

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire  
Abdelhafid boussouf Mila

Institut des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique et  
Électromécanique.



Filière : Génie mécanique

Spécialité: énergétique

Ce polycopié est destiné aux étudiants de la première année master.

# POLYCOPIE

## DYNAMIQUE DES GAZ

Auteur : Dr. Bendjahlouli Ali  
(Maitre de conférence classe B)

2023/2024

## Sommaire

Chapitre I: Introduction à la Gazodynamique .....	4
I.1 Concepts et relations thermodynamiques.....	4
I.2 Compressibilité et propagation des ondes sonores .....	5
I.2.1. La propagation.....	5
I.2.2. L'onde acoustique et sa propagation.....	5
I.2.3. Equation d'onde à une dimension.....	6
I.2 Expression générale de la vitesse du son .....	8
I.3 Nombre de Mach et ondes de Mach .....	9
I.4 Ecoulements subsonique, transsonique, supersonique et hypersonique.....	10
I.4.1 Ecoulement subsonique.....	10
I.4.2 Ecoulement sonique.....	10
I.4.3 Ecoulement supersonique.....	11
Chapitre II Ecoulement Isentropique 1D en Conduit à Section Variable.....	12
II-2 Application des équations générales .....	12
II-3 Equation générale d'écoulement adiabatique d'un fluide compressible visqueux .....	13
II-3-1 Gaz parfait en écoulement adiabatique irréversible .....	14
II-3-2 Equation générale pour l'écoulement non permanent d'un fluide.....	14
compressible visqueux .....	14
II-4 Définitions particulières à l'étude des fluides compressibles .....	15
II.4.1. État générateur .....	15
II.4.2. Point d'arrêt dans un écoulement isentropique subsonique .....	16
II.4.2.1.Caractéristiques au point d'arrêt.....	16
II.4.2.2. Calcul pratique des profits de tuyères .....	16
II.5 Ecoulement isentropique avec changement de section .....	17
II.5.1 Théorème de HUGONIOT.....	17
II.6 Application à l'étude des tuyères en écoulement isentropique.....	19
II.6.1 Tuyère convergente .....	19
II.7 Tuyère convergente-divergente.....	22
Chapitre III Ondes de choc .....	24
III.1 Ondes de choc normales :.....	24
III-2 Equations de base : .....	25
III.3 Relation de Prandtl.....	28
III.4 Calcul du rapport des grandeurs caractéristiques en fonction du nombre de Mach amont $Ma_1$ .....	28
III.5 Variation d'entropie dans une onde de choc droite.....	29
III.6 Rendement isentropique à la traversée du choc .....	30
III.7 Les ondes de choc obliques .....	30
III.7.1 Equations de base : .....	31
Chapitre IV : Ecoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO).....	33
IV.1 Equations de base .....	33

III.2 Relations de nombre de Mach : .....	34
Chapitre V: Écoulement compressible dans les conduites avec transfert de chaleur et sans friction (Théorie de RAYLEIGH) : .....	38
IV.1 Relations de nombre de Mach .....	40
<b>TABLE I</b> : Ecoulement isentropique d'un.....	43
gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ).....	43
<b>TABLE II</b> : Ecoulement à onde de choc normale .....	46
d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ).....	46
<b>TABLE III</b> : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ). (Courbes de Fanno).....	48
<b>TABLE IV</b> Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ). (Courbes de Rayleigh). .....	49
References bibliographiques : .....	50

## Listes des figures

<b>Figure II.1</b> État générateur.....	16
<b>Figure II.2</b> Point d'arrêt .....	17
<b>Figure II.3</b> Rapport de section en fonction de $M$ .....	18
<b>Figure. II.4</b> : Ecoulement compressible dans une canalisation de section.....	19
<b>Figure. II.5</b> : Tracé de la fonction.....	21
<b>Figure. II.6</b> Débit d'une tuyère convergente.....	22
<b>Figure .II.7</b> Tuyère convergente-divergente .....	24
<b>Figure .II.8</b> (c) débit massique.....	24
<b>Figure. III.1</b> Propagation d'une onde de compression.....	25
<b>Figure. III.2</b> { (a) Projectile subsonique $Ma < 1$ , (b) Projectile supersonique $Ma > 1$ .....	25
<b>Figure. III.3</b> Avion à réaction volant à vitesse supersonique.....	26
<b>Figure. III.4</b> : Ecoulement à travers d'une onde de choc normale fixe.....	26
<b>Figure. III.5</b> Géométrie d'un écoulement à onde de choc oblique.....	31
<b>Figure.III.6</b> : Angles de déflexion du choc oblique en fonction de l'angle de choc pour divers nombre de Mach, $\gamma = 1.4$ .....	33
<b>Figure. IV.1</b> : Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement avec friction dans une conduite de section constante.....	34
<b>Figure. IV.2</b> : Ecoulement adiabatique avec friction dans un conduit de section constante s'approche toujours de $M=1$ pour satisfaire la seconde loi de la thermodynamique. La courbe calculée est indépendante de la valeur du coefficient de friction.....	37
<b>Figure V.1</b> : Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement sans friction dans une conduite de section constante avec transfert de chaleur. La longueur de cet élément est indéterminée dans cette théorie.....	39
<b>Figure. V.2</b> : Influence du transfert de chaleur sur le nombre de Mach.....	40

# Chapitre I: Introduction à la Gazodynamique

## I.1 Concepts et relations thermodynamiques

Equations des gaz parfaits  $p = \rho RT$  avec R est la constante des gaz parfaits.

$$\text{Energie interne } u : c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \frac{\partial u}{\partial T} \quad u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v dT$$

$$\text{Enthalpie } h : h = u + p/\rho \quad c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{dh}{dT} \quad h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT$$

➤ **Relations**  $c_p - c_v = R$  ;  $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$  ;  $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$  ;  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

➤ **Equation Tds (1er et 2ème principe)**

$$\Delta s = \int_i^f \frac{\delta Q_{rev}}{T} \Rightarrow ds = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad \delta q = \delta Q_{rev} \quad ds = \frac{\delta q}{T} \Rightarrow \delta q = T ds$$

Le premier principe  $du = \delta q - p dv$  s'écrit donc  $du = T ds - p dv \xrightarrow{(dh=du+p dv+v dp)} dh = T ds + v dp$

Donc :  $T ds = du + p dv = dh - v dp$  Formulation du premier principe en fonctions des variables d'état uniquement.

➤ **Variation d'entropie** : Pour un gaz parfait, on peut utiliser les équations Tds pour exprimer la variation d'entropie en fonction de la température, la pression et/ou le volume. En particulier :

$$dh = c_p dT \Rightarrow T ds = dh - v dp \Leftrightarrow v = \frac{RT}{p} \quad s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad C_p = \text{cste}$$

$$\text{Entropie } S : s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}$$

Pour établir des équations pratiques, l'hypothèse **d'un écoulement isentropique** est souvent utilisée en dynamique des gaz. Cependant, ceci n'est pas valide au passage d'une onde de choc. Alors, pour un écoulement isentropique à  $c_p$  ( $c_v$ )  $\cong$  cste. ,

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$\left( \frac{T_2}{T_1} \right)_{s=\text{constante}} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Relation isentropique pour un gaz parfait à  $C_p$  ( $c_v$ ) = cste

## I.2 Compressibilité et propagation des ondes sonores

Un son est produit par la vibration d'un objet (corde d'un instrument de musique, membrane d'un haut parleur,.....). L'objet qui vibre est appelé source sonore. Les vibrations de la source provoquent des variations de la pression du milieu matériel proche .celles-ci se propagent ensuite dans le milieu matériel élastique : les particules de matière vibrent autour de leur position initial sans déplacement global de sorte qu'il n'y a pas de transport de matière dans le milieu matériel qui entoure une source sonore.

La vibration est dite longitudinale si le mouvement des particules a lieu dans le sens de la propagation, transversale si le mouvement est perpendiculaire à la direction de propagation.

### I.2.1. La propagation

La propagation rectiligne d'une onde longitudinale dans un milieu homogène (et sans amortissement). On admet que la source sonore vibre de façon sinusoïdale à la fréquence  $f$ . Son mouvement est périodique de période  $T$  et de pulsation  $\omega$ . On note  $y$  son élongation :

$$y(t) = a \sin \omega t \quad \text{I.1}$$

$$T(s) = \frac{1}{f(\text{Hz})} \text{ et } \omega T = 2\pi \text{ rad } \omega \text{ en } \text{rad. s}^{-1} \quad \text{I.2}$$

La propagation d'une onde sonore dans milieu se traduit par l'existence d'une pression acoustique  $\tilde{p}$  qui s'ajoute à la pression atmosphérique :

$$\tilde{p} + p_{atm} = p_{totale} \quad \text{I.3}$$

La propagation transporte d'un point à une autre (de H à I par exemple ) un état vibratoire du milieu matériel. La vitesse de déplacement de cet état vibratoire est appelée " la célérité du son" ; on la note souvent  $c$ .

On appelle longueur d'onde la distance qui sépare deux points qui ont, à chaque instant, le même état vibratoire (point G et H par exemple). Le déplacement effectué par le son en une période correspond à une longueur d'onde  $\lambda$

La vitesse de déplacement de l'onde, dans un milieu non dispersif ne dépend pas de la fréquence ; dans ce cas ,seul la longueur d'onde est caractéristique de l'onde.

### I.2.2. L'onde acoustique et sa propagation

Un événement sonore résulte de la mise en vibration des molécules d'air autour d'une position initiale. Le son a besoin d'un milieu pour se propager, c'est pourquoi il ne peut pas se propager dans le vide. Afin de mettre en vibration les molécules d'air, il est nécessaire qu'une structure entre en contact avec ces molécules, se mette en vibration et transmette ses vibrations. La molécule au contact de la structure se met alors en vibration puis transmet ses vibrations aux molécules voisines

et ainsi de suite. C'est ainsi que le son se transmet à l'environnement. Ce processus est appelé une onde acoustique, ou onde sonore. (Rappel : une onde est une vibration dont l'amplitude est une fonction du temps et/ou de l'espace.)

Une onde acoustique peut se propager dans différents milieux de propagation (air, eau, métal...). Notre oreille perçoit les sons résultant de cette onde acoustique.

Exemple : afin d'entendre les paroles de quelqu'un situé derrière un mur, l'onde acoustique produite par le locuteur (celui qui parle = la source sonore) traverse d'abord la couche d'air située entre lui et le mur, puis le mur (solide), et enfin la couche d'air entre le mur et l'auditeur (celui qui entend = récepteur).

### I.2.3. Equation d'onde à une dimension

Une onde sonore est une perturbation mécanique qui modifie les propriétés locales : pression, masse volumique, température et vitesse du milieu dans lequel elle se propage. L'hypothèse acoustique consiste à considérer que les variations de ces grandeurs sont des infiniment petits c'est-à-dire du 1<sup>er</sup> ordre.

On se propose ici de retrouver l'équation des ondes en une dimension, à partir des équations d'Euler. On étudie une particule de fluide considéré, l'écoulement est non visqueux et l'entropie est constante, soumis à une onde sonore de faible amplitude, à une dimension, se propageant suivant l'axe Ox.

On utilise les 2 équations d'Euler régissant l'écoulement d'un fluide parfait :

Par suite :

$$\begin{cases} V(x, t) = u(x, t)\vec{e}_x \\ \text{et} \\ p(x, t) = p(x, t) \end{cases} \quad \text{I.5}$$

#### II.1.3.2.1. Equation de propagation

On considère une onde acoustique qui se propage à la vitesse c selon une direction x.

L'équation de propagation est obtenue à partir des deux relations fondamentales de l'acoustique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{équation de conservation de la masse} \quad \text{I.6}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{équation d'euler} \quad \text{I.7}$$

Les équations (II.5) et (II.6) deviennent donc :

$$\rho \frac{du(x, t)}{dt} - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{I.8}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{I.9}$$

Le fluide se trouve initialement au repos, état caractérisé par les constantes ,  $\rho_0, p_0, s_0$ . Il subit alors de petites perturbations(  $\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{s}, \tilde{u}$ )

On pose :  $p = p_0 + \tilde{p}$  ,  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$  ,  $s = s_0 + \tilde{s}$  ,  $u = \tilde{u}$  (car vitesse initiale nulle).

D'où :

$$(\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{d\tilde{u}(x,t)}{dt} = - \frac{\partial(p_0 + \tilde{p})(x,t)}{\partial x} \quad \text{I.10}$$

$$\frac{d(\rho_0 + \tilde{\rho})(x,t)}{dt} + (\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{I.11}$$

On se restreint à l'ordre de la perturbation, d'où, en utilisant la dérivée particulière et en éliminant les termes d'ordres supérieurs les équation (I.9) et (I.10) deviennent :

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial \tilde{p}(x,t)}{\partial x} \quad \text{I.12}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial x} \quad \text{I.13}$$

Exprimons  $p = p(\rho, s)$  à l'aide du développement limité de Taylor :

$$p(\rho, s) = (p_0, s_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s (\rho - \rho_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho (s - s_0) + o(\rho - \rho_0, s - s_0) \quad \text{I.14}$$

Or, le fluide est considéré parfait donc l'entropie est constante, d'où :

$$s = c^{te} \Rightarrow \tilde{s} = 0 \Rightarrow s = s_0$$

$$\text{Ainsi, } p(\rho, s) = (p_0, s_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s (\rho - \rho_0) \quad \text{I.15}$$

Par suite on aura :

$$\tilde{p} = p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s (\rho - \rho_0)$$

$$\text{On a donc } \tilde{p} = c_0^2(\rho - \rho_0) \text{ par définition} \quad \text{I.16}$$

$$c_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad \text{I.17}$$

$$\tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho} \quad \text{I.18}$$

D'où, en reprenant les équations (I.11) et (I.12)

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial t} = -c_0^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad \text{I.19}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} \quad \text{I.20}$$

En dérivant (I.18) par rapport au temps et (I.19) par rapport à x et d'après le théorème de Schwartz :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x \partial t}$$

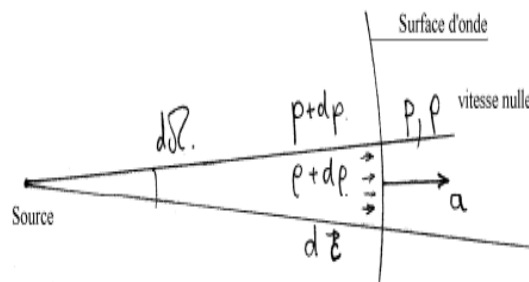
car on admet que  $\tilde{p}$  admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{I.21}$$

On retrouve ainsi l'équation décrivant la propagation d'une onde en une dimension.

## I.2 Expression générale de la vitesse du son

Envisageons la propagation d'une petite perturbation élémentaire de pression (son) se déplaçant dans un fluide au repos.



Pour plus de facilité, nous prendrons le repère sur la surface d'onde et se déplaçant avec elle.

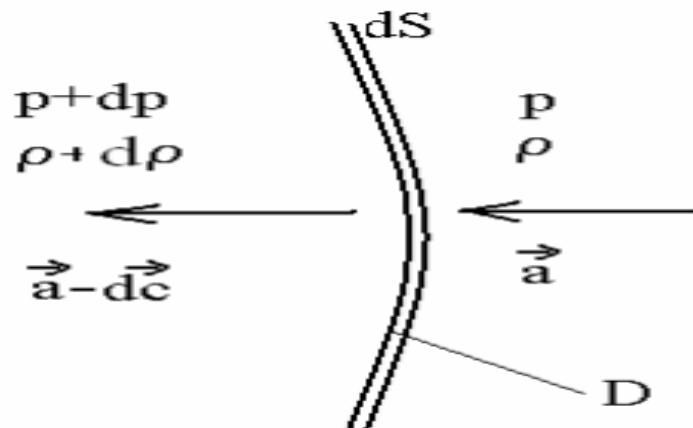
Dans ce repère, on écrit le PCM et le PFD :

**PCM :**  $dS \rho a = dS(\rho + d\rho)(a - dc)$  Donc en développant :  $\rho a = \rho a + a d\rho - \rho dc - d\rho dc$  Et en ne conservant que le premier ordre :  $a d\rho = \rho dc$  (1)

**PFD :**  $F p dp dS p dS q_m a a dc adS dc \Sigma \text{ ext} \rightarrow D = (P + dP) dS - P dS = q_m(a - (a - dc)) = \rho a dS dc$

Donc en simplifiant:  $dp = \rho a dc$  En utilisant l'équation (1) :  $dp = \frac{\rho a^2 d\rho}{\rho} = a^2 d\rho \rightarrow a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$





Dans le cas d'un gaz idéal et pour une perturbation infinitésimale, le déplacement de l'onde est isentropique donc  $p\bar{v} = cte$  et en différenciant, on obtient :  $\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma T$  donc finalement :

$$a = \sqrt{\gamma T}$$

### I.3 Nombre de Mach et ondes de Mach

Le nombre de Mach est un nombre sans dimension, noté  $Ma$ , qui exprime le rapport de la vitesse d'un objet dans un fluide à la vitesse du son dans ce même fluide. La vitesse du son dans un gaz varie avec sa nature et sa température, le nombre de Mach ne correspond pas à une vitesse fixe, il dépend des conditions locales.

Le nombre de Mach mesure le rapport entre les forces liées au mouvement et la compressibilité du fluide.

$$Ma = \frac{V}{a}$$

où :

- $Ma$  : est le nombre de Mach ;
- $V$  : est la vitesse de l'objet (par rapport à son environnement) ;
- $a$  : est la vitesse de propagation ou célérité du son dans l'environnement considéré. Elle représente la vitesse de propagation de tout ébranlement produit dans le milieu.

La vitesse du son dans l'air, lorsque ce dernier est considéré comme un gaz parfait, s'exprime par :

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

où :

- $P$  : est la pression (Pa) ;
- $\rho$  : est la masse volumique (kg/m<sup>3</sup>)

- $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  est le coefficient adiabatique avec  $C_p$  et  $C_v$  les capacités thermiques

massiques isobare et isochore (dans le cas des gaz parfait, ce nombre ne dépend que du nombre d'atomes dans la molécule et vaut 1,4 pour l'air).

L'équation d'état permet de la réécrire en fonction de la constante spécifique du gaz

( $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) pour l'air) et de la température  $T$  en kelvins :  $a = \sqrt{\gamma r T}$

Elle ne dépend donc que de la température.

#### **I.4 Ecoulements subsonique, transsonique, supersonique et hypersonique**

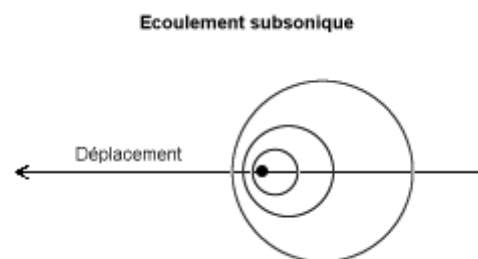
D'une manière générale, sauf obstacle, cet ébranlement se propage de la même façon dans toutes les directions. Ainsi, il se retrouve au bout d'une seconde réparti sur une sphère de 340 mètres de rayon. La surface d'une sphère étant proportionnelle au carré de son rayon, l'intensité de la perturbation décroît très rapidement avec la distance : c'est la cause principale de l'atténuation d'un son, beaucoup plus importante que la viscosité.

Dans ce qui suit, un objet volant en mouvement uniforme à la vitesse  $V$  sera assimilé à un point. Dans la réalité l'analyse est valide à une certaine distance de l'objet, typiquement quelques dizaines de fois sa taille.

##### **I.4.1 Ecoulement subsonique**

Si  $V < a$  (c'est-à-dire  $Ma < 1$ ), l'objet volant a une vitesse inférieure à celle de l'accroissement des sphères de perturbation qu'il crée à chaque instant. De plus, il se trouve en permanence à l'intérieur de celles créées précédemment. Tout le monde peut faire l'expérience du phénomène : l'observateur fixe ressent le son très faible des premières sphères très dilatées, puis l'intensité augmente jusqu'à ce que l'objet volant soit au plus près et diminue enfin jusqu'à extinction.

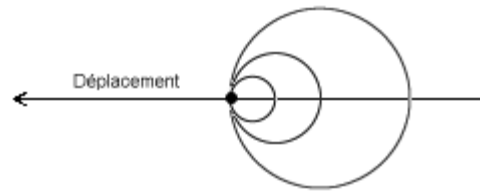
De plus, le déplacement du point d'émission des sphères de perturbation donne naissance à l'effet Doppler.



##### **I.4.2 Ecoulement sonique**

Si  $Ma = 1$ , l'objet volant colle en permanence à l'avant de toutes les sphères créées précédemment qui se retrouvent donc toutes tangentes à un plan perpendiculaire au mouvement de l'objet volant. La superposition d'une multitude de petites perturbations crée une grosse perturbation qui augmente considérablement la résistance de l'air : c'est le mur du son.

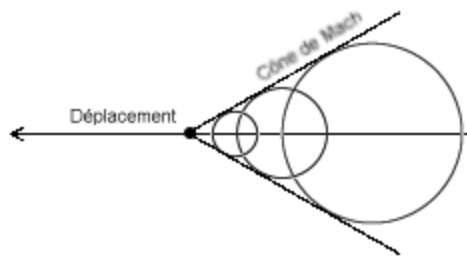
### Écoulement sonique



### I.4.3 Écoulement supersonique

Quand  $Ma > 1$ , l'objet volant laisse au contraire toutes les sphères de perturbation derrière lui. Un raisonnement simple montre qu'elles sont toutes tangentes à un cône appelé cône de Mach. L'angle de ce cône peut être calculé par la simple géométrie. Il est donné de manière rigoureuse par les relations de Rankine-Hugoniot.

### Écoulement supersonique



## Chapitre II Ecoulement Isentropique 1D en Conduit à Section Variable

### II-2 Application des équations générales

L'équation générale de l'écoulement d'un fluide non visqueux a été établie comme suite :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \quad (\text{II.1})$$

Si l'écoulement est permanent  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$  dans un fluide compressible,  $\vec{F}$  (force active) due en générale à la pesanteur est négligeable par rapport à la force de pression l'équation (II.1) devient :

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \wedge \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (\text{II.2})$$

Multipliant scalairement par un déplacement  $\vec{ds} = \vec{v} dt$  pris selon la trajectoire du fluide

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 \cdot \vec{ds} + \vec{ds} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \wedge \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{ds} \cdot \vec{\nabla} p = \vec{0}$$

$$\vec{ds} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{v} dt (\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \wedge \vec{v}) = 0 \text{ car le vecteur } \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \wedge \vec{v} \perp \vec{v} \cdot dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 \cdot \vec{ds} + \frac{1}{\rho} \vec{ds} \cdot \vec{\nabla} p = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = 0 \text{ on peut écrire cette équation sous la forme :}$$

$$d \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \frac{1}{\rho} dP = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\Rightarrow \int d \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \int \frac{dP}{\rho} = cst \Rightarrow \frac{1}{2} V^2 + \int \frac{dP}{\rho} = cst$$

#### a) Interprétation énergétique

Intégrant (3) entre deux points 1 et 2 d'un fluide

$$\int_{V_1}^{V_2} d \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = 0$$

$$\rho = \frac{1}{v}, \quad \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = w_T |_1^2 \text{ travail de transvasement par kg de (1) à (2)}$$

Donc l'équation exprime la conservation de l'énergie mécanique pour l'un de masse de fluide, la diminution de l'énergie cinétique entre deux points du même filet fluide  $\left( \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \right)$  est égale au travail de transvasement reçu par le fluide.

L'équation d'écoulement permanent des fluides compressibles non visqueux. Exprime donc la conservation de l'énergie mécanique. Pour l'unité de masse de fluide, la diminution d'énergie cinétique entre deux points d'un même filet fluide, est égale au travail de transvasement reçu par le fluide.

Remarquons que si l'écoulement est Irrotationnel, on peut multiplier scalairement l'équation vectorielle par un déplacement  $ds$  de direction quelconque, puisque nous n'avons plus  $\vec{\nabla} \wedge \vec{C} \wedge \vec{C}$  à éliminer. L'intégration montre alors que l'énergie mécanique est constante dans tout le domaine occupé par l'écoulement.

### b) Intégration dans le cas d'un écoulement isentropique de gaz parfait

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{dP}{\rho} = cst \quad \text{Écoulement permanent compressible non visqueux.}$$

$$\frac{P}{\rho} = rT, \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = cst, \quad P = A \cdot \rho^\gamma \Rightarrow dP = A\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho$$

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{A\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho}{\rho} = \frac{1}{2}V^2 + \int A\gamma\rho^{\gamma-2}d\rho = cst$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V^2 + A \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = \frac{1}{2}V^2 + A \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho^\gamma}{\rho} = cst \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = cst \quad \text{II.4}$$

Dite relation de Barré de Saint-Venant ou (BSV) que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} rT = cst$$

Et comme  $C_p = \frac{\gamma r}{\gamma-1}$  chaleur massique spécifique à pression constante.

En intégrant entre deux points 1 et 2 d'un écoulement on peut mettre la relation sous la forme :

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) = C_p (T_2 - T_1) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[ \frac{P_2 \rho_1}{\rho_2 P_1} - 1 \right]$$

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

### II-3 Equation générale d'écoulement adiabatique d'un fluide compressible visqueux

L'expression générale du premier principe de la thermodynamique appliqué à l'unité de masse d'un écoulement est :

$$(Q_e)_1^2 = H_2 - H_1 + W_{V_2} - W_{V_1} + W_{z_2} - W_{z_1}$$

$Q_e$  : chaleur échange avec l'extérieur.

$H$  : enthalpie du fluide

$W_V$  : Énergie cinétique du fluide

$W_Z$  : Énergie potentielle du fluide due à la pesanteur (négligeable).

Pour un écoulement adiabatique ( $Q_e = 0$ ) cette équation devient :

$$H + \frac{V^2}{2} = cst$$

La somme  $H + V^2/2$  est appelée énergie totale du fluide qui est constante dans un écoulement adiabatique. Elle pourra aussi s'appliquer à la vapeur d'eau ou à un fluide frigorigène.

### II-3-1 Gaz parfait en écoulement adiabatique irréversible

Pour un gaz parfait  $H = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma-1} rT$  l'équation de l'écoulement adiabatique s'écrit :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C^{st}, \quad C_p T + \frac{V^2}{2} = C^{st}$$

### II-3-2 Equation générale pour l'écoulement non permanent d'un fluide compressible visqueux

L'équation vectorielle de l'écoulement est :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{f}_\eta \quad (\text{II.5})$$

En multipliant scalairement par un élément de trajectoire  $\vec{ds} = \vec{V} dt$ , on obtient, en négligeant  $F$  (due à la pesanteur) :

$$\vec{V} \cdot dt \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{ds} \cdot \vec{\nabla} V^2 = -\frac{1}{\rho} \vec{ds} \cdot \vec{\nabla} P + \vec{ds} \cdot \vec{f}_\eta$$

Le premier terme  $\vec{V} \cdot dt \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V^2}{2} \right) dt$  représente la variation d'énergie cinétique pendant le temps  $dt$ .

Le premier membre de l'équation de l'énergie devient donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V^2}{2} \right) dt + \vec{ds} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{V^2}{2} \right) = d \left( \frac{V^2}{2} \right) \quad (\text{a})$$

dire  $d(V^2/2)$ , différentielle totale de l'énergie cinétique par unité de masse.

- Nous pose  $\vec{ds} \cdot \vec{f}_\eta = dW_f = -dQ_f$  (b):représente le travail des forces de viscosité dans le déplacement  $ds$  toujours négatif. L'énergie correspondante apparait sous forme d'une quantité de chaleur  $dQ_f$ .
- Pour le travail des forces de pression par  $-\frac{1}{\rho} \vec{ds} \cdot \vec{\nabla} P$

Compte tenu de l'expression différentielle de l'enthalpie

$$dH = TdS + v dP = TdS + \frac{dP}{\rho}$$

On obtient ensuite:  $-\frac{1}{\rho} \vec{ds} \cdot \vec{\nabla} P = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + TdS - dH$  (c)

En remplaçant (a), (b) et (c) dans (5) on obtient :

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + TdS - dH - dQ_f$$

Mais d'après la définition de l'entropie  $dS = \frac{dQ_c + dQ_f}{T}$   $dQ_c = TdS - dQ_f$

On obtient donc finalement :  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + d\left(H + \frac{V^2}{2}\right) = dQ_c$  (II.6)

On vérifie immédiatement que pour un écoulement permanent ( $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ ) et adiabatique ( $dQ_c = 0$ ) on retrouve l'équation  $H + \frac{V^2}{2} = C^{st}$

## II-4 Définitions particulières à l'étude des fluides compressibles

### II.4.1. État générateur

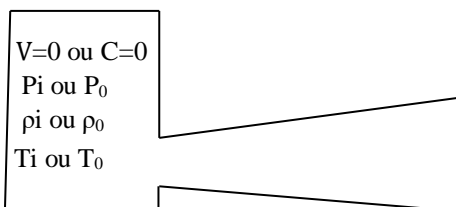
On appelle ainsi l'état du fluide en un point de l'écoulement où la vitesse est supposée nulle.

On le caractérise par l'indice i ou 0. On peut en avoir une représentation physique approchée en supposant que l'écoulement est alimenté par un réservoir de grande section, dans lequel la vitesse est pratiquement nulle.

Les caractéristiques à l'intérieur de ce réservoir sont alors celles de l'état générateur. Cette représentation justifie l'appellation état générateur.

Cependant, le principal intérêt de l'état générateur est qu'on en retrouve les caractéristiques en un point d'arrêt isentropique

On exprime habituellement la constante du théorème de Barré de Saint Venant à partir de l'état générateur. En appliquant ce théorème entre l'état générateur et le point considéré, on a :



$$C_p T_i = C_p T_0 = C_p T + \frac{1}{2} V^2$$

Sachant que :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, C_p - C_v = r \Rightarrow C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

Figure II.1 État générateur

Qui donne  $\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2$  Et puisque la vitesse du son pour un gaz parfait est donnée par  $a^2 = \gamma RT = \gamma \frac{P}{\rho}$  on obtient :  $\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} V^2$  (II.7)

Où  $a_0$  et  $a$  dénotent respectivement les vitesses du son aux conditions initiales (au réservoir)

et statique. En introduisant le nombre de Mach comme paramètre ( $M = V/a$ ), l'équation (II.7) peut

être  $\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$

réécrite comme suit : Et avec  $a^2 = \gamma RT$  le rapport des températures totale et statique est :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Où :  $T_0$  : la température totale.

T : la température statique.

M : le nombre de Mach.

Si l'écoulement est isentropique  $\frac{p}{\rho^\gamma} = cst$ , on peut écrire :  $\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$

Où  $P_0$  et  $\rho_0$  dénotent respectivement la pression et la densité isentropiques de stagnation.

Pour établir la relation entre les caractéristiques de deux points (1) et (2) d'un même

écoulement :

- En (1)  $\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2$
- En (2)  $\frac{T_0}{T_2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2$

Donc :  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$

De la même façon on peut établir des relations entre les pressions et les masses volumiques.

**Remarque :** Si  $M = 1$  ( $V = a$ ), l'état de l'écoulement est appelé état critique.

Il est déterminé en fonction de l'état générateur :  $\frac{T_0}{T_c} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{\gamma+1}{2}$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

## II.4.2. Point d'arrêt dans un écoulement isentropique subsonique

### II.4.2.1. Caractéristiques au point d'arrêt

Soit un point d'arrêt, on applique le théorème de BSV pour la ligne de courant aboutissant au point R. On obtient :



$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_r}{\rho_r} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}$$

Figure II.2 Point d'arrêt

Comme il s'agit d'un gaz parfait, on en déduit que  $\frac{P_r}{\rho_r} = \frac{P_0}{\rho_0} = rT_0 = rT_r$  d'où  $T_r = T_0$

### II.4.2.2. Calcul pratique des profils de tuyères

Dans ce genre de calcul on a intérêt à transformer l'équation de continuité établie pour établir une relation directe entre la section et le nombre de Mach. Deux points, 1 et 2, l'équation de continuité s'écrit.

$\rho_1 S_1 C_1 = \rho_2 S_2 C_2$  d'où  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\rho_2 C_2}{\rho_1 C_1} = \frac{\rho_2 M_2 a_2}{\rho_1 M_1 a_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$  Or BSV s'écrit:

$1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \frac{T_0}{T}$  Donc finalement :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$



En utilisant l'état critique « c » (on fait  $M_2=1$  et  $M_1= M$ ), on obtient :

$$\frac{S}{S_c} = \frac{1}{M} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Cette équation est appelée « théorème d'Hugoniot ». Comme pour l'équation de BSV, les tables en annexe donnent les valeurs numériques.

$S_c$  est la section critique, nous verrons qu'elle correspond aussi à la section du col de la tuyère lorsque celle-ci est « amorcée » (voir plus loin) Sur le diagramme ci-contre, nous traçons la fonction précédente. On peut tirer les conclusions suivantes (voir figure II.3) :

- En subsonique : lorsque la section décroît, la vitesse augmente et inversement. Le résultat est conforme à celui de la mécanique des fluides incompressible.

- Par contre, en supersonique, la vitesse augmente si la section augmente. - Pour passer de subsonique en supersonique, il faut donc que la tuyère présente une section minimale appelée « col ». Dans le cas où la tuyère est « amorcée », c'est-à-dire que l'écoulement est supersonique à un endroit, les conditions au col sont les conditions critiques. Dans ce cas le débit de la tuyère ne dépend plus des conditions avales (l'onde de pression ne peut pas remonter l'écoulement supersonique) : - Ce phénomène est appelé « phénomène d'étranglement »

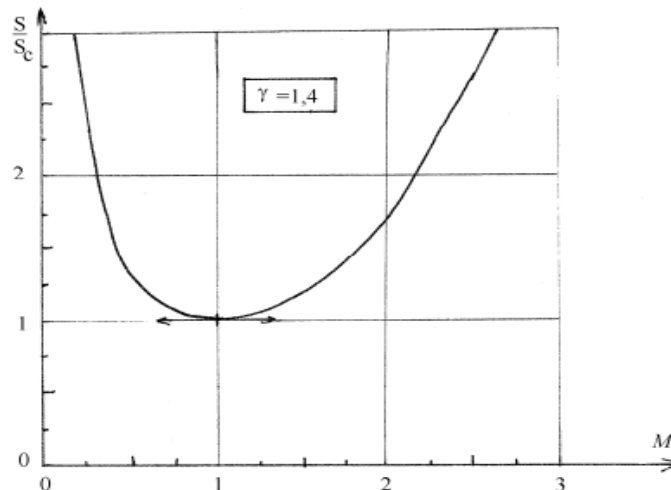


Figure II.3 Rapport de section en fonction de M

## II.5 Ecoulement isentropique avec changement de section

### II.5.1 Théorème de HUGONIOT

L'idée ici est d'examiner l'effet de la variation de la section d'une conduite sur les caractéristiques d'un écoulement. Le problème est unidimensionnel et les variables ne dépendent que de la coordonnée  $x$  normale à la section, c'est-à-dire, le long de l'axe de la conduite.

- **Relation section-vitesse :**

À l'état stationnaire,  $qm = \rho VA = \text{cste}$ , de sorte que  $d(\rho VA) = 0$ , donc :  $\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$

L'équation de BSV donne :

$$VdV + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad \text{La vitesse du son est } a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad \text{On en tire : } dp = a^2 d\rho, \quad VdV = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{VdV}{a^2} = \frac{V^2}{a^2} \cdot \frac{dV}{V} = -M^2 \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dS}{S} = -\frac{dV}{V} - \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{dS}{S} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1) \quad \text{Donc :}$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1) \quad \text{(II.8)}$$

- **Relation entre dV et dP :**

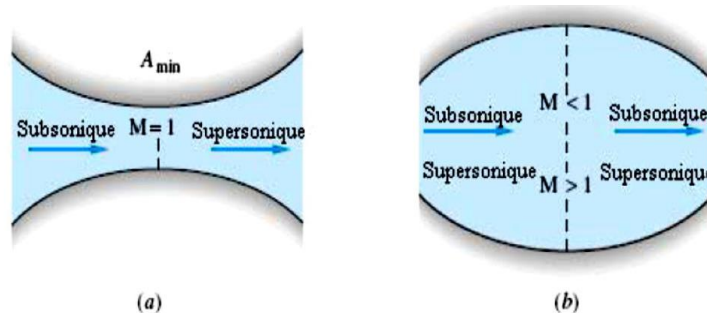
$$VdV = -\frac{dp}{\rho} \quad \frac{dV}{V} = \frac{1}{C^2} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{M^2 a^2} \frac{dP}{\rho} = -\frac{dP}{M^2 \gamma P} \quad \text{Donc } \frac{dV}{V} = -\frac{1}{M^2 \gamma P} \frac{dP}{P} \quad \text{(II.9)}$$

L'inspection de ces deux équations (II.8) et (II.9) nous révélera un aspect fascinant de l'écoulement compressible : les variations des propriétés ont des sens opposés pour les écoulements subsonique et supersonique à cause du terme  $M^2 - 1$ . Il y'a quatre combinaisons du changement de section et du nombre de Mach.

1. Si  $M = 1$  ; écoulement sonique, puisque une accélération infinie est physiquement impossible (équation 8), donc  $dS = 0$ , qui signifie mathématiquement une section minimale (col) ou maximale (figure 3), mais ce dernier cas (maximum) n'a pas de sens physique. Par conséquent, si l'écoulement est sonique, il aura lieu dans la section minimale de la canalisation (appelée le col).

2. Si  $M < 1$  ; écoulement subsonique, quand la section  $S$  augmente la vitesse  $V$  diminue et vice-versa.

3. Si  $M > 1$  ; écoulement supersonique, toute augmentation de la section  $A$  implique une augmentation de la vitesse  $V$  et vice-versa.



**Figure. II.4 :** Ecoulement compressible dans une canalisation de section variable : (a) l'écoulement accélère graduellement de l'état subsonique au supersonique; (b) l'écoulement dans cette configuration n'est plus sonique de point de vue physique

Ainsi d'après l'équation (9), toute variation de la vitesse V entraîne une variation de la pression P dans le sens inverse. La table suivante récapitule les quatre cas déjà cités :

Propriétés	Ecoulement			
	Subsonique		Supersonique	
Section	-	+	-	+
Vitesse / nombre de Mach	+	-	-	+
Densité / pression / température	-	+	+	-

## II.6 Application à l'étude des tuyères en écoulement isentropique

### II.6.1 Tuyère convergente

#### II.6.1.1 Calcul du débit

Le point essentiel dans l'étude des écoulements compressibles dans les canalisations avec changement de section, est la détermination du débit massique  $\dot{m}$  en fonction des autres propriétés de l'écoulement, on a l'équation :  $\dot{m} = \rho VA$

Substituons V par son expression d'après l'équation de Saint-Venant :

$$\dot{m} = \rho A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

Et puisque l'écoulement est isentropique :  $\frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{P}{\rho^\gamma} = c^{st} \Rightarrow \rho = \rho_0 \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$

D'où :

$$\dot{m} = \rho_0 A \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}} \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}} \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (\text{II.10})$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A V_{max} \psi$$

Avec:  $V_{max} = V_l = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}}$  et:  $\psi = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$

Posons  $\frac{P}{P_0} = x$  donc :  $\frac{d\psi}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{P}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

Quand  $\frac{P}{P_0}$  à la valeur  $\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$  la fonction  $\psi$  est maximum, puisque  $\psi = \psi\left(\frac{P}{P_0}\right)$  nulle si  $P = 0$  et  $P=P_0$  (figure 4).

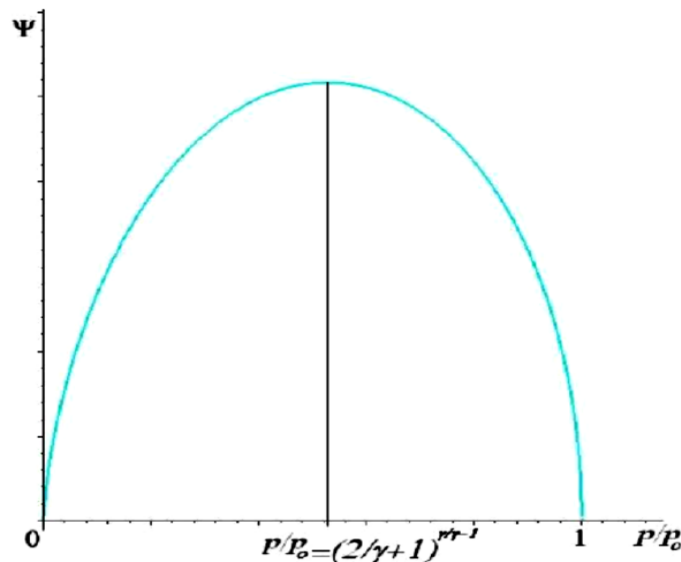


Figure. II.5 : Tracé de la fonction

La pression correspondante est appelée pression critique et s'écrit :  $\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

Elle s'obtiendra au col d'après la théorie d'Hugoniot, et le débit massique maximal sera :

$$\dot{m}_{max} = \rho_0 A V_{max} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma+1}} \Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \quad (II.11)$$

Aussi au col on a :  $a^* = V^*$  où  $V^* = a^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$  Et le débit massique critique sera:

$$\dot{m}_{max} = \rho^* A^* V^* \Rightarrow \dot{m}_{max} = A^* \rho_0 a_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (II.12)$$

Cette expression donne le débit massique maximum au col de la tuyère, où règne les conditions critiques. Pour  $\gamma = 1.4$  on a:  $\Rightarrow \dot{m}_{max} = 0.685 A^* \rho_0 a_0$

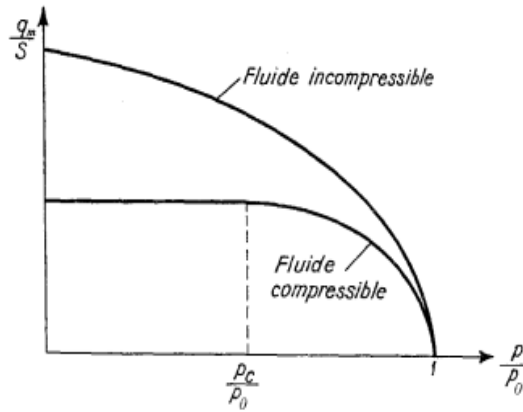


Figure. II.6 Débit d'une tuyère convergente

Le débit « d'étranglement » vaut :  $qm_e = \rho_c S_c C_c = \rho_0 S_c a_0 \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$  Il ne dépend plus que des conditions génératrices et de la section du col. Cette caractéristique est utilisée pour les réacteurs ou les fusées pour régler leur fonctionnement.

- Le retour en subsonique ne peut s'effectuer que par un col ou, nous verrons plus loin, par une onde de choc.

Si  $p/p_0 < p_c/p_0$  il est absurde, physiquement, d'admettre que le débit de la tuyère va diminuer. On constate expérimentalement qu'il reste constant et égal au débit calculé précédemment. Les caractéristiques à la sortie du col restent constantes et égales à celles de l'état critique. Le jet, arrivant à une pression supérieure à celle régnant dans l'espace aval, se dilate d'une manière irréversible après la sortie de la tuyère.

Comparons avec le débit masse d'un fluide incompressible de masse volumique  $\rho_0$ .

$$V = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2P_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)}$$

$$\dot{q} = A \sqrt{2P_0 \rho_0 \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)}$$

La figure 6 représente les deux courbes  $q/A=f(P/P_0)$  pour un fluide compressible et incompressible. L'expression précédente montre que le débit masse du fluide incompressible est représenté par une parabole d'axe horizontal. Dans ce cas le débit masse varie toujours en sens inverse de  $p/p_0$ .

Au contraire, le débit-masse d'un fluide compressible de même masse volumique amont est inférieur, à cause de l'accroissement du volume massique pendant la détente.

### II.6.1.2 Interprétation physique

Si  $p < p_c$ , la détente irréversible la sortie de la tuyère produit un refroidissement et, par conséquent, un abaissement local de la vitesse du son. Les ébranlements produits par cette détente brusque ne peuvent donc remonter l'écoulement dont la vitesse est supérieure à leur vitesse propre.

A l'amont de la tuyère, l'écoulement est subsonique et indépendant des conditions à l'aval. Les conditions à la sortie de la tuyère sont égales aux conditions critiques. Le débit est donc constant et égal au débit maximal.

## II.7 Tuyère convergente-divergente

Une tuyère convergente-divergente (aussi appelée tuyère de Laval) est représentée dans la figure (7. a). Si la pression en aval  $P_b$  est suffisamment faible, il existera un écoulement supersonique dans la portion divergente de la tuyère aussi qu'une variété de conditions de choc pourra exister.

➤ Pour les cas A et B (figure 7b), la pression  $P_b$  n'est pas suffisamment faible pour induire un écoulement sonique au col, et l'écoulement est subsonique à travers l'ensemble de la tuyère (convergente-divergente). La distribution de pression est calculée d'après les relations isentropiques déjà établies. La pression de sortie est  $P_e = P_b$  et le jet est subsonique.

➤ Pour le cas C, le rapport des sections  $\frac{A_e}{A_{col}}$  est exactement égal à  $\frac{A_e}{A^*}$  pour un nombre de Mach subsonique à la sortie. Le col devient sonique, et le débit massique atteint son maximum (figure 7c). L'écoulement dans le reste de la tuyère est subsonique, le jet inclus et  $P_e = P_b$ .

➤ Supposons dans ce cas que  $P_b$  se trouve entre les cas C et H, qui est impossible d'après les relations de l'écoulement isentropique. Alors, les pressions  $P_b$  des cas D à F ont lieu (figure 2-5b). le col reste suffoqué à la valeur sonique. Le débit massique garde sa valeur maximale (figure 7c). A la pression en aval du cas F l'onde de choc normale apparaîtra à la sortie de la tuyère. Dans le cas G, l'écoulement présentera des séries complexes d'ondes de choc obliques jusqu'il atteint la pression  $P_b$ .

➤ Finalement dans le cas I,  $P_b$  est inférieure à celle du cas H, mais la tuyère est suffoquée et ne répond plus. L'écoulement à la sortie s'étend en de complexes séries d'ondes supersoniques.

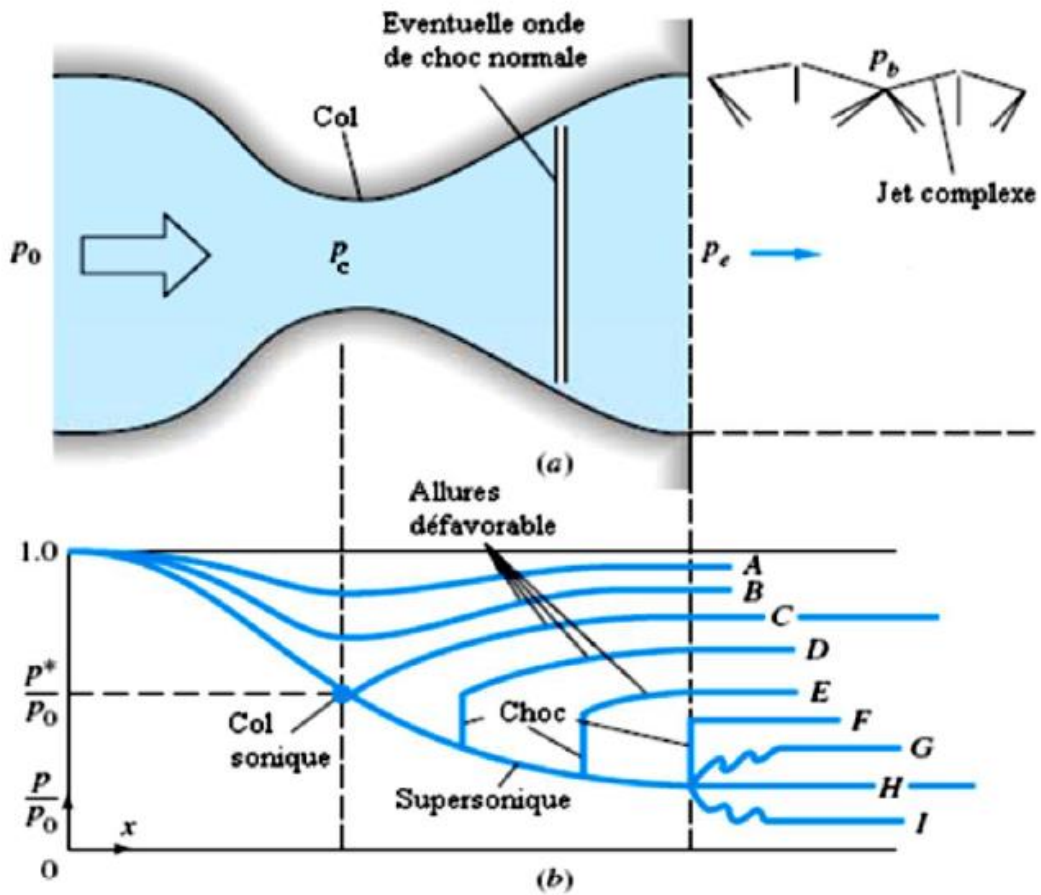


Figure .II.7 Tuyère convergente-divergente (a) et configurations possibles; distribution des pressions causée par divers pressions aval  $P_b$  (b)

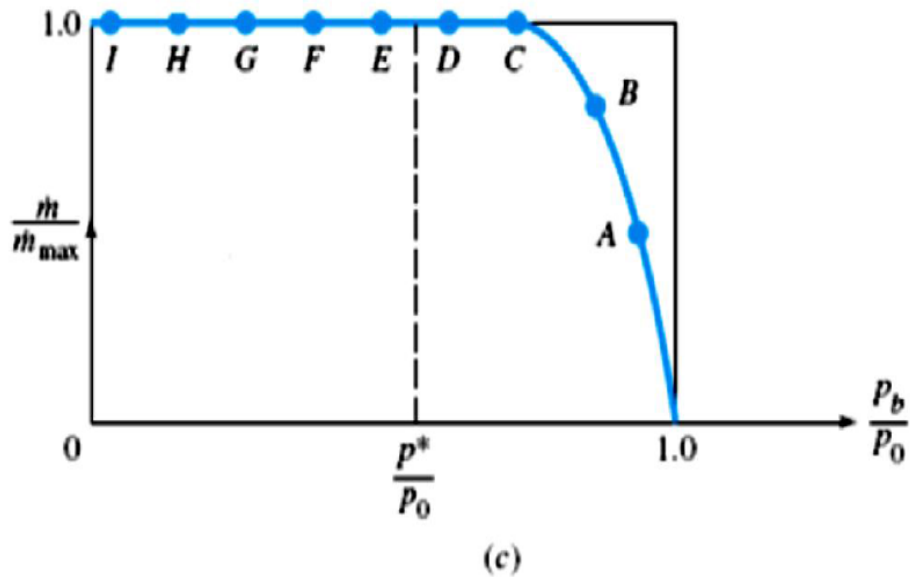


Figure .II.8 (c) débit massique.

# Chapitre III Ondes de choc

## III.1 Ondes de choc normales :

Un phénomène irréversible commun aura lieu dans les écoulements supersoniques que ces soient internes ou externes, qui est l'onde de choc normale. C'est une très mince onde (d'épaisseur de quelques microns) de discontinuité dans les propriétés de l'écoulement. Puisque l'état du gaz change adiabatiquement, une augmentation de la température statique s'accompagne d'une augmentation de la pression (figure IV-1a), la face arrière de l'onde de compression ayant une température plus grande, se propage plus rapidement que la face frontale de l'onde (figure 8), ces deux faces de l'onde se combinent en une mince discontinuité de la pression. Les ondes de choc sont associées avec nécessairement d'une augmentation de la pression et pas d'une réduction.

A chaque instant, le projectile crée une perturbation qui se propage à la vitesse du son, en formant une onde sphérique, ayant pour centre le lieu où elle a été produite.

a) Soit  $c$  la vitesse du projectile,  $c < a$  (vitesse du son). Soient  $o$  et  $A$  les positions du projectile au temps  $0$  et au temps  $t$

Sur la figure sont représentées les positions des ondes produites aux temps  $0, t/2, 3t/4$ .

On voit que, dans ce cas, la perturbation devance la source et intéresse tout l'espace.

b)  $c > a$  Les diverses ondes sphériques admettent un cône enveloppe

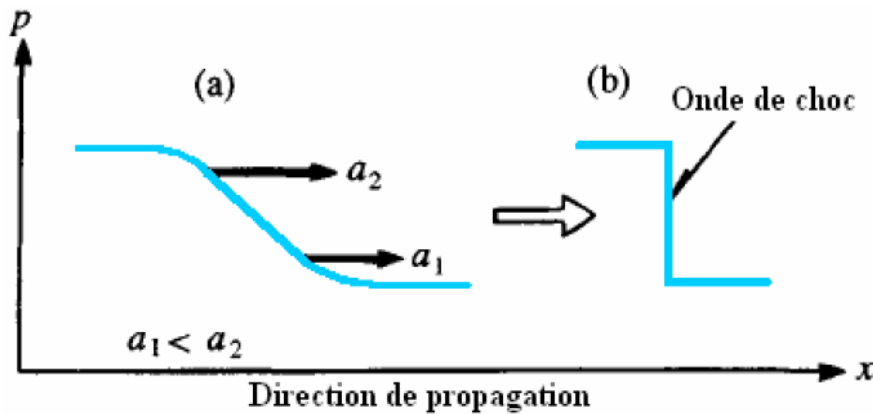


Figure. III.1 Propagation d'une onde de compression

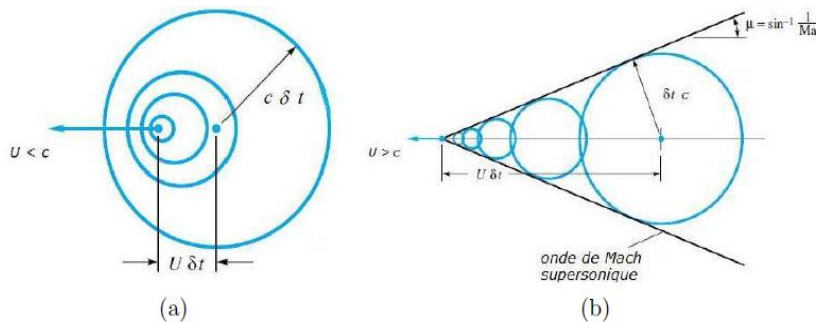


Figure. III.2 { (a) Projectile subsonique  $Ma < 1$ , (b) Projectile supersonique  $Ma > 1$



La zone perturbée reste localisée à l'intérieur de ce cône. La région extérieure au cône est appelée « zone de silence ». Elle est exempte de tout bruit par le projectile. Les ondes de compression se concentrent sur ce cône en accumulant la perturbation qu'elles transportent.

Ce cône enveloppe est appelé onde de Mach. Son demi-angle au sommet appelé angle de Mach on a

$$\sin \alpha = \frac{a}{V} = \frac{1}{M}$$



Figure. III.3 Avion à réaction volant à vitesse supersonique.

Puisque une onde de choc est essentiellement différente d'une onde sonore à cause de l'intense changement de la pression, la vitesse de propagation du choc est plus élevée que celle du son, et la hausse de la pression l'est aussi. Les ondes de choc se remarquent par exemple après une explosion, l'éjection des gaz brûlés à travers une tuyère d'échappement ou quand un avion ou une projectile vole à une vitesse supersonique (figure III.3)

### III-2 Equations de base :

L'analyse des ondes de choc se base sur le concept d'une onde fixe de pression (figure III.4). Les états amont et aval de l'onde de choc sont désignés par les indices 1 et 2 respectivement.

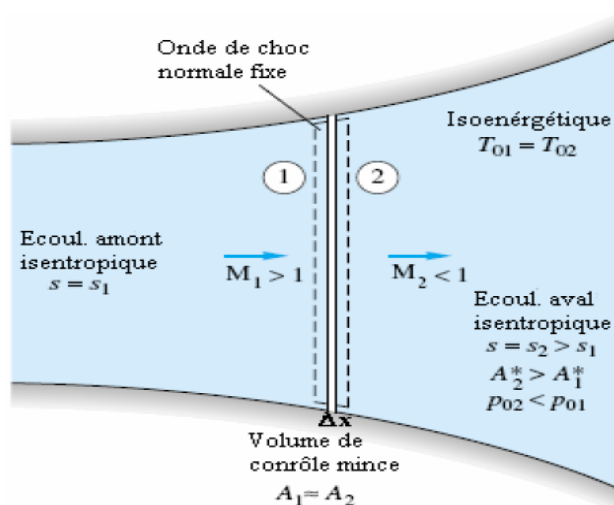


Figure. III.4: Ecoulement à travers d'une onde de choc normale fixe.

L'épaisseur d'une onde de choc  $\Delta x$  est tellement petite (approximativement des microns), qu'elle soit supposée n'ayant aucun changement de section (dans une conduite à section variable), donc  $A_1 \approx A_2$  et l'équation de continuité s'écrit :  $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \text{Const}$  (III.1)

L'équation de quantité de mouvement est :  $p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2$  (III.2)

L'équation de l'énergie :  $h_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_2^2 = h_0 = \text{Const}$  (III.4)

Les relations d'un gaz parfait :  $\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$  (III.5)

Et :  $h = c_p T$  ;  $\gamma = \text{Const}$  (III.6)

En supposant que les conditions en amont ( $p_1, V_1, \rho_1, h_1, T_1$ ) sont connues, les équations précédentes (équations IV-1) présentent 5 relations algébriques à 5 inconnues ( $p_2, V_2, \rho_2, h_2, T_2$ ). Les termes carrés de la vitesse nous révèlent l'existence de deux solutions, la correcte parmi elles est déterminée d'après le second principe de la thermodynamique, qui exige  $s_1 > s_2$ .

En éliminant les vitesses  $V_1$  et  $V_2$  des équations, on obtient la relation de Rankine-Hugoniot :

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \left( \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (III.7)$$

Mais puisque pour un gaz parfait :  $h = c_p T = \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho}$ , l'équation (18) se réécrit :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \left( \frac{p_2}{p_1} \right)} = \frac{V_1}{V_2} \quad (III.8)$$

Ou bien 
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}{\left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \quad (III.9)$$

Aussi pour un gaz parfait :  $\frac{\rho_1 V_1^2}{p_1} = \frac{\gamma V_1^2}{(\gamma R T_1)} = \gamma M_1^2$ , et l'équation (III.9) sera :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma + 1} \left[ 2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1) \right] \quad (III.10)$$

De cette dernière équation on peut remarquer que pour un  $\gamma$  quelconque ;  $p_1 > p_2$  seulement si  $M_1 > 1.0$ . Ainsi pour un écoulement avec onde de choc normale, le nombre de Mach amont doit être supersonique pour satisfaire le second principe de la thermodynamique.

Aussi pour le gaz parfait on a l'identité  $\rho V^2 = \gamma p M^2$ , et on peut réécrire l'équation (III.2)

comme :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (\text{III.11})$$

Et le nombre de Mach en aval sera après combinaisons des équations (III.8 et III.9) :

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (\text{III.12})$$

Mais comme  $M_1$  doit être supersonique, cette équation prédit pour tout  $\gamma > 1$  que  $M_2$  doit être subsonique. Ainsi une onde de choc normale décélère un écoulement presque d'une façon discontinue des conditions supersoniques aux conditions subsoniques.

D'autres manipulations des équations (III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.6) donnent des relations additionnelles décrivant les changements des propriétés à travers d'une onde de choc normale au sein d'un gaz parfait :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[ 2 + (\gamma - 1)M_1^2 \right] \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \quad (\text{III.13})$$

$$T_{01} = T_{02}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left[ \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[ \frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

D'un intérêt plus considérable, est le fait que la section critique (au col sonique)  $A^*$  d'une tuyère augmente à travers une onde de choc normale.

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{M_2}{M_1} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (\text{III.14})$$

En conclusion, dans les ondes de choc les températures totales (de stagnation) restent les mêmes, mais les pressions et les densités totales diminuent avec le même ratio, c.-à-d.

l'écoulement à travers le choc est adiabatique mais non-isentropique. Ainsi les principes fondamentaux gouvernant les écoulements aux ondes de choc peuvent être récapitulés comme

suit :

1. L'écoulement en amont est supersonique, et celui en aval est subsonique.
2. Pour les gaz parfaits (aussi que pour les fluides réels), seulement les ondes de compression peuvent exister.
3. l'entropie augmente à travers le choc.
4. Les ondes de choc faibles sont presque isentropiques.

L'analyse des ondes de choc normales fixes s'applique également aux ondes de choc en mouvement.

### III.3 Relation de Prandtl

La relation de Prandtl établit la relation entre les vitesses en amont et en aval du choc. Dans un premier temps, l'équation d'Euler donne

$$u_2 - u_1 = \frac{P_1}{\rho_1 u_1} - \frac{P_2}{\rho_2 u_2} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma P_1}{\rho_1 u_1} - \frac{\gamma P_2}{\rho_2 u_2} \right) = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{c_1^2}{u_1} - \frac{c_2^2}{u_2} \right) \quad (\text{III.15})$$

La troisième relation (4) de Barre de Saint-Venant entre les sections (1) en amont du choc, (2) en aval du choc et (\*) au niveau du col où  $M=1$  s'écrit :

$$c_1^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u_1^2 = c_2^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u_2^2 = c_*^2 \frac{\gamma + 1}{2} \quad (\text{III.16})$$

On introduit l'équation (27) dans l'équation (26) :

$$\begin{aligned} \gamma(u_2 - u_1) &= \frac{c_2^2}{u_1} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_2^2 - u_1^2}{u_1} - \frac{c_2^2}{u_2} \\ \Rightarrow \gamma(u_2 - u_1)u_1 &= c_2^2 + \frac{\gamma - 1}{2} (u_2^2 - u_1^2) - \frac{c_2^2 u_1}{u_2} \\ \Rightarrow \gamma(u_2 - u_1)u_1 &= c_2^2 \frac{u_2 - u_1}{u_2} + \frac{\gamma - 1}{2} (u_2 - u_1)(u_2 + u_1) \\ \Rightarrow \gamma u_1 &= \frac{c_2^2}{u_2} + \frac{\gamma - 1}{2} (u_2 + u_1) \\ \Rightarrow \gamma u_1 u_2 &= c_2^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u_2^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u_1 u_2 \\ \Rightarrow \frac{\gamma + 1}{2} u_1 u_2 &= \frac{\gamma + 1}{2} c_*^2 \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

On obtient finalement la relation de Prandtl :  $u_1 u_2 = c_*^2$  (III.18)

### III.4 Calcul du rapport des grandeurs caractéristiques en fonction du nombre de Mach amont $Ma_1$

D'après l'équation de continuité, on peut en déduire le rapport  $\rho_2/\rho_1$  :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{c_*^2} = \frac{u_1^2}{\frac{2}{\gamma+1}(c_1^2 + \frac{\gamma-1}{2}u_1^2)} \quad (\text{III.19})$$

D'où :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}Ma_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2} \quad (\text{III.20})$$

On peut faire de même par rapport au  $Ma_2$  :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}Ma_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma_2^2} \quad (\text{III.21})$$

On peut exprimer le rapport des pressions :

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_2}{P_1} &= \frac{1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = \frac{2\gamma Ma_1^2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \\ \frac{P_1}{P_2} &= \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_2^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.22})$$

On exprime  $Ma_1$  et  $Ma_2$  en fonction du rapport des pressions :

$$\left. \begin{aligned} Ma_1^2 &= 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left( \frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \\ Ma_2^2 &= 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left( \frac{P_1}{P_2} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.23})$$

Il faut que  $P_2/P_1 > 1$  pour que  $Ma_1 > 1$ . C'est une condition nécessaire mais pas suffisante pour qu'il y ait un choc. Si  $Ma_1 < 1$ , il ne peut pas y avoir de choc. On peut exprimer  $Ma_1$  en fonction de  $Ma_2$  :

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} &= \frac{1}{\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_2^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \\ \Rightarrow Ma_2^2 &= \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2}{\gamma Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Si le choc existe et que  $Ma_1 > 1$ , alors  $Ma_2$  est toujours inférieur à 1. Il est à noter qu'on ne peut pas utiliser la relation  $P/\rho^\gamma = Cte$  à la traversée du choc car le phénomène est irréversible.

### III.5 Variation d'entropie dans une onde de choc droite

L'entropie s augmente à la traversée du choc d'après la relation de Gibbs :  $ds = dh/T - dP/\rho$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi :} \quad ds &= (c_p - r) \frac{dT}{T} - r \frac{d\rho}{\rho} = c_v \frac{dT}{T} - r \frac{d\rho}{\rho} \\ \Rightarrow \frac{ds}{c_v} &= \frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} \\ \Rightarrow s_2 - s_1 &= c_v \ln \left[ \frac{P_2}{P_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

$$\Rightarrow s_2 - s_1 = c_v \ln \left[ \left( \frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left( \frac{1 + (\gamma-1)Ma_1^2/2}{(\gamma+1)Ma_1/2} \right)^\gamma \right] \quad (\text{III.26})$$

Si  $Ma_1 \leq 1.2$ ,  $s_2 - s_1$  est très faible. Ensuite,  $s_2 - s_1$  augmente fortement avec  $Ma_1$ .

**Remarque :** Si  $Ma_1 < 1$ , il n'y a pas de choc. Cela entrainerait en effet que  $s_2 - s_1 < 0$ , ce qui n'a pas de signification physique. L'onde de choc droite ne peut donc exister que si  $Ma_1 > 1$ .

### III.6 Rendement isentropique à la traversée du choc

Le rendement isentropique, qui compare la transformation réelle à une transformation isentropique, est défini, comme pour les machines irréversibles, par :

$$\eta_{is} = \frac{h_2^{is} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{T_2^{is} - T_1}{T_2 - T_1} \quad (\text{III.27})$$

$$\frac{T_{2is}}{T_1} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

### III.7 Les ondes de choc obliques

Les ondes de choc peuvent se former à angle oblique  $\sigma$  par rapport au courant supersonique. Ce type d'ondes dévie le courant d'un angle  $\delta$  (angle de déflexion), contrairement aux ondes de choc normales, pour lesquelles l'écoulement aval ne change plus sa direction.

Un choc oblique est causé essentiellement par la nécessité d'un écoulement de tourner selon un certain angle. Exemples des chocs obliques est l'écoulement à travers un coin d'extrémité d'un corps et à travers un rampe dans la paroi d'un tunnel supersonique.

La géométrie de l'écoulement considéré est illustrée dans la figure (III.5). Comme dans le chapitre précédent des ondes de choc normales l'état 1 dénote les conditions en amont et l'état 2 dénote celles en aval.

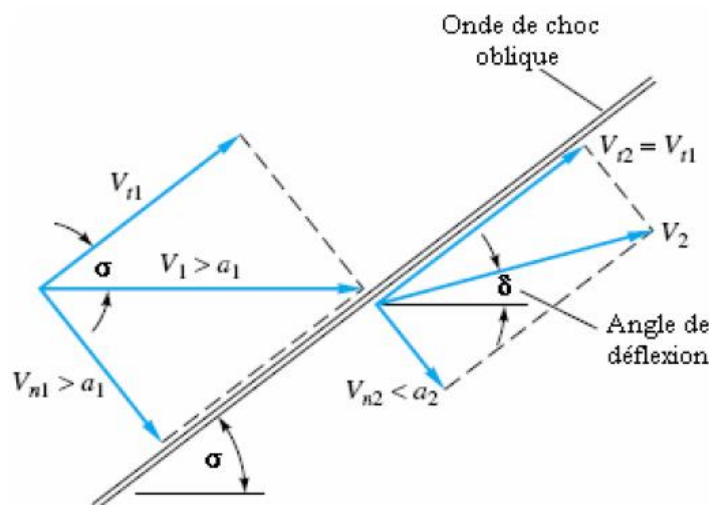


Figure. III.5 Géométrie d'un écoulement à onde de choc oblique.

L'angle de choc a une valeur arbitraire  $\sigma$ , et l'écoulement en aval  $V_2$  change de direction d'un angle  $\delta$  qui est fonction de  $\sigma$  et les conditions de l'état 1. L'écoulement amont est toujours supersonique, mais le nombre de Mach  $M_2 = V_2 / a_2$  peut être subsonique, sonique ou supersonique tout dépend des conditions de l'écoulement.

### III.7.1 Equations de base :

Il est avantageux d'analyser l'écoulement à choc oblique en lui décomposant en deux composantes normale et tangentielle par rapport à l'onde, (voir figure 11). Pour un volume de contrôle très mince, on peut écrire les relations suivantes, sachant que  $A_1 = A_2$  de part et d'autre de l'onde :

$$\text{L'équation de continuité est : } \rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} \quad (\text{III.28})$$

La projection normale de l'équation de quantité de mouvement est :

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2 \quad (\text{III.29})$$

La projection tangentielle de l'équation de quantité de mouvement est :

$$\rho_1 V_{n1} (V_{t2} - V_{t1}) = 0 \quad (\text{III.30})$$

L'équation de l'énergie :

$$h_1 + \frac{1}{2} V_{n1}^2 + \frac{1}{2} V_{t1}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{n2}^2 + \frac{1}{2} V_{t2}^2 = h_0 \quad (\text{III.31})$$

D'après l'équation (41) on peut déduire qu'il y'en a pas de variation de la vitesse tangentielle à travers un choc oblique :  $V_{t2} = V_{t1} = V_t = \text{Const}$  (III.32)

Par suite la composante tangentielle de la vitesse a le seul effet d'ajouter une énergie cinétique constante  $\frac{1}{2} V_t^2$  aux deux membres de l'équation de l'énergie (III.29). Donc, les ondes de choc normales avec  $V_1$  et  $V_2$  remplacées par les composantes normales  $V_{n1}$  et  $V_{n2}$ , ce qui entraîne l'apparition des nombres de Mach normaux au lieu de  $M_1$  et  $M_2$  :

$$\left. \begin{aligned} M_{n1} &= \frac{V_{n1}}{a_1} = M_1 \sin \sigma \\ M_{n2} &= \frac{V_{n2}}{a_2} = M_2 \sin (\sigma - \delta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.33})$$

Pour un gaz parfait ( $\gamma = \text{Const}$ ), et avec  $M_1$  remplacé par  $M_{n1}$  :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma + 1} \left[ 2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1) \right] \quad (\text{III.34})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{\tan \sigma}{\tan(\sigma - \delta)} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma + 2} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} \\
 \frac{T_2}{T_1} &= \left[ 2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma \right] \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2 \sin^2 \sigma} \\
 T_{01} &= T_{02} \\
 \frac{p_{02}}{p_{01}} &= \left[ \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[ \frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \\
 M_{n2}^2 &= \frac{(\gamma - 1)M_{n1}^2 + 2}{2\gamma M_{n1}^2 - (\gamma - 1)}
 \end{aligned}
 \tag{III.35}$$

Toutes ces dernières équations sont tabulées dans la table de l'onde de choc normale. Il est clair maintenant que la table est aussi valable pour les ondes de choc obliques.

$$\tan \delta = \frac{2 \cot \sigma (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\sigma) + 2}
 \tag{III.36}$$

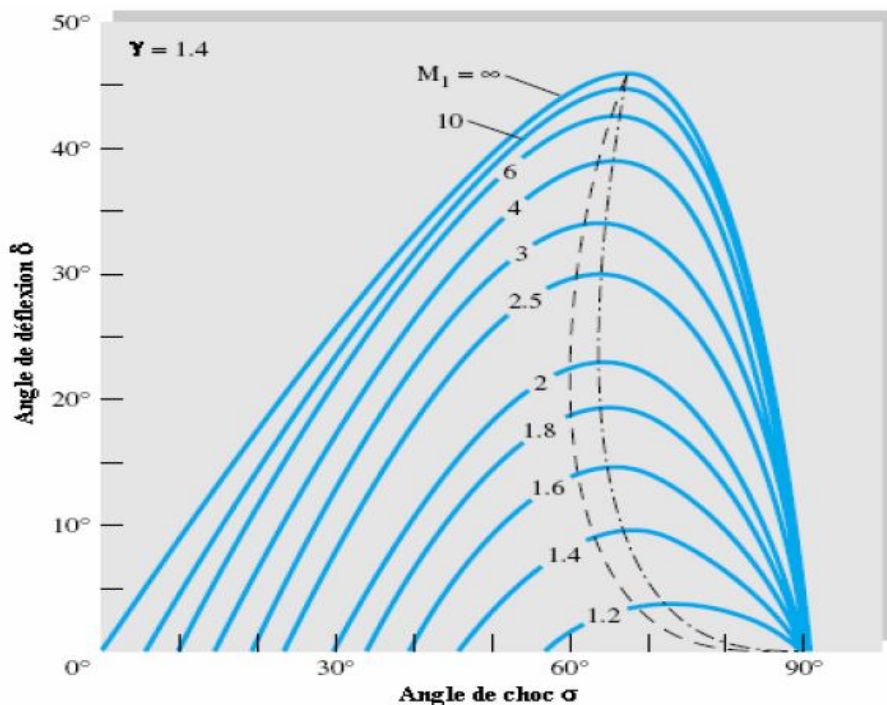


Figure.III.6 : Angles de déflexion du choc oblique en fonction de l'angle de choc pour divers nombre de Mach,  $\gamma = 1.4$ .



## Chapitre IV : Écoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO)

### IV.1 Equations de base

Le chapitre (IV) a montré l'effet de changement de section sur un écoulement compressible en négligeant le transfert de chaleur et (le frottement) la friction. Nous pourrions maintenant ajouter la friction et le transfert de chaleur au changement de section et considérer les effets couplés, qui sont faits dans des textes avancés. Au lieu de cela, comme une introduction élémentaire, cette section traite seulement l'effet de la friction, en négligeant le changement de section et le transfert de chaleur. Les suppositions de base sont

1. Écoulement unidimensionnel, stationnaire et adiabatique
2. Gaz parfait avec des chaleurs spécifiques constantes
3. Conduite à section droite constante
4. Travail mécanique et changements d'énergie potentielle négligeables
5. Contrainte de cisaillement pariétale corrélée par un facteur de friction de Darcy

En effet, nous étudions un problème de friction des tuyauteries de type Moody, mais avec de grands changements de l'énergie cinétique, l'enthalpie et la pression dans le courant fluide. Considérons le volume de contrôle élémentaire de la conduite de section  $A$  et la longueur  $dx$  dans la figure (13). La section est constante, mais d'autres propriétés de flux ( $p, \rho, T, h, V$ ) peuvent varier avec  $x$ .

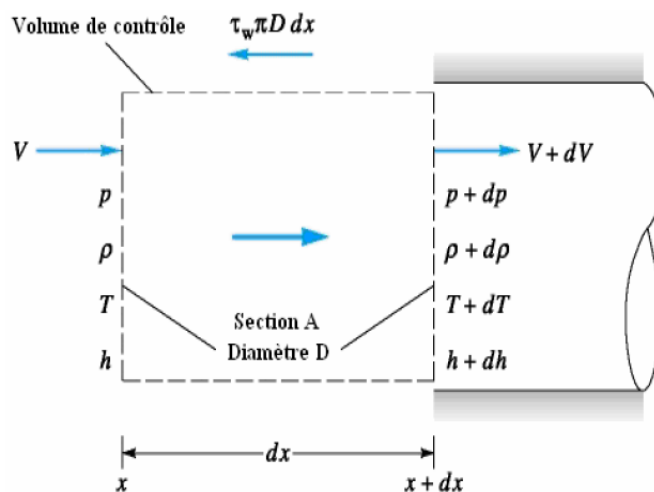


Figure. IV.1 : Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement avec friction dans une conduite de section constante.

L'application des trois lois de conservation à ce volume de contrôle donne trois équations différentielles

$$\rho V = \frac{\dot{m}}{A} = G = \text{const}$$

Continuité :

$$\text{Où } \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Quantité de mouvement suivant  $x$  :  $pA - (p + dp)A - \tau_w \pi D dx = \dot{m}(V + dV - V)$

$$\text{Où } dp + \frac{4\tau_w dx}{D} + \rho V dV = 0 \quad (\text{IV.49})$$

Énergie :  $h + \frac{1}{2}V^2 = h_0 = c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2}V^2$

$$\text{Où } c_p dT + V dV = 0 \quad (\text{IV.2})$$

Puisque ces trois équations ont cinq inconnues,  $p, \rho, T, V$  et  $w \tau$  nous avons besoin de deux relations complémentaires. On est la loi des gaz parfaits

$$p = \rho RT \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (\text{IV.3})$$

Pour éliminer  $\tau_w$  comme une inconnue, il est supposé que la contrainte de cisaillement à la paroi est corrélée par un coefficient de friction local de Darcy  $f$

$$\tau_w = \frac{1}{8} f \rho V^2 = \frac{1}{8} f \gamma p M^2 \quad (\text{IV.4})$$

où la dernière forme obéit la relation de vitesse de son dans un gaz parfait  $a^2 = \gamma p / \rho$ . En pratique,  $f$  peut être relié au nombre de Reynolds local et la rugosité de la paroi.

### III.2 Relations de nombre de Mach :

Les équations de base et (51) sont des équations différentielles du premier ordre et peuvent être intégrées, en employant des données du coefficient de frottement, partant de n'importe quelle section d'entrée 1, où on connaît  $p_1, T_1, V_1$  etc., pour déterminer  $p(x), T(x)$ , etc, le long de la conduite. Il est pratiquement impossible d'éliminer tous sauf une variable pour donner, disons, une équation différentielle simple pour  $p(x)$ , mais toutes les équations peut être écrite en termes du nombre de Mach  $M(x)$  et le coefficient de frottement, en employant la définition du nombre de Mach  $V^2 = M^2 \gamma R T$  Où :

$$\frac{2dV}{V} = \frac{2dM}{M} + \frac{dT}{T} \quad (\text{IV.5})$$

En éliminant des variables entre les équations du (48) à (53), nous obtenons les relations de travail

$$\frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{2(1 - M^2)} f \frac{dx}{D} \quad (\text{IV.6})$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma M^2}{2(1 - M^2)} f \frac{dx}{D} = -\frac{dV}{V} \quad (\text{IV.7})$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{d\rho_0}{\rho_0} = -\frac{1}{2}\gamma M^2 f \frac{dx}{D} \quad (\text{IV.8})$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{D} \quad (\text{IV.9})$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \gamma M^2 \frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2}{1-M^2} f \frac{dx}{D} \quad (\text{IV.10})$$

Toutefois, les propriétés  $p^*, \rho^*, T^*, p_0^*, \text{et } \rho_0^*$  sont les quantités constantes de référence appropriées dans l'écoulement adiabatique dans les conduites. La théorie calcule alors les proportions  $p/p^*, T/T^*$ , etc., comme une fonction du nombre de Mach local et l'effet de friction intégré. Pour tirer des formules pratiques, nous attaquons d'abord l'équation (58), qui relie le nombre de Mach à la friction. Séparons les variables et intégrons :

$$\int_0^{L^*} f \frac{dx}{D} = \int_{M^2}^{1.0} \frac{1-M^2}{\gamma M^4 \left[ 1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2 \right]} dM^2 \quad (\text{IV.11})$$

La limite supérieure est le point sonique, s'il est en réalité ou pas atteint dans l'écoulement de la conduite. La limite inférieure est arbitrairement placée de la position  $x = 0$ , où le nombre de Mach est  $M$ . Le résultat de l'intégration est

$$\frac{\bar{f} L^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \quad (\text{IV.12})$$

Où  $\bar{f}$  est la valeur moyenne du coefficient de friction entre 0 et  $L^*$ . En pratique, un  $f$  moyen est toujours supposé, et aucune tentative n'est faite pour représenter les légers changements du nombre de Reynolds le long de la conduite. Pour des conduites non circulaires,  $D$  est remplacé par le diamètre hydraulique  $D_h = (4 \times \text{section}) / \text{périmètre}$ .

La longueur  $L^*$  est la longueur de conduite exigée pour développer un écoulement dans la conduite partant du nombre de Mach  $M$  jusqu'au point sonique. Beaucoup de problèmes impliquent les conduites courtes qui ne deviennent jamais soniques, pour lequel la solution emploie les différences des longueurs "maximums", ou soniques tabulées. Par exemple, on donne la longueur  $\Delta L$  exigée pour se développer de  $M_1$  à  $M_2$  par

$$\bar{f} \frac{\Delta L}{D} = \left( \frac{\bar{f} L^*}{D} \right)_1 - \left( \frac{\bar{f} L^*}{D} \right)_2 \quad (\text{IV.13})$$

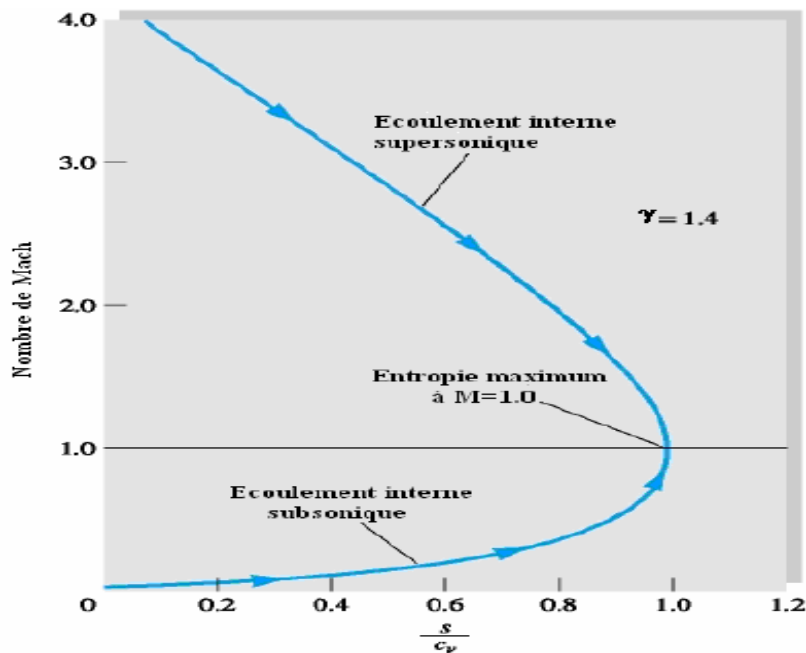


Figure. IV.2 : Ecoulement adiabatique avec friction dans un conduit de section constante s'approche toujours de  $M=1$  pour satisfaire la seconde loi de la thermodynamique. La courbe calculée est indépendante de la valeur du coefficient de friction.

Cela évite le besoin de tabulations séparées pour des conduites courtes.

Il est recommandé que le coefficient de friction  $f$  soit estimé du diagramme de Moody pour le nombre de Reynolds moyen et le rapport de la rugosité pariétale du conduit.

### Exemple 1

Un courant d'air s'écoule subsoniquement dans une conduite adiabatique de 2 cm de diamètre. Le coefficient de friction moyen est 0.024. Quelle est la longueur de conduite nécessaire d'accélérer l'écoulement fluide de  $M_1 = 0.1$  à  $M_2 = 0.5$  ? Quelle longueur complémentaire l'accélérera à  $M_3 = 1.0$  ? Supposez  $\gamma = 1.4$ . **solution**

L'équation (61) s'applique, avec les valeurs de  $fL^*/D$  calculées de l'équation (60) ou lises de la table.

$$\begin{aligned} \bar{f} \frac{\Delta L}{D} &= \frac{0.024 \Delta L}{0.02 m} = \left( \frac{fL^*}{D} \right)_{M=0.1} - \left( \frac{fL^*}{D} \right)_{M=0.5} \\ &= 66.9216 - 1.0691 = 65.8525 \end{aligned}$$

Ainsi 
$$\Delta L = \frac{65.8525(0.02 m)}{0.024} = 55 m$$

La longueur complémentaire  $\Delta L'$  pour aller de  $M = 0.5$  à  $M = 1.0$  est prise directement de la table (II)

$$\begin{aligned} f \frac{\Delta L'}{D} &= \left( \frac{fL^*}{D} \right)_{M=0.5} = 1.0691 \\ \Delta L' = L_{M=0.5}^* &= \frac{1.0691(0.02 m)}{0.024} = 0.9 m \end{aligned}$$

Ces calculs sont typiques : Il prend 55 m pour accélérer jusqu'à  $M = 0.5$  et ensuite seulement 0.9 m plus pour arriver entièrement jusqu'au point sonique.

Les formules pour d'autres propriétés de l'écoulement le long de la conduite peuvent être tirées des équations de base. L'équation (58) peut être employée pour éliminer  $f dx / D$  de chacune des autres relations, étant donnée, par exemple,  $dp / p$  comme une fonction seulement de  $M$  et  $dM^2 / M^2$ . Pour la convenance dans la tabulation des résultats, chaque expression est alors intégrée entièrement de  $(p, M)$  au point sonique  $(p^*, 1.0)$ . Les résultats intégrés sont

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{p^*} &= \frac{1}{M} \left[ \frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \right]^{1/2} \\ \frac{\rho}{\rho^*} &= \frac{V^*}{V} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2+(\gamma-1)M^2}{\gamma+1} \right]^{1/2} \\ \frac{T}{T^*} &= \frac{a^2}{a^{*2}} = \frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \\ \frac{p_0}{p_0^*} &= \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2+(\gamma-1)M^2}{\gamma+1} \right]^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.14})$$

Toutes ces proportions sont aussi tabulées dans la table (III). Pour calculer les changements entre des points  $M_1$  et  $M_2$  qui ne sont pas soniques, les produits de ces proportions sont employés. Par exemple,  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p^*} \frac{p^*}{p_1}$  puisque  $p^*$  est une valeur de référence constante pour l'écoulement.

#### Exemple 2

Pour l'écoulement interne de l'exemple (1) supposez que, à  $M_1 = 0.1$ , nous avons  $p_1 = 600 \text{ kPa}$  et  $T_1 = 450 \text{ K}$ . A la section 2 plus éloignée en aval,  $M_2 = 0.5$ . Calculez (a)  $p_2$ , (b)  $T_2$ , (c)  $V_2$  et (d)  $p_{02}$ .

**Solution :**

Comme information préliminaire nous pouvons calculer  $V_1$  et  $p_{01}$  des données :

$$V_1 = M_1 a_1 = 0.1 [(1.4)(287)(450)]^{1/2} = 0.1(425 \text{ m/s}) = 42.5 \text{ m/s}$$

$$p_{01} = p_1 (1 + 0.2 M_1^2)^{3.5} = (600 \text{ kPa}) [1 + 0.2(0.1)^2]^{3.5} = 604 \text{ kPa}$$

Entrez maintenant à la table (III) ou les équations (62) pour trouver les rapports suivants

Section	$M$	$p / p^*$	$T / T^*$	$V / V^*$	$p_0 / p_0^*$
1	0.1	10.9435	1.1976	0.1094	5.8218
2	0.5	2.1381	1.1429	0.5345	1.3399

Employez ces proportions pour calculer toutes les propriétés en aval :

$$p_2 = p_1 \frac{p_2 / p^*}{p_1 / p^*} = (600 \text{ kPa}) \frac{2.1381}{10.9435} = 117 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T_1 \frac{T_2 / T^*}{T_1 / T^*} = (450 \text{ K}) \frac{1.1429}{1.1976} = 429 \text{ K}$$

$$V_2 = V_1 \frac{V_2 / V^*}{V_1 / V^*} = (42.5 \text{ m/s}) \frac{0.5345}{0.1094} = 208 \text{ m/s}$$

$$p_{02} = p_{01} \frac{p_{02} / p_0^*}{p_{01} / p_0^*} = (604 \text{ kPa}) \frac{1.3399}{5.8218} = 139 \text{ kPa}$$

## Chapitre V: Écoulement compressible dans les conduites avec transfert de chaleur et sans friction (Théorie de RAYLEIGH) :

L'addition ou l'enlèvement de chaleur ont un effet intéressant sur un écoulement compressible. Ici nous limitons l'analyse pour l'écoulement avec transfert de chaleur sans friction dans un conduit de section constante.

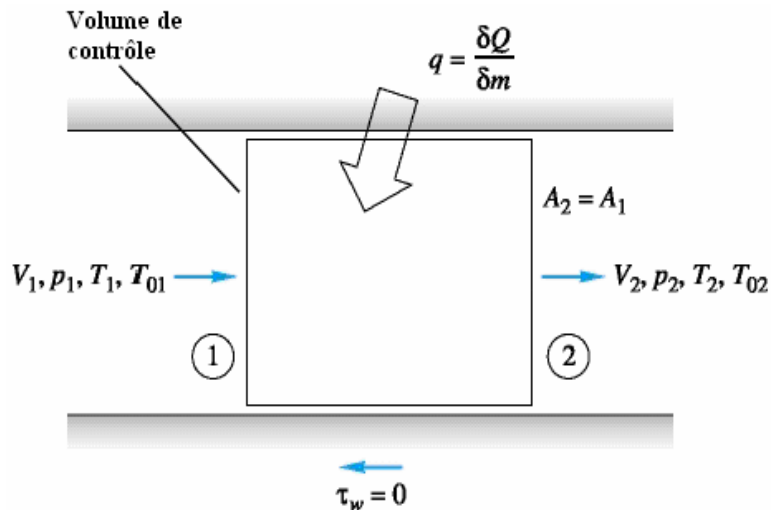


Figure V.1 : Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement sans friction dans une conduite de section constante avec transfert de chaleur. La longueur de cet élément est indéterminée dans cette théorie.

Considérez le volume de contrôle élémentaire de la conduite dans la figure (V.1). Entre des sections 1 et 2 une quantité de chaleur  $\delta Q$  est ajoutée (ou enlevée) à chaque masse élémentaire  $\delta m$  passant. Sans friction ou changement de section, les relations de conservation de volume de contrôle sont tout à fait simples :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Continuité : } \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{const} \\ \text{Quantité de mouvement suivant } x : P_1 - P_2 = G(V_2 - V_1) \\ \text{Energie : } \dot{Q} = \dot{m} \left( h_2 + \frac{1}{2} V_2^2 - h_1 - \frac{1}{2} V_1^2 \right) \end{array} \right\} \quad (\text{V.1})$$

Où  $q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = \frac{\delta Q}{\delta m} = h_{02} - h_{01}$

Le transfert de chaleur aboutit à un changement de l'enthalpie de stagnation de l'écoulement. Nous ne spécifierons pas exactement comment la chaleur est transférée (combustion, réaction nucléaire, évaporation, condensation, ou échange de chaleur pariétal), mais simplement qu'il est arrivé dans la quantité  $q$  entre 1 et 2.

Nous faisons des remarques, cependant, cet échange de chaleur pariétal n'est pas un bon candidat à la théorie parce que la convection pariétale est inévitablement liée avec la friction pariétale, que nous avons négligée.

Pour achever l'analyse, nous employons les relations du gaz parfait et le nombre de Mach.

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_2}{\rho_2 T_2} &= \frac{P_1}{\rho_1 T_1} & h_{02} - h_{01} &= c_p (T_{02} - T_{01}) \\ \frac{V_2}{V_1} &= \frac{M_2 a_2}{M_1 a_1} = \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.2})$$

Pour une quantité donnée de chaleur transférée  $q = \delta Q / \delta M$  ou, pour une variation donnée  $h_{02} - h_{01}$ , les équations (63) et (64) peuvent être résolues algébriquement pour les rapports des propriétés  $p_2 / p_1$ ,  $M_2 / M_1$ , etc, entre l'entrée et la sortie. Notez que parce que le transfert de chaleur permet à l'entropie d'ou bien augmenter ou diminuer, la deuxième loi de la thermodynamique n'impose aucune restriction de ces solutions.

Avant de décrire ces fonctions des rapports des propriétés, nous illustrons l'effet de transfert de chaleur dans la figure (64), qui montre  $T_0$  et  $T$  en fonction du nombre de Mach dans la conduite. Le chauffage augmente  $T_0$  et le refroidissement la diminue. Le maximum possible de  $T_0$  arrive à  $M = 1.0$  et nous voyons que le chauffage, si l'entrée est subsonique ou supersonique, conduit le nombre de Mach de la conduite vers l'unité. C'est analogue à l'effet de la friction dans le chapitre précédent. La température du gaz parfait augmente de  $M = 0$  jusqu'à  $M = 1/\gamma^{1/2}$  et diminue ensuite. Ainsi il y a une particularité ou une région inattendue où le chauffage ( $T_0$  augmentant) diminue en réalité la température du gaz, la différence étant reflétée dans une grande augmentation de l'énergie cinétique du gaz. Pour  $\gamma = 1.4$  cette région particulière se trouve entre  $M = 0.845$  et  $M = 1.0$  (information intéressante, mais pas très utile).

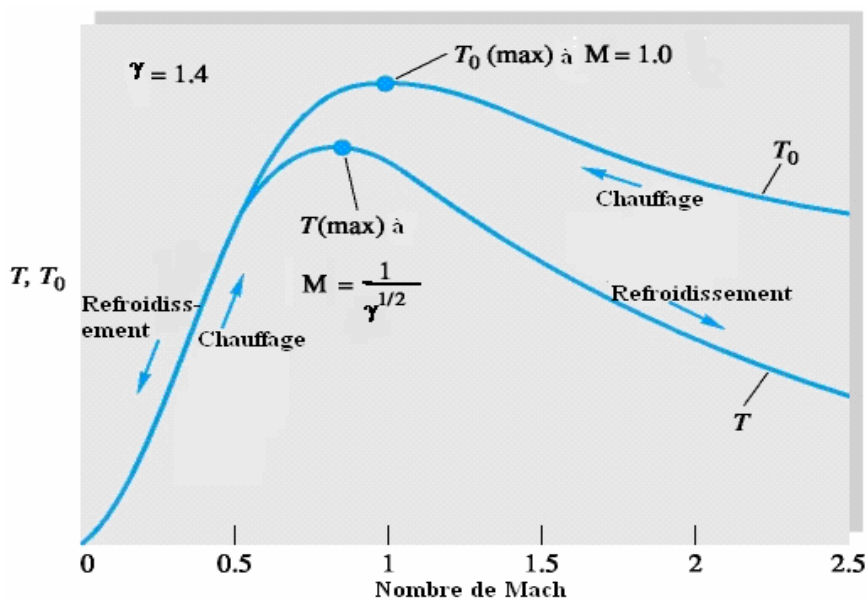


Figure. V.2 : Influence du transfert de chaleur sur le nombre de Mach.

#### IV.1 Relations de nombre de Mach

Les équations (63) et (64) peuvent être réarrangées en termes du nombre de Mach et les résultats tabulés. Pour la commodité, nous spécifions la section de sortie comme sonique,  $M = 1$ , avec des propriétés de référence  $T_0^*$ ,  $T^*$ ,  $p^*$ ,  $\rho^*$ ,  $V^*$ , et  $P_0^*$ . L'entrée est assumée pour être à un nombre de Mach arbitraire  $M$ . Les équations (63) et (64) prennent alors la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_0}{T_0^*} &= \frac{(\gamma + 1)M^2 [2 + (\gamma - 1)M^2]}{(1 + \gamma M^2)^2} \\ \frac{T}{T^*} &= \frac{(\gamma + 1)^2 M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} \\ \frac{p}{p^*} &= \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2} \\ \frac{V}{V^*} &= \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{1 + \gamma M^2} \\ \frac{P_0}{P_0^*} &= \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{\gamma/(\gamma - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (V.3)$$

Ces formules sont toutes tabulées en fonction du nombre de Mach dans la table (IV). Les tables sont très commodes si on donne des propriétés d'entrée  $M_1$ ,  $V_1$ , etc, mais sont quelque peu encombrant si les informations données concernent  $T_{01}$  et  $T_{02}$ . Voici un exemple qui illustre cela.

##### Exemple 1

Un mélange air-carburant, supposé comme l'air avec  $\gamma = 1.4$ , entre à une chambre de combustion de conduite à  $V_1 = 75 \text{ m/s}$ ,  $p_1 = 150 \text{ kPa}$  et  $T_1 = 300 \text{ K}$ . L'ajout de chaleur par la combustion est  $900 \text{ kJ/kg}$  de mélange. Calculez (a) les propriétés de sortie  $V_2$ ,  $p_2$  et  $T_2$  et (b) la quantité de chaleur totale ajoutée qui aurait causé un écoulement de sortie sonique.

##### Solution :

Un mélange air-carburant, supposé comme l'air avec  $\gamma = 1.4$ , entre à une chambre de combustion de conduite à  $V_1 = 75 \text{ m/s}$ ,  $p_1 = 150 \text{ kPa}$  et  $T_1 = 300 \text{ K}$ . L'ajout de chaleur par la combustion est  $900 \text{ kJ/kg}$  de mélange. Calculez (a) les propriétés de sortie  $V_2$ ,  $p_2$  et  $T_2$  et (b) la quantité de chaleur totale ajoutée qui aurait causé un écoulement de sortie sonique.

##### Solution :

(a) D'abord on calcule  $T_{01} = T_1 + V_1^2 / (2c_p) = 300 + (75)^2 / [2(1005)] = 303 \text{ K}$ . Alors on calcule la variation de la température de stagnation du gaz :

$$q = c_p (T_{02} - T_{01})$$



$$\text{ou} \quad T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 303K + \frac{900000J/kg}{1005J/(kg \cdot K)} = 1199K$$

Nous avons assez d'information pour calculer le nombre de Mach initial :

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = [1.4(287)(300)]^{1/2} = 347 m/s \quad M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{75}{347} = 0.216$$

Pour ce nombre de Mach, on emploie l'équation (VII-3a) ou la table (IV) pour trouver la valeur sonique  $T_0^*$  :

$$\text{A } M_1 = 0.216 : \quad \frac{T_{01}}{T_0^*} \approx 0.1992 \quad \text{ou} \quad T_0^* = \frac{303K}{0.1992} \approx 1521K$$

Alors le rapport de température de stagnation à la section 2 est  $T_{02}/T_0^* = 1199/1521 = 0.788$ , qui correspond dans la table (IV) à un nombre de Mach  $M_2 \approx 0.573$ .

On emploie maintenant la table (IV) à  $M_1$  et  $M_2$  pour tabuler les rapports de propriétés désirés.

Section	$M$	$V/V^*$	$p/p^*$	$T/T^*$
1	0.216	0.1051	2.2528	0.2368
2	0.573	0.5398	1.6442	0.8876

Les propriétés de sortie sont calculées en employant ces proportions pour trouver l'état 2 de l'état 1

$$V_2 = V_1 \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = (75 m/s) \frac{0.5398}{0.1051} = 385 m/s$$

$$p_2 = p_1 \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} = (150 kPa) \frac{1.6442}{2.2528} = 109 kPa$$

$$T_2 = T_1 \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = (300K) \frac{0.8876}{0.2368} = 1124K$$

(b) l'ajout de chaleur maximal permis conduirait le nombre de Mach de la sortie à l'unité :

$$T_{02} = T_0^* = 1521K$$

$$q_{\max} = c_p (T_0^* - T_{01}) = [1005J/(kg \cdot K)](1521 - 303K) \approx 1.22 \times 10^6 J/kg$$

### Exemple 2

Ce qui arrive à l'entrée de l'écoulement dans l'exemple (1) si l'ajout de chaleur est augmenté à  $1400 kJ/kg$  et la pression et la température de stagnation à l'entrée sont fixées ? Quelle sera la diminution subséquente dans le débit massique de l'écoulement ?

**Solution :**

Pour  $q = 1400 kJ/kg$ , la sortie sera étranglée (suffoquée) à la température de stagnation

$$T_0^* = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 303 + \frac{1.4 \times 10^6 J/kg}{1005 J/(kg \cdot K)} \approx 1696K$$

C'est plus haut que la valeur  $T_0^* = 1521K$  dans l'exemple (1), donc nous savons que la condition 1 devra suffoquer vers un nombre de Mach inférieur. La valeur appropriée est trouvée du rapport  $T_{01} / T_0^* = 303/1696 = 0.1787$ . De la table (IV) ou (équ. 65 rapport de température) pour cette condition, nous lisons le nouveau nombre de Mach d'entrée baissé :  $M_{1,nouv} \approx 0.203$ . Avec  $T_{01}$  et  $p_1$  connu, les autres propriétés d'entrée suivent de ce nombre de Mach :

$$T_1 = \frac{T_{01}}{1 + 0.2M_1^2} = \frac{303}{1 + 0.2(0.203)^2} = 301K$$

$$a_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = [1.4(287)(301)]^{1/2} = 348 \text{ m/s}$$

$$V_1 = M_1 a_1 = (0.202)(348 \text{ m/s}) = 70 \text{ m/s}$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_1}{RT_1} = \frac{150000}{(287)(301)} = 1.74 \text{ kg/m}^3$$

Finalement, le nouveau débit massique baissé d'écoulement par unité de surface est

$$\frac{\dot{m}_{nouv}}{A} = \rho_1 V_1 = (1.74 \text{ kg/m}^3)(70 \text{ m/s}) = 122 \text{ kg/(s.m}^2)$$

**TABLE I : Ecoulement isentropique d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ).**

$M$	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$	$M$	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	$\infty$	0.92	0.5785	0.6764	0.8552	1.0056
0.02	0.9997	0.9998	0.9999	28.9421	0.94	0.5658	0.6658	0.8498	1.0031
0.04	0.9989	0.9992	0.9997	14.4815	0.96	0.5532	0.6551	0.8444	1.0014
0.06	0.9975	0.9982	0.9993	9.6659	0.98	0.5407	0.6445	0.8389	1.0003
0.08	0.9955	0.9968	0.9987	7.2616	1.00	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
0.10	0.9930	0.9950	0.9980	5.8218	1.02	0.5160	0.6234	0.8278	1.0003
0.12	0.9900	0.9928	0.9971	4.8643	1.04	0.5039	0.6129	0.8222	1.0013
0.14	0.9864	0.9903	0.9961	4.1824	1.06	0.4919	0.6024	0.8165	1.0029
0.16	0.9823	0.9873	0.9949	3.6727	1.08	0.4800	0.5920	0.8108	1.0051
0.18	0.9776	0.9840	0.9936	3.2779	1.10	0.4684	0.5817	0.8052	1.0079
0.20	0.9725	0.9803	0.9921	2.9635	1.12	0.4568	0.5714	0.7994	1.0113
0.22	0.9668	0.9762	0.9904	2.7076	1.14	0.4455	0.5612	0.7937	1.0153
0.24	0.9607	0.9718	0.9886	2.4956	1.16	0.4343	0.5511	0.7879	1.0198
0.26	0.9541	0.9670	0.9867	2.3173	1.18	0.4232	0.5411	0.7822	1.0248
0.28	0.9470	0.9619	0.9846	2.1656	1.20	0.4124	0.5311	0.7764	1.0304
0.30	0.9395	0.9564	0.9823	2.0351	1.22	0.4017	0.5213	0.7706	1.0366
0.32	0.9315	0.9506	0.9799	1.9219	1.24	0.3912	0.5115	0.7648	1.0432
0.34	0.9231	0.9445	0.9774	1.8229	1.26	0.3809	0.5019	0.7590	1.0504
0.36	0.9143	0.9380	0.9747	1.7358	1.28	0.3708	0.4923	0.7532	1.0581
0.38	0.9052	0.9313	0.9719	1.6587	1.30	0.3609	0.4829	0.7474	1.0663
0.40	0.8956	0.9243	0.9690	1.5901	1.32	0.3512	0.4736	0.7416	1.0750
0.42	0.8857	0.9170	0.9659	1.5289	1.34	0.3417	0.4644	0.7358	1.0842
0.44	0.8755	0.9094	0.9627	1.4740	1.36	0.3323	0.4553	0.7300	1.0940
0.46	0.8650	0.9016	0.9594	1.4246	1.38	0.3232	0.4463	0.7242	1.1042
0.48	0.8541	0.8935	0.9559	1.3801	1.40	0.3142	0.4374	0.7184	1.1149
0.50	0.8430	0.8852	0.9524	1.3398	1.42	0.3055	0.4287	0.7126	1.1262
0.52	0.8317	0.8766	0.9487	1.3034	1.44	0.2969	0.4201	0.7069	1.1379
0.54	0.8201	0.8679	0.9449	1.2703	1.46	0.2886	0.4116	0.7011	1.1501
0.56	0.8082	0.8589	0.9410	1.2403	1.48	0.2804	0.4032	0.6954	1.1629
0.58	0.7962	0.8498	0.9370	1.2130	1.50	0.2724	0.3950	0.6897	1.1762
0.60	0.7840	0.8405	0.9328	1.1882	1.52	0.2646	0.3869	0.6840	1.1899
0.62	0.7716	0.8310	0.9286	1.1656	1.54	0.2570	0.3789	0.6783	1.2042
0.64	0.7591	0.8213	0.9243	1.1451	1.56	0.2496	0.3710	0.6726	1.2190
0.66	0.7465	0.8115	0.9199	1.1265	1.58	0.2423	0.3633	0.6670	1.2344
0.68	0.7338	0.8016	0.9153	1.1097	1.60	0.2353	0.3557	0.6614	1.2502
0.70	0.7209	0.7916	0.9107	1.0944	1.62	0.2284	0.3483	0.6558	1.2666
0.72	0.7080	0.7814	0.9061	1.0806	1.64	0.2217	0.3409	0.6502	1.2836
0.74	0.6951	0.7712	0.9013	1.0681	1.66	0.2152	0.3337	0.6447	1.3010
0.76	0.6821	0.7609	0.8964	1.0570	1.68	0.2088	0.3266	0.6392	1.3190
0.78	0.6691	0.7505	0.8915	1.0471	1.70	0.2026	0.3197	0.6337	1.3376
0.80	0.6560	0.7400	0.8865	1.0382	1.72	0.1966	0.3129	0.6283	1.3567
0.82	0.6430	0.7295	0.8815	1.0305	1.74	0.1907	0.3062	0.6229	1.3764
0.84	0.6300	0.7189	0.8763	1.0237	1.76	0.1850	0.2996	0.6175	1.3967
0.86	0.6170	0.7083	0.8711	1.0179	1.78	0.1794	0.2931	0.6121	1.4175
0.88	0.6041	0.6977	0.8659	1.0129	1.80	0.1740	0.2868	0.6068	1.4390
0.90	0.5913	0.6870	0.8606	1.0089	1.82	0.1688	0.2806	0.6015	1.4610



TABLE. I (Suite): Ecoulement isentropique d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ )

$M$	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$	$M$	$p/p_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$A/A^*$
1.84	0.1637	0.2745	0.5963	1.4836	2.92	0.0307	0.0831	0.3696	3.9238
1.86	0.1587	0.2686	0.5910	1.5069	2.94	0.0298	0.0813	0.3665	3.9993
1.88	0.1539	0.2627	0.5859	1.5308	2.96	0.0289	0.0796	0.3633	4.0762
1.90	0.1492	0.2570	0.5807	1.5553	2.98	0.0281	0.0779	0.3602	4.1547
1.92	0.1447	0.2514	0.5756	1.5804	3.00	0.0272	0.0762	0.3571	4.2346
1.94	0.1403	0.2459	0.5705	1.6062	3.02	0.0264	0.0746	0.3541	4.3160
1.96	0.1360	0.2405	0.5655	1.6326	3.04	0.0256	0.0730	0.3511	4.3989
1.98	0.1318	0.2352	0.5605	1.6597	3.06	0.0249	0.0715	0.3481	4.4835
2.00	0.1278	0.2300	0.5556	1.6875	3.08	0.0242	0.0700	0.3452	4.5696
2.02	0.1239	0.2250	0.5506	1.7160	3.10	0.0234	0.0685	0.3422	4.6573
2.04	0.1201	0.2200	0.5458	1.7451	3.12	0.0228	0.0671	0.3393	4.7467
2.06	0.1164	0.2152	0.5409	1.7750	3.14	0.0221	0.0657	0.3365	4.8377
2.08	0.1128	0.2104	0.5361	1.8056	3.16	0.0215	0.0643	0.3337	4.9304
2.10	0.1094	0.2058	0.5313	1.8369	3.18	0.0208	0.0630	0.3309	5.0248
2.12	0.1060	0.2013	0.5266	1.8690	3.20	0.0202	0.0617	0.3281	5.1209
2.14	0.1027	0.1968	0.5219	1.9018	3.22	0.0196	0.0604	0.3253	5.2189
2.16	0.0996	0.1925	0.5173	1.9354	3.24	0.0191	0.0591	0.3226	5.3186
2.18	0.0965	0.1882	0.5127	1.9698	3.26	0.0185	0.0579	0.3199	5.4201
2.20	0.0935	0.1841	0.5081	2.0050	3.28	0.0180	0.0567	0.3173	5.5234
2.22	0.0906	0.1800	0.5036	2.0409	3.30	0.0175	0.0555	0.3147	5.6286
2.24	0.0878	0.1760	0.4991	2.0777	3.32	0.0170	0.0544	0.3121	5.7357
2.26	0.0851	0.1721	0.4947	2.1153	3.34	0.0165	0.0533	0.3095	5.8448
2.28	0.0825	0.1683	0.4903	2.1538	3.36	0.0160	0.0522	0.3069	5.9558
2.30	0.0800	0.1646	0.4859	2.1931	3.38	0.0156	0.0511	0.3044	6.0687
2.32	0.0775	0.1609	0.4816	2.2333	3.40	0.0151	0.0501	0.3019	6.1837
2.34	0.0751	0.1574	0.4773	2.2744	3.42	0.0147	0.0491	0.2995	6.3007
2.36	0.0728	0.1539	0.4731	2.3164	3.44	0.0143	0.0481	0.2970	6.4197
2.38	0.0706	0.1505	0.4688	2.3593	3.46	0.0139	0.0471	0.2946	6.5409
2.40	0.0684	0.1472	0.4647	2.4031	3.48	0.0135	0.0462	0.2922	6.6642
2.42	0.0663	0.1439	0.4606	2.4479	3.50	0.0131	0.0452	0.2899	6.7896
2.44	0.0643	0.1408	0.4565	2.4936	3.52	0.0127	0.0443	0.2875	6.9172
2.46	0.0623	0.1377	0.4524	2.5403	3.54	0.0124	0.0434	0.2852	7.0470
2.48	0.0604	0.1346	0.4484	2.5880	3.56	0.0120	0.0426	0.2829	7.1791
2.50	0.0585	0.1317	0.4444	2.6367	3.58	0.0117	0.0417	0.2806	7.3134
2.52	0.0567	0.1288	0.4405	2.6864	3.60	0.0114	0.0409	0.2784	7.4501
2.54	0.0550	0.1260	0.4366	2.7372	3.62	0.0111	0.0401	0.2762	7.5891
2.56	0.0533	0.1232	0.4328	2.7891	3.64	0.0108	0.0393	0.2740	7.7304
2.58	0.0517	0.1205	0.4289	2.8420	3.66	0.0105	0.0385	0.2718	7.8742
2.60	0.0501	0.1179	0.4252	2.8960	3.68	0.0102	0.0378	0.2697	8.0204
2.62	0.0486	0.1153	0.4214	2.9511	3.70	0.0099	0.0370	0.2675	8.1690
2.64	0.0471	0.1128	0.4177	3.0073	3.72	0.0096	0.0363	0.2654	8.3202
2.66	0.0457	0.1103	0.4141	3.0647	3.74	0.0094	0.0356	0.2633	8.4739
2.68	0.0443	0.1079	0.4104	3.1233	3.76	0.0091	0.0349	0.2613	8.6302
2.70	0.0430	0.1056	0.4068	3.1830	3.78	0.0089	0.0342	0.2592	8.7891
2.72	0.0417	0.1033	0.4033	3.2439	3.80	0.0086	0.0335	0.2572	8.9506
2.74	0.0404	0.1010	0.3998	3.3061	3.82	0.0084	0.0329	0.2552	9.1147
2.76	0.0392	0.0989	0.3963	3.3695	3.84	0.0082	0.0323	0.2532	9.2816
2.78	0.0380	0.0967	0.3928	3.4342	3.86	0.0080	0.0316	0.2513	9.4513
2.80	0.0368	0.0946	0.3894	3.5001	3.88	0.0077	0.0310	0.2493	9.6237
2.82	0.0357	0.0926	0.3860	3.5674	3.90	0.0075	0.0304	0.2474	9.7989
2.84	0.0347	0.0906	0.3827	3.6359	3.92	0.0073	0.0299	0.2455	9.9770
2.86	0.0336	0.0886	0.3794	3.7058	3.94	0.0071	0.0293	0.2436	10.1580
2.88	0.0326	0.0867	0.3761	3.7771	3.96	0.0069	0.0287	0.2418	10.3419
2.90	0.0317	0.0849	0.3729	3.8498	3.98	0.0068	0.0282	0.2399	10.5288

TCABSLE I. (Suite): Emcoulement isentropique d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ )

$M$	$p / p_0$	$\rho / \rho_0$	$T / T_0$	$A / A^*$
4.00	0.0066	0.0277	0.2381	10.7187
4.02	0.0064	0.0271	0.2363	10.9117
4.04	0.0062	0.0266	0.2345	11.1077
4.06	0.0061	0.0261	0.2327	11.3068
4.08	0.0059	0.0256	0.2310	11.5091
4.10	0.0058	0.0252	0.2293	11.7146
4.12	0.0056	0.0247	0.2275	11.9234
4.14	0.0055	0.0242	0.2258	12.1354
4.16	0.0053	0.0238	0.2242	12.3508
4.18	0.0052	0.0234	0.2225	12.5695
4.20	0.0051	0.0229	0.2208	12.7916
4.22	0.0049	0.0225	0.2192	13.0172
4.24	0.0048	0.0221	0.2176	13.2463
4.26	0.0047	0.0217	0.2160	13.4789
4.28	0.0046	0.0213	0.2144	13.7151
4.30	0.0044	0.0209	0.2129	13.9549
4.32	0.0043	0.0205	0.2113	14.1983
4.34	0.0042	0.0202	0.2098	14.4455
4.36	0.0041	0.0198	0.2083	14.6965
4.38	0.0040	0.0194	0.2067	14.9512
4.40	0.0039	0.0191	0.2053	15.2098
4.42	0.0038	0.0187	0.2038	15.4723
4.44	0.0037	0.0184	0.2023	15.7387
4.46	0.0036	0.0181	0.2009	16.0092
4.48	0.0035	0.0178	0.1994	16.2836
4.50	0.0035	0.0174	0.1980	16.5622
4.52	0.0034	0.0171	0.1966	16.8448
4.54	0.0033	0.0168	0.1952	17.1317
4.56	0.0032	0.0165	0.1938	17.4227
4.58	0.0031	0.0163	0.1925	17.7181
4.60	0.0031	0.0160	0.1911	18.0177
4.62	0.0030	0.0157	0.1898	18.3218
4.64	0.0029	0.0154	0.1885	18.6303
4.66	0.0028	0.0152	0.1872	18.9432
4.68	0.0028	0.0149	0.1859	19.2607
4.70	0.0027	0.0146	0.1846	19.5828
4.72	0.0026	0.0144	0.1833	19.9095
4.74	0.0026	0.0141	0.1820	20.2409
4.76	0.0025	0.0139	0.1808	20.5770
4.78	0.0025	0.0137	0.1795	20.9179
4.80	0.0024	0.0134	0.1783	21.2636
4.82	0.0023	0.0132	0.1771	21.6143
4.84	0.0023	0.0130	0.1759	21.9699
4.86	0.0022	0.0128	0.1747	22.3306
4.88	0.0022	0.0125	0.1735	22.6962
4.90	0.0021	0.0123	0.1724	23.0671
4.92	0.0021	0.0121	0.1712	23.4430
4.94	0.0020	0.0119	0.1700	23.8243
4.96	0.0020	0.0117	0.1689	24.2108
4.98	0.0019	0.0115	0.1678	24.6027
5.00	0.0019	0.0113	0.1667	25.0000
$\infty$	0	0	0	$\infty$

TABLE II : Ecoulement à onde de choc normale  
d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ).

$M_1$	$M_2$	$P_2/P_1$	$\rho_2/\rho_1$ $V_1/V_2$	$T_2/T_1$	$P_{02}/P_{01}$	$A_2^*/A_1^*$	$\frac{\Delta s}{R}$
$M_1 \sin \sigma$	$M_2 \sin(\sigma - \delta)$		$V_{n1}/V_{n2}$				
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.000
1.02	0.9805	1.0471	1.0334	1.0132	1.0000	1.0000	0.000
1.04	0.9620	1.0952	1.0671	1.0263	0.9999	1.0001	0.000
1.06	0.9444	1.1442	1.1009	1.0393	0.9998	1.0002	0.000
1.08	0.9277	1.1941	1.1349	1.0522	0.9994	1.0006	0.001
1.10	0.9118	1.2450	1.1691	1.0649	0.9989	1.0011	0.001
1.12	0.8966	1.2968	1.2034	1.0776	0.9982	1.0018	0.002
1.14	0.8820	1.3495	1.2378	1.0903	0.9973	1.0027	0.003
1.16	0.8682	1.4032	1.2723	1.1029	0.9961	1.0040	0.004
1.18	0.8549	1.4578	1.3069	1.1154	0.9946	1.0055	0.005
1.20	0.8422	1.5133	1.3416	1.1280	0.9928	1.0073	0.007
1.22	0.8300	1.5698	1.3764	1.1405	0.9907	1.0094	0.009
1.24	0.8183	1.6272	1.4112	1.1531	0.9884	1.0118	0.012
1.26	0.8071	1.6855	1.4460	1.1657	0.9857	1.0145	0.014
1.28	0.7963	1.7448	1.4808	1.1783	0.9827	1.0176	0.017
1.30	0.7860	1.8050	1.5157	1.1909	0.9794	1.0211	0.021
1.32	0.7760	1.8661	1.5505	1.2035	0.9758	1.0249	0.025
1.34	0.7664	1.9282	1.5854	1.2162	0.9718	1.0290	0.029
1.36	0.7572	1.9912	1.6202	1.2290	0.9676	1.0335	0.033
1.38	0.7483	2.0551	1.6549	1.2418	0.9630	1.0384	0.038
1.40	0.7397	2.1200	1.6897	1.2547	0.9582	1.0436	0.043
1.42	0.7314	2.1858	1.7243	1.2676	0.9531	1.0492	0.048
1.44	0.7235	2.2525	1.7589	1.2807	0.9476	1.0552	0.054
1.46	0.7157	2.3202	1.7934	1.2938	0.9420	1.0616	0.060
1.48	0.7083	2.3888	1.8278	1.3069	0.9360	1.0684	0.066
1.50	0.7011	2.4583	1.8621	1.3202	0.9298	1.0755	0.073
1.52	0.6941	2.5288	1.8963	1.3336	0.9233	1.0830	0.080
1.54	0.6874	2.6002	1.9303	1.3470	0.9166	1.0910	0.087
1.56	0.6809	2.6725	1.9643	1.3606	0.9097	1.0993	0.095
1.58	0.6746	2.7458	1.9981	1.3742	0.9026	1.1080	0.103
1.60	0.6684	2.8200	2.0317	1.3880	0.8952	1.1171	0.111
1.62	0.6625	2.8951	2.0653	1.4018	0.8877	1.1266	0.119
1.64	0.6568	2.9712	2.0986	1.4158	0.8799	1.1365	0.128
1.66	0.6512	3.0482	2.1318	1.4299	0.8720	1.1468	0.137
1.68	0.6458	3.1261	2.1649	1.4440	0.8639	1.1575	0.146
1.70	0.6405	3.2050	2.1977	1.4583	0.8557	1.1686	0.156
1.72	0.6355	3.2848	2.2304	1.4727	0.8474	1.1801	0.166
1.74	0.6305	3.3655	2.2629	1.4873	0.8389	1.1921	0.176
1.76	0.6257	3.4472	2.2952	1.5019	0.8302	1.2045	0.186
1.78	0.6210	3.5298	2.3273	1.5167	0.8215	1.2173	0.197
1.80	0.6165	3.6133	2.3592	1.5316	0.8127	1.2305	0.207
1.82	0.6121	3.6978	2.3909	1.5466	0.8038	1.2441	0.218
1.84	0.6078	3.7832	2.4224	1.5617	0.7948	1.2582	0.230
1.86	0.6036	3.8695	2.4537	1.5770	0.7857	1.2728	0.241
1.88	0.5996	3.9568	2.4848	1.5924	0.7765	1.2877	0.253
1.90	0.5956	4.0450	2.5157	1.6079	0.7674	1.3032	0.265
1.92	0.5918	4.1341	2.5463	1.6236	0.7581	1.3191	0.277
1.94	0.5880	4.2242	2.5767	1.6394	0.7488	1.3354	0.289



TABLE II (Suite): Ecoulement à onde de choc normale d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ).

$M_1$	$M_2$	$P_2 / P_1$	$\rho_2 / \rho_1$ $V_1 / V_2$	$T_2 / T_1$	$P_{02} / P_{01}$	$A_2^* / A_1^*$	$\frac{\Delta s}{R}$
$M_1 \sin \sigma$	$M_2 \sin(\sigma - \delta)$		$V_{n1} / V_{n2}$				
1.96	0.5844	4.3152	2.6069	1.6553	0.7395	1.3522	0.302
1.98	0.5808	4.4071	2.6369	1.6713	0.7302	1.3695	0.314
2.00	0.5774	4.5000	2.6667	1.6875	0.7209	1.3872	0.327
2.02	0.5740	4.5938	2.6962	1.7038	0.7115	1.4054	0.340
2.04	0.5707	4.6885	2.7255	1.7203	0.7022	1.4241	0.354
2.06	0.5675	4.7842	2.7545	1.7369	0.6928	1.4433	0.367
2.08	0.5643	4.8808	2.7833	1.7536	0.6835	1.4630	0.381
2.10	0.5613	4.9783	2.8119	1.7704	0.6742	1.4832	0.394
2.12	0.5583	5.0768	2.8402	1.7875	0.6649	1.5039	0.408
2.14	0.5554	5.1762	2.8683	1.8046	0.6557	1.5252	0.422
2.16	0.5525	5.2765	2.8962	1.8219	0.6464	1.5469	0.436
2.18	0.5498	5.3778	2.9238	1.8393	0.6373	1.5692	0.451
2.20	0.5471	5.4800	2.9512	1.8569	0.6281	1.5920	0.465
2.22	0.5444	5.5831	2.9784	1.8746	0.6191	1.6154	0.480
2.24	0.5418	5.6872	3.0053	1.8924	0.6100	1.6393	0.494
2.26	0.5393	5.7922	3.0319	1.9104	0.6011	1.6638	0.509
2.28	0.5368	5.8981	3.0584	1.9285	0.5921	1.6888	0.524
2.30	0.5344	6.0050	3.0845	1.9468	0.5833	1.7144	0.539
2.32	0.5321	6.1128	3.1105	1.9652	0.5745	1.7406	0.554
2.34	0.5297	6.2215	3.1362	1.9838	0.5658	1.7674	0.569
2.36	0.5275	6.3312	3.1617	2.0025	0.5572	1.7948	0.585
2.38	0.5253	6.4418	3.1869	2.0213	0.5486	1.8227	0.600
2.40	0.5231	6.5533	3.2119	2.0403	0.5401	1.8514	0.616
2.42	0.5210	6.6658	3.2367	2.0595	0.5317	1.8806	0.632
2.44	0.5189	6.7792	3.2612	2.0788	0.5234	1.9105	0.647
2.46	0.5169	6.8935	3.2855	2.0982	0.5152	1.9410	0.663
2.48	0.5149	7.0088	3.3095	2.1178	0.5071	1.9721	0.679
2.50	0.5130	7.1250	3.3333	2.1375	0.4990	2.0039	0.695
2.52	0.5111	7.2421	3.3569	2.1574	0.4911	2.0364	0.711
2.54	0.5092	7.3602	3.3803	2.1774	0.4832	2.0696	0.727
2.56	0.5074	7.4792	3.4034	2.1976	0.4754	2.1035	0.744
2.58	0.5056	7.5991	3.4263	2.2179	0.4677	2.1380	0.760
2.60	0.5039	7.7200	3.4490	2.2383	0.4601	2.1733	0.776
2.62	0.5022	7.8418	3.4714	2.2590	0.4526	2.2093	0.793
2.64	0.5005	7.9645	3.4936	2.2797	0.4452	2.2461	0.809
2.66	0.4988	8.0882	3.5156	2.3006	0.4379	2.2835	0.826
2.68	0.4972	8.2128	3.5374	2.3217	0.4307	2.3218	0.842
2.70	0.4956	8.3383	3.5590	2.3429	0.4236	2.3608	0.859
2.72	0.4941	8.4648	3.5803	2.3642	0.4166	2.4005	0.876
2.74	0.4926	8.5922	3.6015	2.3858	0.4097	2.4411	0.892
2.76	0.4911	8.7205	3.6224	2.4074	0.4028	2.4825	0.909
2.78	0.4896	8.8498	3.6431	2.4292	0.3961	2.5246	0.926
2.80	0.4882	8.9800	3.6635	2.4512	0.3895	2.5676	0.943
2.82	0.4868	9.1111	3.6838	2.4733	0.3829	2.6115	0.960
2.84	0.4854	9.2432	3.7039	2.4955	0.3765	2.6561	0.977
2.86	0.4840	9.3762	3.7238	2.5179	0.3701	2.7017	0.994
2.88	0.4827	9.5101	3.7434	2.5405	0.3639	2.7481	1.011
2.90	0.4814	9.6450	3.7629	2.5632	0.3577	2.7954	1.028
2.92	0.4801	9.7808	3.7821	2.5861	0.3517	2.8436	1.045
2.94	0.4788	9.9175	3.8012	2.6091	0.3457	2.8927	1.062
2.96	0.4776	10.0552	3.8200	2.6322	0.3398	2.9427	1.079
2.98	0.4764	10.1938	3.8387	2.6555	0.3340	2.9937	1.096

TABLE III : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ). (Courbes de Fanno).

$M$	$\bar{f}L^*/D$	$p/p^*$	$T/T^*$	$\rho/\rho^*$ $V^*/V$	$p_0/p_0^*$
0.00	$\infty$	$\infty$	1.2000	$\infty$	$\infty$
0.02	1778.4500	54.7701	1.1999	45.6454	28.9421
0.04	440.3523	27.3817	1.1996	22.8254	14.4815
0.06	193.0311	18.2509	1.1991	15.2200	9.6659
0.08	106.7182	13.6843	1.1985	11.4182	7.2616
0.10	66.9216	10.9435	1.1976	9.1378	5.8218
0.12	45.4080	9.1156	1.1966	7.6182	4.8643
0.14	32.5113	7.8093	1.1953	6.5333	4.1824
0.16	24.1978	6.8291	1.1939	5.7200	3.6727
0.18	18.5427	6.0662	1.1923	5.0879	3.2779
0.20	14.5333	5.4554	1.1905	4.5826	2.9635
0.22	11.5961	4.9554	1.1885	4.1694	2.7076
0.24	9.3865	4.5383	1.1863	3.8255	2.4956
0.26	7.6876	4.1851	1.1840	3.5347	2.3173
0.28	6.3572	3.8820	1.1815	3.2857	2.1656
0.30	5.2993	3.6191	1.1788	3.0702	2.0351
0.32	4.4467	3.3887	1.1759	2.8818	1.9219
0.34	3.7520	3.1853	1.1729	2.7158	1.8229
0.36	3.1801	3.0042	1.1697	2.5684	1.7358
0.38	2.7054	2.8420	1.1663	2.4367	1.6587
0.40	2.3085	2.6958	1.1628	2.3184	1.5901
0.42	1.9744	2.5634	1.1591	2.2115	1.5289
0.44	1.6915	2.4428	1.1553	2.1145	1.4740
0.46	1.4509	2.3326	1.1513	2.0261	1.4246
0.48	1.2453	2.2313	1.1471	1.9451	1.3801
0.50	1.0691	2.1381	1.1429	1.8708	1.3398
0.52	0.9174	2.0519	1.1384	1.8024	1.3034
0.54	0.7866	1.9719	1.1339	1.7391	1.2703
0.56	0.6736	1.8975	1.1292	1.6805	1.2403
0.58	0.5757	1.8282	1.1244	1.6260	1.2130
0.60	0.4908	1.7634	1.1194	1.5753	1.1882
0.62	0.4172	1.7026	1.1143	1.5279	1.1656
0.64	0.3533	1.6456	1.1091	1.4836	1.1451
0.66	0.2979	1.5919	1.1038	1.4421	1.1265
0.68	0.2498	1.5413	1.0984	1.4032	1.1097
0.70	0.2081	1.4935	1.0929	1.3665	1.0944
0.72	0.1721	1.4482	1.0873	1.3320	1.0806
0.74	0.1411	1.4054	1.0815	1.2994	1.0681
0.76	0.1145	1.3647	1.0757	1.2686	1.0570
0.78	0.0917	1.3261	1.0698	1.2395	1.0471
0.80	0.0723	1.2893	1.0638	1.2119	1.0382
0.82	0.0559	1.2542	1.0578	1.1858	1.0305
0.84	0.0423	1.2208	1.0516	1.1609	1.0237
0.86	0.0310	1.1889	1.0454	1.1373	1.0179



TABLE IV Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ). (Courbes de Rayleigh).

$M$	$T_0/T_0^*$	$p/p^*$	$T/T^*$	$\rho/\rho^*$ $V^*/V$	$p_0/p_0^*$
0.00	0.0000	2.4000	0.0000	$\infty$	1.2679
0.02	0.0019	2.3987	0.0023	1042.2500	1.2675
0.04	0.0076	2.3946	0.0092	261.0000	1.2665
0.06	0.0171	2.3880	0.0205	116.3241	1.2647
0.08	0.0302	2.3787	0.0362	65.6875	1.2623
0.10	0.0468	2.3669	0.0560	42.2500	1.2591
0.12	0.0666	2.3526	0.0797	29.5185	1.2554
0.14	0.0895	2.3359	0.1069	21.8418	1.2510
0.16	0.1151	2.3170	0.1374	16.8594	1.2461
0.18	0.1432	2.2959	0.1708	13.4434	1.2406
0.20	0.1736	2.2727	0.2066	11.0000	1.2346
0.22	0.2057	2.2477	0.2445	9.1922	1.2281
0.24	0.2395	2.2209	0.2841	7.8171	1.2213
0.26	0.2745	2.1925	0.3250	6.7470	1.2140
0.28	0.3104	2.1626	0.3667	5.8980	1.2064
0.30	0.3469	2.1314	0.4089	5.2130	1.1985
0.32	0.3837	2.0991	0.4512	4.6523	1.1904
0.34	0.4206	2.0657	0.4933	4.1877	1.1822
0.36	0.4572	2.0314	0.5348	3.7984	1.1737
0.38	0.4935	1.9964	0.5755	3.4688	1.1652
0.40	0.5290	1.9608	0.6151	3.1875	1.1566
0.42	0.5638	1.9247	0.6535	2.9454	1.1480
0.44	0.5975	1.8882	0.6903	2.7355	1.1394
0.46	0.6301	1.8515	0.7254	2.5525	1.1308
0.48	0.6614	1.8147	0.7587	2.3918	1.1224
0.50	0.6914	1.7778	0.7901	2.2500	1.1141
0.52	0.7199	1.7409	0.8196	2.1243	1.1059
0.54	0.7470	1.7043	0.8469	2.0122	1.0979
0.56	0.7725	1.6678	0.8723	1.9120	1.0901
0.58	0.7965	1.6316	0.8955	1.8219	1.0826
0.60	0.8189	1.5957	0.9167	1.7407	1.0753
0.62	0.8398	1.5603	0.9358	1.6673	1.0682
0.64	0.8592	1.5253	0.9530	1.6006	1.0615
0.66	0.8771	1.4908	0.9682	1.5399	1.0550
0.68	0.8935	1.4569	0.9814	1.4844	1.0489
0.70	0.9085	1.4235	0.9929	1.4337	1.0431
0.72	0.9221	1.3907	1.0026	1.3871	1.0376
0.74	0.9344	1.3585	1.0106	1.3442	1.0325

## References bibliographiques :

- 1- Patrick Chassaing. Mécanique des Fluides, 3<sup>ème</sup> édition, Cépaduès, Toulouse, 2010.
- 2- André Lallemand. Ecoulement monodimensionnel des fluides Compressibles, Techniques de l'ingénieur Génie énergétique, B- 8- 165
- 3- F. M. White. Fluid Mechanics, 5th edition, McGraw-Hill, New York, 2003.
- 4- R. W. Fox and A. T. McDonald. Introduction to Fluid Mechanics, 5th edition, New York: Wiley, 1999.
- 5- J. D. Anderson. Modern Compressible Flow with Historical Perspective, 3rd edition, New York: McGraw-Hill, 2003.
- 6- H. Liepmann and A. Roshko. Elements of Gas Dynamics, Dover Publications, Mineola, NY, 2001.
- 7- Genick Bar–Meir, Fundamentals of Compressible Fluid Mechanics, Minneapolis, MN 55414-2411, 2009
- 8- Robert d. Zucker, Oscar Biblarz, Fundamentals Of Gas Dynamics, JOHN WILEY & SONS, 2002

Patrick Oosthuizen, William Carrascallen, Compressible Fluid Flow, McGraw-Hill,