INTRODUCTION À LA TOPOLOGIE

Polycopié du cours par

MOUFIDA AMIOUR

2 ÈME ANNÈE LMD MATHÉMATIQUES

Centre univarsitaire Abdelhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de mathématiques et informatique

Année universitaire : 2022-2023

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Le cours "introduction à la topologie" est l'un des matières essentielles dans la formation mathématiques, elle a pour objectif de donner les notions fondamentales de topologie. Les prérequis de ce cours sont : techniques ensemblistes, analyse élémentaires sur la droite réelle $\mathbb{R}$, suites réelles, intervalles, fonctions continues de $\mathbb{R}$, dérivation, algèbre lineaire et bilineaire, déterminants, produit scalaire, fonctions à plusieurs variables, dérivées partielles.

Ce cours constitue une U.E. fondamentale au premier semestre et s'adresse aux étudiants de la 2ème année licence L.M.D mathématiques au Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila avec deux cours et un TD par semaine. Il est composé de cinq chapitre.

On commence par la structure des espaces topologiques et des espaces métriques et leurs propriétés, ensuite on passe aux chapitres 2, 3 et 4 qui sont consacrés aux notions de la compacité dans les espaces métriques et topologiques, la complétude qui est basée sur les suites de Cauchy et la connexité dans les espaces topologiques. On termine par les espaces vectoriels normés. Les chapitres 4 et 5 sont suivies par des exercices pour que l'étudiant puisse évaluer les connaissances acquises à travers ce cours.

j'espère que ce polycopié constituera un support utile.

CHAPITRE 1

Espaces topologiques

1.1 Ouvert, voisinages, base et système fondamental

Définition 1.1.1 *On appelle topologie sur un ensemble E une famille $\mathcal{T}$ de parties de E $(\subset \mathcal{P}(E))$ vérifiant les propriétés suivants*

O1) $\emptyset, E \in \mathcal{T}$;

O2) $\forall (U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$, *stabilité par union quelconque ;*

O3) $\forall (U_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathcal{T}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$, *stabilté par intersection finie.*

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appellés ouverts de la topologie.

Le couple $(E, \mathcal{T})$ est appelé espace topologique.

Exemple 1.1.2 • *Soit E un ensemble non vide. Alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$ est une topologie appellé topologie grossière.*

• *$\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ est une topologie sur E appellé topologie discrète.*

• *$E = \{a, b, c\}$ alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, E\}$ est une topologie sur E.*

• *$E = \{a, b, c, d\}$ alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$ n'est pas une topologie sur E.*

1.2 Topologie sur $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle intervalle centré en x_0 tout intervalle de la forme $]x_0 - h, x_0 + h[$ $(h > 0)$. h s'appelle le rayon de cet intervalle.*

Proposition 1.2.2 *Considérons sur $\mathbb{R}$ la famille $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ définie par*

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \{A \subset \mathbb{R} / \ \forall x \in A, \ \exists \ h > 0; \ ]x - h, x + h[\subset A\} \cup \{\emptyset\}.$$

Alors $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ est une topologie usuelle.

Donc, $A \subset \mathbb{R}$ est un ouvert pour la topologie usuelle si et seulement si$A \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$. Autrement dit, $\forall x \in A, \ \exists h > 0, \ ]x - h, x + h[\subset A$.

Les différents types d'intervalles sur $\mathbb{R}$ sont

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}, \qquad [a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\};$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}, \qquad]a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\};$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}/-\infty < x < a\}, \qquad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < +\infty\};$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}/-\infty < x \leq a\}, \qquad [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < +\infty\};$$

$$\mathbb{R} =]+\infty, -\infty[.$$

Définition 1.2.3 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que F est un ensemble fermé(ou un fermé) dans E si et seulement si C_E^F est un ensemble ouvert i.e.,*

$$F \ fermé \Leftrightarrow C_E^F \in \mathcal{T}.$$

Exemple 1.2.4 *Soient $E = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, E\}$ une topologie sur E. On a $\{a\} \in \mathcal{T}$ (ouvert) donc $C_E^{\{a\}} = \{b, c\}$ (fermé).Or $C_E^{\{a\}} \in \mathcal{T}$, c'est à dire ouvert. Donc $C_E^{\{a\}}$ est un ouvert et fermé au même temp.*

Proposition 1.2.5 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors nous avons*

F3) $\emptyset$ et E sont des fermés ;

F2) Toute intersection de fermés est un fermé ;

F3) Une réunion finie de fermés est un fermé.

Preuve.

F1) On a $\emptyset \in \mathcal{T} \iff C_E^{\emptyset}$ est un fermé $\iff E$ est un fermé.

$E \in \mathcal{T} \iff C_E^E$ est un fermé $\iff \emptyset$ est un fermé.

F2) Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de fermé dans E. Donc pour tout $i \in I$, on a $C_E^{F_i} \in \mathcal{T}$. Par O2) on obtient $\cup_{i\in I} C_E^{F_i} = C_E^{\cap_{i\in I} F_i} \in \mathcal{T}$. Alors $\cap_{i\in I} F_i$ est un fermé.

F3) Soit $(F_i)_{i=1,\cdots,n}$ une famille finie de fermé dans E. Donc pour tout $i = 1, \cdots, n$ on a $C_E^{F_i} \in \mathcal{T}$. Par O3) $\cap_{i=1}^n C_E^{F_i} = C_E^{\cup_{i=1}^n F_i} \in \mathcal{T}$. Alors $\cup_{i=1}^n F_i$ est un fermé dans E.

■

Définition 1.2.6 ***(Voisinage).***

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, et soit $x \in E$. On appelle voisinage x dans E, toute partie de E contenant un ouvert contenant x. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble de voisinage de x.

$$\mathcal{V}(x) = \{V \in \mathcal{P}(E),\ \exists U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset V\}.$$

Exemple 1.2.7 • *Soient $E = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, E\}$.*

$\mathcal{V}(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, E\}$.

Proposition 1.2.8 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. $U \subset E$ est un ouvert si et seulement si U est voisinage de chacun de ses points, i.e.,*

$$(U \in \mathcal{T}) \Leftrightarrow (\forall x \in U,\ U \in \mathcal{V}(x)).$$

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons $U \in \mathcal{T}$ et $x \in U$, alors $x \in U \subset U$ et donc $U \in \mathcal{V}(x)$.

$\Leftarrow$) Supposons que U est un voisinage de chacun de ses points. Pour tout $x \in U$ il existe un ouvert W tel que $x \in W \subset U$ et on note

$$W_x = \cup_{x\in W\subset U} W, \qquad W \textit{ ouvert}.$$

On a alors

$$U = \cup_{x\in U}\{x\} \subset \cup_{x\in U} W_x \subset U$$

et par conséquent $U = \cup_{x\in U} W_x$ est un ouvert dans E (d'après O2)). ■

Proposition 1.2.9 *Soit $x \in E$. On a*

1) $\forall V \in \mathcal{V}(x),\ x \in V$.

2) Si $A \subset E$ tel que $V \subset A$ et $V \in \mathcal{V}(x)$ alors $A \in \mathcal{V}(x)$.

3) Toute intersection finie de voisinages de $x \in E$ est un voisinage de x.

4) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $W \subset V$ et W voisinage de chacun de ses points.

Preuve.

1) Par définition de V.

2) Soit $A \subset E$ tel que $V \subset A$ et $V \in \mathcal{V}(x)$

$$V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset V \subset A \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x)$$

3) Soit $V_1, V_2, ..., V_n \in \mathcal{V}(x)$ donc pour tout $i = 1, ..., n,\ \exists U_i \in \mathcal{T},\ x \in U_i \subset V_i$. On conclut que $x \in \cap_{i=1}^n U_i \subset \cap_{i=1}^n V_i$. D'où $\cap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{V}(x)$.

4) Soit $V \in \mathcal{V}(x)$ alors il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subset V$. Pour $U = W$ on obtient W est voisinage de chacun de ses points. ■

Définition 1.2.10 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts est une base d'ouverts de $(E, \mathcal{T})$ si tout ouvert U de $\mathcal{T}$ s'écrit comme réunion quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}$.*

Théorème 1.2.11 *$\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $(E, \mathcal{T})$ si seulement si*

$$\forall x \in E,\ \forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists B \in \mathcal{B},\ x \in B \subset V.$$

Preuve.

$\Longrightarrow$) Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, donc $\exists U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset V$. Puisque U ouvert, il existe $\{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B},\ U = \cup_{i\in I} B_i$.

$$x \in U \Longrightarrow \exists i_0 \in I,\ x \in B_{i_0} \subset V.$$

$\Longleftarrow$) Soit U un ouvert, il existe un voisinage de tous ses points. Alors, $\exists B_x \in \mathcal{B},\ x \in B_x \subset B$. D'où $U = \cup_{x\in U} B_x$. ∎

Définition 1.2.12 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $x \in E$. On dit que $\mathcal{BV}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages de x si tout voisinage V de x contient un élément W de $\mathcal{BV}(x)$.*

1.3 Intérieur, adhérence

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1.3.1 Intérieur

Définition 1.3.1 *Soit A une partie de E.*

On dit qu'un point x de A est intèrieur à A si $A \in \mathcal{V}(x)$.

Définition 1.3.2 *On appelle intérieur d'une partie A de E, et on note $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A, i.e.,*

$$x \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{V}(x) \Longleftrightarrow \exists U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset A.$$

Exemple 1.3.3 • *Considérons l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, alors*
$\overset{\circ}{\widehat{[a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{[a,b[}} = \overset{\circ}{\widehat{]a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{]a,b[}} =]a,b[$.

• *Soit* $E = \{1,2,3,4\}$ *et* $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2,3,4\}\}$ *on a*

$\overset{\circ}{\widehat{\{1\}}} = \{1\}, \overset{\circ}{\widehat{\{2\}}} = \overset{\circ}{\widehat{\{3\}}} = \overset{\circ}{\widehat{\{4\}}} = \emptyset, \overset{\circ}{\widehat{\{1,2\}}} = \{1\}.$

Proposition 1.3.4 *Soit* $A, B \subset E$. *Alors*

1) $\overset{\circ}{A}$ *le plus grand ouvert contenu dans* A;

2) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$;

3) A *ouvert si selement si* $\overset{\circ}{A} = A$;

4) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$;

5) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$;

Preuve.

1) Soit Θ l'ensemble des ouverts contenu dans A. Montrons que $A = \cup_{U\in\Theta} U$.

Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, donc il existe $U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset A$, d'où $x \in \cup_{U\in\Theta} U$.

Réciproquement, soit $x \in \cup_{U\in\Theta} U$, donc $\exists U \subset A,\ x \in U$ i.e. $x \in \overset{\circ}{A}$. Alors $A = \cup_{U\in\Theta} U$ est c'est le plus grand ouvert contenu dans A.

2) Soit $x \in \overset{\circ}{A}$ donc $\exists U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset A$. Car $A \subset B$ on obtient $\exists U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset B$ i.e. $x \in \overset{\circ}{B}$. D'où $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

3) Claire.

4) Soit $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ par définition $\exists U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset A \cap B$ donc $\exists U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset A$ et $x \in U \subset B$ i.e. $x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Soit $x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ donc $x \in \overset{\circ}{A}$ et $x \in \overset{\circ}{B}$ par définition on a $\exists U_A, U_B \in \mathcal{T},\ x \in U_A \subset A$ et $x \in U_B \subset B$. D'ou $x \in U_A \cap U_B \subset A \cap B$ i.e. $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$.

5) Soit $x \in \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ donc il existe $U_A \in \mathcal{T},\ x \in U_A \subset A$ ou il existe $U_B \in \mathcal{T}, x \in U_B \subset B$. D'ou $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$. ■

1.3.2 Adhérence

Définition 1.3.5 *Soit* A *une partie de* E *et soit* x *un élément de* E. *On dit que* x *est adhérent à* A *si* $\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset$.

Définition 1.3.6 *Pour une partie A de E on appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à A.*

Exemple 1.3.7 • *Considérons l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, alors*
$\overline{[a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{]a,b[} = [a,b]$.

Remarque 1.3.8 *On peut supposer que les voisinages sont ouverts, on écrit alors*

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x) \cap \mathcal{T},\ U \cap A \neq \emptyset.$$

Proposition 1.3.9 *Soit $A, B \subset E$. Alors*

1) $C_E^{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_E^A}$ et $C_E^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\widehat{C_E^A}}$;

2) $\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A;

3) Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$;

4) A fermé si seulement si $A = \overline{A}$;

5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

6) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Preuve.

1) $C_E^{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_E^A}$

$$\begin{aligned} x \in C_E^{\overset{\circ}{A}} &\Longleftrightarrow x \notin \overset{\circ}{A} \\ &\Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{V}(x),\ x \in U \wedge U \subsetneq A \\ &\Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{V}(x),\ x \in U \wedge U \cap C_E^A \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow x \in \overline{C_E^A} \end{aligned}$$

$C_E^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\widehat{C_E^A}}$

$$\begin{aligned} x \in C_E^{\overline{A}} &\Longleftrightarrow x \notin \overline{A} \\ &\Longleftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A = \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x),\ x \in C_E^A \\ &\Longleftrightarrow x \in \overset{\circ}{\widehat{C_E^A}} \end{aligned}$$

2) Evident.

3) Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in \overline{A}$ donc pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$. D'où $V \cap B \neq \emptyset$. Alors $x \in \overline{B}$.

4) Claire.

5)

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{A \cup B} &\iff \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap (A \cup B) \neq \emptyset \\
&\iff \forall V \in \mathcal{V}(x),\ [(V \cap A) \cup (V \cap B)] \neq \emptyset \\
&\iff \forall V \in \mathcal{V}(x),\ (V \cap A \neq \emptyset) \vee (V \cap B \neq \emptyset) \\
&\iff x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \\
&\iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}
$$

6) Soit $x \in \overline{A \cap B}$ alors pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Donc $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap B \neq \emptyset$ c'est à dire, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. ■

Définition 1.3.10 *Soit A une partie de E et soit x un élément de E. On dit que*

1) x est un point d'accumulation de A si $\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap (A \backslash \{x\}) \neq \emptyset$.

2) x est un point isolé de A si $\exists V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A = \{x\}$.

Définition 1.3.11 ***(Frontière).*** *On applelle frontière d'une partie A de E et on note $Fr(A)$ l'ensemble $\overline{A} \cap \overline{C_E^A}$.*

Remarque 1.3.12 *1) $Fr(A)$ est un ensemble fermé.*

2) $Fr(A) = Fr(C_E^A) = \overline{A} \backslash \mathring{A}$.

En effet, $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{C_E^A} = \overline{C_{C_E^A}} \cap \overline{C_E^A} = Fr(C_E^A)$.

Exemple 1.3.13 *Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, on a*

- $Fr([a,b]) = \overline{[a,b]} \cap \overline{C_{\mathbb{R}}^{[a,b]}} = [a,b] \cap (]-\infty, a] \cup [b, \infty[) = \{a, b\}$.
- $Fr(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

1.4 Espace séparé, séparable

Définition 1.4.1 *On dit qu'un espace topologique* $(E, \mathcal{T})$ *est séparé si pour tout couple de points* $x, y \in E$ *distincts,* $x \neq y$*, il existe* $V \in \mathcal{V}(x)$ *et* $W \in \mathcal{V}(y)$ *tels que* $V \cap W = \emptyset$*. On dit aussi que la topologie* $\mathcal{T}$ *sépare les points de* E*.*

Exemple 1.4.2 • *L'espace topologique discret est séparé car si* $x \neq y$ *alors* $\{x\}$ *et* $\{y\}$ *sont deux voisinages de* x *et* y *disjoints.*

• *L'espace topologique grossier n'est pas séparé car si* $x \neq y$ *tout voisinage de* x *ou de* y *est l'ensemnle* E *lui même.*

Définition 1.4.3 *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A, B \subset E$*.*

On dit que A *dense dans* B *si* $A \subset B \subset \overline{A}$*.*

On dit que A *dense ou partout dense dans* E *si* $\overline{A} = E$*.*

Définition 1.4.4 *On dit que* $(E, \mathcal{T})$ *est un espace topologique séparable s'il admet un ensemble dénombrable partout dense.*

Exemple 1.4.5 • $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ *est séparable car* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *dénombrable et* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$*.*

1.5 Topologie induite

Définition 1.5.1 *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et soit* $A \subset E$*. On appelle topologie induite par* $\mathcal{T}$ *sur* A *qu'on note* $\mathcal{T}_A$ *la topologie définie par*

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A,\ U \in \mathcal{T}\},$$

et le couple $(A, \mathcal{T}_A)$ *est appellé sous espace topologique de* $(E, \mathcal{T})$*.* $U \cap A$ *s'appelle la trace de l'ouvert* U *sur* A*.*

Exemple 1.5.2 *Soit* $\mathcal{T} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ *une topologie sur* $E = \{a, b, c\}$*, et* $A = \{b, c\}$*. La topologie induite par* $\mathcal{T}$ *sur* A *est* $\mathcal{T}_A = \{A, \emptyset, \{b\}\}$*.*

Proposition 1.5.3 *Les fermés de la topologie $\mathcal{T}_A$ sont les traces des fermés de la topolgie $\mathcal{T}$.*

1.6 Topologie produit

Définition 1.6.1 *Soient $(E_1, \mathcal{T}_1), (E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $E = E_1 \times E_2$ le produit cartésien, i.e. $E = \{(x_1, x_2),\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}$.*

On appelle ouvert premier (élémentaire) de E tout sous ensemble de la forme $U = U_1 \times U_2$ tels que $U_1 \in \mathcal{T}_1$ et $U_2 \in \mathcal{T}_2$, et on appelle ouvert de E toute réunion d'ouverts premiers (élémentaires), c'est à dire,

$$\mathcal{T} = \Big\{ \bigcup_k U_k,\ U_k = U_1^k \times U_2^k,\ U_1^k \in \mathcal{T}_1,\ U_2^k \in \mathcal{T}_2,\ \forall k \Big\}.$$

Le couple $(E, \mathcal{T})$ s'appelle l'espace topologique produit.

Exemple 1.6.2 • *Soit $E_1 = \{1, 2, 3\}$ muni de la topologie $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{1\}, E_1\}$ et soit $E_2 = \{a, b\}$ muni de la topologie $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, E_2\}$.*

$E_1 \times E_2 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ et les ouverts élémentaires sont $\emptyset, \{(1, b)\}, \{(1, a), (1, b)\}, \{(1, b), (2, b), (3, b)\}$ et $E_1 \times E_2$ donc

$$\mathcal{T} = \Big\{ \emptyset, \{(1, b)\}, \{(1, a), (1, b)\}, \{(1, b), (2, b), (3, b)\}, \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, b), E_1 \times E_2 \Big\}.$$

Proposition 1.6.3 *Soient $(E_1, \mathcal{T}_1), (E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques, $E = E_1 \times E_1$ et $(E, \mathcal{T})$ l'espace topologique produit. Soit $x = (x_1, x_2) \in E$, alors, $V \in \mathcal{V}(x)$ si et seulement s'il existe $V_1 \in \mathcal{V}(x_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(x_2)$ tels que $V_1 \times V_2 \subset V$.*

1.7 Suites convergentes

Définition 1.7.1 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et soit $l \in E$. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l (l est une limite de la* *suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *quand* n *tend vers l'infni) si*

$$\forall V \in \mathcal{V}(l),\ \exists N_V \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_V,\ x_n \in V.$$

On écrit $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = l.$

1.8 Applications continues

Définition 1.8.1 ***(Limite d'une fonction).***

Soit $(E,\mathcal{T})$ *et* $(E^{'},\mathcal{T}^{'})$ *deux espaces topologiques et soit* $f : E \rightarrow E^{'}$ *une application .Soit* A *une partie non vide de* E *et soit* $a \in \overline{A}$. *On dit que* $l \in E^{'}$ *est limite de* $f(x)$ *quand* x *tend vers* a *en restant dans* A *si*

$$\forall W \in \mathcal{V}(l),\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ f(A\cap V) \subset W.$$

Si $(E^{'},\mathcal{T}^{'})$ est séparé, cette limite est unique et on note $\lim\limits_{x\rightarrow a, x\in A} f(x) = l.$

Remarque 1.8.2 *On a* $l \in \overline{f(A)}$.

Définition 1.8.3 ***(Continuité en un point).***

Soit $(E,\mathcal{T})$ *et* $(E^{'},\mathcal{T}^{'})$ *deux espaces topologiques et soit* $a \in E$. *On dit qu'une fonction* $f : E \rightarrow E^{'}$ *est continue au point* a *si l'image réciproque* $f^{-1}(V)$ *de tout voisinage* V *de* $f(a)$ *est un voisinage de* a. *Cela s'écrit*

$$\forall V^{'} \in \mathcal{V}(f(a)),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a);$$

ou bien

$$\forall U^{'} \in \mathcal{T}^{'},\ f(a) \in U^{'},\ \exists U \in \mathcal{T},\ a \in U \text{ et } f(U) \subset U^{'}.$$

Proposition 1.8.4 *Une application* $f : E \rightarrow E^{'}$ *est continue au point* $a \in E$ *si et seulement si* $f(a)$ *est limite de* $f(x)$ *quand* x *tend vers* a.

Définition 1.8.5 ***(Continuité globale).***

Soit $(E,\mathcal{T})$ *et* $(E^{'},\mathcal{T}^{'})$ *deux espaces topologiques. On dit qu'une fonction* $f : E \to E^{'}$ *est continue sur* E *si elle est continue en tout point de* E.

Théorème 1.8.6 *Pour deux espaces topologiques* $(E,\mathcal{T})$ *et* $(E^{'},\mathcal{T}^{'})$ *et une application* $f : E \to E^{'}$, *on a équivalence entre :*

1) f *est continue sur* E.

2) L'image réciproque de tout ouvert de $E^{'}$ *est un ouvert de* E.

3) L'image réciproque de tout fermé de $E^{'}$ *est un fermé de* E.

1.9 Homéomorphismes

Définition 1.9.1 *Soit* $(E,\mathcal{T})$ *et* $(E^{'},\mathcal{T}^{'})$ *deux espaces topologiques. On appelle homéomorphisme toute bijection* f *de* E *sur* $E^{'}$ *bicontinue, i. e. telle que* f *et* f^{-1} *soient continues.*

Si f *est un homéomorphisme, l'image réciproque et l'image (puisque* $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$*) de tout ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé). Ainsi un homéomorphisme établit une bijection entre* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}^{'}$ *(resp. entre la topologie des fermés).*

Les homéomorphismes sont les isomorphismes associés à la structure "espace topologique".

Définition 1.9.2 *On dit que* $(E,\mathcal{T})$ *et* $(E^{'},\mathcal{T}^{'})$ *sont homéomorphes, s'il existe un homéomorphisme entre eux.*

Proposition 1.9.3 *Deux topologies* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}^{'}$ *sur un même ensemble* E *sont égales si et seulement si l'application identité* $Id : E \to E$ *est un homéomorphisme de* E *sur* E *(homéomorphisme de* $(E,\mathcal{T})$ *sur* $(E,\mathcal{T}^{'})$*).*

1.10 Topologie des espaces métrique

Définition 1.10.1 ***(Espace métrique).***

On appelle une distance d sur un ensemble E toute application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant

(i) $\forall (x, y) \in E^2 \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *;*

(ii) $\forall (x, y) \in E^2 \ d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie) ;*

(iii) $\forall (x, y, z) \in E^3 \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.10.2 *Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble et d est une distance sur E.*

Exemple 1.10.3 • *L'ensemble des réels muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique.*

• *Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soient $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ deux éléments de E. Alors chacune des expressions suivantes définit une distance sur E,*

$*$ $d_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

$*$ $d_p(x, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$ *(Si $p = 2$, d_2 est appellée la distance euclidienne)*

$*$ $d_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

• *Soient $a, b \in \mathbb{R}, E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $f, g \in E$. On définit sur E la distance d_∞ par $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$.*

• *Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble quelconque. Soit δ l'application définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par*

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & si \ x \neq y \\ 0 & si \ x = y, \end{cases}$$

δ une distance sur E (distance discrète).

Dans la suite, on désigne par (E, d) un espace métrique, $x_0 \in E$ et $r > 0$.

Définition 1.10.4 ***(Boules, sphère).***

On appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in E, d(x, x_0) < r\}$$

$$resp. \quad B^{'}(x_0, r) = \{x \in E, d(x, x_0) \leq r\}.$$

On appelle Sphère de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$S(x_0, r) = \{x \in E, d(x, x_0) = r\}.$$

On a

$$B^{'}(x_0, r) = B(x_0, r) \cup S(x_0, r).$$

Exemple 1.10.5 *Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels muni de la distance usuelle*

$d(x, y) = |x - y|, \; x, y \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -r < x - x_0 < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\} \\ &=]x_0 - r, x_0 + r[. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{'}(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) \leq r\} \\ &= [x_0 - r, x_0 + r]. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) = r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x - x_0 = r) \vee (x - x_0 = -r)\} \\ &= \{x_0 - r, x_0 + r\}. \end{aligned}$$

Définition 1.10.6 ***(Distance d'un point à un ensemble).***

Soit (E, d) *un espace métrique, et soit* A *une partie non vide de* E*. Pour tout* $x \in E$*, on note* $d(x, A)$ *et on appelle distance de* x *à* A *le nombre réel positif ou nul* $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

Exemple 1.10.7 *Soit* $\mathbb{R}$ *l'ensemble des réels muni de la distance usuelle* $d(x, y) = |x - y|,\ x, y \in \mathbb{R}$*. On a*

$d(-2, [3, +\infty[) = \inf_{y \geq 3} d(-2, y) = d(-2, 3) = |3 - (-2)| = 5.$

Définition 1.10.8 ***(Distance d'un ensemble à un autre).***

Soit (E, d) *un espace métrique, et soit* A, B *deux parties non vides de* E*. On note* $d(A, B)$ *et on appelle distance de* A *à* B *le nombre réel positif ou nul* $d(A, B) := \inf_{(x,y) \in A \times B} d(x, y) = \inf_{x \in A} d(x, B) = \inf_{y \in B} d(y, A)$.

Exemple 1.10.9 • $d(] - \infty, 0], [2, 3]) = 2$.

• $d(] - \infty,]0,] - 1, 2]) = 0$.

• *Soit* $A = \{\frac{n+1}{n} \quad n \in N^*\}$,

$d(1, A) = \inf_{y \in A} d(1, y) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} d(1, \frac{n+1}{n}) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} |1 - \frac{n+1}{n}| = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = 0.$

Remarque 1.10.10 *Il est clair que* $x \in A \Rightarrow d(x, A) = 0$*, par contre l'implication inverse* $(d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A)$ *est fausse. Dans l'exemple précédent, on a* $d(1, A) = 0$ *mais* $1 \notin A$.

Définition 1.10.11 ***(Diamètre).***

On appelle diamètre de A *et on note* $\varphi(A)$ *le nombre réel positif*

$$\varphi(A) := \sup_{(x,y) \in A^2} d(x, y).$$

Exemple 1.10.12 *Soit* $\mathbb{R}$ *l'ensemble des réels muni de la distance usuelle* $d(x, y) = |x - y|,\ x, y \in \mathbb{R}$.

• $\varphi([0, 3[) = \sup_{(x,y) \in ([0,3[)^2} |x - y| = 3.$

• $\varphi(] - 1, +\infty[) = +\infty.$

Définition 1.10.13 *Toute partie non vide A d'un espace métrique vérifiant $\varphi(A) < +\infty$ est dite bornée.*

Remarque 1.10.14 *L'ensemble vide est considéré comme un borné de diamètre* 0 $(\varphi(\emptyset) = 0)$.

Proposition 1.10.15 *A bornée $\Leftrightarrow \exists x_0 \in E,\ \exists r > 0,\ A \subset B(x_0, r)$.*

Preuve.

$\Rightarrow$) Soit x_0 un élément de A. Soit $r = 2\varphi(A) > \varphi(A) > 0$ donc $A \subset B(x_0, 2\varphi(A))$, en effet pour $z \in A$, $d(z, x_0) < \sup\limits_{x,y\in A} d(x, y) = \varphi(A) < 2\varphi(A)$ donc $z \in B(x_0, 2\varphi(A))$.
$\Leftarrow$) Soient $x, y \in A$ donc $x, y \in B(x_0, r)$ d'ou $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq r + r = 2r < +\infty$. Donc $\varphi(A)$ est fini et donc A est bornée. ■

Définition 1.10.16 ***(Ouvert).***
On dit que A est un ensemble ouvert (ou un ouvert) dans E si

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset A.$$

On vérifie facilement les axiomes O1), O2) et O3). Ainsi une distance définit une topologie, donc tout espace métrique est un espace topologique.

Proposition 1.10.17 *Dans un espace métrique, toute boule ouverte est un ouvert.*

Preuve.

Soit (E, d) un espace métrique et $B(x, r)$ un ensemble ouvert dans E.
Soit $y \in B(x, r)$, on a $d(x, y) < r$, on pose $r' = \frac{r-d(x,y)}{2}$. Alors $B(y, r')$ est inclus dans $B(x, r)$, en effet, pour $z \in B(y, r')$,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, y) + \frac{r - d(x, y)}{2} \leq \frac{r + d(x, y)}{2} < r.$$

■

Corollaire 1.10.18 *Un ensemble ouvert A dans E est une union quelconque de boules ouvertes.*

Preuve.

A ouvert dans E donc $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A$ (par définition). Le réel strictement positif $r_x = \sup\{r > 0,\ B(x,r_x) \subset A\}$ est bien défini pour tout $x \in A$ et on a $A = \cup_{x\in A} B(x,r_x)$. ■

Proposition 1.10.19 *Dans un espace métrique, toute boule fermé est un fermé.*

Preuve.

Soit (E,d) un espace métrique et $B^{'}(x,r)$ est un ensemble fermé dans E donc $C_E^{B^{'}(x,r)}$ est un ouvert. Soit $y \notin B^{'}(x,r)$ on a $d(x,y) > r$, on pose $0 < r^{'} < d(x,y) - r$. Alors $B(y,r^{'}) \subset C_E^{B^{'}(x,r)}$. En effet, pour $z \in B(y,r^{'}),\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ d'où $d(x,z) \geq d(x,y) - d(z,y) > d(x,y) - r^{'} > d(x,y) - d(x,y) + r = r$ donc $z \in C_E^{B^{'}(x,r)}$.

■

Proposition 1.10.20 *Tout espace métrique (E,d) est séparé.*

1.11 Continuité uniforme

Définition 1.11.1 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de l'espace métrique (E,d). On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in E$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0,\ d(x_n,l) \leq \varepsilon.$$

Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans un espace métrique (E,d) alors sa limite est unique.

Preuve.

Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et converge vers $l^{'}$ dans E. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0,\ d(x_n,l) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$\varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq n_1,\ d(x_n, l') \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ on a $d(l, l^{'}) \leq d(l, x_n) + d(x_n, l^{'}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

D'ou $d(l, l^{'}) = 0$, i.e. $l = l^{'}$. ■

Soient $(E, d), (E^{'}, d^{'})$ des espaces métriques, $f : E \longrightarrow E^{'}$ une application et l un point de E.

Définition 1.11.2 *On dit que f est continue au point $l \in E$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ d(x, l) \leq \eta \Longrightarrow d^{'}(f(x), f(l)) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.11.3 *On dit que f est continue sur E si elle est continue en tout point de E.*

Théorème 1.11.4 *f est continue en $l \in E$ si seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ délément de E convergeant dans (E, d) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$, la suite des images $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $(E^{'}, d^{'})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(l)$.*

Preuve.

$\Longrightarrow$) Supposons que f est continue au point l et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de (E, d) convergeant vers l, donc $\forall \varepsilon^{'} > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ d(x_n, l) \leq \varepsilon^{'}$.

Comme f est continue au point l on a $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ d(x, l) \leq \eta \Longrightarrow d^{'}(f(x), f(l)) \leq \varepsilon$. On choisit $\varepsilon^{'} = \eta$ on obtient le résultat.

$\Longleftarrow$) Supposons que f n'est pas continue au point $l \in E$ donc $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in E,\ d(x,l) \leq \eta$ et $d^{'}(f(x), f(l)) > \varepsilon$.

Posons $\eta = \frac{1}{n}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (E,d) telle que $d(x_n,l) \leq \frac{1}{n}$ et $d^{'}(f(x), f(l)) > \varepsilon$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(l)$. Contardiction ■

Théorème 1.11.5 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1) f est continue sur E.

2) Pour toute partie ouverte U de $(E^{'}, d^{'})$, l'image réciproque $U^{'} = f^{-1}(U)$ est une partie ouverte de (E,d).

3) Pour toute partie fermée F de $(E^{'}, d^{'})$, l'image réciproque $F^{'} = f^{-1}(F)$ est une partie fermée de (E,d).

Preuve.

Pour la démonstration voir [9].

Définition 1.11.6 *f est dite uniformément continue sur E si l'on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall u,v \in E,\ d(u,v) \leq \eta \Longrightarrow d^{'}(f(u), f(v)) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.11.7 *f est unifomément continue sur E donc elle est continue sur E.*

L'implication inverse n'est pas vraie.

Définition 1.11.8 *On dit que $f : E \to E^{'}$ est lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ sur E si*

$$\forall x,y \in E,\ d^{'}(f(x), f(y)) \leq kd(x,y),$$

elle est dite contractante si $0 \leq k \leq 1$.

Proposition 1.11.9 *(f Lipschitzienne)$\Rightarrow$ ($f\, uniformment$ continue) $\Rightarrow$ (f continue).*

1.12 Espaces métrique séparable

Définition 1.12.1 *Un espace métrique* (E, d) *est dit séparable s'il contient une partie dense au plus dénombrable.*

Exemple 1.12.2 • $\mathbb{Q}^n$ *dense dans* $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $\mathbb{Q}^n$ *étant dénombrable donc* $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *est séparable.*

• *Soit* E *un ensemble des suites de nombres réels* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $d(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n - y_n|$ *l'ensemble des suites rationnelles ayant au plus un nombre fini de termes non nuls est dénombrable et dense dans* (E, d).

CHAPITRE 2

Espaces compacts

2.1 Les espaces topologiques compacts

Définition 2.1.1 *Soit E un ensemble quelconque et soit A une partie de E.*

Un recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de E vérifiant $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} B_i$.

Si I est fini on dira recouvrement fini.

Si I est dénombrable on dira recouvrement dénombrable.

Si $A = E$, comme $\bigcup\limits_{i\in I} B_i \subset E$ on aura l'égalité $E = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$.

Définition 2.1.2 ***(Borel-Lebesgue).***

On dit qu'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est compact s'il est separé et si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini i.e,

$$\Big(E = \bigcup_{i\in I} U_i\Big) \Rightarrow \Big(\exists J \subset I,\ J\ fini\ , E = \bigcup_{i\in J} U_i\Big).$$

Proposition 2.1.3 *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est compact s'il est séparé et si de toute famille de fermée d'intersection vide, on peut extraire une sous famille finie d'intersection vide i.e.,*

$$\Big(\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset\Big) \Rightarrow \Big(\exists J \subset I,\ J\ fini,\ \bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset\Big).$$

Preuve.

$\Longrightarrow$) Supposons que $(E,\mathcal{T})$ est compact, $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermé,e telle que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i=\emptyset$ donc $C_E^{\bigcap\limits_{i\in I} F_i}=E$ d'où $E=\bigcup\limits_{i\in I} C_E^{F_i}$ i.e. $(C_E^{F_i})_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E et comme $(E,\mathcal{T})$ est compact il existe $J\subset I,\ J$ fini et $E=\bigcup\limits_{i\in J} C_E^{F_i}$. Passant au complémentaire on obtient $\emptyset=C_E^{\bigcup\limits_{i\in J} C_E^{F_i}}=\bigcap\limits_{i\in J} C_E^{C_E^{F_i}}=\bigcap\limits_{i\in J} F_i$.

$\Longleftarrow$) Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E i.e. $E=\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ donc $\emptyset=C_E^{\bigcup\limits_{i\in I} U_i}=\bigcap\limits_{i\in I} C_E^{U_i}$ or $(C_E^{U_i})_{i\in I}$ est une famille de fermés d'intersection vide, alors il existe $J\subset I$ fini $\bigcap\limits_{i\in J} C_E^{U_i}=\emptyset$ d'ou $E=\bigcup\limits_{i\in J} U_i$. ∎

Proposition 2.1.4 *Si $(E,\mathcal{T})$ est compact, toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fermée décroissante (i.e. pour tout $n\in\mathbb{N},\ F_{n+1}\subset F_n$) non vide, a une intersection non vide.*

Preuve.

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille décroissante des fermée et on suppose que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i=\emptyset$.

Puisque E est compact, il existe $\{i_1,i_2,...,i_k\}\subset\mathbb{N}$, *tel que* $\bigcap\limits_{j=1}^{k} F_{i_j}=\emptyset$.

Mais $\bigcap\limits_{j=1}^{k} F_{i_j}=F_{\max\{i_1,i_2,...,i_k\}}$ i.e., il existe $m=\max\{i_1,i_2,...,i_k\}\in\mathbb{N}$ tel que $F_m=\emptyset$, ce qui est une contradiction. ∎

Définition 2.1.5 *Une partie A d'un espace topologique séparé $(E,\mathcal{T})$ est dite compacte si $(A,\mathcal{T}_A)$ avec $\mathcal{T}_A$ la topologie induite est compact.*

Remarque 2.1.6 *La propriètè de Borel-Lebesgue dans $(A,\mathcal{T}_A)$ s'écrit alors avec les ouverts de $(E,\mathcal{T})$,*

$$\Big(A\subset\bigcup_{i\in I}U_i\Big)\Rightarrow\Big(\exists J\subset I,\ J\ fini,\ A\subset\bigcup_{i\in J}U_i\Big),$$

et la définition avec les fermés de $(E,\mathcal{T})$,

$$\Big(A\cap\Big(\bigcap_{i\in I}F_i\Big)=\emptyset\Big)\Rightarrow(\exists J\subset I,\ J\ fini,\ A\cap\Big(\bigcap_{i\in J}F_i\Big)=\emptyset).$$

Exemple 2.1.7 • $\mathbb{R}$ *usuel n'est pas compact car* $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+2[$, *alors* $\{]n, n+2[, \ n \in \mathbb{N}\}$ *est un recouvrement ouvert de* $\mathbb{R}$, *mais ne contient pas de recouvrement fini.*

• *Dans un espace topologique séparé toute partie finie est compacte.*

En effet, soit $A = \bigcup_{j=1}^{n} \{x_j\}$ *et* $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ *(*U_i *ouvert).*

On a $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}, \ x_j \in A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ *donc* $\exists i_j \in I, \ x_j \in U_{i_j}$ *d'où* $A = \bigcup_{j=1}^{n} \{x_j\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$.

Proposition 2.1.8 *1) Dans un espace topologique séparé, une partie compacte est fermée.*

2) Si $(E, \mathcal{T})$ *est un espace topologique compact et* F *est un fermé de* E *alors* F *est compact.*

Preuve.

1) Soit K une partie compacte de $(E, \mathcal{T})$ séparé. Montrons que C_E^K est un ouvert. Soit $x \in C_E^K$. Comme $(E, \mathcal{T})$ séparé, pour tout $y \in K$ il existe $V_x^y \in \mathcal{V}(x)$ et $W_x^y \in \mathcal{T}$ tel que $y \in W_x^y$ et $V_x^y \cap W_x^y = \emptyset$. Comme K est compact, on peut extraire du recouvrement d'ouvert $\bigcup_{y\in K} W_x^y$ un recouvrement fini $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_x^{y_i}$. On peut prendre alors $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_x^{y_i}{}_x$ et on a $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subset C_E^K$.

2) Soit F une partie fermée de E et soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille des fermées de F telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. F_i fermé dans F et F fermé dans E donc F_i est fermé dans E et comme $(E, \mathcal{T})$ est compact, il existe alors un sous ensemble fini J de I telle que $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$. Donc F est compacte. ■

Corollaire 2.1.9 *Dans un espace topologique compact, les parties compactes sont les parties fermées.*

Proposition 2.1.10 *1) Dans un espace topologique séparé, une union finie de parties compactes est compacte.*

2) Dans un espace topologique séparé, une intersection quelconque de parties compactes est compacte.

Preuve.

1) Soit $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ une famille de compacts. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ i.e. $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. On a $\forall j \in \{1,2,...,n\},\ A_j \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ i.e. $\forall j \in \{1,2,...,n\},\ (U_i)_{i\in I}$ recouvre A_j et A_j compact donc il existe un recouvrement fini $(U_i)_{i\in J_j},\ J_j \subset I,\ J_j$ fini.

$\forall j \in \{1,2,...,n\},\ A_j \subset \bigcup\limits_{i\in J_j} U_i$ donc $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} [\bigcup\limits_{i\in J_j} U_i] = \bigcup\limits_{i\in J} U_i$ $(J = J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_n)$. Ce qu'il fallait démontrer.

2) Soit A_i une famille de compacte. On a $\forall i \in I,\ A_i$ est compact dans $(E,\mathcal{T})$ séparé donc $\forall i \in I,\ A_i$ est fermé dans $(E,\mathcal{T})$ et donc $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ est fermé dans $(E,\mathcal{T})$. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{i\in I} A_i \cap A_i$ est fermé dans A_i d'où $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ est compact. ■

2.2 Les espaces métriques compacts

Lemme 2.2.1 ***(lemme de la maille).***

Si une partie A d'un espace métrique (E,d) qui possède la propriété "de toute suite de A on peut extraire une sous suite convergente", alors pour tout recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de A, il existe $\rho > 0$ tel que $\forall x \in A,\ \exists i_x \in I,\ B(x,\rho) \subset U_{i_x}$.

Théorème 2.2.2 *Soit A une partie d'un espace métrique (E,d). Les trois assertions sont équivalentes*

1) A est compact.

2) Propriété de Bolzano-Weierstrass "Toute partie infinie de A admet un point d'accumulation dans A."

3) De toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous suite convergente dans A.

2.3 Produit d'espaces métriques compacts

Proposition 2.3.1 *Soient* (E,d) *et* (E',d') *deux espaces métriques et considérons l'espace produit* $(E\times E',D)$ *avec* $D((x,x'),(y,y'))=d(x,y)+d'(x',y')$ *ou* $D((x,x'),(y,y'))=\max(d(x,y),d'(x',y'))$*. Alors* $(E\times E',D)$ *est compact si seulement si* (E,d) *et* (E',d') *sont tous compacts.*

2.4 Parties compactes de la droite réelle

Théorème 2.4.1 ***(Théorème de Heine-Borel-Lebesgue).***

Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $([a,b],a,b\in\mathbb{R})$ *est compact.*

Corollaire 2.4.2 *Les compacts de* $\mathbb{R}$ *sont les parties fermée bornée.*

Preuve.

$\Longrightarrow$) Soit A une partie compacte de $\mathbb{R}$, donc A est fermé car $\mathbb{R}$ est séparé. On a $A\subset\mathbb{R}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[$ alors comme A est compact on déduit qu'il existe $J\subset\mathbb{N}$ fini, $J=\{n_1,n_2,...,n_k\}$ et $n_1<n_2<\ldots<n_k$ tel que $A\subset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[=\bigcup\limits_{i=1}^{k}]-n_i,n_i[=]-n_k,n_k[=B(0,n_k)$. On déduit donc $\exists x=0,\ \exists r=n_k>0,\ A\subset B(0,n_k)$, i.e. A est borné dans $\mathbb{R}$.

$\Longleftarrow$) Supposons que A est bornée fermée.

A est bornée i.e. $\exists x\in\mathbb{R},\ \exists r>0,\ A\subset]x-r,x+r[$ $\Big(]x-r,x+r[$ est un compact dans $\mathbb{R}\Big)$. Donc A est une partie fermée dans un compact donc compacte. ∎

2.5 Espaces localement compacts

Définition 2.5.1 *On dit qu'un espace topologique séparé* $(E,\mathcal{T})$ *est localement compact si tout point admet une base de voisinages compacts.*

Exemple 2.5.2 • $(\mathbb{R},|.|)$ *est localement compact.*

Définition 2.5.3 *On dit qu'une partie A d'un espace topologique séparé $(E, \mathcal{T})$ est relativement compacte si son adhérence est compacte.*

Exemple 2.5.4 • $]a, b[$ *est relativement compacts dans* $\mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ *car* $\overline{]a, b[} = [a, b]$ *est compact dans* $\mathbb{R}$.

CHAPITRE 3

Espaces complets

3.1 Suites de Cauchy

Définition 3.1.1 *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (E,d) est de Cauchy si elle vérifie*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall p,q\geq N_\varepsilon,\ d(x_p,x_q)\leq\varepsilon.$$

Exemple 3.1.2 • *Les suites $x_n=\frac{1}{4n}$, $x_n=e^{-2n}$ sont des suites de Cauchy dans $(\mathbb{R},|.|)$.*

Proposition 3.1.3 *Dans un espace métrique (E,d)*

1) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

2) Toute suite de Cauchy est bornée.

3) Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente, converge.

Preuve.

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans (E,d) donc $\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N_\varepsilon,\ d(x_n,l)\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Soient $p,q\geq N_\varepsilon$, on a $d(x_p,l)\leq\frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x_q,l)\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Donc

$$d(x_p,x_q)\leq d(x_p,l)+d(l,x_q)\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

D'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (E,d). Pour $\varepsilon = 1$, il exsite $N_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p,q \geq N_0,\ d(x_p,x_q) \leq 1$. En particulier pour $p = N_0, \forall q \geq N_0,\ d(x_q,x_{N_0}) \leq 1$ et on pose $R = \max(d(x_{N_0},x_1),...,d(x_{N_0},x_{N_0-1}),1)$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_q,x_{N_0}) \leq R$.

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (E,d) et $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $l \in E$. Donc $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall p,q \geq N_\varepsilon,\ d(x_p,x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall k \geq k_\varepsilon,\ d(x_{n_k},l) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon^{'} = \max\{N_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\},\ \forall n \geq N_\varepsilon^{'},\ d(x_n,l) \leq d(x_n,x_{n_{k\varepsilon}}) + d(x_{n_{k\varepsilon}},l) \leq \varepsilon,$$

d'où $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = l.$ ■

3.2 Complétude

Définition 3.2.1 *Un espace métrique (E,d) est dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans (E,d).*

Exemple 3.2.2 • $(\mathbb{R},|.|),(\mathbb{R}^n,d_2)$ *sont complets.*

• $(\mathbb{Q},|.|)$ *n'est pas complet.*

• *La suite de Cauchy $x_n = \frac{1}{n}$ ne converge pas dans $E =]0,1]$ $(0 \notin E)$ donc $(E,|.|)$ n'est pas complet.*

Définition 3.2.3 *Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E. On dit que A est une partie complète de (E,d) si le sous espace métrique (A,d_A) est complet.*

Proposition 3.2.4 *1) Dans un espace métrique (E,d) toute partie complète est fermée.*

2) Dans un espace métrique complet (E, d) les parties fermées sont les parties complètes.

Preuve.

1) Soit F une partie complète d'un espace métrique (E, d), et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de F qui converge dans E. Donc elle est de Cauchy dans (E, d) et donc de Cauchy dans (F, d_F). Comme F est une partie complète la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F. D'où la ferméture de F.

2) $\Rightarrow$) Supposons que F est fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (F, d_F) alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (E, d). Comme (E, d) est complet alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans E et envertu de la fermeture de F cette limite appartient à F.

$\Leftarrow$) partie 1) de cette proposition. ■

Corollaire 3.2.5 *Soit (E, d) un espace métrique. Une intersection quelconque de sous espaces complet est complet.*

Proposition 3.2.6 *Soit (E, d) un espace métrique. Une union finie de sous espaces complets est une partie complète.*

Proposition 3.2.7 *Soient $(E, d), (E^{'}, d^{'})$ deux epaces métriques. Soit f une application uniformément continue sur E. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (E, d), la suite d'image $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(E^{'}, d^{'})$.*

Preuve.

On a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (E, d), i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N_\varepsilon,\ d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Car f est uniformément continue et pour $\varepsilon = \delta$, on obtient

$$\forall p, q \geq N_\varepsilon,\ d^{'}(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(E^{'}, d^{'})$. ■

Théorème 3.2.8 ***(Théorème de prolongement d'une application uniformément continue).***

Soit $(E, d), (E^{'}, d^{'})$ deux espaces métriques, avec $(E^{'}, d^{'})$ complet et soit $Y \subset E$. Si une application $f : (Y, d_Y) \longrightarrow (E^{'}, d^{'})$ est uniformément continue et si Y est dense dans E, alors f admet un unique prolongement par continuité $\tilde{f} : E \longrightarrow E^{'}$.

3.3 Point fixe des contractions

Définition 3.3.1 ***(Point fixe).***

Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'un point $a \in E$ est un point fixe d'une fonction $f : E \to E$ si $f(a) = a$.

Théorème 3.3.2 ***(Picard).***

Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe $x \in E$.

Preuve.

Considèrons une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 \in E$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, pour $p, q, n \in \mathbb{N}$ on suppose que $p \geq q$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha^n d(x_1, x_0).$$

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{n=q}^{p-1} d(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{n=q}^{p-1} \alpha^n d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^q}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $x \in E$ vérifiant $f(x) = x$ (Car f est continue). D'où l'existence du point fixe.

Soient $x_1, x_2 \in E$ deux points fixes de f et $x_1 \neq x_2$. Donc

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2).$$

Contradiction et donc l'unicité du point fixe de f. ■

CHAPITRE 4

Espaces connexes

Définition 4.0.3 *On dit qu'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est connexe si les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont E et $\emptyset$.*

Il revient au même de dire que E n'admet pas de partition non triviale d'ouverts i.e.,

$$\Big(E = U_1 \cup U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset,\ U_1, U_2 \in \mathcal{T}\Big) \Rightarrow \Big(U_1 = \emptyset \text{ ou } U_2 = \emptyset\Big)$$

(ou de fermés).

Exemple 4.0.4 • *Soit $E = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{E, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. (E, τ) est connexe car les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E.*

• *Soit $E = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(E) = \{E, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$. $(E, \mathcal{P}(E))$ n'est pas connexe car $\{a\}$ est une partie ouverte est fermée à la fois.*

Définition 4.0.5 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une partie A de E sera dit connexe si le sous espace $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe.*

Proposition 4.0.6 *Une partie A de E est connexe si et seulement s'il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 de (E, T) tels que $A \subset U_1 \cup U_2$ entraîne $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2$.*

Exemple 4.0.7 • *Dans un espace topologique, un singleton est connexe.*

Proposition 4.0.8 *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Preuve.

Soit $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ connexe et qui n'est pas un intervalle. Donc il existe $\alpha, \beta \in A$ avec $\alpha < \beta$, tels que $[\alpha, \beta] \subsetneq A$.

Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $\gamma \notin A$. Alors $U_1 = A \cap]-\infty, \gamma[,\ U_2 = A \cap]\gamma, +\infty[$ sont deux ouverts de A, $U_1 \neq \emptyset, U_2 \neq \emptyset$,

$$U_1 \cap U_2 = (A \cap]-\infty, \gamma[) \cap (A \cap]\gamma, +\infty[) = A \cap (]-\infty, \gamma[\cap]\gamma, +\infty[) = A,$$

$$U_1 \cup U_2 = (A \cap]-\infty, \gamma[) \cup (A \cap]\gamma, +\infty[) = A \cap (]-\infty, \gamma[\cup]\gamma, +\infty[) = \emptyset.$$

Contradiction. D'où A est un intervalle. ■

Exemple 4.0.9 • $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}, [0, 1[\cup]1, 2]$ *ne sont pas connexe dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 4.0.10 *Soit A une partie connexe d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$. Toute partie B de E telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.*

Preuve.

Supposons que $B = U_1 \cup U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset,\ U_1, U_2 \in \mathcal{T}_B$ donc $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{T},\ U_1 = O_1 \cap B,\ U_2 = O_2 \cap B$.

$$\begin{aligned} A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow A = A \cap (U_1 \cup U_2) = A \cap [(O_1 \cap B) \cup (O_2 \cap B)] &= A \cap [B \cap (O_1 \cup O_2)] \\ &= (A \cap B) \cap (O_1 \cup O_2) \\ &= (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2). \end{aligned}$$

On a $A \cap O_1, A \cap O_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Donc

$$\begin{aligned} (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = A \cap (O_1 \cap O_2) &\subset B \cap (O_1 \cap O_2) \\ &= (B \cap O_1) \cap (B \cap O_2) \\ &= U_1 \cap U_2 \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Comme A est connexe on a $A \cap O_1 = \emptyset$ ou $A \cap O_2 = \emptyset$.

Si $A \cap O_1 = \emptyset$ on a $\overline{A} \cap O_1 = \emptyset$ et comme $B \subset \overline{A}$, on aura $B \cap O_1 = \emptyset$.

Si $A \cap O_2 = \emptyset$ on a $\overline{A} \cap O_2 = \emptyset$ et comme $B \subset \overline{A}$, on aura $B \cap O_2 = \emptyset$.

Donc $U_1 = \emptyset$ ou $U_2 = \emptyset$ alors B est connexe. ■

Corollaire 4.0.11 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit A une partie connexe de E dense dans E i.e. $\overline{A} = E$, alors E est connexe.*

Corollaire 4.0.12 *Si A une partie d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est connexe alors son adhérence $\overline{A}$ est connexe.*

Proposition 4.0.13 *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$. Si $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\cup_{i \in I} A_i$ est une partie connexe de E.*

Preuve.

Soient $A = \cup_{i \in I} A_i$, U_1, U_2 deux ouverts disjoints de E tels que

$$A \subset U_1 \cup U_2 \text{ et } A \cap (U_1 \cup U_2) = \emptyset.$$

Alors, pour tout $i \in I$, $A_i \subset U_1 \cup U_2$ et $A_i \cap (U_1 \cup U_2) = \emptyset$.

Puisque $\forall i \in I,\ A_i$ est connexe on a $A_i \subset U_1$ ou $A_i \subset U_2$ pour tout $i \in I$. Donc $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2$ (car $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$). D'où la connexité de A. ■

4.1 Composantes connexes, espaces localement connexes

Définition 4.1.1 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $x \in E$. On appelle composante connexe de x, notée $C(x)$ la réunion de toute les parties connexes qui contiennent x. c'est la plus grande partie connexe contenant x.*

Il est claire que $C(x) \cap C(y) = \emptyset \Longrightarrow C(x) = C(y)$.

Proposition 4.1.2 *Les composantes connexes d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ sont des fermées.*

Preuve.

On a $C(x)$ est connexe donc $\overline{C(x)}$ est connexe. $x \in C(x) \subset \overline{C(x)}$, $C(x)$ c'est la plus grande partie connexe contiennant x et $\overline{C(x)}$ est une partie connexe qui contient x donc $\overline{C(x)} \subset C(x)$. D'où $C(x) = \overline{C(x)}$ i.e $C(x)$ est fermée. ■

Définition 4.1.3 *On dit que l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est localement connexe s'il admet une base de voisinages connexe.*

4.2 Continuité et connexité

Théorème 4.2.1 *Soient $(E, \mathcal{T})$ et $(E^{'}, \mathcal{T}^{'})$ deux espaces topologiques, et $f : E \longrightarrow E^{'}$ une application. Si $(E, \mathcal{T})$ est connexe et f continue alors $f(E)$ est connexe.*

Preuve.

Soient U_1, U_2 deux ouverts disjoints de $f(E)$ tels que $f(E) = U_1 \cup U_2$. Comme f est continue, $f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)$ sont des ouverts disjoints de E tels que $E = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$. Puisque $(E, \mathcal{T})$ est connexe on a $f^{-1}(U_1) = \emptyset$ ou $f^{-1}(U_2) = \emptyset$ i.e. $U_1 = \emptyset$ ou $U_2 = \emptyset$. donc $f(E)$ est connexe. ■

Théorème 4.2.2 (Théorème de la valeurs intermédiares).

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique connexe et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si f prend les valeurs α et β avec $\alpha < \beta$, elle prend toutes les valeurs intermédiares $\gamma \in]\alpha, \beta[$. C'est à dire si $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$ $(\alpha < \beta)$ et $\gamma \in]\alpha, \beta[$, $\exists z \in E$ tel que $f(z) = \gamma$.

Preuve.

On a $(E, \mathcal{T})$ connexe et f continue alors $f(E)$ est connexe dans $\mathbb{R}$, donc $f(E)$ est un intervalle. Par conséquent, si $\alpha, \beta \in f(E)$ on a $]\alpha, \beta[\subset f(E)$. Donc pour tout $\gamma \in]\alpha, \beta[$, $\gamma \in f(E)$, c'est à dire il existe $z \in E$ tel que $f(z) = \gamma$. ■

Proposition 4.2.3 *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est connexe si et seulement si toute fonction continue de E dans $\{0,1\}$ est constante.*

Preuve.

Notons d'abord que la topologie discrète associe à $\{0,1\}$ est $\tau = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0\}, \{1\}\}$.

$\Longrightarrow$) *Supposons que f n'est pas constante et comme $f : E \longrightarrow \{0,1\}$ est continue on a $U_1 = f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ et $U_2 = f^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$ et ceux sont deux ouverts de $(E, \mathcal{T})$. De plus,*

$$U_1 \cap U_2 = f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\} \cap (\{1\})) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

et

$$U_1 \cup U_2 = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\} \cup (\{1\})) = f^{-1}(\{0,1\}) = E.$$

Donc $(E, \mathcal{T})$ n'est pas connexe. Contradiction.

$\Longleftarrow$) *Supposons que $(E, \mathcal{T})$ n'est pas connexe donc il existe deux ouverts $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \cup U_2 = E$.*

On pose alors $f(x) = 0$ si $x \in U_1$ et $f(x) = 1$ si $x \in U_2$ f n'est pas constante mais continue car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = U_1$ ouvert, $f^{-1}(\{0\}) = U_2$ ouvert et $f^{-1}(\{0,1\}) = E$. ■

4.3 Connexité par arcs

Définition 4.3.1 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle arc (ou chemin) toute application $\phi : [0,1] \longrightarrow E$ continue sur $[0,1]$.*

$\phi(0)$ est appelé origine de l'arc.

$\phi(1)$ est appelé extrimité de l'arc.

Exemple 4.3.2 • *Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ un espace topologique et soient $x, y \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = (1-t)x + ty$ est un arc joignant x à y. Son image est un segment dans $\mathbb{R}$.*

Définition 4.3.3 *On dit qu'un espace topologique* $(E, \mathcal{T})$ *est connexe par arcs si pour tous* x, y *dans* E*, il existe un arc* $\phi = \phi_{xy}$ *joignant* x *à* y.

$\phi : [0,1] \longrightarrow E$ *continue,* $\phi(0) = x$ *et* $\phi(1) = y$.

Exemple 4.3.4 • $\emptyset$ *est connexe par arcs.*

Proposition 4.3.5 *Toute espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Preuve.

Soit $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique connexe par arcs et* $f : E \longrightarrow \{0,1\}$*une application continue.*

Pour tout $x, y \in E$*, il existe un arc* $\phi : [0,1] \longrightarrow E$ *continue tel que* $\phi(0) = x, \phi(1) = y$*. Donc* $f \circ \phi : [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$ *est continue. Comme* $[0,1]$ *est connexe,* $(f \circ \phi)$ *est constante, on a en particulier* $(f \circ \phi)(0) = (f \circ \phi)(1)$ *et donc* $f(x) = f(y)$*. Il result que* f *est constante sur* E*. Donc* E *est connexe.*

4.4 Exercices

Exercice 01 :

1) Vérifier que toute partie d'un espace discret est fermée.

2) Soit $E = \{a, b, c\}$ *et* $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{a, b\}\}$*. Montrer que les parties* $\{c\}, \{b, c\}$ *sont fermées.*

3) Vérifier que $\emptyset, E$ *sont deux parties à la fois ouvertes et fermées pour toute topologie définie sur* E.

Exercice 02 : *Montrer que*

1) Dans un espace topologique $(E, \mathcal{T})$*. Si* A *et* B *sont deux parties telles que* $A \subset B$ *alors tous voisinage de* B *est un voisinage de* A.

2) La réciproque de 1) est vraie.

Exercice 03 :

1) Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles ouverts disjoints d'un espace topologique $(E,\mathcal{T})$ alors il en est de même pour $\overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\overset{\circ}{\overline{B}}$.

Exercice 04 : *Soient A et B deux parties d'un espace topologique $(E,\mathcal{T})$ et C une partie de $A \cup B$.*

1) Montrer que $C \in \mathcal{T}_{A\cup B} \Longrightarrow C \cap A \in \mathcal{T}_A \wedge C \cap B \in \mathcal{T}_B$.

2) Que dire de l'implication inverse.

Exercice 05 : *Soit $E = \{a,b,c,d,e\}$ mini de la topologie $\mathcal{T} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$.*

1) Montrer que l'ensemble $D = \{a,c\}$ partout dense dans E, tandis que $F = \{b,d\}$ ne jouit pas de cette propriété.

2) On pose $G = \{b,c,d\}$. Déterminer $\overset{\circ}{G}, Fr(G)$.

3) Quelle est la topologie induite sur G par $\mathcal{T}$.

Exercice 06 :

Montrer que si A et B sont deux sous ensembles ouverts disjoints d'un espace topologique $(E,\mathcal{T})$ alors il en est de même pour $\overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\overset{\circ}{\overline{B}}$.

Exercice 07 :

Soit E un ensemble non vide et soit $\delta : E \times E \longrightarrow [0,+\infty[$

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & si\ x \neq y. \end{cases}$$

- *Montrer que δ est une distance sur E.*
- *Calculer $B(x_0,r),\ B'(x_0,r),\ S(x_0,r),\ x_0 \in E,\ r > 0$.*

Exercice 08 : *Soit $E =]0,+\infty[$. Pour x et y dans E, on pose*

$$\delta(x,y) = |\ln x - \ln y|.$$

1) Vérifier que δ est une distance sur E.

2) Soit d la distance usuelle sur E. Montrer que (E,d) n'est pas complet.

3) La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ *est elle convergente dans l'espace métrique* (E,δ). *Est-elle de Cauchy dans* (E,δ).

4) Montrer que l'espace métrique (E,δ) *est complet.*

Exercice 09 : *Soit* (E,d) *un espace métrique et soit* $A\subset E$. *Montrer que*

$$(x\in\overline{A})\Longleftrightarrow(d(x,A)=0).$$

Exercice 10 :

1) Montrer que l'intervalle $[a,b]$ *n'est pas compact dans* $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

2) Soit (E,d) *un espace métrique et* $(x_n)_n$ *une suite d'élément de* E *qui converge vers* x.

Montrer que l'ensemble $A=\{x\}\cup\{x_n,n\in\mathbb{N}^*\}$ *est compact.*

Exercice 11 : *Soit* $(E,\mathcal{T})$ *un espace topologique et* A *et* K *sont deux parties de* E *telle que* $K\subset A$.

Montrer que K *est compact dans* E *si et seulement si elle l'est dans le sous espace* $(A,\mathcal{T}_A)$.

CHAPITRE 5

Espaces vectoriels normés

5.1 Normes

Définition 5.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corp $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les proprités suivantes*

1) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $\forall x \in E \ , \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

3) $\forall (x, y) \in E^2, \ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Pour $x \in E$, $N(x)$ est appelé norme de x. $N(x)$ est noté $\|x\|$.

Exemple 5.1.2 *• La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.*

• $E = \mathbb{R}^n$ les applications $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $E = \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$, ou $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 5.1.3 *On appelle semi norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés 1) et 2) de la définition précédente.*

Définition 5.1.4 *On appelle espace vectoriel normé (en abrégé e.v.n) le couple $(E, \|.\|)$ où E est un espace vectoriel et $\|.\|$ est une norme sur E.*

Proposition 5.1.5 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K}$ *alors on a*

$$\forall x, y \in E, \ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Preuve.

On a $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ *et* $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$ *donc* $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, *d'ou le résultat.*

Définition 5.1.6 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K}$, *et soit* A *un sous espace vectoriel de* E. *Soit* $\|.\|_A$ *la restriction de la norme* $\|.\|$ *sur* A. *Alors* $(A, \|.\|_A)$ *est appelé sous espace vectoriel normé de* E.

Proposition 5.1.7 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K}$ *alors l'application*

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ E \ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \ &\mapsto \ \varphi(x) = \|x\|, \end{aligned}$$

est uniformément continue sur E.

Preuve.

φ *uniformément continue donc*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

Soient $x, y \in E$ *tels que* $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \delta = \varepsilon$. *Donc* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0, \forall x, y \in E, \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$ ■

5.2 Distance associée à une norme

Définition 5.2.1 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K}$. *On associe à la norme* $\|.\|$, *une distance* d *sur* E *définie par*

$$\forall x, y \in E, \ d(x, y) = \|x - y\|.$$

Soient $x, y, z \in E$

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y.$

2) $d(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\| = d(y,x).$

3) $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z).$

d *est effectivement une distance sur* E.

Dans l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, *la boule ouverte de centre* $x_0 \in E$ *et de rayon* $r > 0$ *est définie par*

$$B(x_0, r) = \{x \in E,\ \|x - x_0\| < r\}.$$

La boule femée de centre $x_0 \in E$ *et de rayon* $r > 0$ *est définie par*

$$B^{'}(x_0, r) = \{x \in E,\ \|x - x_0\| \leq r\}.$$

La sphère de centre $x_0 \in E$ *et de rayon* $r > 0$ *est définie par*

$$S(x_0, r) = \{x \in E,\ \|x - x_0\| = r\}.$$

Remarque 5.2.2 *Tout espace normé* $(E, \|.\|)$ *est un espace métrique dont sa métrique métrique est la distance asociée à la norme de* E.

5.3 Normes équivalentes

Définition 5.3.1 *Deux normes* $\|.\|_1, \|.\|_2$ *sur un même espace vectoriel* E *sont dites équivalentes s'il existe* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *tel que*

$$\forall x \in E, \quad \alpha\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2.$$

Exemple 5.3.2 • *Les normes* $\|.\|_1, \|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$ *sont équivalentes sur* $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.3.3 (Produit d'espaces vectoriels normés).

Soient $(E_1, \|.\|_1), (E_2, \|.\|_2)$ *deux espaces vectoriels normés. On définit sur* $E = E_1 \times$

E_2 l'application norme $\|.\|$ par

$$\begin{array}{rcl} \varphi \; : \; E_1 \times E_2 & \to \mathbb{R}_+ & \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2. \end{array}$$

Alors, $\|.\|$ est une norme sur E et $(E, \|.\|)$ est appelé espace vectoriel normé produit.

Preuve.

1) Soit $(x_1, x_2) \in E$, On a $\|(x_1, x_2)\| = 0$, i.e. $\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 = 0$, d'où $\|x_1\|_1 = 0$ et $\|x_2\|_2 = 0$ et puisque $\|.\|_1, \|.\|_2$ sont des normes sur E, on a alors $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, par conséquent $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

2) Soient $(x_1, x_2) \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \|\lambda(x_1, x_2)\| &= \|(\lambda x_1, \lambda x_2)\| \\ &= \|\lambda x_1\|_1 + \|\lambda x_2\|_2 \\ &= |\lambda|(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2) \\ &= |\lambda|\|(x_1, x_2)\|. \end{aligned}$$

3) Soient $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in E \times E$

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\| &= \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\| \\ &= \|x_1 + y_1\|_1 + \|x_2 + y_2\|_2 \\ &\leq \|x_1\|_1 + \|y_1\|_1 + \|x_2\|_2 + \|y_2\|_2 \\ &= \|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\|. \end{aligned}$$

Donc $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$.

Définition 5.3.4 (Espace de Banach).

On appelle un espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.

5.4 Exercices

Exercice 01 : *Soit l'application* $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $N(x, y) = \sup_{t\in[0,1]} |x + ty|$.

1) Montrer que N *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$.

2) Dessiner la sphère unité.

Exercice 02 : *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *les deux applications suivantes :*

$$N_1(x, y) = |x| + |y| \qquad N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|).$$

1) Montrer que N_1, N_∞ *définissent deux normes sur* $\mathbb{R}^2$.

2) Prouver que l'on a : $\forall\alpha \in \mathbb{R}^2\ N_\infty(\alpha) \leq N_1(\alpha) \leq 2N_\infty(\alpha)$.

3) N_1, N_∞ *sont-elles équivalentes.*

Exercice 03 : *Soit* E *l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $[0, 1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *On définit pour* $f \in E$

$$\|f\|_\infty = Sup\{|f(x)|,\ x \in [0, 1]\} \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

1) Vérifier que $\|.\|_\infty$ *et* $\|.\|_1$ *sont deux normes sur* E.

2) Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *N. Bourbaki, Eléments de mathématiques. Topologie Générale. Hermann.*

[2] *H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications. Masson (1983).*

[3] *G. Choquet, Cours d'Analyse. Tome II. Masson (1964).*

[4] *J. Dieudonné , Eléments d'analyse, Tome I : fondements de l'analyse moderne. Gauthier-Villars, Paris, 1968.*

[5] *J. Dixmier , Topologie générale. Presses universitaires de France, (1981).*

[6] *M. Hazi, Topologie Au delà des travaux dirigés, Tome 2 : Visite guidée dans les espaces métriques. 2 ème année des universités et Grandes Ecoles, 2009.*

[7] *F. Nier, D. Iftimie, Introduction à la Topologie. Université de Rennes 1 (2003).*

[8] *A. Saadi, Introdoction à la topologie, Universié Mohamed Boudiaf-Msila (2017).*

[9] *Y. Sonntag, Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses, Paris (1998).*