deux nombres $\eta > 0$ et $h > 0$ et construisons les ensembles $T_\eta = \{t \in T : \eta(t) \leq \eta\}$, $T_* = T \setminus T_\eta$, où $\eta(t) = \min_{i \in I} |E_i(t)|$, $t \in T$. Subdivisons l'ensemble T_η en N intervalles $[\tau_j, \tau^j]$, $j = 1, \dots, N$, de telle sorte que $\tau_j < \tau^j \leq \tau_{j+1}$, $\tau^j - \tau_j \leq h$, $T_s \subset \{\tau_j, j = 1, \dots, N\}$, $u_i(t) = u_{ij} = \text{const}$, $t \in [\tau_j, \tau^j]$, $j = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, r$. Calculons pour $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= - \int_{\tau_j}^{\tau^j} E_i(t)dt, & z_{ij} &= \int_{\tau_j}^{\tau^j} q_i(t)dt, & v_{ij} &= \int_{\tau_j}^{\tau^j} p_i(t)dt, \\ \beta_{N+1} &= - \sum_{i=1}^r \int_{T_*} E_i(t)\alpha_i(t)dt, & z_{N+1} &= \sum_{i=1}^r \int_{T_*} q_i(t)\alpha_i(t)dt, \\ v_{N+1} &= \sum_{i=1}^r \int_{T_*} p_i(t)\alpha_i(t)dt, \end{aligned}$$

où

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} d_i^+ - u_i(t), & \text{si } E_i(t) > \eta, \\ d_i^- - u_i(t), & \text{si } E_i(t) < -\eta. \end{cases}$$

Posons :

$$S = \{1, 2, \dots, N+1\}, \quad l = (l_{11}, \dots, l_{1N}, \dots, l_{r1}, \dots, l_{rN}, l_{N+1}), \quad \beta = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1N}, \dots, \beta_{r1}, \dots, \beta_{rN}, \beta_{N+1}), \quad Z = (z_{11}, \dots, z_{1N}, \dots, z_{r1}, \dots, z_{rN}, z_{N+1}).$$

Les vecteurs l , β sont de dimension $(Nr+1)$ et la matrice Z est d'ordre $n \times (Nr+1)$.

Considérons le problème de support auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \min \phi(l) = \beta' l + \frac{1}{2} l' Z' D Z l, \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^N v_{ij} l_{ij} + v_{N+1} l_{N+1} = 0, \\ d_i^- - u_{ij} \leq l_{ij} \leq d_i^+ - u_{ij}, j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, r, 0 \leq l_{N+1} \leq 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Nous résolvons le problème 2.16 et soit $l/varepsilon$ une solution réalisable l^ϵ -optimale. Le contrôle admissible défini par les relations :

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} u_{ij} + l_{ij}^{\epsilon_1}, & t \in [\tau_j, \tau^j), \quad j = 1, \dots, N, \\ u_i(t) + l_{N+1}^{\epsilon_1} \alpha_i(t), & t \in T_*, \quad i = 1, \dots, r, \end{cases}$$

vérifie l'inégalité

$$J(\bar{u}) < J(u).$$

2.3.2 Changement de Support

Soit le contrôle de support $\{\bar{u}, \tilde{Q}_s\}$ déterminé après la résolution du problème 2.16.

Calculons à l'aide des formules 2.7 et 2.8 le co-contrôle $\tilde{E}(t), t \in T$, correspondant au contrôle de support $\{\bar{u}, \tilde{Q}_s\}$ et construisons le quasi-contrôle $\tilde{\omega}(t) = (\tilde{\omega}_1(t), \dots, \tilde{\omega}_r(t))'$, $t \in T$ où

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_i(t) = d_i^+, & \text{si } \tilde{E}_i(t) > 0; \\ \tilde{\omega}_i(t) = d_i^-, & \text{si } \tilde{E}_i(t) < 0; \\ \tilde{\omega}_i(t) \in [d_i^-, d_i^+], & \text{si } \tilde{E}_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, r. \end{cases}$$

La quasi-trajectoire $\tilde{\kappa}(t), t \in T$, correspondant à ce quasi-contrôle vérifie l'équation :

$$\dot{\tilde{\kappa}}(t) = A\tilde{\kappa}(t) + B\tilde{\omega}(t), \quad \tilde{\kappa}(0) = x_0, \quad t \in T.$$

Introduisons deux paramètres $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$ et notons

$$T_i^* = \{t \in T : \text{sign}\tilde{E}_i(t) \neq \text{sign}E_i(\tilde{\omega}, t)\}, \quad i = 1, \dots, r,$$

où $E(\tilde{\omega}, t), t \in T$, est le co-contrôle construit à partir du couple $\{\tilde{\omega}, \tilde{Q}_s\}$.

Si

$$\|G\tilde{\kappa}(t_*) - g\| \leq \mu_1, \quad |T_i^*| \leq \mu_2, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.17)$$

alors, on passe à la procédure finale décrite ci-après.

Supposons que les conditions 2.17 ne sont pas vérifiées et $\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_s) > \varepsilon$. Si $G\tilde{\kappa}(t_*) = g$ alors on construit un nouveau contrôle admissible de la forme

$$\bar{\bar{u}}(t) = \bar{u}(t) + \theta(\tilde{\omega}(t) - \bar{u}(t)), t \in T, 0 < \theta \leq 1,$$

avec

$$\theta = \min\{1, \theta_{\gamma_0}\}, \theta_{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_s)}{\gamma_0}, & \text{si } \gamma_0 > 0 \\ \infty, & \text{si } \gamma_0 = 0 \end{cases}, \quad (2.18)$$

et

$$\gamma_0 = (\tilde{\kappa}(t_*) - \bar{x}(t_*))' D(\tilde{\kappa}(t_*) - \bar{x}(t_*)),$$

où $\bar{x}(t), t \in T$ est la trajectoire correspondante au contrôle \bar{u} . Nous avons la relation :

$$J(\bar{\bar{u}}) - J(\bar{u}) = -\theta\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_s) + \theta^2 \frac{\gamma_0}{2} \leq -\frac{1}{2}\theta\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_s) < 0. \quad (2.19)$$

Alors, nous commençons une nouvelle itération avec le contrôle de support $\{\bar{\bar{u}}, \tilde{Q}_s\}$.

Dans le cas où $G\tilde{\kappa}(t_*) \neq g$, nous considérerons le problème dual du problème 2.1 2.3 défini par :

$$\begin{cases} \max_{\lambda} L(\lambda) = -\frac{1}{2}\kappa' D\kappa + y'g - \psi'(0)x_0 + \int_0^{t_*} v'(t)d^-dt \\ \quad - \int_0^{t_*} w'(t)d^+dt, \\ \psi'(t)B + v'(t) - w'(t) = 0, \quad v(t) \geq 0, \quad w(t) \geq 0, t \in T, \\ \dot{\psi} = -A'\psi, \quad \psi(t_*) = G'y - D\kappa - c, \end{cases} \quad (2.20)$$

où $\lambda = (\kappa, y, v(t), w(t), t \in T), \kappa \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

En fixant le vecteur $\kappa = \bar{x}(t_*)$, le problème 2.20 devient linéaire :

$$\begin{cases} \max L_{\bar{u}}(\lambda) = -\frac{1}{2}\bar{x}'(t_*)D\bar{x}(t_*) + y'g - \psi'(0)x_0 \\ \quad + \int_0^{t_*} v'(t)d^-dt - \int_0^{t_*} w'(t)d^+dt, \\ \psi'(t)B + v'(t) - w'(t) = 0, v(t) \geq 0, w(t) \geq 0, t \in T, \\ \dot{\psi} = -A'\psi, \psi(t_*) = G'y - D\bar{x}(t_*) - c. \end{cases} \quad (2.21)$$

Le vecteur $\tilde{\lambda} = (\tilde{y}, \tilde{v}(t), \tilde{w}(t), t \in T)$, où

$$\begin{cases} \tilde{y}^T = \left((D\bar{x}(t_*) + c)' q_i(\tau_j), i \in \tilde{I}_j, j \in \tilde{J}_s \right)' P^{-1}(\tilde{Q}_s), \\ \tilde{v}_i(t) = 0, \tilde{w}_i(t) = \tilde{E}_i(t), \quad \text{pour } \tilde{E}_i(t) \geq 0, \\ \tilde{v}_i(t) = -\tilde{E}_i(t), \tilde{w}_i(t) = 0, \quad \text{pour } \tilde{E}_i(t) < 0, \quad t \in T, i = 1, \dots, r, \end{cases} \quad (2.22)$$

est une solution réalisable duale accordée du problème 2.21.

Calculons le m -vecteur

$$\gamma(\tilde{I}_s, \tilde{J}_s) = (\gamma_{ij}, i \in \tilde{I}_j, j \in \tilde{J}_s) = P^{-1}(\tilde{Q}_s)[g - G\tilde{k}(t_*)],$$

et posons $|\gamma_{i_0 j_0}| = \max |\gamma_{ij}|, i \in \tilde{I}_j, j \in \tilde{J}_s$. Faisons une itération du problème dual 2.21 en construisant une autre solution duale accordée $\bar{\lambda} = (\bar{y}, \bar{v}(t), \bar{w}(t), t \in T)$ du problème 2.21 selon les relations 2.22 où

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \tilde{\lambda} + \sigma \Delta \lambda, \quad \bar{y} = \tilde{y} + \sigma \Delta y, \quad \bar{v}(t) = \tilde{v}(t) + \sigma \Delta v(t); \\ \bar{w}(t) &= \tilde{w}(t) + \sigma \Delta w(t), \quad \bar{E}(t) = \tilde{E}(t) + \sigma \delta(t), \end{aligned}$$

$$\delta(t) = (\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_r(t)), \quad t \in T, \sigma \geq 0.$$

Posons

$$\Delta y' = e' P^{-1}(\tilde{Q}_s) \text{ sign } \gamma_{i_0 j_0}, \quad \delta(t) = \Delta y' p(t),$$

où $e = (e_{ij}, i \in \tilde{I}_j, j \in \tilde{J}_s), e_{ij} = 0, (i, j) \neq (i_0, j_0), e_{i_0 j_0} = 1$.

Déterminons les fonctions $\sigma_i(t), t \in T, i = 1, \dots, r$:

$$\sigma_i(t) = \begin{cases} -\frac{\tilde{E}_i(t)}{\delta_i(t)}, & \text{si } \tilde{E}_i(t)\delta_i(t) < 0; \\ 0, & \text{si } [\tilde{E}_i(t) = 0, \delta_i(t) > 0, \tilde{\omega}_i(t) \neq d_i^+] \\ & \text{ou } [\tilde{E}_i(t) = 0, \delta_i(t) < 0, \tilde{\omega}_i(t) \neq d_i^-]; \\ \infty, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Construisons pour $i = 1, \dots, r$, les ensembles

$$\begin{cases} T(i, \sigma) = \{t \in T : \sigma_i(t) < \sigma\}, \\ T^+(i, \sigma) = \{t \in T(i, \sigma) : \tilde{E}_i(t) > 0\} \\ T^-(i, \sigma) = \{t \in T(i, \sigma) : \tilde{E}_i(t) < 0\}. \end{cases}$$

$$\text{Il est clair que } \text{sign} \bar{E}_i(t) = \begin{cases} -\text{sign} \tilde{E}_i(t), & \text{si } t \in T(i, \sigma); \\ \text{sign} \tilde{E}_i(t), & \text{si } t \in T \setminus T(i, \sigma). \end{cases}$$

Calculons l'accroissement du critère de qualité du problème 2.21

$$\begin{aligned}
 L_{\bar{u}}(\bar{\lambda}) - L_{\bar{u}}(\tilde{\lambda}) &= \sigma |\gamma_{i_0 j_0}| + \sigma \sum_{i=1}^r \int_0^{t^*} \delta_i(t) \tilde{\omega}_i(t) dt + \sigma \sum_{i=1}^r \int_0^{t^*} (\Delta v_i(t) d_i^-) \\
 &\quad - \Delta w_i(t) d_i^+) dt \\
 &= \sigma |\gamma_{i_0 j_0}| + \sum_{i=1}^r (d_i^+ - d_i^-) \left(\int_{T^+(i, \sigma)} [\tilde{E}_i(t) + \sigma \delta_i(t)] dt \right. \\
 &\quad \left. - \int_{T^-(i, \sigma)} [\tilde{E}_i(t) + \sigma \delta_i(t)] dt \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse de changement du critère de qualité dans la direction $\Delta \lambda$ est :

$$\alpha(\sigma) = |\gamma_{i_0 j_0}| - \sum_{i=1}^r (d_i^+ - d_i^-) \int_{T(i, \sigma)} |\delta_i(t)| dt. \quad (2.23)$$

Nous avons par construction $\alpha(0) = |\gamma_{i_0 j_0}| > 0$, $\alpha(\bar{\sigma}) < \alpha(\sigma), \forall \bar{\sigma} > \sigma$. Déterminons $\sigma_0 \geq 0$ tel que $\alpha(\sigma_0 - \xi) > 0$, $\alpha(\sigma_0 + 0) \leq 0$, pour tout $0 < \xi < \sigma_0$.

Soit $(i_1, \tau_{j_1}) \in \{(i, t) : i \in I, t \in T\} \setminus \{(i, \tau_j) : i \in \tilde{I}_j, j \in \tilde{J}_s\}$ un couple tel que $\tilde{E}_{i_1}(\tau_{j_1}) + \sigma_0 \delta_{i_1}(\tau_{j_1}) = 0$, $\delta_{i_1}(\tau_{j_1}) \neq 0$. Changeons le support \tilde{Q}_s par $\bar{Q}_s = \{\bar{I}_s, \bar{T}_s\}$, $\bar{I}_s = \{\bar{I}_j, j \in \bar{J}_s\}$, $\bar{T}_s = \{\tau_j, j \in \bar{J}_s\}$, comme suit :

1. si $j_1 \notin \tilde{J}_s$ et $\tilde{I}_{j_0} = \{i_0\}$, alors $\bar{J}_s = (\tilde{J}_s \setminus j_0) \cup j_1, \bar{I}_j = \tilde{I}_j, j \in \bar{J}_s \setminus j_1, \bar{I}_{j_1} = \{i_1\}$;
2. si $j_1 \notin \tilde{J}_s$ et $|\tilde{I}_{j_0}| > 1$, alors $\bar{J}_s = \tilde{J}_s \cup j_1, \bar{I}_j = \tilde{I}_j, j \in \tilde{J}_s \setminus j_0, \bar{I}_{j_0} = \tilde{I}_{j_0} \setminus i_0, \bar{I}_{j_1} = \{i_1\}$;
3. si $j_1 \in \tilde{J}_s$, et $\tilde{I}_{j_0} = \{i_0\}$, alors $\bar{J}_s = \tilde{J}_s \setminus j_0, \bar{I}_j = \tilde{I}_j, j \neq j_1, \bar{I}_{j_1} = \tilde{I}_{j_1} \cup i_1$;
4. si $j_1 \in \tilde{J}_s$ et $|\tilde{I}_{j_0}| > 1$, alors $\bar{J}_s = \tilde{J}_s, \bar{I}_j = \tilde{I}_j, j \neq j_0, j \neq j_1, \bar{I}_{j_0} = \tilde{I}_{j_0} \setminus i_0, \bar{I}_{j_1} = \tilde{I}_{j_1} \cup i_1$

En changeant \tilde{Q}_s par le nouveau support \bar{Q}_s , la valeur de la fonctionnelle dans le problème 2.21 diminuera de la quantité $\int_0^{\sigma_0} \alpha(\sigma) d\sigma$. Nous avons alors

$$\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s) = \beta(\bar{u}, \tilde{Q}_s) - \int_0^{\sigma_0} \alpha(\sigma) d\sigma. \quad (2.24)$$

Si $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s) \leq \varepsilon$, alors nous arrêtons le processus de résolution du problème 2.1 2.3. Dans le cas contraire, nous commencerons une nouvelle itération avec $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$, ou alors nous passerons à la procédure finale si les conditions 2.17 sont satisfaites pour $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$.

2.3.3 Procédure Finale

Supposons que les conditions 2.17 sont satisfaites pour le quasi-contrôle $\tilde{\omega}(t)$, $t \in T$. et la quasi-trajectoire $\tilde{\kappa}(t)$, $t \in T$, correspondant au contrôle de support $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$. Soit

$\{t_1, \dots, t_s\}$, $m \leq s \leq n$, l'ensemble de tous les points de T tel que $0 \leq t_1 < \dots < t_s \leq t_*$, $\tilde{E}_i(t_j) = 0$, $i \in I_j \neq \emptyset$, $\tilde{E}_i(t_j) \neq 0$, $i \in I \setminus I_j$, $j \in J = \{1, \dots, s\}$.

Considérons le cas où $|I_j| = 1$ et $\dot{\tilde{E}}_i(t_j) \neq 0$, $i \in I_j$, $j \in J$.

La procédure finale consiste à chercher la solution y , $\tau = (\tau_j, j \in J)$ des $(m + s)$ équations du système

$$\begin{cases} \sum_{i \in I_j, j \in J} d_{ij} \int_{t_j}^{\tau_j} p_i(t) dt + g - G\tilde{\kappa}(t_*) = 0, \\ E_i(y, \tau, \tau_j) = 0, \quad i \in I_j, \quad j \in J, \end{cases} \quad (2.25)$$

où

$$d_{ij} = (d_i^+ - d_i^-) \text{sign } \tilde{E}_i(t_j), E_i(y, \tau, t) = y' p_i(t) - (D\kappa(t_*, \tau) + c)' q_i(t); \quad \kappa(t, \tau), \quad t \in T,$$

est la trajectoire correspondante au contrôle $\omega(t, \tau) = (\omega_i(t, \tau), i \in I)$, $t \in T$, définie comme suit : soient t_{j_1}, \dots, t_{j_p} , $0 \leq p \leq s$, les racines de la composante $\tilde{E}_i(t)$ sur l'ensemble T . Si $p = 0$, alors nous posons $\omega_i(t, \tau) = \tilde{\omega}_i(t)$, $t \in T$. Si $p \geq 1$, nous définissons comme suit :

$$\omega_i(t, \tau) = \begin{cases} d(i, j_1), & t \in [0, \tau_{j_1}); \\ d(i, j_q), & t \in [\tau_{j_{q-1}}, \tau_{j_q}), \quad q = 2, \dots, p; \\ d_i^+ + d_i^- - d(i, j_p), & t \in [\tau_{j_p}, t_*], \end{cases}$$

où $d(i, j) = \frac{1}{2}(d_i^+ + d_i^- - d_{ij})$.

Nous pouvons résoudre le système 2.25 par la méthode de Newton, avec l'approximation initiale $y^{(0)} = y_0$, $\tau^{(0)} = (t_j, j \in J)$, où y_0 est le vecteur 2.7 construit avec le couple $\{\tilde{\omega}, \bar{Q}_s\}$. Alors, pour des paramètres μ_1 et μ_2 assez petits, le contrôle optimal prend la forme suivante :

$$u^0(t) = \omega(t, \tau), \quad t \in T.$$

2.4 Exemple numérique

Considérons deux points matériels dont les équations de mouvement sont données par :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = u_1, \quad y_1(0) = \dot{y}_1(0) = \ddot{y}_1(0) = 0; \\ \ddot{y}_2 = u_2, \quad y_2(0) = 5, \quad \dot{y}_2(0) = \ddot{y}_2(0) = 0; \\ \ddot{y}_1(t_*) = -6, \quad \ddot{y}_2(t_*) = -6, \end{cases}$$

où $|u_1(t)| \leq 3$, $|u_2(t)| \leq 3$, $t \in T = [0, t_*]$, $t_* = 4$.

Posons

$$x_1 = y_1, x_2 = \dot{y}_1, x_3 = y_2, x_4 = \dot{y}_2, x_5 = y_2, x_6 = \dot{y}_2, x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)',$$

Nous obtenons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_3, & x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3 = u_1, & x_3(0) = 0, \\ \dot{x}_4 = x_5, & x_4(0) = 5, \\ \dot{x}_5 = x_6, & x_5(0) = 0, \\ \dot{x}_6 = u_2, & x_6(0) = 0. \end{cases}$$

Il s'agit de trouver deux contrôles admissibles $u_1^0(\cdot)$ et $u_2^0(\cdot)$ tels qu'à l'instant terminal, les accélérations des deux points matériels vérifient $x_3(t_*) = x_6(t_*) = -6$ et que la fonctionnelle suivante soit minimale :

$$J(u) = (x_1(t_*) - x_4(t_*))^2 + (x_2(t_*) - x_5(t_*))^2 + 2x_1(t_*) - 324x_2(t_*) + 64x_4(t_*) + 37x_5(t_*).$$

Le problème considéré peut être mis sous la forme 2.1 2.3, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = (-6, -6), \quad c = (2, -324, 0, 64, 37, 0)', \quad u = (u_1, u_2)',$$

$$n = 6, m = 2, r = 2.$$

Considérons le contrôle $u(t) = (u_1(t), u_2(t))', t \in [0, 4]$:

$$u_1(t) = \begin{cases} -2, & t \in [0, 2[, \\ -1, & t \in [2, 4], \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 2[, \\ -3 & t \in [2, 4]. \end{cases}$$

Nous avons $x(4) = (-20, -14, -6, 1, -6, -6)'$ et $Hx(4) = (-6, -6)'$. Le contrôle $u(t)$ est admissible et la fonctionnelle vaut $J(u) = 4843$. Assignons au contrôle admissible $u(t)$ le support $Q_s = \{I_s, T_s\}$, $I_s = \{I_1, I_2\}$, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2\}$, $T_s = \{t_1, t_2\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$, $J_s = \{1, 2\}$. Calculons les matrices $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$, $p(t) = G_q(t)$ et la matrice de support $P_s = P(Q_s)$:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{(4-t)^2}{2} & 0 \\ 4-t & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{(4-t)^2}{2} \\ 0 & 4-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p(t) = G_q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_s = (p_1(t_1), p_2(t_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le vecteur des multiplicateurs y et le co-contrôle $E(t)$ selon les formules 2.7 et 2.8 respectivement :

$$y^T = [(Dx(t_*) + c)' q_i(t_j), i \in I_j, j \in J_s] P_s^{-1} = (-1435, 198.8),$$

$$E'(t) = (E_1(t), E_2(t)) = (20t^2 - 500t + 245, -53t^2 + 477t - 861.2).$$

Alors

$$\begin{cases} E_1(t) > 0, t \in [0, 0.5[, \\ E_1(t) < 0, t \in]0.5, 4], \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E_2(t) < 0, t \in [0, 2.5[, \\ E_2(t) > 0, t \in]2.5, 4]. \end{cases}$$

Ainsi, $T_1^+ = [0, 0.5[$, $T_1^- =]0.5, 4]$, $T_2^+ =]2.5, 4]$, $T_2^- = [0, 2.5[$ et $\beta(u, Q_s) = 8897.9 > \varepsilon$.

Construisons un nouveau contrôle admissible. Posons $\nu = 10$ et $h = 0.05$. Nous avons alors $|E_1(t)| \leq 10$, $t \in [0.479184, 0.520851]$ et $|E_2(t)| \leq 10$, $t \in [2.453143, 2.547497]$.

Ainsi nous obtenons : $T_\eta = [0.479184, 0.520851] \cup [2.453143, 2.547497]$.

Subdivisons T_η en 4 intervalles $T_\eta = \cup_{i=1}^{N=4} [\tau_i, \tau^i]$ tels que :

$$\tau_1 = 0.479184, \tau^1 = \tau_2 = 0.5, \tau^2 = 0.520851, \tau_3 = 2.453143, \tau^3 = \tau_4 = 2.5, \tau^4 = 2.547497.$$

L'ensemble T et les différents éléments du problème auxiliaire sont définis comme suit :

$$T_* = [0, 0.479184[\cup]0.520851, 2.453143[\cup]2.547497, 4], N = 4, S = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$a_1 = \begin{cases} +5, & t \in [0, 0.479184[, \\ -1, & t \in [0.520851, 2], \\ -2, & t \in [2, 4], \end{cases} \quad a_2 = \begin{cases} -3, & t \in [0, 2], \\ 0, & t \in [2, 2.453143], \\ +6, & t \in [2.547497, 4]; \end{cases}$$

$$u_1(t) = \begin{cases} u_{11} = -2, & t \in [0.479184, 0.5[, \\ u_{12} = -2, & t \in [0.5, 0.520851[, \\ u_{13} = -1, & t \in [2.453143, 2.5[, \\ u_{14} = 1, & t \in [2.5, 2.547497[, \end{cases} \quad u_2 = \begin{cases} u_{21} = 0, & t \in [0.479184, 0.5[, \\ u_{22} = 0, & t \in [0.5, 0.520851[, \\ u_{23} = -3, & t \in [2.453143, 2.5[, \\ u_{24} = -3, & t \in [2.5, 2.547497]; \end{cases}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.0208 & 0.0209 & 0.0469 & 0.0475 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.8945 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0208 & 0.0209 & 0.0469 & 0.0475 & 2.84 \end{pmatrix};$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0.1283 & 0.1270 & 0.0544 & 0.0518 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.8229 \\ 0.0731 & 0.0728 & 0.0714 & 0.0701 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2404 \\ 0.0208 & 0.0209 & 0.0469 & 0.0475 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.8945 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1283 & 0.1270 & 0.0544 & 0.0518 & -24.1699 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0731 & 0.0728 & 0.0714 & 0.0701 & -11.2332 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0208 & 0.0209 & 0.0469 & 0.0475 & 2.8400 \end{pmatrix};$$

$$\beta = (-0.1040, 0.1042, 40.7943, 42.2478, 13.3299, 13.1681, 0.2322, -0.2396, -8650.2589)^T.$$

En résolvant le problème de support auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \min \Delta J(u) = \beta' l + \frac{1}{2} l' Z' D Z l, \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 v_{ij} l_{ij} + v_5 l_5 = 0, \\ -3 - u_{ij} \leq l_{ij} \leq 3 - u_{ij}, \quad j = \bar{1}, \bar{4}, \quad i = \bar{1}, \bar{2}, \quad 0 \leq l_5 \leq 1, \end{cases} \quad (2.26)$$

nous obtenons $l^0 = ((l_{ij})_{i=\bar{1}, \bar{2}, j=\bar{1}, \bar{4}}, l_5) = (5, 5, 3, -2, -3, -3, 0, 0, 0.044)'$.

Le nouveau contrôle admissible prend la forme suivante :

$$\bar{u}_1 = \begin{cases} -1.7799, & t \in [0, 0.479184[, \\ 3, & t \in [0.479184, 0.5[, \\ 3, & t \in [0.5, 0.520851[, \\ -2.044, & t \in [0.520851, 2[, \\ -1.088, & t \in [2, 2.453143[, \\ -0.7, & t \in [2.453143, 2.5[, \\ -3, & t \in [2.5, 2.547497[, \\ -1.088 & t \in [2.547497, 4], \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{u}_2 = \begin{cases} -0.132, & t \in [0, 0.479184[, \\ -3, & t \in [0.479184, 0.5[, \\ -3, & t \in [0.5, 0.520851[, \\ -0.132, & t \in [0.520851, 2[, \\ -3, & t \in [2, 2.453143[, \\ -3, & t \in [2.453143, 2.5[, \\ -3, & t \in [2.5, 2.547497[, \\ -2.7359 & t \in [2.547497, 4]. \end{cases}$$

L'état final et la valeur de $J(\bar{u})$ sont : $\bar{x}(4) = (-18.4228, -13.3351, -6, -0.8295, -6.9319, -6)'$ et $J(\bar{u}) = 4324.7 < J(u) = 4843$.

Pour le contrôle de support $\{\bar{u}, Q_s\}$, nous avons $y = (-1382.1, 186.3)'$. Alors le co-contrôle vaut : $E(t) = (E1(t), E2(t))' = (16.5933t^2 - 469.5528t + 230.6281, -49.5933t^2 + 446.5528t - 806.4239)'$. Ainsi, $\beta(\bar{u}, Q_s) = 7927.6 > \varepsilon$.

Itération duale

Le quasi-contrôle correspondant $\tilde{\omega}(t) = (\tilde{\omega}_1(t), \tilde{\omega}_2(t))$, $t \in [0, 4]$ est :

$$\tilde{\omega}_1 = \begin{cases} +3, & t \in [0, 0.5[, \\ -3, & t \in [0.5, 4], \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_2 = \begin{cases} -3, & t \in [0, 2.5[, \\ +3, & t \in]2.5, 4]. \end{cases}$$

l'état final correspondant est : $\tilde{\kappa}(4) = (-10.875, -12.75, -9, -23.625, -17.25, -3)'$, avec $G\tilde{\kappa}(4) - g = (-3, 3)'$, $\gamma = P^{-1}(Q_s)[g - G\tilde{\kappa}(4)] = (-3, 3)'$, $|\gamma_{i_0j_0}| = |\gamma_{11}| = |\gamma_{22}| = 3$, $e = (e_{ij}, i \in I_j, j \in J_s) = (1, 1)$, $\Delta y' = e' P^{-1}(Q_s) \text{sign } \gamma_{i_0j_0} = (1, -1)$, $\delta(t) = \Delta y' p(t) = (1, -1)$.

Afin de déterminer les ensembles $T(1, \sigma)$ et $T(2, \sigma)$, calculons :

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} \infty, & t \in [0, 0.5[, \\ -16.5933t^2 + 469.5528t - 230.6281, & t \in [0.5, 4], \end{cases}$$

et

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} \infty, & t \in [0, 2.5[, \\ -49.5933t^2 + 446.5528t - 806.4239, & t \in [2.5, 4]. \end{cases}$$

Ainsi

$$T(1, \sigma) = [0.5, \quad t_1(\sigma)[\quad \text{et} \quad T(2, \sigma) = [2.5, \quad t_2(\sigma)[,$$

où

$$t_1(\sigma) = 14.148867 - \frac{\sqrt{205172.306981 - 66.3732\sigma}}{33.1866},$$

et

$$t_2(\sigma) = 4.505782 - \frac{\sqrt{39436.541412 - 198.2132\sigma}}{99.1066}.$$

Nous avons :

$$\alpha(\sigma) = -90.927894 + \frac{\sqrt{205172.306981 - 66.3732\sigma}}{5.5311} + \frac{\sqrt{39436.513587 - 198.3732\sigma}}{16.5311}.$$

Alors, $\alpha(\sigma) = 0 \Rightarrow \sigma^0 = 64.5374$.

De l'équation $\tilde{E}_2(t) + \sigma^0 \delta_2(t) = 0$, nous obtenons $t_1 = 2.856771$ et $t_2 = 6.147525$. Par conséquent, nous cherchons le sous ensemble $\bar{T}_s = \{0.5, 2.856771\}$. Le co-contrôle correspondant au support $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$ est donné par : $(\bar{E}_1(t), \bar{E}_2(t)) = (16.5933t^2 - 469.5528t + 230.6281, -49.5933t^2 + 446.5528t - 870.9613)$, où

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_1(t) > 0, \quad t \in [0, \quad 0.5[, \\ \bar{E}_1(t) < 0, \quad t \in]0.5, \quad 4], \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_2(t) < 0, \quad t \in [0, \quad 2.856771[, \\ \bar{E}_2(t) > 0, \quad t \in]2.856771, \quad 4]. \end{array} \right.$$

Nous avons ainsi

$$\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s) = \beta(\bar{u}, Q_s) - \int_0^{\sigma^0} \alpha(\sigma) d\sigma = 7828.5264 > \varepsilon.$$

Construisons le quasi-contrôle $\bar{\omega}(t) = (\bar{\omega}_1(t), \bar{\omega}_2(t)), t \in [0, 4]$:

$$\bar{\omega}_1(t) = \left\{ \begin{array}{l} +3, \quad t \in [0, \quad 0.5[, \\ -3, \quad t \in [0.5, \quad 4], \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_2(t) = \left\{ \begin{array}{l} -3, \quad t \in [0, \quad 2.856771[, \\ +3, \quad t \in [2.856771, \quad 4]. \end{array} \right.$$

Calculons $\bar{k}(4) = (-10.8750, -12.75, -9, -25.5058, -20.0791, -5.1406)'$, $y(\bar{\omega}) = (-891.219, 48.242)$ et le co-contrôle correspondant $\bar{E}(\bar{\omega}, t) = (\bar{E}_1(\bar{\omega}, t), \bar{E}_2(\bar{\omega}, t))'$, $t \in T$, vaut :

$$(\bar{E}_1(\bar{\omega}, t), \bar{E}_2(\bar{\omega}, t)) = (-15.6308t^2 - 184.2954t + 96.0554, -17.3692t^2 + 161.2954t - 319.0315)',$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_1(\bar{\omega}, t) > 0, \quad t \in [0, 0.5[, \\ \bar{E}_1(\bar{\omega}, t) < 0, \quad t \in]0.5, 4], \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_2(\bar{\omega}, t) < 0, \quad t \in [0, 2.856771[, \\ \bar{E}_2(\bar{\omega}, t) > 0, \quad t \in]2.856771, 4], \end{array} \right.$$

$$G\bar{k}(4) - g = (-3, 0.8593)', \quad |T_1^*| = 0 \quad \text{et} \quad |T_2^*| = 0.$$

Ainsi, nous passons à la procédure finale.

Procédure finale

Nous avons :

$$d_{11} = -d_{22} = -6, \quad \omega_1(t, \tau_1) = \begin{cases} +3, & t \in [0, \tau_1[, \\ -3, & t \in [\tau_1, 4], \end{cases}, \quad \omega_2(t, \tau_2) = \begin{cases} -3, & t \in [0, \tau_2[, \\ +3, & t \in [\tau_2, 4], \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_1(y, \tau, \tau_1) &= y' p_1(t) - (D\kappa(4, \tau) + c)' q_1(\tau_1) \\ &= y_1 - \frac{(4 - \tau_1)^2}{2} (-136 + 96\tau_1 - 24\tau_1^2 + 2\tau_1^3 + 96\tau_2 - 24\tau_2^2 + 2\tau_2^3) \\ &\quad - (4 - \tau_1)(-420 + 48\tau_1 - 6\tau_1^2 + 48\tau_2 - 6\tau_2^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2(y, \tau, \tau_2) &= y' p_2(t) - (D\kappa(4, \tau) + c)' q_2(\tau_2) \\ &= y_2 - \frac{(4 - \tau_2)^2}{2} (202 - 96\tau_1 + 24\tau_1^2 - 2\tau_1^3 - 96\tau_2 + 24\tau_2^2 - 2\tau_2^3) \\ &\quad - (4 - \tau_2)(133 - 48\tau_1 + 6\tau_1^2 - 48\tau_2 + 6\tau_2^2). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{11} \int_{t_1}^{\tau_1} p_1(t) dt + d_{22} \int_{t_2}^{\tau_2} p_2(t) dt + \begin{pmatrix} 3 \\ -0.8593 \end{pmatrix} = 0, \\ E_1(y, \tau, \tau_1) = 0, \\ E_2(y, \tau, \tau_2) = 0. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Après résolution du système (2.27) par la méthode de Newton avec l'approximation initiale

$$y^{(0)} = y(\bar{\omega}) = (-891.219, 48.242)', \quad \tau_1^{(0)} = 0.5 \text{ et } \tau_2^{(0)} = 2.856771,$$

nous obtenons :

$$y = (y_1, y_2)' = (-575.999777, 2.000222)', \quad \tau_1 = 1 \quad \text{et} \quad \tau_2 = 2.999987.$$

Le contrôle de support optimal $\{u^0, T_s^0\}$ avec $T_s^0 = \{1, 2.999987\}$ prend la forme :

$$u_1^0(t) = \begin{cases} +3, & t \in [0, 1[, \\ -3, & t \in [1, 4], \end{cases} \quad u_2^0(t) = \begin{cases} -3, & t \in [0, 2.999987[, \\ +3, & t \in [2.999987, 4], \end{cases}$$

avec l'état final $x^0(4) = (5, -2.999999, -5.999999, -25.999960, -20.999921, -5.999922)'$ et la valeur minimale de la fonctionnelle $J(u^0) = -173.999843$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu le problème de contrôle optimal à plusieurs entrées généralisant le contrôle scalaire et dont la fonction objectif est quadratique convexe. Sur la base du concept de support, nous avons exposé une méthode constructive primale-duale pour résoudre le problème considéré. L'idée principale consiste à obtenir la solution optimale en trois procédures : le changement de contrôle, le changement de support et la procédure finale.

Chapitre 3

Méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire quadratique avec contraintes intermédiaires

Introduction

Dans ce travail, nous présentons la méthode étudié dans [2], par la suit nous résolvons un exemple numérique par le baie de cette méthode. Les auteurs [2] ont généralisé les résultats [3, 5, 22] à une classe étendue de problèmes de contrôle optimal linéaire-quadratique avec contraintes intermédiaire. La méthode numérique itérative étudié évite la discrétisation du système dynamique. En effet, en utilisant un contrôle constant par morceaux, le problème est transformé en un problème de programmation linéaire quadratique, qui peut être résolu efficacement par des méthodes standards.

3.1 Position du problème

Dans la classe des contrôles constants par morceaux, considérons le problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état aux instants intermédiaires :

$$\max J(u) = c'x(t^*) + \frac{1}{2}x'(t^*)Dx(t^*), \quad (3.1)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (3.2)$$

$$g_{*(s)} \leq H_{(s)}x(t_s) \leq g_{(s)}^*, t_s \in T = [0, t^*], s \in S, \quad (3.3)$$

$$d^- \leq u(t) \leq d^+, t \in T = [0, t^*], \quad (3.4)$$

où : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état à l'instant t et x^0 étant l'état initial, la fonction $u(t) \in \mathbb{R}^r$ représente le contrôle (commande) multivariable ; $A = A(K, K)$, $B = B(K, J)$ et $H_{(s)} = H_{(s)}(I(t_s), K)$ sont respectivement $n \times n$, $n \times r$ et $m_s \times n$ -matrices ; $g_{(s)}^* = g_{(s)}^*(I(t_s))$, $g_{*(s)} = g_{*(s)}(I(t_s))$ sont des m_s -vecteurs et $d^- = d^-(J)$, $d^+ = d^+(J)$ sont de dimension r , avec $K = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, \dots, r\}$, $I(t_s) = \{1, \dots, m_s\}$, $s \in S = \{1, \dots, m\}$; c est un vecteur de dimension correspondante, D est une matrice symétrique d'ordre n . Le symbole $(')$ représente l'opérateur de transposition.

En utilisant la formule de Cauchy

$$x(t) = F(t) \left[x_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau \right], t \in T, \quad F(t) = \exp(At), \quad (3.5)$$

nous pouvons écrire les contraintes de phase intermédiaire 3.3 sous la forme suivante :

$$\bar{g}_{*(s)} \leq \int_0^{t_s} \varphi(I(t_s), t)u(t)dt \leq \bar{g}_{(s)}^*, \quad s \in S, \quad (3.6)$$

où $\bar{g}_{*(s)} = g_{*(s)} - H_{(s)}F(t_s)x_0$, $\bar{g}_{(s)}^* = g_{(s)}^* - H_{(s)}F(t_s)x_0$,

$$\varphi(I(t_s), t) = \begin{cases} H_{(s)}F(t_s)F^{-1}(t)B, & \text{if } 0 \leq t \leq t_s, \\ 0, & \text{if } t > t_s, \end{cases} \quad (3.7)$$

avec

$$\varphi(I(t_s), t) = \varphi(t_s, t) = (\varphi_{ij}(t_s, t), i \in I(t_s), j \in J) = (\varphi_j(t_s, t), j \in J), s \in S,$$

et nous définissons

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(I(t_1), t) \\ \varphi(I(t_2), t) \\ \vdots \\ \varphi(I(t_m), t) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

L'outil principal de la méthode adaptée est le support qui est directement lié à une matrice non singulière. Afin de le définir, construisons le sous-ensemble $I_{\text{sup}}(t_s) \in I(t_s)$ et $I_{\text{sup}} = \{I_{\text{sup}}(t_s), s \in S\}$, avec $|I_{\text{sup}}| = p \leq \sum_{s \in S} m_s$.

Sur l'intervalle T choisissons un ensemble de moments isolés $T_{\text{sup}} = \{t_k, k \in K^*\}$, avec

$K^* = \{1, \dots, k^*\}, k^* \leq p.$

Pour chaque moment $t_k \in T_{\text{sup}}$, nous associons un ensemble d'indices $J_k \subset J$, tel que $\sum_{k \in K^*} |J_k| = |I_{\text{sup}}|$. Posons $J_{\text{sup}} = \{J_k, k \in K^*\}$, $Q_{\text{sup}} = \{I_{\text{sup}}, J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}}\}$ et construisons la matrice carrée d'ordre p suivante :

$$\varphi_{\text{sup}} = \varphi(Q_{\text{sup}}) = (\varphi_{ij}(t_s, t_k), i \in I_{\text{sup}}(t_s), s \in S, j \in J_k, k \in K^*). \quad (3.9)$$

Définition 3.1.

La commande constante par morceaux $u(u(t), t \in T)$ est dite admissible si elle satisfait les contraintes (3.3) et (3.4).

La commande admissible $(u^0(t), t \in T)$ est dite optimale si

$$J(u^0) = \min_u J(u), \quad (3.10)$$

où u parcourt l'ensemble des commandes admissibles.

La trajectoire correspondante $x^0(t), t \in T$, est dite trajectoire optimale.

En outre, on appelle commande sub-optimale (ou ϵ -optimale) toute commande admissible $u^\epsilon(t), t \in T$ satisfaisant l'inégalité :

$$J(u^\epsilon) - J(u^0) \leq \epsilon, \quad (3.11)$$

où $\epsilon \geq 0$ et u^0 est une commande optimale.

Définition 3.2.

L'ensemble $Q_{\text{sup}} = \{I_{\text{sup}}, J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}}\}$ est appelé support du problème (3.1)-(3.4) si la matrice φ_{sup} est inversible.

La paire $\{u, Q_{\text{sup}}\}$, formée de la commande admissible u et du support Q_{sup} , est appelée commande de support.

Définition 3.3.

La commande de support $\{u, Q_{\text{sup}}\}$ est dite non dégénérée si :

1. pour tout instant t_k de T_{sup} et pour tout indice $j \in J_k, k \in K^*$, l'une des deux conditions est vérifiée :

- au voisinage de t_k , la composante $u_j(t), t \in T$, est non critique :

$$d_j^- < u_j(t) < d_j^+, t \in [t_k - \delta, t_k + \delta], \delta > 0,$$

- la commande $u_j(t), t \in T$, est discontinue à l'instant t_k ;

2. en outre, la contrainte suivante est vérifiée :

$$g_{*(s)i} < H_{(s)}(i, K)x(t_s) < g_{(s)i}^*, \forall i \in I_{ns}(t_s) = I(t_s) \setminus I_{\text{sup}}(t_s), s \in S. \quad (3.12)$$

3.2 Critère d'optimalité

Formule d'incrément du critère de qualité

Dans un premier temps, on construit la fonction des potentiels discrète

$$y = (y_{(s)}, s \in S), \quad y_{(s)} = (y_{(s)i}, i \in I(t_s)) = (y_{(s)}(I_{\text{sup}}(t_s)), y_{(s)}(I_{\text{ns}}(t_s))), \quad s \in S,$$

avec $y = (y(I_{\text{sup}}), y(I_{\text{ns}}))$

$$\begin{cases} y'(I_{\text{sup}}) = (y_{(s)i}, i \in I_{\text{sup}}(t_s), s \in S) = ((Dx(t^*) + c)' p_j(t_k), j \in J_K, k \in K^*) \varphi_{\text{sup}}^{-1}, \\ y(I_{\text{ns}}) = (y_{(s)i}, i \in I_{\text{ns}}(t_s), s \in S) = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

où $p(t) = F(t^*) F^{-1}(t) B$.

Définissons le co-contrôle

$$E'(t) = \sum_{s \in S} y'_{(s)} \varphi(I(t_s), t) - (Dx(t^*) + c)' p(t), \quad t \in T. \quad (3.14)$$

Alors on peut écrire

$$E'(t) = \sum_{s \in S} y'_{(s)} H_{(s)} F(t_s) F^{-1}(t) B - (Dx(t^*) + c)' F(t^*) F^{-1}(t) B. \quad (3.15)$$

Soit $\{u, Q_{\text{sup}}\}$ une commande de support du problème (3.1)-(3.4) et considérons une autre commande admissible $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$. L'accroissement de la fonctionnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= J(\bar{u}) - J(u) \\ &= \int_0^{t^*} (Dx(t^* + c)' F(t^* F^{-1}(t) B) \Delta u(t) dt + \zeta \\ &= \int_0^{t^*} (Dx(t^* + c)' p(t) \Delta u(t) dt + \zeta \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec $\zeta = \frac{1}{2} x'(t^*) Dx(t^*) \geq 0$. En utilisant la relation (3.14), l'accroissement de la fonctionnelle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= J(\bar{u}) - J(u) \\ &= \int_0^{t^*} (\sum_{s \in S} y'_{(s)} \varphi(t_s, t) - E'(t)) \Delta u(t) dt + \zeta \\ &= \sum_{s \in S} y'_{(s)} \int_0^{t^*} \varphi(t_s, t) \Delta u(t) dt - \int_0^{t^*} E'(t) \Delta u(t) dt + \zeta \\ &= \sum_{s \in S} y'_{(s)} H_{(s)} \Delta x(t_s) - \int_0^{t^*} E'(t) \Delta u(t) dt + \zeta. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En posant $H_{(s)}\Delta x(t_s) = v_{(s)}$ et en vertu de la relation (3.15), l'accroissement de la fonctionnelle s'écrit :

$$\Delta J(u) = \sum_{s \in S} \sum_{i \in I_{\text{sup}}} y_{(s)i} v_{(s)i} - \int_0^{t^*} E'(t) \Delta u(t) dt. \quad (3.18)$$

définissons

$$\begin{aligned} \beta(u, Q_{\text{sup}}) = & \sum_{j=1}^r \left[\int_{T_j^+} E_j(t) (d_j^+ - u_j(t)) dt + \int_{T_j^-} E_j(t) (d_j^- - u_j(t)) dt \right] + \\ & \sum_{s \in S} \sum_{y_{(s)i} < 0, i \in I_{\text{sup}}(t_s)} y_{(s)i} v_{(s)i}^- + \sum_{s \in S} \sum_{y_{(s)i} > 0, i \in I_{\text{sup}}(t_s)} y_{(s)i} v_{(s)i}^+, \end{aligned} \quad (3.19)$$

avec

$$T_j^+ = \{t \in T : E_j(t) > 0\}, \quad T_j^- = \{t \in T : E_j(t) < 0\}, \quad j \in J,$$

et

$$v^-(I(t_s)) = (v_{(s)i}^-, i \in I(t_s)) = g_{*(s)} - H_{(s)}x(t_s), \quad s \in S,$$

$$v^+(I(t_s)) = (v_{(s)i}^+, i \in I(t_s)) = g_{*(s)}^* - H_{(s)}x(t_s), \quad s \in S.$$

Le nombre $\beta(u, Q_{\text{sup}})$ est appelé estimation de suboptimalité.

Ainsi, nous obtenons une majoration de l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\Delta J(u) = J(u) - J(u)^\circ \leq \beta(u, Q_{\text{sup}}). \quad (3.20)$$

Par conséquent, si $\beta(u, Q_{\text{sup}}) \leq \epsilon$, alors la commande u est une commande ϵ -optimale.

Critère d'optimalité

Théorème 3.1. *Soit (u, Q_{sup}) une commande de support du problème (3.1)-(3.4). Les relations suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} E_j(t) \geq 0, \text{ si } u_j(t) = d_j^+, \\ E_j(t) \leq 0, \text{ si } u_j(t) = d_j^-, \\ E_j(t) = 0, \text{ si } d_j^- < u_j(t) < d_j^+, \quad t \in T, \quad j \in J; \\ y_{(s)i} \geq 0, \text{ si } H_{(s)}(i, K)x(t_s) = g_{*(s)i}^*, \\ y_{(s)i} \leq 0, \text{ si } H_{(s)}(i, K)x(t_s) = g_{*(s)i}, \\ y_{(s)i} = 0, \text{ si } g_{*(s)i} < H_{(s)}(i, K)x(t_s) < g_{*(s)i}^*, \quad i \in I_{\text{sup}}(t_s), \quad s \in S, \end{array} \right. \quad (3.21)$$

sont suffisantes, et dans le cas de la non dégénérescence sont aussi nécessaires, pour l'optimalité de la commande de support (u, Q_{sup}) .

3.2.1 Algorithme de la méthode

Dans cette section, nous présentons une méthode itérative qui évite la discrétisation du système dynamique. Pour cela, soit $\{u, Q_{\text{sup}}\}$ une commande de support initiale, avec $\beta(u, Q_{\text{sup}}) > \epsilon$, $\epsilon \geq 0$. Le but de l'algorithme est de construire une commande ϵ -optimale u^ϵ ou carrément optimale u^* , en faisant des itérations qui consistent à faire le passage d'une commande de support $\{u, Q_{\text{sup}}\}$ à une autre commande de support $\{\bar{u}, \bar{Q}_{\text{sup}}\}$ telle que $J(\bar{u}) \leq J(u)$.

L'algorithme développé comprend trois procédures :

- changement de commande $u \rightarrow \bar{u}$: en utilisant la commande constante par morceaux, le problème se réduit pour chaque itération à un problème de programmation linéaire quadratique, cette procédure permet de construire un nouveau contrôle de support tel que $J(\bar{u}) \leq J(u)$;
- changement de support $Q_{\text{sup}} \rightarrow \bar{Q}_{\text{sup}}$: cette procédure est utilisée pour obtenir, via une itération duale, un nouveau support qui donne une meilleure estimation de suboptimalité, c'est-à-dire, $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_{\text{sup}}) \leq \beta(\bar{u}, Q_{\text{sup}})$;
- procédure finale : elle consiste à déterminer le support optimal de telle manière à avoir la quasi-commande correspondante admissible et donc optimale.

Changement de commande

Soient $\epsilon \geq 0$ un nombre réel donné et $\{u, Q_{\text{sup}}\}$ une commande de support vérifiant $\beta(u, Q_{\text{sup}}) > \epsilon$. Construisons une autre commande admissible $\bar{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t)$, $t \in T$, de telle façon à avoir $J(\bar{u}) \leq J(u)$, où $\Delta u(t)$ est la direction du changement de la commande et $\theta \geq 0$ est le pas maximal admissible le long de cette direction. Pour cela, choisissons les paramètres réels $\alpha > 0$ et $h > 0$, et construisons les ensembles :

$$T_\alpha = \{t \in T : \eta(t) \leq \alpha\}, T_* = T \setminus T_\alpha, \text{ avec } \eta(t) = \min_{j \in J} |E_j(t)|, t \in T.$$

Subdivisons l'ensemble T_α en intervalles $[\tau_k, \tau^k]$, $k = \overline{1, N}$, $\tau_k < \tau^k \leq \tau_{k+1}$,
 $T_\alpha = \bigcup_{k=1}^N [\tau_k, \tau^k]$, de telle façon que nous ayons $\tau^k - \tau_k \leq h$; $u_j(t) = u_{jk} = \text{const}$, $t \in [\tau_k, \tau^k]$, $k = \overline{1, N}$, $j \in J$.

Calculons les quantités suivantes :

$$\beta_{jk} = - \int_{\tau_k}^{\tau^k} E_j(t) dt, \quad q_{(s)jk} = \int_{\tau_k}^{\tau^k} \varphi_j(t_s, t) dt, \quad k = \overline{1, N}, j \in J, s \in S; \quad (3.22)$$

$$\beta_{N+1} = - \sum_{j=1}^r \int_{T_*} E_j(t) \Delta u_j(t) dt + \sum_{i \in I_{\text{sup}}(t_s), s \in S} y_{(s)i} v_{(s)i}; \quad (3.23)$$

$$q_{(s)i(N+1)} = \sum_{j=1}^r \int_{T_*} \varphi_{ij}(t_s, t) \Delta u_j(t) dt - \bar{v}_{(s)i}, \quad i \in I_{\text{sup}}(t_s), \quad s \in S; \quad (3.24)$$

$$q_{(s)i(N+1)} = \sum_{j=1}^r \int_{T_*} \varphi_{ij}(t_s, t) \Delta u_j(t) dt, \quad i \in I_{ns}(t_s), \quad s \in S, \quad (3.25)$$

avec :

$$\bar{v}_{(s)i} = \begin{cases} g_{(s)i}^* - H_{(s)}(i, K)x(t_s), & \text{si } y_{(s)i} > 0, \quad i \in I_{\text{sup}}(t_s), \quad s \in S, \\ g_{*(s)i} - H_{(s)}(i, K)x(t_s), & \text{si } y_{(s)i} < 0, \quad i \in I_{\text{sup}}(t_s), \quad s \in S, \end{cases} \quad (3.26)$$

et

$$\Delta u_j(t) = \begin{cases} d_j^+ - u_j(t), & \text{si } E_j(t) > \alpha, \\ d_j^- - u_j(t), & \text{si } E_j(t) < -\alpha, \quad t \in T_*, \quad j = \overline{1, r}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Posons

$$f_{*(s)} = (f_*(I_{\text{sup}}), f_*(I_{ns})), \quad f_{*(s)}^* = (f^*(I_{\text{sup}}), f^*(I_{ns})),$$

avec

$$f_*(I_{ns}(t_s)) = g_*(I_{ns}(t_s)) - H_{(s)}(I_{ns}(t_s), K)x(t_s),$$

$$f^*(I_{ns}(t_s)) = g^*(I_{ns}(t_s)) - H_{(s)}(I_{ns}(t_s), K)x(t_s), \quad s \in S,$$

$$f_*(I_{\text{sup}}) = f^*(I_{\text{sup}}) = 0;$$

$$l = (l_{11}, \dots, l_{1N}, \dots, l_{r1}, \dots, l_{rN}, l_{N+1})', \quad (3.28)$$

$$\beta = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1N}, \dots, \beta_{r1}, \dots, \beta_{rN}, \beta_{N+1})', \quad (3.29)$$

où l et β sont des $(Nr+1)$ -vecteurs. En utilisant ces quantités, nous construisons le problème de support suivant :

$$\min \phi(l) = \beta' l + \frac{1}{2} l' Z' D Z l, \quad (3.30a)$$

$$f_{*(s)} \leq \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^N q_{(s)jk} l_{jk} + q_{(s)N+1} l_{N+1} \leq f_{*(s)}^*, \quad s \in S, \quad (3.30b)$$

$$d_j^- - u_{jk} \leq l_{jk} \leq d_j^+ - u_{jk}, \quad j = \overline{1, r}, \quad k = \overline{1, N}, \quad 0 \leq l_{N+1} \leq 1. \quad (3.30c)$$

Résolvons le programme linéaire quadratique (3.30)

Soit $l^0 = 0$ la solution admissible du problème de support (3.30). Après un certain nombre d'itérations, on obtient la solution ϵ -optimale l^ϵ .

Ainsi, construisons une nouvelle commande admissible \bar{u} de la manière suivante :

$$\bar{u}_j(t) = \begin{cases} u_j(t) + l_{jk}^e, & t \in [\tau_k, \tau^k], k = \overline{1, N}, \\ u_j(t) + l_{N+1}^e \Delta u_j(t), & t \in T_*, j = \overline{1, r}. \end{cases} \quad (3.31)$$

donc la nouvelle commande 3.31 vérifie $J(\bar{u}) \leq J(u)$.

Changement de support

Soit $\{\bar{u}, Q_{\text{sup}}\}$ la commande de support obtenue après résolution du problème (3.30). Calculons par les formules (3.14) (3.15) la co-commande $E(t)$ correspondante à $\{\bar{u}, Q_{\text{sup}}\}$. Par la suite, construisons la quasi-commande $w = w(.) = (w(t), t \in T)$:

$$w_j(t) = \begin{cases} d_j^+ & \text{si } E_j(t) > 0, \\ d_j^- & \text{si } E_j(t) < 0, \\ \in [d_j^-, d_j^+] & \text{si } E_j(t) = 0, j = \overline{1, r}, t \in T, \end{cases} \quad (3.32)$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi(t), t \in T$, vérifiant l'équation :

$$\chi(t) = A\chi(t) + Bw(t); \chi(0) = x^0. \quad (3.33)$$

Construisons les vecteurs :

$$\gamma(J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}}) = \varphi_{\text{sup}}^{-1}(g_{*(s)}^*(I_{\text{sup}}(t_s)) - H_{(s)}(I_{\text{sup}}(t_s), K)\chi(t_s), s \in S), \quad (3.34)$$

$$\gamma_{(s)}^*(I_{ns}(t_s)) = (\gamma_{(s)i}^*, i \in I_{ns}(t_s) = I(t_s) \setminus I_{\text{sup}}(t_s)), \quad (3.35)$$

$$\gamma_{*(s)}(I_{ns}(t_s)) = (\gamma_{*(s)i}, i \in I_{ns}(t_s)), s \in S, \quad (3.36)$$

avec

$$g_{*i}^*(s) = \begin{cases} g_{*i}, & \text{si } y_i(s) < 0, \\ g_i^*, & \text{si } y_i(s) \geq 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

et

$$\gamma_{(s)i}^* = \sum_{j \in J_k, k \in K^*} \varphi_{ij}(t_s, t_k) \gamma(j, t_k) + H_{(s)}(i, K)\chi(t_s) - g_{(s)i}^*,$$

$$\gamma_{*(s)i} = \sum_{j \in J_k, k \in K^*} \varphi_{ij}(t_s, t_k) \gamma(j, t_k) + H_{(s)}(i, K)\chi(t_s) - g_{*(s)i}.$$

En introduisant un paramètre $\mu > 0$ suffisamment petit, deux cas peuvent se présenter :

- si les relations suivantes :

$$\|\gamma(J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}})\| \leq \mu, \quad (3.38)$$

$$\gamma_{(s)}^*(I_{ns}(t_s)) \leq 0, \quad \gamma_{*(s)}(I_{ns}(t_s)) \geq 0, s \in S, \quad (3.39)$$

sont vérifiées, alors on passe à la procédure finale ;

- sinon, on va changer le support ($Q_{\text{sup}} \rightarrow \overline{Q}_{\text{sup}}$) en effectuant une itération de la méthode duale [22], et on refait une nouvelle itération avec $\{u, Q_{\text{sup}}\} := \{\overline{u}, \overline{Q}_{\text{sup}}\}$.

Procédure finale

Admettons que les relations (3.38) et (3.39) sont vérifiées pour la quasi-commande $w(t)$, $t \in T$, et la quasi-trajectoire $\chi(t)$, $t \in T$, construites par le support Q_{sup} .

La procédure finale consiste à déterminer le support optimal $Q_{\text{sup}}^* = \{I_{\text{sup}}^*, J_{\text{sup}}^*, T_{\text{sup}}^*\}$ et le vecteur des potentiels y^* de telle sorte à avoir : $g_{*(s)} \leq H_{(s)}\chi^*(t_s) \leq g_{*(s)}^*$, $s \in S$, où $\chi^*(t)$ est la quasi-trajectoire associée à Q_{sup}^* .

Ainsi, le support optimal Q_{sup}^* est déterminé en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j \in J_k} \sum_{k \in K^*} (d_j^+ - d_j^-) \text{sign} \dot{E}_j(t_k) \int_{t_k}^{V_k(T_{\text{sup}}^*)} \varphi_{ij}(t_s, t) dt - g_{*(s)i}^* + \\ H_{(s)}(i, K)\chi(t_s) = 0, \quad i \in I_{\text{sup}}(t_s), s \in S, \\ E_j(V_k(T_{\text{sup}}^*), T_{\text{sup}}^*) = 0, \quad V_k(T_{\text{sup}}) = t_k, j \in J_k, k \in K^*, \end{cases} \quad (3.40)$$

où

$$E(t, T_{\text{sup}}^*) = \sum_{s \in S} y_{(s)}^{*'} \varphi(t_s, t) - (Dx(t^* + c)' F(t^*) F^{-1}(t) B.$$

Nous résolvons le système (3.40) pour un cas non-dégénéré :

$$\dot{E}_j(t_k) = \frac{dE_j}{dt}(t_k) \neq 0, \quad j \in J_k, k \in K^*.$$

En outre, la $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation est construite de manière à satisfaire les relations (3.39). En effet, si à chaque approximation, les conditions (3.39) ne sont pas vérifiées, nous changeons le support en utilisant une itération de la méthode duale [22], afin de satisfaire les conditions (3.39). Faisons une nouvelle itération jusqu'à ce que les approximations successives deviennent constantes. Soit $Q_{\text{sup}}^* = \{I_{\text{sup}}^*, J_{\text{sup}}^*, T_{\text{sup}}^*\}$ la solution du système (3.40). Alors la quasi-commande $w^*(t)$, $t \in T$, calculée par le support optimal Q_{sup}^* et la relation (3.32), est une commande admissible et optimale du problème (3.1)-(3.4).

3.3 Exemple numérique

Considérons l'exemple suivant :

$$\min_u V = \frac{1}{2}(x_1(t^*) - x_2(t^*))^2,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.04x_1 + u_1 - u_2, & x_1(0) = 500, \\ \dot{x}_2 = 0.15x_2 - u_1 + u_2, & x_2(0) = 0, \\ x_1(t'_1 = 6) \leq 0, \quad x_2(t'_1 = 6) \leq 0, \\ x_1(t'_2 = 12) \leq 0, \quad x_2(t'_2 = 12) \leq 0, \\ 0 \leq u_1(t) \leq 100, \quad 0 \leq u_2(t) \leq 100, \quad t \in [0, 12]. \end{cases} \quad (3.41)$$

Nous appliquons l'algorithme avec les paramètres suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c(t) = (0, 0)', \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{(1)} = H_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{*(1)} = g_{*(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous obtenons les grandeurs suivantes :

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{(0.04t)} & 0 \\ 0 & e^{(0.15t)} \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_{*(1)} = \begin{pmatrix} -296.5631 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_{*(1)} = \begin{pmatrix} -37.9442 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $\varphi(I(t'_s), t) = (\varphi_{vj}(t'_s, t), i \in I(t'_s), j \in J), s \in \{1, 2\}$, s'écrivent :

$$\varphi(I(t'_1), t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1.2712e^{-0.04t} & -1.2712e^{-0.04t} \\ -2.4596e^{-0.15t} & 2.4596e^{0.15t} \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq t \leq 6, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{si } 6 < t \leq 12; \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\varphi(I(t'_2), t) = \begin{pmatrix} 1.6161e^{-0.04t} & -1.6161e^{-0.04t} \\ -6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}, \quad \text{si } 0 \leq t \leq 12. \quad (3.43)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1.2712e^{-0.04t} & -1.2712e^{-0.04t} \\ -2.4596e^{-0.15t} & 2.4596e^{-0.15t} \\ 1.6161e^{-0.04t} & -1.6161e^{-0.04t} \\ -6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.6161e^{-0.04t} & -1.6161e^{-0.04t} \\ -6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}, & \text{si } 6 < t \leq 12. \end{cases} \quad (3.44)$$

Considérons maintenant la commande initiale $u^0(t) = (u_1^0(t), u_2^0(t))$, $t \in [0, 12]$, avec $u_1^0(t) = 0$, pour $t \in [0, 12]$ et

$$u_2^0(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t \in [0, 11.8[, \\ 100, & \text{pour } t \in [11.8, 12]. \end{cases} \quad (3.45)$$

Le contrôle $u^0(t)$ est admissible et l'état aux instants intermédiaires est $x(6) = (635.6246, 0)'$, $x(12) = (787.9570, 20.3030)'$. La valeur de la fonction coût associée est $V(u^0) = 294646.3318$. Nous assignons au contrôle admissible initial le support $Q_{\text{sup}} = \{I_{\text{sup}}, J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}}\}$, avec $I_{\text{sup}} = \{I_{\text{sup}}(t'_s), s \in S\}$, $I_{\text{sup}}(t'_s) = \{I(t'_1) = 1, I(t'_2) = 1\}$, $T_{\text{sup}} = \{t_1 = 4, t_2 = 7\}$, $K^* = \{1, 2\}$, $J_{\text{sup}} = \{J_1 = 1, J_2 = 2\}$. Calculons alors la matrice de support :

$$\varphi_{\text{sup}} = \varphi(Q_{\text{sup}}) = \begin{pmatrix} 1.0832 & 0 \\ 1.3771 & -1.2214 \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

ainsi que la vecteur des potentiels $y(I_{\text{sup}}) = (903.525, 480.061)$ et $y(I_{ns}) = (0, 0)'$. En effet, $y_1 = (5996.4490, 0)'$, $y_2 = (-2098.1121, 0)'$ et $y = (5996.4490, 0, -2098.1121, 0)'$

Par conséquent, la co-commande vaut :

$$E(t) = (E_1(t), E_2(t))' = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2991.3475e^{-0.04t} - 4644.0360e^{-0.15t} \\ -2911.3475e^{-0.04t} + 4644.0360e^{-0.15t} \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq t \leq 6, \\ \begin{pmatrix} 2150.1785e^{-0.04t} - 4644.0360e^{-0.15t} \\ -2150.1785e^{-0.04t} + 4644.0360e^{-0.15t} \end{pmatrix}, & \text{si } 6 < t \leq 12. \end{cases} \quad (3.47)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{cases} E_1(t) \geq 0 \text{ et } E_2(t) \leq 0 & \text{si } t \in [0, 4] \cup [6, 7], \\ E_1(t) \leq 0 \text{ et } E_2(t) \geq 0 & \text{si } t \in [4, 6] \cup [7, 12]. \end{cases} \quad (3.48)$$

Puisque, l'estimation de suboptimalité $\beta(u, Q_{\text{sup}}) = 1353572.581 > \epsilon = 10^{-4}$, alors construisons un nouveau contrôle admissible.

Changement de commande

Pour $\alpha = 50$ nous obtenons :

$$|E_1(t)| = |E_2(t)| \leq 50, \quad \text{si } t \in T_\alpha = [3.7330, 4.1801] \cup [6.7277, 7.2887]. \quad (3.49)$$

Posons $h = 0.3$ et subdivisons T_α en 4 intervalles $[\tau_k, \tau^k]$, $k = \overline{1, 4}$, $\tau_k < \tau^k \leq \tau_{k+1}$,

$$T_\alpha = \bigcup_{k=1}^4 [\tau_k, \tau^k], \text{ tels que : } \tau_1 = 3.8234, \quad \tau^1 = \tau_2 = 4.1234, \quad \tau^2 = 4.1801, \quad \tau_3 = 6.7277, \quad \tau_3 = \tau_4 = 7.0277, \quad \tau^4 = 7.2887.$$

On obtient l'ensemble $T_* = [0, 3.8234[\cup]4.1801, 6.7277[\cup]7.2877, 12]$ et

$$\Delta u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 3.8234[\cup]7.2877, 12[, \\ 100 & \text{si } t \in]4.1801, 6] \cup [6, 6.7277], \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\Delta u_2(t) = \begin{cases} 100 & \text{si } t \in [0, 3.8234[\cup]7.2877, 12], \\ 0 & \text{si } t \in]4.1801, 6] \cup [6, 6.7277[, \\ -100 & \text{si } t \in]11.8, 12]. \end{cases} \quad (3.51)$$

Construisons le problème de support suivant :

$$\min \phi(l) = \beta' l + \frac{1}{2} l' Z' D Z l, \quad (3.52a)$$

$$f_{*(s)} \leq \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 q_{(s)jk} l_{jk} + q_{(s)9} l_9, \quad s = \overline{1, 2}, \quad (3.52b)$$

$$d_j^- \leq l_{jk} \leq d_j^+, \quad j = \overline{1, 2}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad 0 \leq l_9 \leq 1, \quad (3.52c)$$

avec :

$$l = (l_{11}, \dots, l_{18}, \dots, l_{21}, \dots, l_{28}, l_9)', \quad (3.53)$$

$$\beta = (\beta_{11}, \dots, \beta_{18}, \dots, \beta_{21}, \dots, \beta_{28}, \beta_9)', \quad (3.54)$$

$$\beta = (2.1958, -2.3974, 6.6906, -7.1826, -2.1958, 2.3974, -6.6906, -7.1826, 1081777.9332)',$$

$$\begin{pmatrix} q_{(1)} \\ q_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3253 & -0.0610 & 0 & 0 & 0.3253 & 0.0610 & 0 & 0 \\ 0.4066 & 0.0748 & 0 & 0 & -0.4066 & -0.0748 & 0 & 0 \\ -0.4135 & -0.0776 & -0.3682 & -0.3167 & 0.4135 & 0.3682 & 0.3167 & 0.3167 \\ 1.0009 & 0.1840 & 0.6469 & 0.0539 & -1.0009 & -0.1840 & -0.6469 & -0.0539 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} q_{(1)9} \\ q_{(2)9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 373.4058 \\ -209.2534 \\ 337.268 \\ 715.6715 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{*(1)} \\ f_{*(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -635.6246 \\ 0 \\ -808.0372 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En résolvant le problème de support auxiliaire (3.52), nous obtenons la solution optimale suivante :

$$l^* = (40.8018, 100, 8.2874, 100, 59.1982, 0, 98.8655, 0, 0)'. \quad (3.55)$$

Ainsi, la nouvelle commande admissible prend la forme suivante :

- si $t \in T_\alpha$:

$$\bar{u}_1(t) = \begin{cases} 40.8018, & \text{si } t \in]3.824, 4.1234[, \\ 8.2874, & \text{si } t \in]6.7277, 7.0277[, \\ 100, & \text{si } t \in]4.1234, 6.7277[\cup]7.0277, 7.2887]. \end{cases} \quad (3.56)$$

$$\bar{u}_2(t) = \begin{cases} 59.1982, & \text{si } t \in]3.824, 4.1234[, \\ 0, & \text{si } t \in]4.1234, 6.7277[\cup]7.0277, 7.2887], \\ 98.8655, & \text{si } t \in]6.7277, 7.0277]. \end{cases} \quad (3.57)$$

- si $t \in T_*$:

$$\bar{u}_1(t) = 0 \quad \text{si } t \in T_*, \quad (3.58)$$

$$\bar{u}_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 3.824[\cup]4.1801, 6.7277[\cup]7.2887, 11.8[, \\ 100 & \text{si } t \in]11.8, 12]. \end{cases} \quad (3.59)$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\bar{u}_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 3.824[\cup]4.1801, 6.7277[\cup]7.2887, 12], \\ 40.8018 & \text{si } t \in]3.824, 4.1234[, \\ 8.2874 & \text{si } t \in]6.7277, 7.0277[, \\ 100 & \text{si } t \in]4.1234, 6.7277[\cup]7.0277, 7.2887]. \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\bar{u}_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 3.824[\cup]4.1801, 6.7277[\cup]7.2887, 11.8[, \\ 59.1982 & \text{si } t \in]3.824, 4.1234[, \\ 98.8655 & \text{si } t \in]6.7277, 7.0277[, \\ 100 & \text{si } t \in]11.8, 12]. \end{cases} \quad (3.61)$$

Ainsi, $\beta(\bar{u}, Q_{\text{sup}}) = 1128780.0221 > \epsilon$.

Changement de support

Construisons la quasi-commande $w = w(.) = (w(t), t \in T)$, associée au support Q_{sup} :

$$w_1(t) = \begin{cases} 100, & \text{pour } t \in [0, 4] \cup [6, 7], \\ 0, & \text{pour } t \in [4, 6] \cup [7, 12], \end{cases} \quad (3.62)$$

$$w_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t \in [0, 4] \cup [6, 7], \\ 100, & \text{pour } t \in [4, 6] \cup [7, 12], \end{cases} \quad (3.63)$$

la quasi-trajectoire correspondante aux instants intermédiaires est $\chi(6) = (2466.8079, -296.6915)'$,
 $\chi(12) = (3135.9275, -729.7433)'$.

Construisons les vecteurs :

$$\gamma(J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}}) = \varphi_{\text{sup}}^{-1}(g_{*(s)}^*(I_{\text{sup}}(t_s)) - H_{(s)}(I_{\text{sup}}(t_s), K)\chi(t_s), s \in S) = (-2277.4226, -5134.8375)',$$

et

$$\gamma_*(I_{ns}(t_s)) = (\gamma_{*(s)i}, i \in I_{ns}(t_s), s \in S) = (\gamma_{*(1)2}, \gamma_{*(2)2})' = (-2476.8141, -4668.8125)'$$

Pour $\mu = 5$, nous avons $\|\gamma(J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}})\| \geq \mu$, alors nous effectuons des itérations duales afin de changer le support.

Par la suite, nous

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons reproduit le travail développé dans [2], les auteurs ont traité une méthode numérique itérative qui évite la discrétisation du système dynamique. Il ont introduit le critères d'optimalité et de sub-optimalité qui permettent de développer un algorithme pour résoudre le problème considéré. L'estimation de sous-optimalité permet d'évaluer la différence entre la valeur actuelle et la valeur optimale de la fonction coût. Cette méthode numérique itérative est basée sur le passage d'un contrôle admissible à un autre tout en diminuant le critère de sub-optimalité. Le processus est répété jusqu'à l'obtention d'un contrôle optimal ou sub-optimal.

Conclusion générale

Le but assigné à ce travail consiste à étudier un nouveau algorithme, dite de support, pour la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire quadratique avec contraintes intermédiaires. Pour ce faire, nous avons introduit dans la premier chapitre une synthèse sur le contrôle optimal, dans le deuxième chapitre nous avons présenté la méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire quadratique, dans le troisième chapitre nous avons exposé une méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal avec contraintes intermédiaires. Dont nous avons énoncé le critère d'optimalité puis l'estimation de sub-optimalité qui nous mesure la qualité d'une solution donnée. L'algorithme étudié est construit sur la base du concept de support et comprend trois procédures : changement de commande : en utilisant la commande constante par morceaux, le problème se réduit pour chaque itération à un problème de programmation linéaire quadratique, cette procédure permet de construire un nouveau contrôle de support en diminuant la valeur de l'estimation de sub-optimalité ; changement de support : cette procédure est utilisée pour obtenir, via une itération duale, un nouveau support qui donne une meilleure estimation de sub-optimalité ; procédure finale : elle consiste à déterminer le support optimal de telle manière à avoir la quasi-commande correspondante admissible et donc optimale. Par la suite, nous effectuons les mêmes étapes que l'exemple du chapitre deux jusqu'à l'obtention de la commande optimale.

Bibliographie

- [1] L. T. Aschepkov, D.V. Dolgy, T. Kim, and R.P. Agarwal, *Optimal Control*. Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2016.
- [2] M. Azi and M.O. Bibi, *Method for solving a linear-quadratic optimal control problem with intermediate phase constraints*, submitted to the 17th edition of the African conference on Research in Computer Science and Applied Mathematics (CARI'2024), University of Bejaia (Algeria).
- [3] M. Azi and O. Bibi, *Optimal Control of a Dynamaique System with Intermediate Phase Constraints and Application in Cash Management*, Numerical Algebra, Control and Optimization, 12(2) : 279-291, 2022.
- [4] M. Azi, *Optimisation des systme dynamique et application en économie financière*, thèse de doctorat en mathématiques appliqués Université, BEJAIA, 2021.
- [5] N.v. Balashevich, R. Gabasov and F.M. Kirillova, *Algorithms for open loop and closed loop optimization of contol systems with intermediate phase constraints*, Zh. Vychisl.Mat.Fiz, 41 :1485-1504, 2001.
- [6] M.O. Bibi, *Optimisation of a linear dynamique system with double terminal constraints on the trajectories*, Optimization, 30(4) :359-366,1994.
- [7] V.G. Boltyanski, *The maximum principle-how it come to be ?* report 526, Technical report, Mathematisches institut, 1994.
- [8] B. Brahmi and M.O. Bibi, *Dual support methode for solving convex quadratic programs*, Optimization, 59(6) : 851-872, 2010.
- [9] A.E. Bryson, *Optimal control 1950 to 1985*. Control Systems Magazine IEEE, 16(3), 26-33, 1996.
- [10] J.A. Burns, *The Calculus of Variations and Control with Modern Application*, CRC Press, Taylor and Francis Group, Floride, 2014.

-
- [11] C. Carathéodory, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, Teubner, Leipzig, Germany, 1935.
- [12] C. Carathéodory, *Die methode der geodatischen aquidistanten und das problem von Lagrange*, *Acta Mathematica*, 47(3), 199-236, 1926.
- [13] A.V. Dmitruk and A.M. Kaganovich, *Maximum principle for optimal control problems with intermediate constraints*, *Computational Mathematics and Modeling*, 22(2), 180 – 215, 2011.
- [14] G.C. Evans, *The Dynamics of Monopoly*, *The American Mathematical Monthly*, 31(2), 77-83, 1924.
- [15] R. Gabasov and F.M. Kirillova, *Constructive Methods of Optimization*, P.II :Control Problems, Université Press, Minsk, 1984.
- [16] H. H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer-Verlag, New York 1980.
- [17] R. V. Gamkrelidze, *Discovery of the maximum principle*, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 5(4), 437-451, 1999.
- [18] R. V. Gamkrelidze, *Discovery of the maximum principle*, *Mathematical Events of the Twentieth Century*, 5, 85-99, 2006.
- [19] D. Grass, G. Feichtinger, J.P. Caulkinks, G. Tragler and D.A. Behrens, *Optimal Control of Nonlinear Processes*, Springer-verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [20] L.M. Graves, *The Derivative as Independent Function in the Calculus of Variations*, PhD thesis, University of Chicago, Department of Mathematics, 1924.
- [21] L.M. Graves, *The Weierstrass condition for the problem of Bolza in the calculus of variations*, *Ann. of Math*, 33(4), 747-752, 1933.
- [22] N. Khimoum and M.O. Bibi, *Primal-Dual method for solving a linear-quadratic multi-input optimal control problem*, *Optimization Letters*, 14(4), 1-17, 2020.
- [23] N. Khimoum, *Contrôle optimal multivariable et applications à un jeu différentiel linéaire-quadratique*, thèse de doctorat, université Bejaia, 2019.
- [24] E.J. Mcshane, *The calculus of variation from the beginning through optimal control theory*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27(5), 916-939, 1989.
- [25] F.P. Ramsey, *A Mathematical Theory of Saving*, *Economic Journal*, 38(152), 543-559, 1928.

-
- [26] S.P. Sethi, *Optimal Control Theory : Applications to Management Sciences and Economics*, Third edition, Springer Nature, Switzerland, 2019.
- [27] H.J. Sussman and J.C. Willems, *300 years of optimal control : from the brachystochrone to the maximum principle*, IEEE Control Systems Magazine, 17(3), 32-44, 1997.
- [28] J.L. Troutman, *Variation Calculus and Optimal Control : Optimization with Elementary Convexity*, oxford University Press, New York, 1993 .
- [29] H.J. Pesh and M. Plail, *The maximum principle of optimal control : A history of ingenious ideas and missed opportunities* , Control and Cybernetics , 38(4), 973-995, 2009.
- [30] H.J. Pesch and R. Bulirsch, *The maximum principle, Bellman's equation, and Carathéodory's work*, Journal of Oplimization Theory and Applications, 80, 199-225, 1994.
- [31] E.R. Pinch, *Optimal Control and the Calculus of Variation*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [32] L.S. Pontryaguine, V.G. Boltyanskii, R.v. Gamkerlidze and E.F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley and Sons, New Jersey, 1962.
- [33] E. Trélat, *Control optimal : theorie et applications*, Vuibert, Paris, 2005.