



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut de Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Nombres de stirling pour certaines familles de graphes

Préparé par :

- Malouci maissa
- Namous anfel

Soutenu devant le jury

Azi Mourad	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Bazeniari Abdelghafour	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
BOUFELGHA Ibrahim	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire :2024/2025



Nous remercions tout d'abord le dieu tout puissant « Allah » ; que nul ne peut se faire sans son désir ; de nous avoir guidé vers le droit chemin.

*Nos sincères remerciements et nos profondes reconnaissance vont à notre directeur de thèse **Dr. Abdelghafour Bazeni**. Nous tenons à lui exprimer toutes notre gratitude pour le bout de chemin qu'on a mené ensemble depuis la graduation, jusqu'à l'écriture de ces lignes.*

*Nos sincères remerciements sont adressés aux membres du jury : **Dr. Mourad Azi** et **Dr. Ibrahim Boufelgha**, pour avoir accepté et pris le temps de juger notre travail.*

Nous remercions également tout le personnel de l'institut de Mathématiques et Informatique, ainsi qu'à toutes l'équipe du département de mathématiques.

Nous n'oublions pas de remercier tous nos camarades et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin de ce travail.



Merci, Dieu tout-puissant

A mon Père RAfik source du courage et du force

A ma Mère Nadia source de vie

A mes soeur Rania et Isra source de joie et de bonheur

*A mes proches : Anfel , wissam, romaissa, habolbi alaa et ma tante Hayat et
ses filles*

sans oublier beau-frère amir

*A la personne que je tiens le plus, je te remercie profondément pour ton
soutien, tes prières et tout ce que tu as fait pour moi*

A toute ma famille

A tous mes amis

A mon encadreur : Abdelghafour Bazénair

Je dédie ce travail pour moi-même

MASSA



Merci, Dieu tout-puissant

*Aux personnes les plus chères à mon cœur Mes Parents, source d'amour, de
courage et d'encouragement*

A mes sœurs Soundous et Maya source de joie et de bonheur

Et A mes frères Chihabe, Tito et Aous

A Ma tante maternelle Imane , son mari Moustafa et ses enfants

Chakib, Takwa et Fadwa

A mes proches : Maïssa , Rayan et A mon personne proche

*je te remercier profondément pour ton soutien, tes prières et tout ce que tu as
fait pour moi*

A tous ceux qui m'aiment

A toute ma famille

A tous mes amis

A mon encadreur : Abdelghafour Bazénair

Je dédie ce travail pour moi-même

Anfel

Table des matières

Introduction générale	1
1 Nombres de stirling	3
1.1 Outils de base de la combinatoire	4
1.1.1 Factorielle, factorielles croissantes et décroissantes	4
1.1.2 Le coefficient binomial	5
1.1.3 Formule du binôme de Newton	6
1.1.4 Arrangement	7
1.1.5 Permutation	7
1.1.6 Partition et partition en listes	9
1.2 Nombres de Stirling de première espèce	11
1.2.1 Relations de récurrence	13
1.2.2 Fonctions génératrices	15
1.3 Nombre de Stirling de deuxième espèce	16
1.3.1 Relation de récurrence	18
1.3.2 Séries génératrices	20
1.4 Interprétations combinatoires	22

1.4.1	Stirling de première espèce	22
1.4.2	Stirling de deuxième espèce	23
1.5	Nombre de Bell	25
1.5.1	Relation de récurrence	25
2	Graphes Spécifiques	27
2.1	Quelques rappels sur la théorie des graphes	27
2.1.1	Définitions préliminaires et notations	28
2.1.2	Quelques types de graphes	30
2.2	Opérations sur deux graphes	35
3	Nombres de stirling et graphes	39
3.1	Notions de base	40
3.1.1	Notations	40
3.2	Illustration et représentation de certaines identités	42
3.3	Le polynôme chromatique	49
3.3.1	Application de polynôme Chromatique	54
3.4	Nombres de Bell et de Stirling pour les graphes	55
3.5	Polynôme de Tutte	57
3.5.1	Récursion des polynômes de Tutte	58
3.6	Nombre de stirling de première espèce pour les graphe	60
3.7	Le nombre de stirling du première espèce pour les graphes de base	62
	Conclusion générale	76
	Bibliographie	77

Table des figures

1.1	3-partition de [4].	11
2.1	Un Chemin p_6	29
2.2	Un cycle c_6	29
2.3	Graphe simple.	30
2.4	Graphe multiple.	30
2.5	Graphe non orienté.	31
2.6	Graphe orienté.	31
2.7	Graphe complet k_5	31
2.8	G et H sont isomorphes.	32
2.9	Graphe G	33
2.10	Le complémentaire de G	33
2.11	Graphe biparti complet $k_{3,3}$	33
2.12	Graphe de roue w_7	34
2.13	Graphe éventail F_6	34
2.14	La jonction de G et H	35
2.15	Le produit cartésien de G et H	36

2.16	Le produit fort des graphes p_2 et p_3 .	36
2.17	La jonction de k_1 et C_4 forme le graphe de roue W_5 .	37
2.18	La jonction de k_1 et p_4 forme le graphe de roue F_4 .	37
2.19	Coloration en trois couleurs.	38
3.1	Soustraction, Contraction et Addition d'un graphe G .	41
3.2	Graphe biparti $k_{3,3}$ en 2 sous graphes complets.	43
3.3	Graphe c_5 .	43
3.4	Graphe c_3 en 2 cycles.	44
3.5	Graphe roue w_5 .	44
3.6	Graphe w_5 en 2 partitions.	45
3.7	Graphe éventail F_5 .	45
3.8	Graphe F_5 en 2 partitions.	45
3.9	Graphe independant E_4	46
3.10	Graphe independant E_4 en 2 partitions.	46
3.11	Graphe G a 5 sommets.	48
3.12	Coloration d'un graphe simple P_3 .	50
3.13	Coloration d'un graphe complet K_3 .	50
3.14	Graphe simple G .	51
3.15	Les graphes correspondants $G - e$ et G/e .	51
3.16	Graphe G .	52
3.17	Les étape de construction du polynôme chromatique.	53
3.18	Exemple 2 pour Les étape de construction du polynôme chromatique.	54
3.19	La fonction génératrice de partition stable d'un graphe $A(G, \alpha)$.	57

3.20	Contraction et Suppression	58
3.21	Algorithem de suppression,contraction pour un graphe avec 5 sommets	59
3.22	Graphe complet k_4	63
3.23	Graphe chaîne P_5	65
3.24	Graphe cycle c_5	66
3.25	Graphe biparti complet $k_{3,3}$	68
3.26	Graphe cycle C_7	71
3.27	L_n et L_n^*	74
3.28	Graphe chemins P_6	74

Liste des tableaux

1.1	Triangle de Pascal.	6
1.2	Les nombres de stirling de première espèce.	15
1.3	Les nombres de stirling de deuxième espèce.	20
1.4	Les premières valeurs de B_n	25

Introduction générale

La combinatoire, avec ses racines anciennes et son développement moderne, est une branche des mathématiques riche et diversifiée. Elle joue un rôle essentiel dans la résolution de problèmes liés aux structures discrètes et aux arrangements finies. Les principaux sujets de la combinatoire incluent la théorie des graphes, la théorie des ensembles, la théorie des permutations et combinaisons [42].

Les nombres de Stirling sont des concepts fondamentaux en mathématiques combinatoires et en théorie des nombres. Ils portent le nom du mathématicien écossais *James Stirling*, qui les a étudiés au 18^{me} siècle. La première apparition des nombres de Stirling revient au livre *Méthodus Differentialis* [43]. Ensuite, *Jordan* a présenté un travail sur les différences finies dont il a fourni un compte rendu détaillé de ces nombres. Puis, *Laplace* et *Cauchy* ont établi plusieurs estimations approximatives pour ces nombres. Arrivant, au *Cauchy* et *Nielsen* et plein d'autres chercheurs qui ont étudièrent plus profondément les nombres de Stirling des différents types [15, 34].

Un graphe est une structure discrète constituée d'un ensemble de sommets, interconnecter par un ensemble d'arrêtes ou d'arcs. OÙ 18^{me} siècle *Euler* a posé le premier problème dans la théorie des graphes connu sous le nom *des sept points de Königsberg* ou *le problème de coloriage de cartes*. Parmi les problèmes les plus importants et plus étudiés en théorie des graphes sont les problèmes de domination, les problèmes de coloration et les problèmes de noyau dans les graphes.

Une forte combine existe entre les nombres de Stirling et les graphes surtout pour les notions de combinaisons, de permutations et de partitions. Par exemple, les nombres de Stirling peuvent être utilisés pour compter le nombre de façons de coloriage d'un graphe

donné avec certain nombre de couleurs tout en respectant certaines contraintes.

Notre travail est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduit quelques notions de bases qui permet de mieux comprendre le contenu des chapitres qui suivent. On commence par donner un aperçu globale sur les partitions et les permutations. Ensuite, on aborde la théorie des nombres de Stirling de première espèce $[n_k]$ et de deuxième espèce $\{n_k\}$. Leurs interprétations combinatoires et des propriétés élémentaires sont présentées, ainsi que des relations de récurrences, des fonctions génératrices et des formules explicites.

Le deuxième chapitre comporte quelques rappels sur la théorie des graphes qui seront utilisées dans le chapitre qui suit. On introduit quelques définitions et notions des graphes, quelques types des graphes avec des exemples explicatifs. Il est enrichit par des notions sur des opérations graphiques.

Dans le dernière chapitre, on aborde en premier lieu un travail [27] qui étudier le nombre de partitions d'ensemble de sommets d'un graphe G dont les blocs sont des ensembles indépendants. Le nombre de ces partitions avec k blocs est le nombre de Stirling (graphique) $S(G, k)$ de G . En deuxième lieu, on présente un autre travail [4] qui étudier les nombres de Stirling de la première espèce pour certains types de graphes, tels que les chemins, les cycles, les graphes bipartis complets, les roues et les éventails.

1

Nombres de stirling

Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter les concepts de base pour la compréhension du reste de ce travail. En premier lieu, on aborde quelques familles d'objets combinatoires tels que les partitions, les permutations et les arrangements, accompagnés par des exemples explicatifs pour chaque concept. Ensuite, on introduit les principes de quelques nombres connus à savoir les coefficients binomiaux. En second lieu, on présente la théorie des nombres de Stirling de première espèce et de deuxième espèce. On y montre leurs relations de récurrences, les fonctions génératrices et les formules explicites, ainsi que leurs interprétations combinatoires. On termine par un bref aperçu sur les nombres de Bell et leurs relations avec les Stirling.

1.1 Outils de base de la combinatoire

Les outils de base de la combinatoire permettent de résoudre des problèmes de dénombrement, de sélection et d'organisation d'objets discrets. Le lecteur est invité à consulter la documentation [7, 12, 35, 2].

1.1.1 Factorielle, factorielles croissantes et décroissantes

Definition 1.1.1 Soient x un nombre réel et n un entier positif, la factorielle croissantes de x d'ordre n est définie par :

$$x^{\bar{n}} = \begin{cases} x(x+1)\dots(x+n-1), & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

Aussi, on appelle factorielle croissantes de x de coefficient α ($\alpha \in \mathbb{N}$) et d'ordre n le polynôme :

$$(x|\alpha)^{\bar{n}} = \begin{cases} x(x+\alpha)\dots(x+(n-1)\alpha), & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

Definition 1.1.2 La factorielle décroissantes de x d'ordre n est définie par :

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-1)\dots(x-n+1), & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

Et de coefficient α par :

$$(x|\alpha)^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-\alpha)\dots(x-(n-1)\alpha), & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

Remarque 1.1.1 A noter que, pour $x = 1$ dans l'équation (1.1) ou pour $x = n$ dans l'équation (1.3), on obtient la fonction factorielle (classique),

$$1^{\bar{n}} = n^{\underline{n}} = n!.$$

1.1.2 Le coefficient binomial

Le coefficient binomial, également connu sous le nom de nombre combinatoire, est un concept fondamental en combinatoire qui joue un rôle central dans de nombreux problèmes de dénombrement. Il est souvent noté $\binom{n}{k}$ et se lit "n parmi k".

Illustration : Ayant un groupe de n personnes (sans tenir compte de l'ordre des personnes choisis), le nombre de façons de choisir un sous-groupe de k individus est compté par le coefficient binomial qui est défini pour tout nombre réel n et tout entier $k \geq 0$ par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{nk}{k!}. \quad (1.5)$$

Après simplification, quand $1 \leq k \leq n$, on peut écrire

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1}. \quad (1.6)$$

Exemple 1.1.1 Les sous ensembles deux à deux élément de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont :

$$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} \text{ et } \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3.$$

Proposition 1.1.1 Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, on a

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$.
3. Les coefficients binomiaux satisfont une relation de récurrence d'ordre deux :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Démonstration 1.1 — les deux premier ont des démonstrations analytique simple.

— La preuve du troisième se démontre combinatoirement en discutant le cas de la n^{eme} personne : si elle est sélectionnée, il reste à choisir $k-1$ autres personnes depuis les $n-1$ personnes restantes. Ainsi, nous avons $\binom{n-1}{k-1}$ façons de le faire. Sinon, elle n'est pas sélectionnée et donc on choisit k individus parmi les $n-1$ restants. Ce qui se fait de $\binom{n-1}{k}$ façons.

A partir de la relation de récurrence, nous pouvons construire le triangle de Pascal suivant.

n k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

TABLE 1.1 – Triangle de Pascal.

1.1.3 Formule du binôme de Newton

Théorème 1.1.1 Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(a + b)^n$ appelés relation du binôme de Newton, où a et b sont des nombres réels ou complexes. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \quad (1.7)$$

pour les premières valeurs de n , on obtient :

$$(a+b)^0=1.$$

$$(a+b)^1=a+b.$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

.

.

.

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Remarque 1.1.2 Pour $a = b = 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

ce que démontre que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n .

1.1.4 Arrangement

Definition 1.1.3 Soit $[n] := \{1, \dots, n\}$, on appelle arrangement de k éléments, toute suite de k éléments distincts de $[n]$.

Example 1.1.2 Soit $[6] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $K = 3$, on a

- $(2, 5, 7)$ est un arrangement de trois éléments.
- $(5, 7, 2)$ ou $(7, 2, 5)$ n'est pas une arrangement.

Proposition 1.1.2 Le nombre d'arrangements de $[k]$ dans $[n]$ est compté par la factorielle descendante $x^{\underline{k}}$. Lorsque $k = n$, on parle alors d'une "permutation" (bijection).

1.1.5 Permutation

Les permutations sont un concept fondamental en combinatoire, traitant de l'arrangement des éléments d'un ensemble dans un ordre spécifique. Pour plus de détails voir [7, 12, 20, 11, 51].

Definition 1.1.4 Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle permutation toute bijection σ de $[n]$ dans $[n]$. Une permutation σ_n peut être représentée par la forme matricielle :

$$\sigma_n = \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

1. Le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ est $n!$.
2. La notation standard d'une permutation place sur une première ligne les éléments dans leur ordre naturel et sur une deuxième ligne les images correspondantes.

Exemple 1.1.3 Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Le nombre de permutations est $4! = 24$.

$$[4] = \{1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, \\ 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, \\ 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, \\ 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321\}.$$

Exemple 1.1.4 Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et l'application σ telle que $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(4) = 1$, et $\sigma(3) = 3$. L'application σ est une permutation de E ,

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definition 1.1.5 Un élément i de $[n]$ est appelé point fixe si son image par la permutation σ est lui-même, c'est à dire $\sigma(i) = i$. Aussi, une orbite de i notée O_i est l'ensemble des images de i obtenues en appliquant successivement la permutation σ sur l'élément i .

Exemple 1.1.5 Soit la permutation :

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. L'élément 7 est un point fixe.
2. L'orbite de l'élément 1 est $O_1 = [1, \sigma(1) = 3, \sigma^2(1) = 4]$. Remarquez que $O_1 = O_3 = O_4$.
3. Ces éléments $\{1, 3, 4\}$ pris dans cet ordre, forment un cycle noté $(1, 3, 4)$ où chaque élément est l'image du précédent par σ (1 est l'image de 4, 3 est l'image de 1 etc).

Definition 1.1.6 A partir d'un orbite à p éléments, on peut constituer $(p - 1)!$ cycles. On peut alors écrire une permutation σ comme un produit de cycles.

Exemple 1.1.6 Pour l'exemple précédent $\sigma_8 = (1, 3, 4)(2, 8, 5, 6)(7)$ est une représentation de la permutation $[8]$ en 3-cycles.

Remarque 1.1.3 1. Compter le nombre d'injections de $[k]$ dans $[n]$ peut se réduire à considérer tous les sous-ensembles S de cardinal k de $[n]$ et on a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles. Puis à considérer toutes les permutations (bijections) de $[k]$ dans S et on a $k!$ permutations. d'où,

$$(n)^k = \binom{n}{k} k!.$$

2. Le nombre de permutations de $[n]$ composées de k cycles disjoints égale au nombre de Stirling de première espèce $S(n, k)$.

1.1.6 Partition et partition en listes

Definition 1.1.7 Une partition ou un partage de l'entier n est une suite décroissante d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ tels que ,

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1, \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = n. \end{cases} \quad (1.8)$$

Où les éléments $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont les parts de la partition.

En plus, on peut donner quelques notations,

1. $\lambda \vdash n$: dire que λ est un partage de n .
2. $l(\lambda)$: la longueur de la partition λ .
3. $P(n)$: l'ensemble de partition de n .
4. $P(n, k)$: le nombre de part de la partition.

Example 1.1.7 L'ensemble de partitions de l'entier 5 est :

$$P(5) = \{5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111\}.$$

1. En plus, $(3, 2)$ est une partition de 5 (car $2 + 3 = 5$) et $(32, 311)$ sont des parts.
2. Les différents nombres de parts le la partition sont :

$$P(5, 1) = 1, P(5, 2) = 2, P(5, 3) = 2, P(5, 4) = 1, P(5, 5) = 1.$$

Definition 1.1.8 Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Un bloc (ou part) P de $[n]$ est un sous-ensemble non vide de $[n]$.
- Une partition π de $[n]$ est une famille de blocs P_1, \dots, P_k disjointes deux à deux, telles que $\cup_{i=1}^k P_i = [n]$.

Exemple 1.1.8 Soit l'ensemble $[3] = \{1, 2, 3\}$, les partitions de $[3]$ en blocs sont :

$$\{\{1\}\{2\}\{3\}\}, \quad \{\{1, 2\}\{3\}\}, \quad \{\{1, 3\}\{2\}\}, \quad \{\{2, 3\}\{1\}\}, \quad \{1, 2, 3\}.$$

Aussi, on appelle k -partition toute partition de $[n]$ en k parts .

Definition 1.1.9 On appelle par une liste ℓ de $[n]$ est un sous-ensemble non vide ordonné de $[n]$. Une partition en liste \wp de $[n]$ est une famille de liste ℓ_1, \dots, ℓ_k disjointes deux à deux telles que $\cup_{i=1}^k \ell_i = [n]$.

Exemple 1.1.9 : Soit l'ensemble $[3] = \{1, 2, 3\}$, les partitions en listes possibles de $[3]$ sont :

$$\begin{aligned} & \{[1, 2, 3]\}, \quad \{[1, 3, 2]\}, \quad \{[2, 1, 3]\}, \quad \{[2, 3, 1]\}, \quad \{[3, 1, 2]\}, \quad \{[3, 2, 1]\}. \\ & \{[1, 2] [3]\}, \quad \{[1, 2] [3]\}, \quad \{[1, 3] [2]\}, \quad \{[3, 1] [2]\}, \quad \{[3, 2] [1]\}, \quad \{[3, 2] [1]\}, \quad \{[1] [2] \\ & \quad [3]\}. \end{aligned}$$

Exemple 1.1.10 Les 3-partitions de $[4]$ sont :

$$\{\{1, 4\}\{2\}\{3\}\}, \quad \{\{1\}\{2, 4\}\{3\}\}, \quad \{\{1\}\{2\}\{3, 4\}\}, \quad \{\{1, 3\}\{2\}\{4\}\}, \quad \{\{1\}\{2, 3\}\{4\}\}, \quad \{\{1, 2\}\{3\}\{4\}\}.$$

Notez qu'une k -permutation peut être considérée comme un partitionnement de $[n]$ en k cycles.

Les nombres de Stirling, nommés d'après le mathématicien écossais James Stirling (1692 – 1770), sont des outils importants en combinatoire. Ils apparaissent dans deux formes principales : les nombres de Stirling de première espèce et ceux de deuxième espèce. Ces nombres ont été étudiés pour leur capacité à représenter des partitions et des permutations avec des cycles particuliers. Aujourd'hui, les nombres de Stirling sont utilisés dans divers domaines tels que l'algèbre, la théorie des nombres, la physique statistique, et l'informatique. Ils apparaissent dans l'étude des polynômes de Bell, des fonctions génératrices et des processus stochastiques.

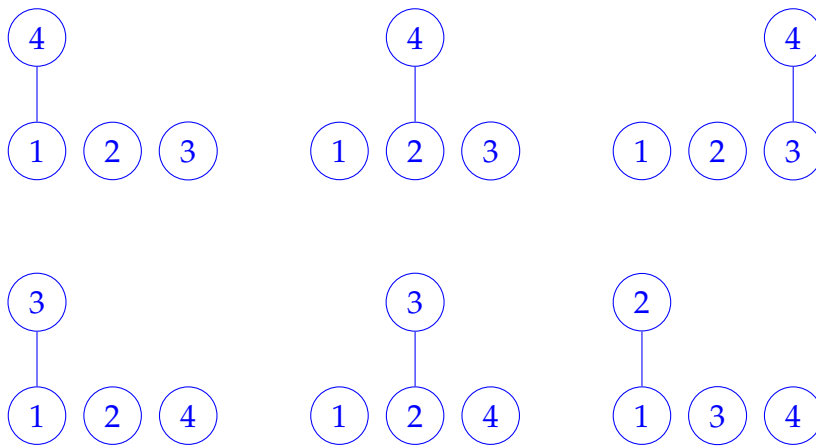


FIGURE 1.1 – 3-partition de [4].

1.2 Nombres de Stirling de première espèce

Les nombres de Stirling de première espèce offrent une richesse de structures combinatoires et d'applications, et leur étude contribue dans la théorie et la pratique des mathématiques discrètes.

Définition 1.2.1 *Les nombres de Stirling de première espèce (signés et non-signés).*

- Les nombres de Stirling de première espèce signés comptent le nombre de permutations de n éléments se décomposant en k cycles disjoints. qui sont les coefficients du développement de

$$x^n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) = \sum_{k=0}^n s(n,k)x^k. \quad (1.9)$$

- Les nombres de Stirling de première espèce non signés $|s(n,k)|$ (valeurs absolues des précédents) sont les coefficients du développement de la factorielle croissante $(x)^n$, c'est-à-dire que

$$x^{\bar{n}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-n-1) = \sum_{k=0}^n |s(n,k)|x^k. \quad (1.10)$$

Remarque 1.2.1 *Dans la littérature, on note les nombres de Stirling de première espèce par :*

$$s(n,k) = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right].$$

Exemple 1.2.1

$$x^3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x,$$

d'ou,

$$s(3,0) = 0, \quad s(3,1) = 2, \quad s(3,2) = (-3), \quad s(3,3) = 1.$$

Proposition 1.2.1 Les nombres de Stirling de première espèce signés et non-signés sont liés par la relation suivante :

$$s(n,k) = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Proposition 1.2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

1. $s(n,0) = 0$ et $s(n,n) = 1$.
2. $s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.
3. $\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$.
4. $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$.

Démonstration 1.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Les nombres $s(n,0)$ et $s(n,n)$ sont respectivement les coefficients de x^0 et de x^n dans le développement du polynôme

$$x^n = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

Il est bien clair que ces coefficients sont respectivement 0 et 1, comme il fallait le prouver.

2. Le nombre $s(n,1)$ est par définition le coefficient de x dans le développement du polynôme

$$x^n = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

Ce qui est aussi le coefficient constant du polynôme $(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$. Ce coefficient est simplement la valeur de ce dernier polynôme en 0, c'est donc égale à $(-1)(-2)\dots(-n+1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. D'où $s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, comme il fallait le prouver.

3. On montre par induction en n . Pour $n = 0$ trivial $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 = 0!$. On suppose que la propriété

est vraie pour n , c'est à dire $\sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = n!$, et on va la montrer pour $n + 1$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \right), \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + n \sum_{k=0}^{n+1} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right], \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + n \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right], \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] + n \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right], \\ &= n! + n(n)!, \\ &= (n+1)!. \end{aligned}$$

4. Pour compter ces permutations, nous avons seulement besoin de choisir les 2 éléments dans $\{1, 2, \dots, n\}$, qui vont partager un cycle tandis que les autres sont représenté par un cycle singleton. Ainsi

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right].$$

1.2.1 Relations de récurrence

Soit $n, k \in \mathbb{N}$. Les nombres de stirling de première espèce signés et non signés vérifient le relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k), \quad 1 \leq k \leq (n-1). \quad (1.12)$$

$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n+1 \\ k-1 \end{matrix} \right] + n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right], \quad k \geq 1. \quad (1.13)$$

avec $\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = \delta_{n,0}$, où δ le symbole de Kronecker. Et pour $n \neq 0$ $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = 0$ lorsque $k \notin [n]$.

Chacune des deux relations de récurrence peut se déduire de l'autre. De plus, la première découle de la relation de récurrence des factorielles décroissantes et des factorielles croissantes,

$$(x)_{n+1} = x(x)_n - (n)(x)_n, \quad (1.14)$$

$$(x)^{n+1} = x(x)^n + (n)(x)^n. \quad (1.15)$$

Démonstration 1.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a d'une part,

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k)x^k = x^{n+1} + \sum_{k=1}^n s(n+1, k)x^k,$$

Car $s(n+1, 0) = 0$ et $s(n+1, n+1) = 1$. En suite

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x(x-1)\dots(x-n+1)(x-n) = (x-n)x^n, \\ &= (x-n) \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k, \\ &= x \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k - n \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k, \\ &= \sum_{k=0}^n s(n, k)x^{k+1} - \sum_{k=0}^n ns(n, k)x^k, \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} s(n, k-1)x^k - \sum_{k=0}^n ns(n, k)x^k, \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n (s(n, k-1) - ns(n, k))x^k, \end{aligned}$$

Car $s(n, 0) = 0$ et $s(n, n) = 1$.

En identifiant les coefficients de x^k ($k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$) des deux expressions que l'on a trouvé pour x^{n+1} , on aboutit à,

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k).$$

qui n'est rien d'autre que (1.12).

Etant donnés $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, l'identité (1.13) s'obtient en multipliant les deux nombres de (1.12) par $(-1)^{n+k+1}$ et en se rappelant que le signe de $s(a, b)$ est $(-1)^{a+b}$ ($\forall a, b \in \mathbb{N}, a \geq b$) en vertu de la Proposition (1.2.1). Ceci achève notre démonstration.

Ils satisfont aussi une relation de récurrence verticale,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \sum_{i=k}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

En se servant de la relation de récurrence, on peut dresser les nombres de stirling de première espèce dans un triangle (infini) du même type que le triangle arithmétique de Pascal des coefficients binomiaux.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

TABLE 1.2 – Les nombres de stirling de première espèce.

Dans ce triangle, chaque ligne de rang $n \geq 1$ commence par un 0 et se termine par un 1 et ses coefficients du milieu s’obtiennent par la relation récurrence en fonction des coefficients de la ligne qui la précède. Par exemple, le nombre 15 de la 6^{ème} ligne est obtenu par la formule $10 + 5 \times 1$ (où les nombres 10 et 1 proviennent de la 5^{ème} ligne).

1.2.2 Fonctions génératrices

Les fonctions génératrices sont des outils puissants en combinatoire pour manipuler et étudier des suites de nombres. Elles permettent de transformer des problèmes de comptage en problèmes d’analyse, facilitant ainsi leur résolution. Pour les nombres de Stirling de première espèce, il existe des fonctions génératrices ordinaires et exponentielles.

La fonction génératrices ordinaire (OGF) pour les nombres de Stirling de première espèce n’est pas simple en raison de la complexité de leur définition. On peut la donner sous la forme,

$$\sum_{n \geq k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!} \ln^k(1 - x). \quad (1.17)$$

La fonction génératrice exponentielle (EGF) est plus couramment utilisée pour les nombres

de Stirling de première espèce. On peut la donner sous la forme,

$$\sum_{n,k \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{k!} y^k = \frac{1}{(1-x)^y}. \quad (1.18)$$

Ces deux fonctions facilitent l'étude des propriétés des nombres de Stirling de première espèce.

Il existe des formules explicites pour ces nombres, bien qu'elles soient souvent plus complexes que les formules de récurrence. Parmi elles, on peut donner une qui est souvent utilisée dans la littérature à savoir,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n. \quad (1.19)$$

On peut interpréter cette formule comme suit,

- $\binom{k}{j}$: Ils comptent le nombre de façons de choisir j éléments parmi k .
- $(-1)^j$: Les signes alternés résultent de l'application du principe d'inclusion-exclusion.
- $(k-j)^n$: Représentent les arrangements de n éléments dans $k-j$ cycles.

1.3 Nombre de Stirling de deuxième espèce

La notation et la formalisation des nombres de Stirling de deuxième espèce ont été normalisées au *XIXe* siècle. La notation $S(n, k)$ est maintenant universellement acceptée pour désigner le nombre de Stirling de deuxième espèce.

Definition 1.3.1 Les nombres de Stirling de deuxième espèce noté $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, comptent le nombre de K -partitions de l'ensemble $[n]$. Ils apparaissent lors de l'expression du monôme x^n dans la base des moments factoriels décroissants x^k ,

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^k. \quad (1.20)$$

Exemple 1.3.1 L'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ possède 7 partitions en deux sous-ensembles non vides,

$$\{1, 2, 3\}\{4\}, \{1, 2, 4\}\{3\}, \{1, 3, 4\}\{2\},$$

$$\{2, 3, 4\}\{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}\{2, 4\}, \\ \{1, 4\}\{2, 3\}.$$

Proposition 1.3.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

1. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$ et $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$.
2. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$.
3. $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Démonstration 1.4 Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, d'après (1.20) on a,

$$x^n = \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}x + \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}x(x-1) + \dots + \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}x(x-1)\dots(x-n+1). \quad (1.21)$$

1. En prenant $x = 0$ dans (1.21), on obtient immédiatement :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0. \quad (1.22)$$

Par la suite, en substituant $S(n, 0)$ dans (1.21), puis en divisant par x , on obtient :

$$x^{n-1} = \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}(x-1) + \dots + \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1). \quad (1.23)$$

En prenant dans cette dernière $x = 1$, on obtient :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1. \quad (1.24)$$

Enfin, l'identification des coefficients dominants des polynômes du membre de gauche et du membre de droite de (1.21) donne directement :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1. \quad (1.25)$$

2. En substituant $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}$ par leur valeurs dans (1.21), on obtient :

$$x^n = x + \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}x(x-1) + \dots + \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}x(x-1)\dots(x-n+1). \quad (1.26)$$

En prenant $x = 2$ dans cette dernière, on obtient :

$$2^n = 2 + 2 \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}. \quad (1.27)$$

D'où l'on tire :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1. \quad (1.28)$$

3. L'identification des coefficients de x^{n-1} dans les deux membres de l'identité (1.21) donne :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} (1 + 2 + \dots + (n-1)) = 0. \quad (1.29)$$

Puisque $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$, il en résulte que :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (1.30)$$

1.3.1 Relation de récurrence

Les nombres de Stirling de deuxième espèce ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (1.31)$$

Avec $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = \delta_{n,0}$, et pour $n \neq 0$ lorsque $k \notin [n]$.

Ils ont aussi, une relation de récurrence verticale,

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{i=k}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (1.32)$$

Démonstration 1.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On part de l'identité triviale,

$$x^n = x \cdot x^{n-1},$$

dans laquelle on substitue x^n et x^{n-1} par leurs expressions dans la base $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[x]$. On obtient,

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k = x \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} (x \cdot x^k),$$

et comme,

$$x \cdot x^k = (x - k)x^k + kx^k = x^{k+1} + kx^k,$$

il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} (x^{k+1} + kx^k), \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^k, \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^k + \sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^k. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k = x \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^k + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^n.$$

En identifiant les coefficients des x^k ($1 \leq k \leq n-1$) dans les deux membres de cette dernière identité, on obtient la formule récurrente recherchée.

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}, \quad (k \in 1, \dots, n-1).$$

La démonstration est achevée.

En se servant de la relation récurrente (1.31), on donne le tableau des premières valeurs des nombres de Stirling de deuxième espèce.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

TABLE 1.3 – Les nombres de stirling de deuxième espèce.

1.3.2 Séries génératrices

La fonction génératrice ordinaire (OGF) pour les nombres de Stirling de deuxième espèce $S(n, k)$ est une série formelle qui exprime ces nombres en termes de puissances de x . Pour un k fixe, la OGF est définie comme suit :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}. \quad (1.33)$$

La fonction génératrice exponentielle (EGF) pour les nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}. \quad (1.34)$$

La série génératrice exponentielle double est :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k = \exp(y(e^x - 1)). \quad (1.35)$$

Deux formes explicites des nombres de Stirling de deuxième espèce :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \frac{1}{i_1! \dots i_k!}. \quad (1.36)$$

Et une formule impliquant des coefficients binomiaux :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{k!} \binom{k}{i} i^n. \quad (1.37)$$

Les nombres de stirling de première espèce s'expriment en termes des nombres de stirling de deuxième espèce par la relation suivante dite de Schlomilch,

$$\left[\begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right] = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} \binom{n+2k}{k+i} \binom{n+k+i-1}{k+i} \left\{ \begin{matrix} k+i \\ i \end{matrix} \right\}. \quad (1.38)$$

Ils vérifient aussi les relations d'orthogonalités suivantes :

$$\sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} \left[\begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} \binom{i}{k} = \delta_{n,k}. \quad (1.39)$$

Les nombres de stirling des deux espèces sont des fonctions symétriques élémentaires

$$\left[\begin{matrix} n \\ n-m \end{matrix} \right] = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m < n} i_1 i_2 \dots i_m. \quad (1.40)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+m \\ n \end{matrix} \right\} = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n} i_1 i_2 \dots i_m. \quad (1.41)$$

Au XXe siècle, les nombres de Stirling de deuxième espèce ont trouvé des applications dans divers domaines :

1. Informatique : Utilisés dans les algorithmes de partitionnement et la théorie de l'information.
2. Physique statistique : Pour modéliser les systèmes de particules et les distributions de probabilité.
3. Théorie des nombres : Dans l'étude des partitions et des fonctions génératrices.
4. Algèbre et analyse combinatoire : Pour résoudre des problèmes de dénombrement et d'organisation des ensembles.
5. Problème de k -partitionnement : Compter le nombre de manières de partitionner un graphe en k sous-ensembles non vides est directement lié à $S(n, k)$, où n est le nombre de sommets du graphe.

1.4 Interprétations combinatoires

Les nombres de Stirling de première espèce, notés $s(n, k)$, comptent le nombre de permutations de n éléments ayant exactement k cycles. Les nombres de Stirling de deuxième espèce, notés $S(n, k)$, comptent le nombre de façons de partitionner un ensemble de n éléments en k sous-ensembles non vides. Les deux types de nombres de Stirling sont liés par la formule de somme de Stirling de première espèce, qui exprime $S(n, k)$ comme une somme de produits de $s(n, i)$ pour i allant de 0 à k . Les nombres de Stirling de première espèce peuvent également être interprétés comme des coefficients dans la formule de changement de base pour les polynômes de Bernoulli. Les nombres de Stirling de première espèce sont également appelés nombres de permutations signées, et les nombres de Stirling de deuxième espèce sont également appelés nombres de partitions non ordonnées.

1.4.1 Stirling de première espèce

Dans cette section, on étudie les propriétés élémentaires des nombres de Stirling de première espèce (non signé) ainsi que leur interprétation combinatoire. On sait que le nombre de permutations de $[3]$ est 6, comme il est montré au dessous,

$$[3] = \{123, 132, 213, 312, 231, 321\}.$$

Maintenant, cherchant une autre configuration qui consiste à déterminer tous les cycles possibles de $[3]$,

$$(123)(132), \quad ((1)(23))((12)(3)), \quad ((13)(2))((1)(2)(3)).$$

$$1\text{cycle}, \quad 2\text{cycles}, \quad 3\text{cycles}.$$

L'exemple précédent peut se généraliser sur k cycles de $[n]$.

Definition 1.4.1 Soit $n, k \in \mathbb{N}$. $s(n, k)$ désigne le nombre de permutations de $[n]$ décomposés en k cycles disjoints. Ce nombre $s(n, k)$ est appelé le nombre de Stirling de première espèce.

Exemple 1.4.1 Prenons $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et σ la permutation des éléments de A , donnée par

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Les σ -cycles de A sont $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 5\}$ et $\{6\}$, ainsi A contient exactement 3-cycles.

Maintenant, on va démontrer la récurrence de Stirling de première espèce de manière combinatoire.

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + (n - 1)S(n - 1, k). \quad (1.42)$$

Pour prouver la récurrence, nous devons montrer que chaque permutation de n éléments avec k cycles peut être obtenue de deux manières distinctes correspondant aux termes $n \cdot s(n - 1, k)$ et $s(n - 1, k - 1)$.

1. Insertion du n -ième élément dans une permutation de $n - 1$ éléments avec k cycles : Chaque cycle a plusieurs "positions" possibles où le n -ième élément peut être inséré. Par exemple, si un cycle est $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$, le n -ième élément peut être inséré avant c_1 , entre c_1 et c_2 , etc., pour un total de n positions dans ce cycle. Ainsi, pour chaque permutation de $n - 1$ éléments avec k cycles, il y a $n - 1$ façons d'insérer le n -ième élément pour obtenir une permutation de n éléments avec k cycles. Cela donne un total de $n \cdot s(n, k)$ permutations.
2. Ajout du n -ième élément comme un nouveau cycle : En ajoutant le n -ième élément comme un nouveau cycle, nous augmentons le nombre total de cycles de 1, passant ainsi de $k - 1$ à k . Ainsi, il y a exactement $s(n - 1, k - 1)$ façons de créer une permutation de n éléments avec k cycles en ajoutant un nouveau cycle constitué du seul élément n .

1.4.2 Stirling de deuxième espèce

Pour donner une idée global, on a cette arrangement de $\{1, 2, 3\}$ en blocs, c'est -à- dire le nombre de façons de partitionné un ensemble de n élément en k sous ensemble non vides ou blocs.

Par exemple, considérons un ensemble avec 3 éléments $\{A, B, C\}$. Le nombre de stirling $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\}$

indique qu'il existe 3 façons de partitionner cet ensemble en 2 blocs non vides :

$$\{\{A\}, \{B, C\}\}, \{\{A, B\}, \{C\}\} \text{ et } \{\{A, C\}, \{B\}\}.$$

Chaque partition représente une manière de regrouper les éléments de l'ensemble en blocs distincts, avec chaque élément appartenant exactement à un bloc.

Definition 1.4.2 Les nombres de Stirling de deuxième espèce $S(n, k)$ comptent le nombre de façons de partitionner un ensemble de n éléments en k sous-ensembles non vides.

Maintenant, on va démontrer la récurrence de Stirling de deuxième espèce de manière combinatoire.

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k). \quad (1.43)$$

Il est bien connu que $S(n, k)$ est le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en k sous-ensembles non vides appelés blocs. Pour prouver cette récurrence, nous allons examiner deux cas distincts pour la partition d'un ensemble de n éléments :

1. On peut partitionner $[n - 1]$ en $k - 1$ blocs, et il reste une seule façon pour le dernier entier, dans ce cas c'est le nombre $S(n - 1, k - 1)$.
2. On peut partitionner $[n - 1]$ en k blocs, et il reste k façons pour le dernier entier, dans ce cas c'est le nombre $k \cdot S(n - 1, k)$.

Exemple 1.4.2 Calculons $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right\}$ en se servant uniquement du sens combinatoire des nombres de Stirling de deuxième espèce. Soit N l'ensemble à 5 éléments $N = \{a, b, c, d, e\}$, Les partitions de N en 4 groupes $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ (tous non vides et deux à deux disjoints) sont les suivantes,

$$\begin{aligned} \varphi_1 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{b\}, N_3 = \{c\}, N_4 = \{d, e\}; \\ \varphi_2 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{b\}, N_3 = \{d\}, N_4 = \{c, e\}; \\ \varphi_3 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{b\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{c, d\}; \\ \varphi_4 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{d\}, N_4 = \{b, e\}; \\ \varphi_5 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{b, d\}; \\ \varphi_6 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{d\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{b, c\}; \\ \varphi_7 : N_1 = \{b\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{d\}, N_4 = \{a, e\}; \\ \varphi_8 : N_1 = \{b\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{a, d\}; \\ \varphi_9 : N_1 = \{b\}, N_2 = \{d\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{a, c\}; \end{aligned}$$

$$\varphi_{10} : N_1 = \{c\}, N_2 = \{d\}, N_3 = \{e\}, N_4 = \{a, b\}.$$

Noter que l'ordre des groupes $N_i (1 \leq i \leq 4)$ n'est pas important. Le nombre de partitions de N en 4 groupes est donc égale à 10, d'où $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 10$.

1.5 Nombre de Bell

Le contenu de cette section est tiré du contenu des références suivantes [39, 31].

Definition 1.5.1 Le nombre total de partitions de $[n]$ sur tous les blocs est le nombre de Bell,

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k). \tag{1.44}$$

Les premières valeurs des nombres de Bell sont les suivantes,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975...

TABLE 1.4 – Les premières valeurs de B_n .

Example 1.5.1 $B_0 = 1$, car la seule partition de \emptyset est $\{\emptyset\}$.

$B_1 = 1$, car la seule partition de $\{1\}$ est $\{1\}$.

$B_2 = 2$, car les partitions de $\{1, 2\}$ sont, $\{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1, 2\}\}$.

$B_3 = 5$, car les partitions de $[1, 3]$ sont,

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}.$$

1.5.1 Relation de récurrence

Le nombre de Bell est connu pour sa relation de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k. \tag{1.45}$$

Pour la démontrer, on procède de la manière suivante :

Soit $n > 0$. On veut dénombrer le nombre de partitions différentes de $[1; n + 1]$, pour cela on regarde la partie qui contient l'élément $n + 1$. On note k le nombre d'éléments qui sont dans la même partie que $n + 1$ ($n + 1$ exclu), on a alors k entre 0 et n . Pour choisir ces k éléments, on a $\binom{n}{k}$ choix puisqu'il faut choisir k éléments parmi n . Il reste $n - k$ éléments qu'il faut partitionner.

Par définition de B_n , on a donc B_{n-k} partitions différentes pour les $n - k$ éléments restants. On obtient donc la relation suivante :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k,$$

par changement d'indice et puisque $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

2

Graphes Spécifiques

Introduction

Dans ce chapitre, on parle du domaine de la théorie des graphes. on s'intéresse précisément aux notions de graphes qui interviennent dans l'étude du chapitre qui suit. On commence par les bases : ce qu'est un graphe, ses éléments constitutifs comme les sommets et les arêtes, et comment on peut les utiliser pour représenter des situations et de propriétés des graphes. Ensuite, on aborde quelques concepts fondamentaux, comme les différents types de graphes et les opérations entre graphes.

2.1 Quelques rappels sur la théorie des graphes

En théorie des graphes, différents types de graphes possèdent des propriétés et des structures uniques. Voici quelques rappels sur certains graphes spécifiques couramment

étudiés qui sont utiles pour la compréhension du troisième chapitre. Pour plus de détails voir la documentation [17, 30, 37, 21, 22, 3, 18, 48, 14, 6].

2.1.1 Définitions préliminaires et notations

Nous présentons ici quelques définitions et notions que l'on considère comme étant de base pour comprendre la suite du travail.

Un graphe G est un couple $(V(G), E(G))$ de deux ensembles disjoints. Les éléments de $V(G)$ sont appelés les sommets (vertices) du graphe G et $E(G)$ contient les arêtes (edges) de G . Une arête $e = (u, v)$ entre les sommets u et v peut aussi être notée par uv .

Definition 2.1.1 — On appelle ordre d'un graphe le nombre de ses sommets noté $|V|$.

— On appelle taille d'un graphe le nombre de ses arêtes noté $|E|$.

Definition 2.1.2 Une boucle est un arc (v_i, v_i) , (le sommet v_i est son propre voisin).

Definition 2.1.3 Une chaîne dans $G = (V, E)$, est une suite alternant des sommets et des arêtes, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arête est encadrée par ses extrémités.

On note :

$$(x_0, e_1, x_1, \dots, e_k, x_k),$$

où $k \geq 0$ est un entier, $x_i \in V$, $e_j \in E$, x_i et x_{i+1} sont les extrémités de e_{i+1} . L'entier k est la longueur de la chaîne.

Definition 2.1.4 Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Un chemin p d'un sommet u vers un sommet v est une suite $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_k)$ de sommets tels que $u = s_0, v = s_k$ et $(s_{i-1}, s_i) \in A$. On dira que le chemin contient les sommets s_0, s_1, \dots, s_k et les arcs $(s_0, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_{k-1}, s_k)$, voir la Figure (2.1).

— La longueur du chemin est le nombre d'arcs dans le chemin, c'est-à-dire k .

— Un chemin est élémentaire si les sommets qu'il contient sont tous distincts.

Definition 2.1.5 Un cycle est une chaîne dont les extrémités initiale et terminale coïncident. Un cycle élémentaire est un cycle minimal, au sens de l'inclusion, (ne contenant strictement aucun cycle). Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts voir la Figure (2.2).



FIGURE 2.1 – Un Chemin p_6 .

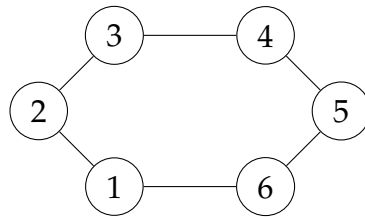


FIGURE 2.2 – Un cycle c_6 .

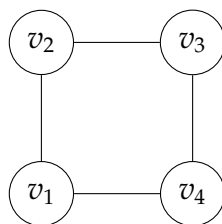
Definition 2.1.6 On appelle cycle hamiltonien d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de G . Un graphe est dit Hamiltonien s'il possède un cycle Hamiltonien.

On appelle chaîne Hamiltonienne d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets de G .

Cycle eulérien : Un cycle qui passe exactement une fois par chaque arête du graphe.

L'ensemble des cycles Hamiltoniens non orienté d'un graphe G , noté $H(G)$, est l'ensemble de tous les cycles Hamiltoniens dans G . Formellement, $H(G)$ est défini comme l'ensemble de tous les cycles Hamiltoniens C dans G .

Dans le graphe suivant :



Il y a un seul cycle Hamiltonien : $(1, 2, 3, 4, 1)$. C'est le seul cycle qui parcourt chaque sommet une fois et revient à son point de départ.

2.1.2 Quelques types de graphes

Il existe plusieurs familles de graphes, nous citons ci-après, quelques familles simples et importantes de graphes, notons que le choix d'un type de graphe dépend du problème à résoudre.

Graphe simple et multiple

Un graphe est simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet. On peut imaginer des graphes avec une arête qui relie un sommet à lui-même (une boucle), ou plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets. On appellera ces graphes des multigraphes. Par exemple :

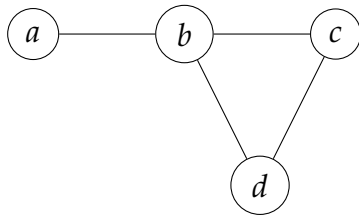


FIGURE 2.3 – Graphe simple.

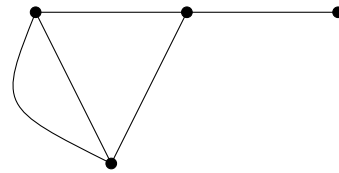


FIGURE 2.4 – Graphe multiple.

sous-graphe

un sous-graphe est un graphe formé à partir d'un autre graphe en sélectionnant un sous-ensemble des sommets et des arêtes de ce graphe. Plus formellement

1. soit $G = (V, E)$ un graphe, où V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arêtes.
2. Un sous-graphe $G' = (V', E')$ est défini par un ensemble $V' \subseteq V$ est un ensemble $E' \subseteq E$ tel que chaque arête de E' a ses extrémités dans V' .

graphe orienté

$G = (V, A)$ est un graphe orienté dont l'ensemble des arcs (arête avec direction) est A . Un arc reliant x à y sera noté (x, y) voir la Figure (2.5).

$G = (V, A)$ est un graphe non orienté dont l'ensemble des arêtes est A . Un arête reliant x à y sera noté (x, y) voir la Figure (2.6).

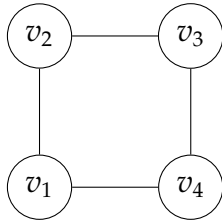


FIGURE 2.5 – Graphe non orienté.

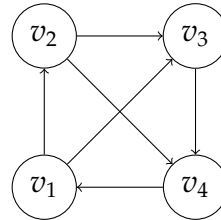


FIGURE 2.6 – Graphe orienté.

Graphe complet

Un graphe complet K_n est un graphe simple où chaque paire de sommets est connectée par une arête. voir la Figure (2.7).

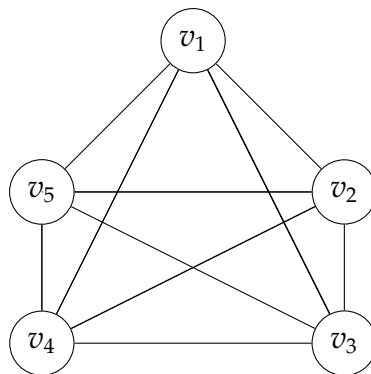


FIGURE 2.7 – Graphe complet k_5 .

Remarque 2.1.1 Dans un graphe complet K_n il existe $(n - 1)!$ cycles hamiltoniens non orienté, car chaque permutation des n sommets forme un cycle hamiltonien.

Graphe isomorphes

Deux graphes H et G sont isomorphes s'il existe une bijection $f : V(H) \rightarrow V(G)$ telle que pour toute paire de sommets (Voir la Figures (2.8)), on a

$$(u, v) \in E(H) \text{ si et seulement si } (f(u), f(v)) \in E(G),$$

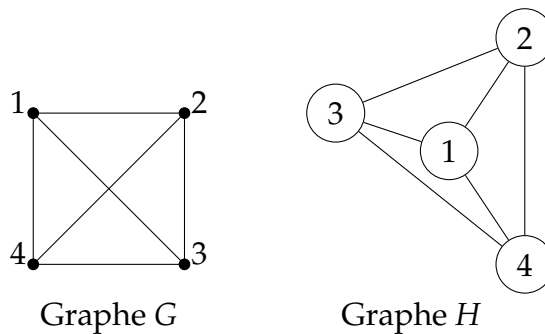


FIGURE 2.8 – G et H sont isomorphes.

Graphe complémentaire

Le complémentaire d'un graphe G est le graphe \bar{G} , ayant le même ensemble de sommets que G , et ayant pour ensemble d'arêtes $(v, u) \in E(\bar{G})$ et $(v, u) \notin E(G)$. $E(\bar{G})$ a exactement les paires de sommets qui ne sont pas des arêtes de G (voir Figures (2.9) et (2.10)).

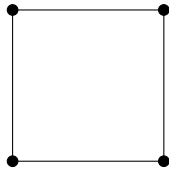


FIGURE 2.9 – Graphe G .

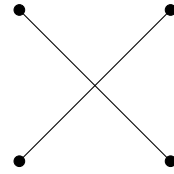


FIGURE 2.10 – Le complémentaire de G .

Graphe biparti

Un graphe biparti $K_{n,m}$ est un graphe dont les sommets peuvent être divisés en deux ensembles disjoints tels que les arêtes ne connectent que des sommets d'ensembles différents, voir la Figure (2.11).

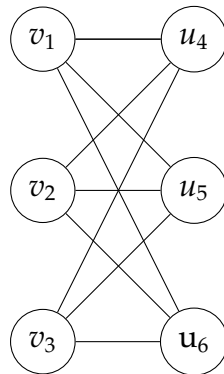


FIGURE 2.11 – Graphe biparti complet $k_{3,3}$.

graphe de roue

Un graphe de roue W_n est un type de graphe qui se compose d'un cycle C_{n-1} (un cycle avec $n - 1$ sommets) avec un sommet supplémentaire appelé le centre. Ce centre est connecté à chacun des $n - 1$ sommets du cycle. En d'autres termes, un graphe de roue est

formé en ajoutant un sommet central à un cycle, puis en connectant ce sommet à tous les sommets du cycle, voir la Figure (2.12).

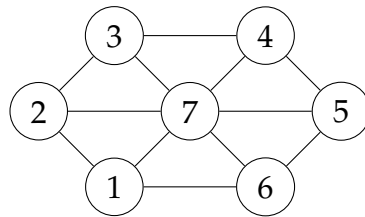


FIGURE 2.12 – Graphe de roue w_7 .

Graphe éventail

Un graphe éventail $F_{n,m}$ est une combinaison d'un chaîne et d'une étoile. Il est constitué d'un chaîne de n sommets linéaires auquel est ajouté un sommet central connecté à chaque sommet de ce chemin, ainsi qu'à m autres sommets formant une étoile. Ce graphe combine les caractéristiques d'un chemin et d'une étoile en un seul graphe, voir la Figure (2.13).

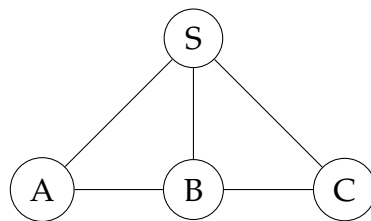


FIGURE 2.13 – Graphe éventail F_6 .

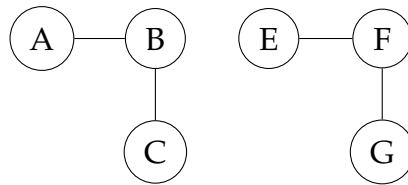
Definition 2.1.7 Une composante connexe dans un graphe est un sous-graphe maximal dans lequel chaque paire de sommets est reliée par un chaîne. En d'autres termes, dans une composante connexe, il existe un chemin entre n'importe quelle paire de sommets, et le sous-graphe n'est pas connecté à d'autres parties du graphe

Nombre de Composantes Connexes

Le nombre de composantes connexes d'un graphe G , noté $k(G)$, est le nombre de sous-graphes connexes maximaux dans G . Si G est un graphe connexe, alors $k(G) = 1$. Si G est déconnecté, $k(G)$ est supérieur à 1.

Exemple

Considérons le graphe suivant : Ce graphe à deux composantes connexes :



1. La première composante connexe inclut les sommets {A,B,C} et les arêtes {(A,B),(B,C)}
2. La deuxième composante connexe inclut les sommets {E,F,G} et les arêtes {(E,F),(F,G)}

Donc, $k(G) = 2$.

2.2 Opérations sur deux graphes

L'analyse des graphes à l'aide des nombres de Stirling peut être étendue pour inclure l'étude des opérations sur deux graphes. Ces opérations nous permettent de comprendre comment les propriétés combinatoires et structurelles des graphes se modifient lorsque deux graphes sont combinés d'une certaine manière.

Definition 2.2.1 La jonction de deux graphes G et H , notée $G \bowtie H$ est le graphe tels que

$$V(G \bowtie H) = V(G) \cup V(H), \text{ et } E(G \bowtie H) = E(G) \cup E(H) \cup \{(x, y) | x \in V(G), y \in V(H)\}.$$

En d'autres termes, la jonction de deux graphes G et H est définie comme le graphe dans lequel chaque sommet du première graphe est adjacent à tous les sommets du deuxième graphe, voir la Figure (3.9).

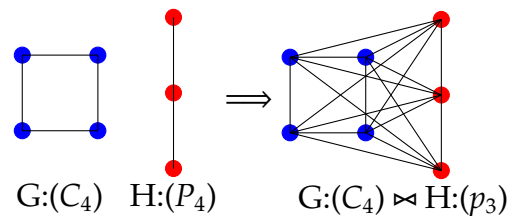


FIGURE 2.14 – La jonction de G et H .

Definition 2.2.2 Le produit cartésien de deux graphes G et H , notée $G \square H$ est un graphe défini sur les paires $(u, v) \in V(G) \times V(H)$. Deux éléments (u, v) et $(u', v') \in V(G \square H)$ sont adjacents dans $G \square H$ si et seulement si (voir la Fiure (2.15)),

- Si G à n sommets et H à m sommets, alors $G \square H$ aura $n \times m$ sommets.
- Les deux sommets proviennent de graphes différents.
- Les deux sommets sont reliés par une arête dans leur graphe d'origine.

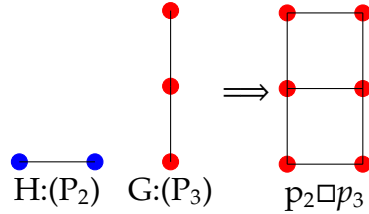


FIGURE 2.15 – Le produit cartésien de G et H .

Definition 2.2.3 Soient G et H deux graphes. Le produit fort $G \boxtimes H$ (également appelé le produit tensoriel) des graphes G et H est défini comme suit (voir la Figure (2.16)) :

1. Chaque sommet de G est associé à chaque sommet de H , formant un ensemble de sommets $V_{G \boxtimes H} = V_G \times V_H$.
2. Pour chaque paire d'arêtes (u_1, u_2) dans G et (v_1, v_2) dans H , une arête est ajoutée entre (u_1, v_1) et (u_2, v_2) dans $G \boxtimes H$ si et seulement si :
 - $\{u_1 = u_2 \text{ et } v_1 \neq v_2\}$ ou $\{u_1 \neq u_2 \text{ et } v_1 = v_2\}$.

Si G a n sommets et H a m sommets, alors $G \boxtimes H$ aura $n \times m$ sommets.

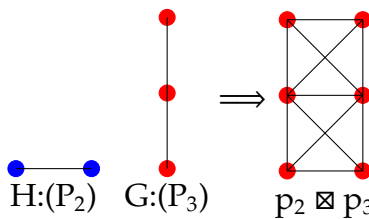


FIGURE 2.16 – Le produit fort des graphes p_2 et p_3 .

Illustration : 1. On peut former un graphe de roue par la jonction des deux graphe k_1 et C_4 (voir la Figure (2.17)).

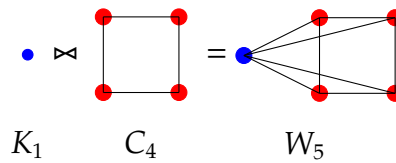


FIGURE 2.17 – La jonction de k_1 et C_4 forme le graphe de roue W_5 .

2. Le graphe éventail F_4 est formé avec la jonction des deux graphe k_1 et P_3 , voir la Figure (2.18).)

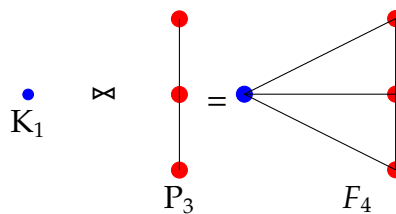


FIGURE 2.18 – La jonction de k_1 et p_4 forme le graphe de roue F_4 .

Stable d'un graphe

Un stable d'un graphe G est un ensemble S de sommets deux-à-deux non adjacents, tel que $\forall x, y \in S, (x, y) \notin E$. Le nombre de stabilité de G est la taille du stable de cardinalité maximum de G . Un stable maximal dans un graphe est un stable qui est de taille maximale, c'est-à-dire qu'aucun autre sommet ne peut être ajouté à cet ensemble sans violer la propriété de stabilité. En d'autres termes, un stable maximal est un stable qui ne peut pas être agrandi tout en restant un stable.

Definition 2.2.4 Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une coloration des sommets de G est une fonction $C : V \rightarrow C$, où C est un ensemble de couleurs, qui associe à chaque sommet v une couleur $c(v)$ de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur (voir la Figure (2.19)). Formellement, pour toute arête (u, v) on a $c(u) \neq c(v)$.

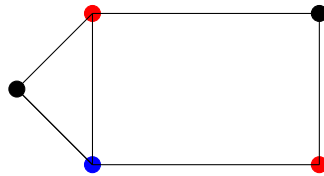


FIGURE 2.19 – Coloration en trois couleurs.

3

Nombres de stirling et graphes

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de fournir la relation entre les nombres de Stirling et les graphes, ainsi que de leurs interconnexions. Les nombres de Stirling et les graphes sont des domaines mathématiques distincts, mais ils ont récemment fait l'objet de liens intéressants. C'est l'intérêt de ce chapitre : Un premier travail [27] qui consiste à énumérer des partitions stables? Le nombre de Bell de graphe $B(G)$ donne le nombre de partitions stables du graphe G en se basant sur la construction du polynôme chromatique. Le deuxième travail [4] qui étudier les nombres de Stirling de première espèce pour certains types de graphes. Enfin, on donne des applications combinées des nombres de Stirling dans le contexte des graphes, illustrées par des exemples explicatifs.

3.1 Notions de base

Les notions de base des nombres de Stirling et des graphes incluent la décomposition des ensembles en cycles ou en partitions pour les nombres de Stirling, ainsi que l'étude des structures constituées de sommets et d'arêtes pour les graphes. Cette partie est notre large explication des deux travaux [22, 17].

Definition 3.1.1 *Suppression-Contraction (Deletion-Contraction) :*

Suppression-contraction est une technique utilisée principalement dans la théorie des graphes pour des calculs tels que le polynôme chromatique ou l'invariant de Tutte. Cette méthode consiste à analyser un graphe en supprimant et en contractant des arêtes.

La suppression-contraction est une technique de réduction qui simplifie le graphe tout en conservant certaines propriétés structurelles essentielles.

Definition 3.1.2 *Ajout-Contraction (Addition-Contraction) :*

Ajout-contraction est une technique moins courante mais utile dans certaines analyses de graphes, comme dans les graphes aléatoires ou pour certaines constructions spécifiques.

3.1.1 Notations

1. On appelle l'identité de contraction de suppression la formule :

$$B(G) = B(G - e) - B(G/e),$$

où

- $B(G)$ c'est le nombre de Bell du graphe original G .
 - e est une arête du graphe G .
 - $G - e$ représente le graphe obtenu en supprimant l'arête e de G .
 - G/e représente le graphe obtenu en contractant l'arête e de G .
2. L'identité de l'insertion (contraction) :

$$B(G) = B(G + e) + B(G/e),$$

- $G + e$ représente le graphe obtenu en ajoutant l'arête e de G .

Exemple : Ces opérations interviennent dans une définition récursive du polynôme chroma-tique voir la Figure (3.1).

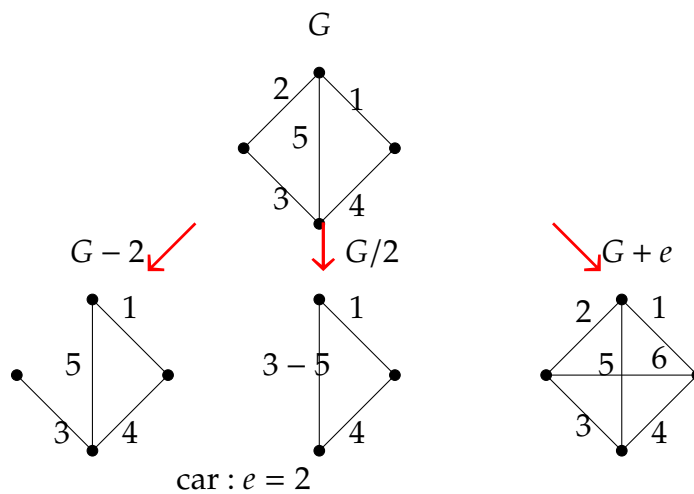


FIGURE 3.1 – Soustraction, Contraction et Addition d'un graphe G .

3. La récurrence

$$S(G, k) = S(G + e, k) + S(G/e, k) :$$

- $S(G, k)$ C'est le nombre de Stirling de deuxième espèce pour le graphe G avec k composantes connexes. Cela représente le nombre total de façons de partitionner l'ensemble de sommets du graphe G en k ensembles non-vides.
 - $S(G + e, k)$: représente le nombre de Stirling de deuxième espèce pour le graphe obtenu en insérant une arête e dans le graphe G , tout en maintenant le nombre de composantes connexes.
 - $S(G/e, k)$: représente le nombre de Stirling de deuxième espèce pour le graphe obtenu en contractant l'arête e de G , tout en maintenant le nombre k de composantes connexes.
4. L'identité $A(G, \alpha) = \sum_{k=c(G)}^{|V|} S(G, k)\alpha^k$ composé de :
- $A(G, \alpha)$: C'est la fonction de génération de partition stable pour le graphe G . Elle représente le nombre total de façons de partitionner l'ensemble de sommets du graphe G en ensembles non-vides, avec différents nombres de composantes connexes, pondéré par α .
 - α^k : C'est le facteur de pondération associé au nombre de composantes connexes k .

Avec $C(G) \leq k \leq |V|$. Où $C(G)$ est le nombre chromatique du graphe G et $|V|$ représente le nombre de sommets dans le graphe G .

5. L'identité d'addition (resp soustraction) :

$$A(G, \alpha) = A(G + e, \alpha) + A(G/e, \alpha),$$

cette identité présentée une relation entre les fonctions de génération de partition stable $A(G, \alpha)$, $A(G + e, \alpha)$ et $A(G/e, \alpha)$ pour un graphe G et ses transformations obtenues par l'ajout (ou la suppression) d'une arête.

- $A(G + e, \alpha)$: C'est la fonction de génération de partition stable pour le graphe obtenu en ajoutant l'arête e au graphe G .
- $A(G/e, \alpha)$: C'est la fonction de génération de partition stable pour le graphe obtenu en contractant l'arête e du graphe G . Pour chaque terme $C_i \alpha^i$ en $A(G, \alpha)$ représente le nombre de façons de partitionner les sommets du graphe G en i blocs, pondéré par α^i . α est une variable qui peut être utilisée pour pondérer différentes configurations de partition.

6. P représente le nombre total de partitions possibles du graphe G .

3.2 Illustration et représentation de certaines identités

Cette section est notre apport dans ce mémoire, où on a essayer de décortiquer est simplifier le complexe Algèbrique en théorie des graphe. Pour cela, on a expliquer les différents 'illustrations et représentations graphiques qui sont essentielles pour comprendre et visualiser des concepts complexes tels que les identités algébriques et les transformations de graphes.

1. On a l'identité $\left[\begin{smallmatrix} k_{n,m} \\ k \end{smallmatrix} \right]$ où $k_{n,m}$ est un graphe biparti complet et k est le nombre de partitions. Cette identité indique qu'un graphe biparti complet $k_{n,m}$ peut être partitionné en k sous-graphes complets. Par exemple, Considérons $K_{4,4}$ avec les ensembles de sommets $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ et $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Nous voulons partitionner ce graphe en 2 sous-graphes complets bipartis, voir la Figure (3.2).

Une manière de faire cela est de diviser les ensembles de sommets en deux groupes chacun :

- $U_1 = u_1, u_2$ et $V_1 = v_3, v_4$,
- $U_2 = u_3, u_4$ et $V_2 = v_1, v_2$.

Les sous-graphes complets bipartis résultants sont : $K_{2,2}$ formé par U_1 et V_1 et $K_{2,2}$ formé par U_2 et V_2 .

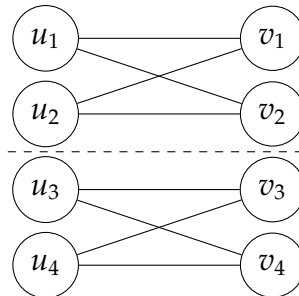


FIGURE 3.2 – Graphe biparti $k_{3,3}$ en 2 sous graphes complets.

2. L'identité $\left[\begin{smallmatrix} C_n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ est la partition d'un cycle C_n en k sous-cycles. Un cycle C_n est un graphe où chaque sommet est connecté à exactement deux autres sommets formant un anneau. L'identité stipule que ce cycle peut être divisé en k sous-cycles où chaque sous-cycle est également un cycle et la somme des sommets dans tous les sous-cycles égale au nombre total de sommets du cycle C_n .

Un premier exemple : Une partition de C_5 en 2 sous-cycles serait par exemple expliqué dans la Figure (3.3).

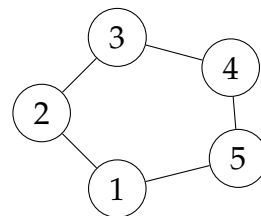


FIGURE 3.3 – Graphe c_5 .

La liste des partitions est :

$$\{(1, 2, 3), (4, 5)\}, \{(1, 5, 4), (2, 3)\},$$

$$\{(2, 3, 4), (5, 1)\}, \{(2, 1, 5), (4, 3)\},$$

$$\{(3, 4, 5), (1, 2)\}, \{(3, 2, 1), (5, 4)\},$$

$$\{(4, 5, 1), (2, 3)\}, \{(4, 3, 2), (1, 5)\},$$

$$\{(5, 1, 2), (3, 4)\}, \{(5, 4, 3), (2, 1)\}.$$

Un deuxième exemple : Pour $n \geq 3$ et $k = 1$ on a $\begin{bmatrix} c_n \\ 1 \end{bmatrix} = 2$.

Les deux partitions $\{(1, 3, 2)\}, \{(1, 2, 3)\}$ de C_3 en 1 cycle serait Figure en (3.4).



FIGURE 3.4 – Graphe c_3 en 2 cycles.

3. l'identité $\begin{bmatrix} w_n \\ k \end{bmatrix}$ concerne la partition d'une roue W_n en k sous-graphes, par exemple voir la Figure (3.6).

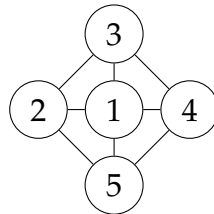


FIGURE 3.5 – Graphe roue w_5 .

Supposons que nous voulons partitionner cette roue W_5 en 2 sous-graphes. Voici une façon de le faire :

Partition 1 : Sous-graphe comprenant les sommets $\{1, 2, 3\}$,

Partition 2 : Sous-graphe comprenant les sommets $\{1, 4, 5\}$.

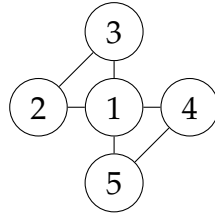


FIGURE 3.6 – Graphe w_5 en 2 partitions.

4. L'identité $\left[\begin{smallmatrix} F_n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ détermine la partition d'un éventail F_n en k sous-graphes.

Un exemple de éventail F_5 à 5 sommets partitionner en 2 repré dans la Figure (3.8).

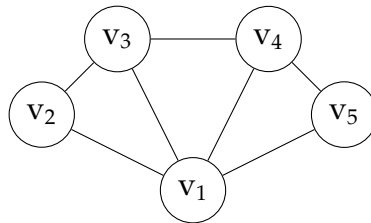


FIGURE 3.7 – Graphe éventail F_5 .

Partition 1 : Sous-graphe comprenant les sommets $\{1, 2, 3\}$,

Partition 2 : Sous-graphe comprenant les sommets $\{1, 4, 5\}$.

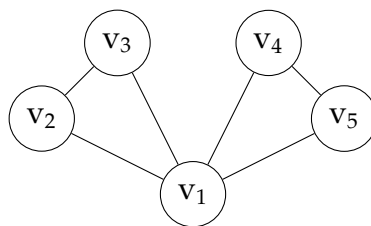


FIGURE 3.8 – Graphe F_5 en 2 partitions.

5. Soit un graphe indépendant (vide) avec 4 sommets. Nous voulons partitionner ces sommets en 2 parties voir les Figures (3.9),(3.10).

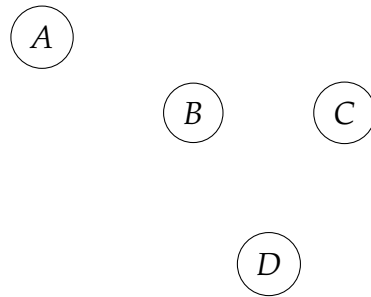


FIGURE 3.9 – Graphe indépendant E_4

Étant donné qu'il s'agit d'un graphe indépendant, chaque sommet est isolé et il n'y a pas d'arêtes entre eux. Ainsi, nous pouvons diviser ces 4 sommets en 3 ensembles disjoints de la manière suivante.

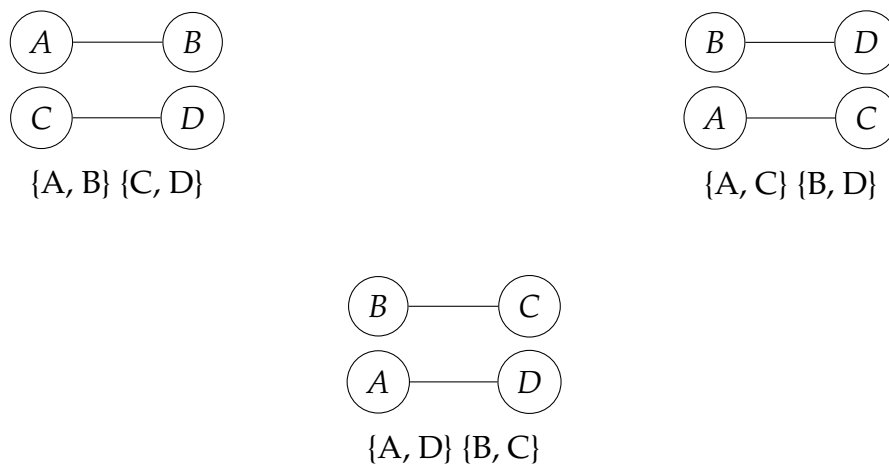


FIGURE 3.10 – Graphe indépendant E_4 en 2 partitions.

Chaque partition représente un ensemble de sommets qui ne partagent aucune arête entre eux, ce qui est le cas dans un graphe indépendant. Donc, dans cet exemple, nous avons trouvé trois façons différentes de partitionner les sommets de notre graphe indépendant en deux parties.

6. La permutation des sommets $v\sigma(v)$ représente l'application d'une permutation σ sur le sommet v d'un graphe G , c'est-à-dire que v est envoyé sur un autre sommet sous l'action de σ . Alors, G' est obtenu à partir de G en ajoutant une boucle à chaque sommet, $v\sigma(v) \in E(G')$ signifie que le sommet v et son image sous σ sont reliés par

une arête dans G' . En d'autres termes, si v est envoyé sur $\sigma(v)$ par la permutation σ , alors il y a une arête entre v et $\sigma(v)$ dans G' .

Par exemple, $V(G) = \{A, B, C\}$ et $E(G) = \{AB, AC, BC\}$.

Donc, G' aura les sommets $V(G') = \{A, B, C\}$ et les arêtes $E(G') = \{AB, AC, BC, AA, BB, CC\}$ pour créer des boucles à chaque sommet.

Maintenant, examinons toutes les permutations σ des sommets de G , telles que $v\sigma(v)$ soit une arête de G' .

(a) Permutation σ_1 : A est mappé sur B , B est mappé sur A , C reste inchangé.

$$A\sigma_1(A) = AB(\text{dans } G'),$$

$$B\sigma_1(B) = BA(\text{dans } G'),$$

$$C\sigma_1(C) = CC(\text{dans } G').$$

(b) Permutation σ_2 : A reste inchangé, B est mappé sur C , C est mappé sur B .

$$A\sigma_2(A) = AA(\text{dans } G'),$$

$$B\sigma_2(B) = BC(\text{dans } G'),$$

$$C\sigma_2(C) = CB(\text{dans } G').$$

(c) Permutation σ_3 : B reste inchangé, A est mappé sur C , C est mappé sur A .

$$A\sigma_3(A) = AC(\text{dans } G'),$$

$$B\sigma_3(B) = BB(\text{dans } G'),$$

$$C\sigma_3(C) = CA(\text{dans } G').$$

Les résultats sont les mêmes que précédemment car l'ajout de boucles à chaque sommet ne change pas les possibilités de liaison entre les sommets, ce qui signifie que les permutations σ_1 , σ_2 et σ_3 restent valides pour G' .

Definition 3.2.1 Une partition stable de sommets dans un graphe est une division de l'ensemble des sommets du graphe en ensembles disjoints tels que chaque ensemble soit un ensemble indépendant, c'est-à-dire qu'aucun des ensembles ne contient deux sommets reliés par une arête.

Exemple : Considérons le graphe G figurant dans (3.11). Une partition stable des sommets de ce graphe est :

$$\{A, E\}, \{B, C\}, \{D\}.$$

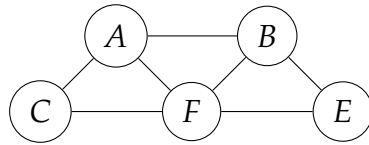


FIGURE 3.11 – Graphe G a 5 sommets.

1. Pour un graphe sans arêtes E_n avec n sommets, $B(E_n) = E_n$, car le nombre de Bell compte précisément le nombre de partitions stables des sommets dans ce graphe, qui est égal au nombre de façons de diviser l'ensemble de sommets sans tenir compte des arêtes, c'est-à-dire sans considérer de contraintes liées à la connectivité.
2. La relation $B(P_n) = B(E_{n-1})$ indique que le nombre de Bell pour un chaîne P_n est égal au nombre de Bell pour un graphe sans arête E_{n-1} avec $n - 1$ sommets.

L'idée est que chaque partition stable des sommets d'un chaîne P_n peut être transformée en une partition stable des sommets d'un graphe sans arête E_{n-1} avec $n - 1$ sommets et vice versa.

Exemple : Considérons un chaîne P_4 , qui est un graphe linéaire avec 4 sommets

$$P_4 : 1 - 2 - 3 - 4.$$

Maintenant, examinons le graphe sans arête E_3 , qui a 4 sommets mais aucune arête :

$$E_3 : \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}.$$

Maintenant, voyons comment les partitions stables sont liées entre P_4 et E_3 :

- Pour P_4 , nous avons les partitions stables suivantes :
 - (a) : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$,
 - (b) : $\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}$,
 - (c) : $\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}$,
 - (d) : $\{1, 2, 3\}, \{4\}$.
- Pour E_3 , nous avons les mêmes partitions stables :
 - (a) : $\{1\}, \{2\}, \{3\}$,
 - (b) : $\{1, 2\}, \{3\}$,
 - (c) : $\{1\}, \{2, 3\}$,

(d) : {1, 2, 3}.

Nous pouvons voir que chaque partition stable dans P_4 correspond à une partition stable dans E_3 , et vice versa. Ainsi, la relation $B(P_4) = B(E_3)$ est vérifiée.

3.3 Le polynôme chromatique

Le polynôme chromatique est un concept important en théorie des graphes. Pour plus d'informations consultez [38, 50, 45, 8, 22, 49, 41].

Definition 3.3.1 Pour un graphe G avec n sommets, le polynôme chromatique $P(G, \lambda)$ est un polynôme en λ qui donne le nombre de λ -colorations valides des sommets du graphe. Alors

$$P(G, \lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0,$$

est un polynôme de degré $n = |V|$ en λ , ses coefficients a_k sont des nombres entiers. Notamment

$$a_n = 1, a_{n-1} = -|E| \text{ et } P(G, 0) = 0.$$

1. $a_n=1$: Il y a une seule manière de colorier le graphe avec λ couleurs lorsque $\lambda=1$ (chaque sommet a la même couleur).
2. $a_{n-1} = -|E|$: Le coefficient devant λ^{n-1} est égal à l'opposé du nombre d'arêtes du graphe. Cela reflète le nombre de colorations invalides où deux sommets adjacents ont la même couleur.
3. $a_0 = 0$: Il n'y a pas de coloration valide lorsque $\lambda = 0$, donc le coefficient devant λ^0 est 0.

Exemple : Soit G un graphe simple, si G est l'arbre apparaît dans la Figure (3.12), alors

$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2,$$

puisque le sommet du milieu peut être coloré de λ façons et puis les sommets d'extrémité peuvent chacun être colorés en $\lambda - 1$ façons. Ce résultat peut être étendu pour montrer que, si T est un arbre quelconque avec n sommets, alors

$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1},$$

de même, si G est le graphe complet K_3 de la Figure (3.13), alors

$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Cela peut être étendu à

$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1),$$

si G est le graphe P_n en (3.12) et K_n en (3.13).

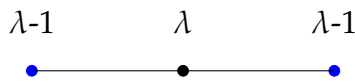


FIGURE 3.12 – Coloration d'un graphe simple P_3 .

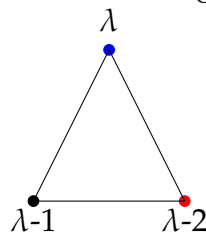


FIGURE 3.13 – Coloration d'un graphe complet K_3 .

Théorème 3.3.1 (Réduction de Whitney) Soit G un graphe simple, et soit $G - e$ et G/e les graphes obtenus à partir de G en supprimant et en contractant une arête e , Alors

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda).$$

Preuve. Soit $e = vw$. Le nombre de λ -colorations de $G - e$ dans lequel v et w ont des couleurs différentes est inchangé si l'on trace l'arête e joignant v et w , est donc égal à $P_G(\lambda)$. De même, le nombre de λ -colorations de $G - e$ dans lequel v et w ont la même couleur est inchangé si v et w sont identifiés, est donc égal à $P_{G/e}(\lambda)$. Le nombre total $P_{G-e}(\lambda)$ de λ -colorations de $G - e$ est donc $P_G(\lambda) + P_{G/e}(\lambda)$. ■

Exemple : Supposons que G soit le graphe de la Figure (3.14). Les graphes correspondants $G - e$ et G/e sont représentés dans la Figure(3.15), et d'après le théorème,

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = [\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2] - [\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)].$$

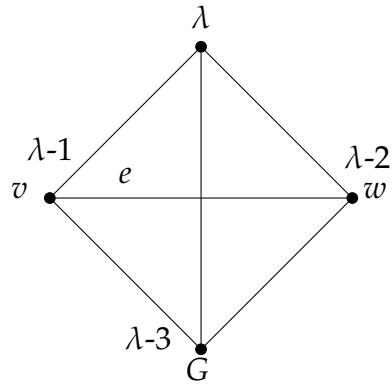


FIGURE 3.14 – Graphe simple G .

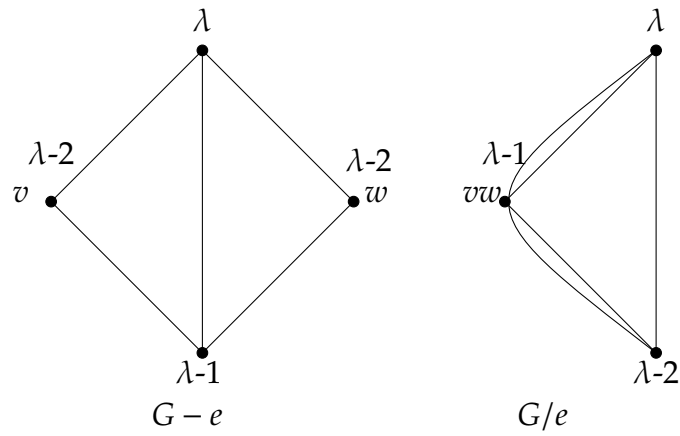


FIGURE 3.15 – Les graphes correspondants $G - e$ et G/e .

Corollaire 3.3.1 *La fonction chromatique d'un graphe simple est un polynôme .*

Preuve. En appliquant la procédure décrite précédemment, nous choisissons des arêtes dans $G-e$ et G/e , et les supprimons ou les contractons. Nous répétons cette procédure pour les graphes résultants, et ainsi de suite, jusqu'à ce que chaque graphe devienne un graphe nul (c'est-à-dire sans arêtes). La fonction chromatique d'un graphe nul est un polynôme de la forme $(\lambda^r$ où r est le nombre de sommets. En appliquant de manière répétée le théorème (3.3.1), il s'ensuit que la fonction chromatique du graphe G est une somme de polynômes et doit donc être un polynôme elle-même. ■ **Illustration de la démonstration :**

Ètape 1 : En pratique, il n'est pas nécessaire de réduire chaque graphe à un graphe nul, il suffit de les réduire à des graphes dont nous connaissons déjà les fonctions chromatiques, comme les arbres.

On peut maintenant désigner $P_G(\lambda)$ le polynôme chromatique de G . Il est important de noter que, d'après la démonstration précédente, si G possède n sommets, alors $P_G(\lambda)$ est de degré n , puisque aucun sommet supplémentaire n'est ajouté à aucun moment. Étant donné que la construction aboutit à un seul graphe nul avec n sommets, le coefficient de λ^n est 1. On peut également voir que les coefficients changent de signe en alternance, et que le coefficient de λ^{n-1} est $-m$, où m représente le nombre d'arêtes de G . Remarquez que nous ne pouvons pas colorier un graphe si aucune couleur n'est disponible, ce qui implique que le terme constant de tout polynôme chromatique est nul.

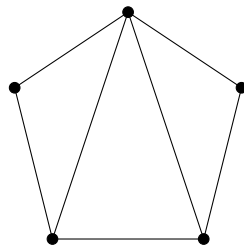


FIGURE 3.16 – Graphe G.

Ètape 2 : On donne maintenant un exemple pour illustrer les idées ci-dessus. On construit le polynôme chromatique du graphe G de la Figure (3.16), puis on vérifie que ce polynôme est de la forme

$$\lambda^5 - 7\lambda^4 + a\lambda^3 - b\lambda^2 + c\lambda,$$

où a, b et c sont des constantes positives. Il est pratique à chaque étape de dessiner le

graphe lui-même, plutôt que d'écrire son polynôme chromatique. Par exemple, au lieu de travailler avec le polynôme $P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda)$, il est bien mieux de manipuler les opérations $G - e$ et G/e sur le graphe suivant.

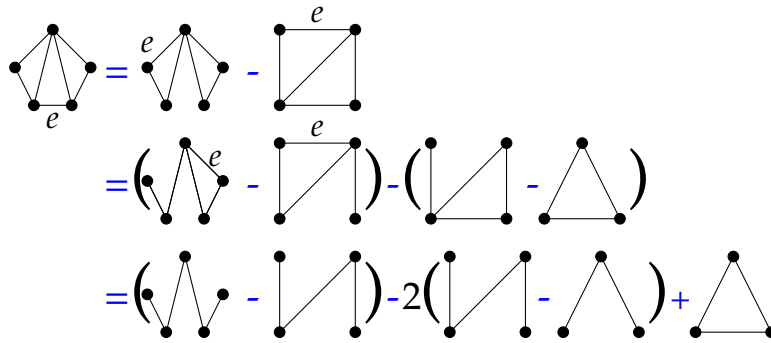


FIGURE 3.17 – Les étape de construction du polynôme chromatique.

ainsi

$$\begin{aligned}
 P_G(\lambda) &= \lambda(\lambda - 1)^4 - 3\lambda(\lambda - 1)^3 + 2\lambda(\lambda - 1)^2 + \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2), \\
 &= \lambda^5 - 7\lambda^4 + 18\lambda^3 - 20\lambda^2 + 8\lambda.
 \end{aligned}$$

Notez que ce résultat a la forme requise $\lambda^5 - 7\lambda^4 + a\lambda^3 - b\lambda^2 + c\lambda$ où a , b et c sont des constantes positives.

Remark 3.3.1 Les coefficient a , b et c représente :

a et c : indique le nombre de colorations valides où trois sommets adjacents ont des couleurs différentes.

b : indique le nombre de colorations invalides où exactement deux sommets adjacents ont la même couleur, mais exclut les configurations où trois sommets ou plus ont la même couleur.

Théorème 3.3.2 Soit G un graphe simple, et soit $G + e$ et G/e les graphes obtenus à partir de G en ajoutant et en contractant une arête e , Alors $P_G(\lambda) = P_{G+e}(\lambda) + P_{G/e}(\lambda)$.

Exemple

Ainsi

$$\begin{aligned}
 p_G(\lambda) &= \lambda_5 + 4\lambda_4 + 3\lambda_3, \\
 &= \lambda_5 - 6\lambda_4 + 14\lambda_3 - 15\lambda_2 + 6\lambda.
 \end{aligned}$$

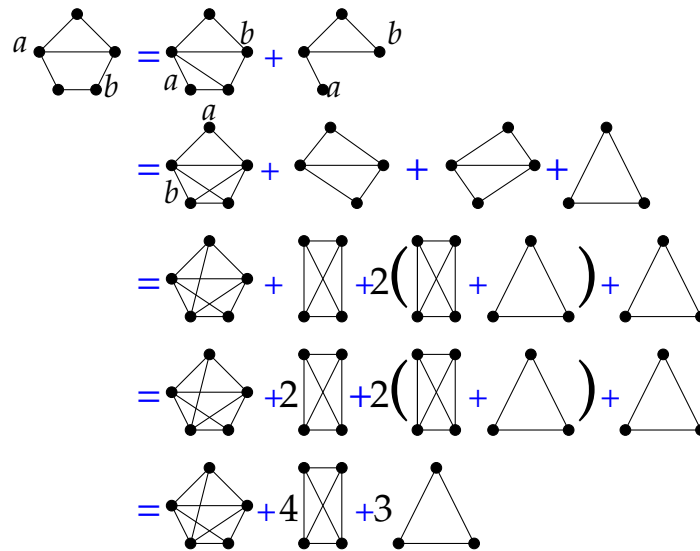


FIGURE 3.18 – Exemple 2 pour Les étape de construction du polynôme chromatique.

3.3.1 Application de polynôme Chromatique

Le polynôme Chromatique trouve diverses applications dans plusieurs domaines, notamment en théorie des graphes, en informatique, en chaîne, et en biologie. Voici quelques exemples concrets de son utilisation : planification des fréquences, coloration des graphes moléculaires, réseaux de communication, etc.

Exemple : Planification des Fréquences

La planification des fréquences, aussi connue sous le nom d'allocation des fréquences, est un problème crucial dans les réseaux de communication, en particulier dans les réseaux sans fil et les systèmes cellulaires. Le but est de attribuer des fréquences de transmission de manière à minimiser les interférences et à maximiser l'efficacité spectrale. Cette tâche est essentielle pour assurer des communications claires et sans perturbations dans les réseaux où les ressources spectrales sont limitées.

Utilisation du Polynôme Chromatique

Le polynôme chromatique $P(G, k)$ d'un graphe G indique le nombre de façons de colorer un graphe avec k couleurs, de sorte que deux sommet adjacents (émetteurs pouvant interférer) n'ont pas la même couleur (fréquence). En planification des fréquences, les "couleurs" représentent des fréquences différentes.

Étapes de la Planification des Fréquences

1. Modélisation du Réseau comme un Graphe :
 - Représenter chaque émetteur par un sommet.
 - Connecter deux sommet par une arête si leurs émetteurs respectifs peuvent interférer.
2. Calcul du Nombre Chromatique : Le nombre chromatique $\chi(G)$ du graphe est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer le graphe. Cela correspond au nombre minimal de fréquences nécessaires pour que le réseau fonctionne sans interférence .
3. Coloration du Graphe : Utiliser un algorithme de coloration pour trouver une attribution spécifique des fréquences. Les algorithmes heuristiques ou exacts peuvent être utilisés, en fonction de la taille et de la complexité du graphe .

Ces application montrent que le polynôme Chromatique n'est pas seulement un concept théorique, mais un outil pratique et puissant pour résoudre une variété de problèmes complexes dans différents domaines.

Nous avons une méthode de calcul le polynôme chromatique avec k – coloration dont nous avons parlé et *BryceDuncan, RhodesPeele* ont apporté une autre méthode basée sur le nombre de bell et le nombre de stirling dont nous allons discuter maintenant.

3.4 Nombres de Bell et de Stirling pour les graphes

Cette section est le résultat du travail effectué par Bryce et al [27]. Il est noté que, G et H désignent des graphes avec des ensembles de sommets disjoints. Les opérations de suppression, contraction, union disjointe et l'insertion d'arêtes (notées ici par $-$, $/$, \cup et $+$) sont définies, par exemple dans [13]. La jonction $G \bowtie H$ des deux graphes G et H sont obtenus à partir de leur union disjointe $G \cup H$ en ajoutant une nouvelle arête à partir de chaque sommet de G à chaque sommet de H .

L'objectif est de voir à partir du travail [27] comment manipuler les nombre de Bell en faisant introduire la théorie de graphe élémentaire, afin de construire le polynôme chromatique qui donne l'information sur la coloration de graphe. Pour un aperçu plus détaillé sur le sujet vous pouvez consulter le document [10].

Illustration d'un bloc : Pour un graphe simple $G = (V, E)$, une partition de l'ensemble complet de sommets de G est appelée stable si chacun de ses blocs est un ensemble indépendant de G . Le nombre de bell $B(G)$ de G est le nombre d'une telle partition de sommet stable. **Exemple :** Pour fixer les idées supposons que G un graphe avec $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{12, 23, 34, 45, 51, 25\}$ (illustration à gauche de la Figure (3.19) à la fin de cette section). Alors pour $B(G) = 8$ la liste des partitions stables sont :

$$\begin{array}{cccc} 13 - 24 - 5 & 14 - 2 - 35 & 1 - 24 - 35 & \\ 13 - 2 - 4 - 5 & 14 - 2 - 3 - 5 & 1 - 24 - 3 - 5 & 1 - 2 - 35 - 4 \\ & & 1 - 2 - 3 - 4 - 5. & \end{array}$$

L'application de l'identité de la contraction de l'insertion $B(G) = B(G + e) + B(G/e)$. Pour toute valeur fixe k , $S(G, k) = S(G + e, k) + S(G/e, k)$ est valable, mais $S(G \times H, k) = S(G, k) \cdot S(H, k)$ est faux. pour récupérer une identité multiplicative pour les nombres $S(G, k)$, on définit la fonction de génération de partition stable $A(G, \alpha) = \sum_{k=c(G)}^{|V|} S(G, k)\alpha^k$. Puis on applique l'identité de convolution $A(G \times H, \alpha) = A(G, \alpha) \cdot A(H, \alpha)$ de plus l'identité d'addition $A(G, \alpha) = A(G + e, \alpha) + A(G/e, \alpha)$ serait valable [10]. Les partitions stables de G peuvent être énumérées en les classant par groupes en fonction du nombre de blocs qu'elles contiennent. En conséquence, pour tout k dans l'intervalle $c(G) \leq k \leq |V|$, on définit le nombre (graphique) de Stirling $S(G, k)$ comme étant le nombre de partitions stables de G composées d'exactly k blocs ($C(G)$ est le nombre chromatique of G). Les deux identités permettent de trouver par la récurrence le polynôme $A(G, \alpha)$ pour un graphe donné G de la même manière que les polynômes chromatiques sont calculés à la main pour les petits graphes. Le principale différence est que nous préférons adjoindre des nouveaux arêtes pour trouvé $A(G, \alpha)$, et nous pouvons trouver les nombres de Bell $B(G)$ en évaluant $A(G, \alpha)$ Au $\alpha = 1$. La figure (3.19) donne un exemple de cette procédure. Enfin, la fonction génératrice de la partition stable $A(G, \alpha)$, détermine le polynôme chromatique $P(G, \lambda)$ de la façon suivante [10] :

Pour chaque terme $C_i \alpha^i$ en $A(G, \alpha)$, remplacer α^i par la factorielle décroissante $\lambda^{(i)} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - i + 1)$. Ces substitutions se transforment $A(G, \alpha)$ en polynôme chromatique de G . Par exemple, le graphe de la figure [51] a un polynôme chromatique,

$$P(G, \lambda) = 3\lambda^{(3)} + 4\lambda^{(4)} + \lambda^{(5)} = 6\lambda - 15\lambda^2 + 14\lambda^3 - 6\lambda^4 + \lambda^5.$$

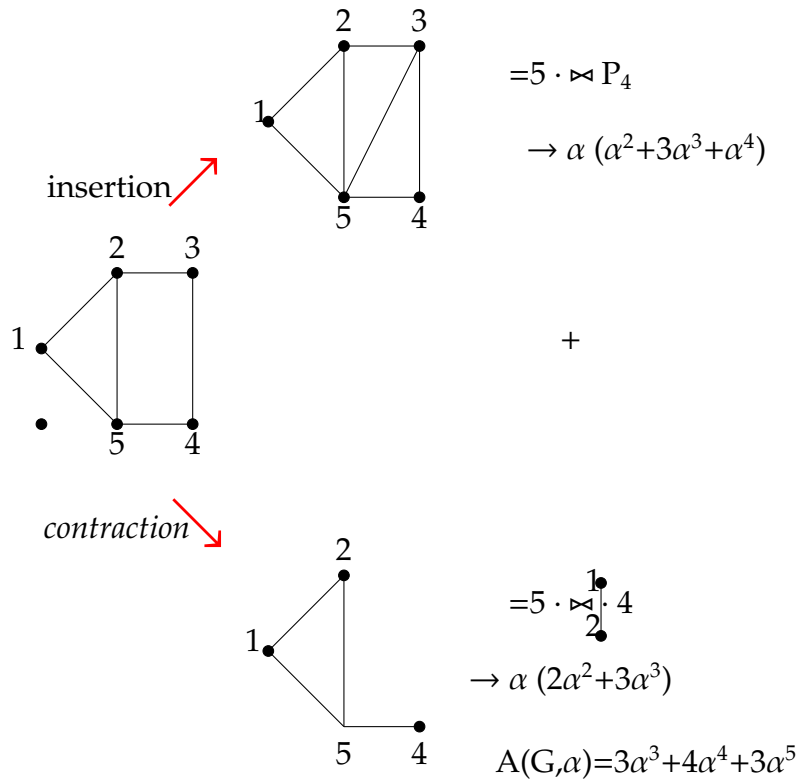


FIGURE 3.19 – La fonction génératrice de partition stable d’un graphe $A(G, \alpha)$.

3.5 Polynôme de Tutte

Le polynôme de Tutte d’un graphe $G = (V, E)$ noté $T(G; x, y) = TG(x, y) = T(G)$ est un polynôme bivarié (à deux variables). De nombreux problèmes en théorie des graphes peuvent être réduits à des problèmes de recherche et d’évaluation du polynôme de Tutte à certaines valeurs. Nous définissons ici le polynôme de Tutte pour les graphes.

Definition 3.5.1 Pour un graphe $G = (V, E)$, où V est l’ensemble des sommets et E l’ensemble des arêtes, le polynôme de Tutte $T(G; x, y)$ est défini comme suit :

$$T(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x - 1)^{k(A) - k(E)} (y - 1)^{k(A) + |A| - |V|} \tag{3.1}$$

où $k(A)$ représente le nombre de composantes connexes du sous-graphe induit par l’ensemble d’arêtes A , $|A|$ est le nombre d’arêtes dans $A \subseteq E$, et Le rang $k(E)$ de l’ensemble des arêtes E .

3.5.1 Récursion des polynômes de Tutte

Definition 3.5.2 Le polynôme de Tutte d'un graphe $G = (V, E)$ est défini comme suit :

$$T(G; x, y) = \begin{cases} 1 & E(G) = \emptyset \text{ (graphe vide)} \\ y \cdot T(G - e; x, y) & e \in E(G) \text{ et } e \text{ est une boucle} \\ x \cdot T(G/e; x, y) & e \in E(G) \text{ et } e \text{ est un pont} \\ T(G - e; x, y) + T(G/e; x, y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette définition fournit un algorithme récursif également connu sous le nom de méthode de contraction et de suppression pour calculer $T(G; x, y)$. Nous illustrons ce processus dans la figure suivante (3.20).

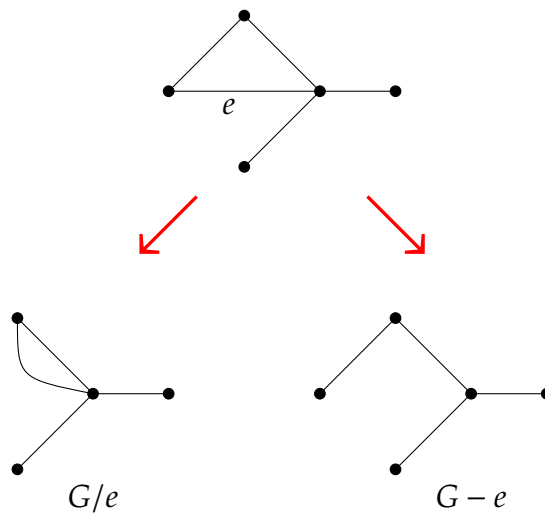


FIGURE 3.20 – Contraction et Suppression

Remarque 3.5.1 En théorie des graphes, un pont (ou isthme) est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe. En d'autres termes, un pont est une arête qui, lorsqu'elle est supprimée, rend le graphe déconnecté ou augmente le nombre de sous-graphes distincts dans le graphe.

Illustration sur le polynôme de Tutte avec le polynôme Chromatique :

L'arête e indique le bord sélectionné lors de l'application de la récurrence et la figure

(3.21) montre que

$$T(G; x, y) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^2y + xy + y^2 + x + y$$

$$\begin{aligned}
 T(\text{Graph 1}) &= T(\text{Graph 2}) + T(\text{Graph 3}) \\
 &= T(\text{Graph 4}) + T(\text{Graph 5}) + T(\text{Graph 6}) \\
 &= x^4 + T(\text{Graph 7}) + T(\text{Graph 8}) + T(\text{Graph 6}) \\
 &= x^4 + x^3 + T(\text{Graph 9}) + T(\text{Graph 10}) + T(\text{Graph 6}) \\
 &= x^4 + x^3 + x^2 + xy + T(\text{Graph 11}) \\
 &= x^4 + x^3 + x^2 + xy + T(\text{Graph 12}) + T(\text{Graph 13}) \\
 &= x^4 + x^3 + x^2 + xy + x^3 + x^2y + T(\text{Graph 14}) + T(\text{Graph 15}) \\
 &= x^4 + x^3 + x^2 + xy + x^3 + x^2y + x^2 + T(\text{Graph 16}) + T(\text{Graph 17}) \\
 &= x^4 + x^3 + x^2 + xy + x^3 + x^2y + x^2 + x + y \\
 &= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^2y + xy + y^2 + x + y
 \end{aligned}$$

FIGURE 3.21 – Algorithme de suppression, contraction pour un graphe avec 5 sommets

Relation entre les polynômes Chromatique et de Tutte

Le polynôme chromatique peut être trouvé en évaluant le polynôme de Tutte $T(G; 1 - \lambda, 0)$ et en le multipliant par un monôme positif ou négatif de λ qui dépend du nombre de sommets et de composantes du graphe G . Le polynôme chromatique est un polynôme de Tutte. Ainsi,

$$P(G, \lambda) = (-1)^{|V|-K(G)} \lambda^{K(G)} T(G; 1 - \lambda, 0). \quad (3.2)$$

Où $K(G)$ représente le nombre de composantes connexes de G .

pour $x = 1 - \lambda$ et $y = 0$ on a :

$$\begin{aligned} T(G; 1 - \lambda, 0) &= (1 - \lambda)^4 + 2(1 - \lambda)^3 + 2(1 - \lambda)^2 + (1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)[(1 - \lambda)^3 + 2(1 - \lambda)^2 + 2(1 - \lambda) + 1] \\ &= (1 - \lambda)(1 + \lambda^2 - 2\lambda - \lambda - \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2 + 2\lambda^2 - 4\lambda + 2 - 2\lambda + 1) \\ &= \lambda^4 - 6\lambda^3 + 14\lambda^2 - 15\lambda + 6 \end{aligned}$$

Pour le graphe avec 5 sommets le polynôme chromatique est :

$$\begin{aligned} P(G, \lambda) &= (-1)^{|V|-1} \lambda T(G; 1 - \lambda, 0) \\ &= (-1)^4 \lambda (\lambda^4 - 6\lambda^3 + 14\lambda^2 - 15\lambda + 6) \\ &= \lambda^5 - 6\lambda^4 + 14\lambda^3 - 15\lambda^2 + 6\lambda \end{aligned}$$

Par l'application de polynôme de Tutte on trouve le même résultat de polynôme chromatique que le travail effectué par Bryce et all.

3.6 Nombre de stirling de première espèce pour les graphe

Cette section est le résultat du travail effectué par Barghi [4]. Les nombres de Stirling (non signés) du premier espèce, notés $[n]_k$, comptent le nombre de partitions cycliques de $[n]$ en k cycles. En d'autres termes, $[n]_k$ compte le nombre de permutations dans S_n : le groupe symétrique sur $[n]$, qui peut s'écrire comme le produit de k cycles disjoints, où les cycles 1 sont inclus dans l'énumération. Les nombres de Stirling du premier espèce

satisfont la relation de récurrence suivantes,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

avec les conditions initiales $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = 0$ pour tout $n, k > 0$, et $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$. Il est clair que $n! = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

En utilisant une idée similaire qui a motivé la définition des nombres de Stirling de deuxième espèce pour les graphes, nous définirons les nombres graphiques de stirling du premier espèce : Pour un graphe simple G , soit G' le graphe obtenu à partir de G en ajoutant une boucle à chaque sommet. Soit S_G l'ensemble de toutes les permutations σ sur $V(G)$ telle que $v\sigma(v) \in E(G')$. En d'autres termes, chaque $\sigma \in S_G$ partitionne le graphe G en cycles disjoints de sommets, où un 1-cycle est un sommet unique, un 2-cycle est une seule arête, et l'orientation pour les cycles est exigée pour les graphes de longueur plus de trois. Nous appellerons un élément de S_G une partition cyclique de G . Nous définissons la factorielle graphique d'un graphe G , notée $G!$, comme le nombre de partitions cycliques distinctes de G . Le k -ième nombre de Stirling de première espèce d'un graphe G , notée $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, est le nombre de permutations $\sigma \in S_G$ telle que σ partitionne $V(G)$ en exactement k cycles. Il est facile de voir que $G! = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, où $n = |V(G)|$. Il est à noter que cette définition de la factorielle d'un graphe coïncide avec celle du réarrangements des sièges avec séjours sur un graphe qui a été discutée par DeFord dans [22].

Dans ce document, K_n , C_n et P_n on notée respectivement le graphe complet, le cycle et le chaîne sur n sommets. Aussi, $K_{n,m}$ désigne le graphe bipartite complet avec une partie a n et l'autre partie a m sommets. Le rejoindre de deux graphes simples G et H , notée $G \bowtie H$, est le graphe dont l'ensemble de sommets est $V(G) \cup V(H)$ et dont l'ensemble des arêtes $E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in G, v \in H\}$. Nous appelons le graphe $K_1 \bowtie C_n$ la roue sur $(n+1)$ sommets et le dénoté par W_n , et appelons le graphe $K_1 \bowtie P_n$ l'éventail sur $(n+1)$ sommets et le dénoté par F_n .

En plus de la jonction de deux graphes, nous utiliserons deux produits graphiques : Pour les graphes simples G et H , le produit cartésien de G et H , noté $G \square H$, est un graphe avec l'ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ telle que deux sommets quelconques (u, u') et (v, v') sont adjacents dans $G \square H$ si et seulement si $u = v$ et $u'v' \in E(H)$, ou $u' = v$ et $uv \in E(G)$. Le produit fort si G et H , noté $G \boxtimes H$, est un graphe avec l'ensemble de sommets $V(G)$

$\times V(H)$ telle que deux sommets quelconques (u, u') et (v, v') sont adjacents dans $G \boxtimes H$ si et seulement si $u = v$ et $u'v' \in E(H)$, ou $u' = v'$ et $uv \in E(G)$, ou $uv \in E(G)$ et $u'v' \in E(H)$.

Le résultat suivant a été prouvé dans [23] et [24]. Dans ce théorème, f_k est le k -ième nombre de Fibonacci défini par la relation de récurrence $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ et les conditions initiales $f_1 = f_2 = 1$. Par convention, nous supposons que $P_0! = 1 = f_1$, où P_0 est le chemin à zéro sommet, c'est-à-dire l'ensemble vide.

Théorème 3.6.1 Soit $n, m \in \mathbb{N}$. Alors

1. $K_n! = n!$,
2. $P_n! = f_{n+1}$,
3. $C_n! = f_{n+1} + f_{n-1} + 2$, pour $n \geq 3$,
4. $K_{n,m}! = \sum_{i=0}^k m^i n^i$, où $k = \min\{m, n\}$,
5. $W_n! = (2n + 1)f_{n+1} + nf_n + f_{n-1} - 2(n - 1)$, pour $n \geq 3$,
6. $F_n! = f_{n+1} + \sum_{l=1}^n [f_{n-l+1}(f_{l+2} - 1) + f_l(f_{n-l+2} - 1)]$, pour $n \geq 2$.

Nous terminerons cette section par un remarque suivante dont la preuve est évidente :

Remarque 3.6.1 Soit G un graphe simple avec $n \geq 3$ sommets. Alors $[1^G] = 2|H(G)|$, où $H(G)$ est l'ensemble des cycles hamiltoniens non orienté de G .

3.7 Le nombre de stirling du première espèce pour les graphes de base

Proposition 3.7.1 pour $n \in \mathbb{N}$, on a $[k_n] = [n]$.

Illustration de la proposition :

- $[k_n]$ cette notation représente le nombre de façons de partitionner les sommets de k_n en exactement k cycles lors des permutations. Cela pourrait impliquer que k_n fait référence à un graphe complet k_n et qu'on cherche à compter les partitions en k cycles spécifiques.

- $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ représente le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en k sous-ensembles non vides.

L'égalité $\left[\begin{smallmatrix} k_n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ signifie simplement que, pour un graphe complet k_n , le nombre de façons de partitionner les sommets en k cycles de permutations (ou en k sous-graphes cycliques) est exactement le même que le nombre de permutations de n éléments ayant k cycles.

Exemple : On a le graphe complet K_4 , Nous voulons maintenant calculer le nombre de partitions de cet ensemble de 4 sommet en ensembles de taille 2.

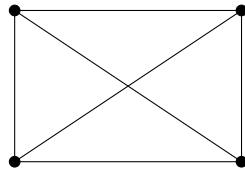


FIGURE 3.22 – Graphe complet k_4 .

$\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$: Le nombre de permutations de 4 éléments ayant exactement 2 cycles est 11. Par exemple, les cycles

$(12)(34), (13)(24), (14)(23), (23)(14), (24)(13), (34)(12), (12)(43), (13)(42), (14)(32), (23)(41), (24)(31)$.

Dans le graphe complet K_4 , nous avons 4 sommets entièrement connectés. La partition en 2 cycles pourrait correspondre à sélectionner des permutations de ces sommets en 2 cycles distincts. Cela revient à trouver les permutations de $n = 4$ éléments ayant 2 cycles, ce qui nous donne 11.

Definition 3.7.1 Une équation diophantienne est une équation polynomiale à coefficients entiers pour laquelle on cherche des solutions également entières. Ces équations portent le nom du mathématicien grec Diophanted' Alexandrie, qui a étudié ces types d'équations au 3me siècle.

Une équation diophantienne peut être représentée sous la forme générale :

$$P(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) = 0.$$

où P est un polynôme à coefficients entiers, et $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ sont des variables qui doivent prendre des valeurs entières.

Exemple : Un exemple classique d'équation diophantienne est l'équation de *Pythagore* :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Cette équation cherche des triplets entiers (x,y,z) tels que la somme des carrés des deux premiers soit égale au carré du troisième. Les solutions entières non triviales (c'est-à-dire autres que $x = 0, y = 0, z = 0$) sont appelées triplets pythagoriciens.

Théorème 3.7.1 Soit n, k des entiers positifs. L'égalité suivante est vérifiée

$$\left[\begin{matrix} P_n \\ k \end{matrix} \right] = \binom{k}{n-k}.$$

Preuve. Il est facile de voir que $\left[\begin{matrix} P_n \\ k \end{matrix} \right]$ représente le nombre de solutions entières de l'équation diophantienne

$$x_1 + \dots + x_k = n,$$

Où $x_i \in \{1, 2\}$ pour tous $1 \leq i \leq k$. Pour expliquer cela, considérons une feuille de P_n , disons v . Chaque x_i indique si le i -ème cycle de v le long de P_n est un cycle de longueur 1 ou 2.

Nous savons que le nombre de solutions entières de cette équation est donné par $\binom{k}{n-k}$. En effet, dans une telle partition cyclique, le nombre de cycles de longueur 1 et de longueur 2 est respectivement de $2k - n$ et $n - k$.

Pour chaque solution de l'équation $x_1 + \dots + x_k = n$, avec $x_i \in \{1, 2\}$, nous pouvons associer une permutation de n éléments ayant exactement k cycles. Le nombre de façons de choisir $n - k$ cycles de longueur 2 parmi k cycles est précisément donné par $\binom{k}{n-k}$.

Chaque solution entière de l'équation diophantienne correspond à une partition de n éléments en k cycles, où le nombre de cycles de longueur 1 est $2k - n$ et le nombre de cycles de longueur 2 est $n - k$. Par conséquent, le nombre total de telles partitions est $\binom{k}{n-k}$ ce qui prouve que $\left[\begin{matrix} P_n \\ k \end{matrix} \right] = \binom{k}{n-k}$. ■

Illustration du Théorème : Pour illustrer cette identité, nous allons considérer un exemple avec un graphe chemin P_5 et examiner les partitions cycliques possibles.

Dans ce graphe chaîne P_5 , nous avons 5 sommets et 4 arêtes.

Considérons l'équation diophantienne $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ où $x_i \in \{1, 2\}$ pour $1 \leq i \leq 3$.

Nous voulons trouver le nombre de solutions entières pour cette équation. Pour cela, nous

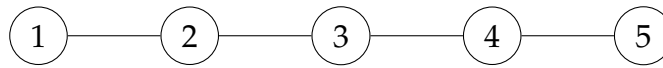


FIGURE 3.23 – Graphe chaîne P_5 .

utilisons la représentation des permutations cycliques. Soit P_5 une permutation cyclique de longueur 5, par exemple $P_5=(12345)$.

Chaque permutation v de P_5 correspond à une solution de l'équation diophantienne. Chaque x_i représente si le i -ème cycle le long de P_5 est un cycle 1 ou un cycle 2.

Pour cet exemple, nous devons choisir deux positions parmi cinq pour être des cycles 1. Par exemple, si nous choisissons les positions 2 et 4 comme cycles 1, alors les positions restantes seront des cycles 2. Cela donne la permutation $v = (12)(3)(4)(5)$, où $x_1 = x_3 = 2$ et $x_2 = 1$. Cette permutation correspond à une solution de l'équation diophantienne $2 + 1 + 2 = 5$. Le nombre total de façons de choisir deux positions parmi cinq pour être des cycles 1 et cycles 2 est donné par le coefficient binomial $\binom{k}{n-k} = \binom{3}{2} = 3$, où le nombre de cycles 1 est $2k - n = 2 \times 3 - 5 = 1$ et le nombre de cycles 2 est $n - k = 5 - 3 = 2$.

Ainsi, il y a 3 solutions entières pour l'équation diophantienne $x_1+x_2+x_3=5$, confirmant que $[^P_3] = \binom{k}{n-k} = \binom{3}{2} = 3$.

Théorème 3.7.2 Soit $n, k \in \mathbb{N}$. Si $n \geq 3$, et $k \geq 2$, donc $[^C_n] = \binom{k-1}{n-k} + 2\binom{k-1}{n-k-1}$. Si $n \geq 3$, donc $[^C_1] = 2$.

Preuve. On sait que pour $n \geq 3$, $[^C_1] = 2$ puisque le seul cycle de longueur trois ou plus est le graphe lui même. D'autre part, Pour démontrer l'identité

$$\begin{bmatrix} C_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n-1} \\ k-1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} P_{n-2} \\ k-1 \end{bmatrix},$$

nous devons examiner trois cas distincts en considérant un sommet spécifique v dans le graphe C_n et ses voisins u et w .

1. Premier cas : v est dans un cycle de longueur 1.
 - Si v forme un cycle de longueur 1, le graphe résultant après avoir supprimé v est P_{n-1} (un chaîne de $n - 1$ sommets).
 - Le nombre de façons de partitionner P_{n-1} en $k - 1$ cycles est $\begin{bmatrix} P_{n-1} \\ k-1 \end{bmatrix}$.

2. Deuxième cas : vu forme un cycle de longueur 2.
 - Si uv est un cycle de longueur 2, le graphe restant après avoir supprimé uv est P_{n-2} (un chaîne de $n - 2$ sommets).
 - Le nombre de façons de partitionner P_{n-2} en $k - 1$ cycles est $\left[\begin{matrix} P_{n-2} \\ k - 1 \end{matrix} \right]$.
3. Troisième cas : vw forme un cycle de longueur 2.
 - De même, si vw est un cycle de longueur 2, le graphe résultant après avoir supprimé vw est P_{n-2} .
 - Le nombre de façons de partitionner P_{n-2} en $k - 1$ cycles est $\left[\begin{matrix} P_{n-2} \\ k - 1 \end{matrix} \right]$.

La contribution des deuxième et troisième cas est identique car vu et vw sont des cycles de longueur 2 indépendants. Cela nous permet de conclure que l'identité est correcte et montre clairement comment les contributions de chaque cas s'additionnent pour former le nombre total de façons de partitionner C_n en k cycles. ■

Illustration du Théorème : Prenons un exemple concret avec un graphe cycle C_5 , qui est un pentagone. Considérons le sommet v comme n'importe quel sommet dans le graphe cycle, et u et w comme ses deux voisins.

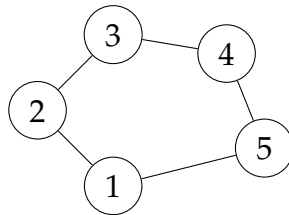


FIGURE 3.24 – Graphe cycle c_5 .

Dans ce graphe cycle C_5 , prenons le sommet v comme le sommet 1, et u et w comme les sommets 2 et 5 respectivement.

1. Cas 1 : v est dans un cycle 1 (Cycle 1 : v)
 - Si nous supprimons v , nous restons avec un graphe cycle C_4 , qui a P_{n-1} cycles.
 - Donc, dans ce cas, il reste $P_4 = 3$ cycles.
2. Cas 2 : vu est dans un cycle 2 (Cycle 2 : $v \rightarrow u$)
 - Si nous supprimons v , nous restons avec un graphe cycle C_3 , qui a P_{n-2} cycles.
 - Donc, dans ce cas, il reste $P_3 = 2$ cycles.

3. Cas 3 : vw est dans un cycle 2 (Cycle 2 : $v \rightarrow w$)

Si nous supprimons v , nous restons avec un graphe cycle C_3 , qui a P_{n-2} cycles.

Donc, dans ce cas, il reste $P_3 = 2$ cycles.

En appliquant cette identité à ce graphe cyclique, nous avons vu qu'il reste 3 cycles lorsque nous supprimons le sommet v , 2 cycles lorsque nous supprimons vu , et encore 2 cycles lorsque nous supprimons vw .

Remarque 3.7.1 Pour un graphe cyclique C_n , le nombre de cycles possibles est donné par le nombre de permutations d'éléments P_n . Le nombre de permutations d'éléments P_n est égal à $(n - 1)!$. Ainsi, pour un graphe cyclique C_4 , nous avons $P_4 = (4 - 1)! = 3! = 6$.

Théorème 3.7.3 Supposons que $n, m \in \mathbb{N}$ et $m \leq n$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\left[\begin{matrix} K_{n,m} \\ k \end{matrix} \right] = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n}{i} \left[\begin{matrix} i \\ k + 2i - (m + n) \end{matrix} \right] i!$$

Preuve. Nous allons prouver ce théorème par un argument combinatoire. Puisque $K_{n,m}$ ne contient aucun cycle impair à l'exception des cycles de longueur 1, dans les cycles de longueur 2 ou plus, chaque sommet d'une partie peut être apparié avec un sommet de l'autre partie, où tous les appariements sont mutuellement disjoints.

En raison de cette observation, nous allons d'abord choisir i sommets dans chaque partie qui seront dans un cycle pair. Les sommets restants de chaque partie deviennent des cycles de longueur 1, et il y a $m + n - 2i$ de tels cycles. Par conséquent, il nous reste $l = k - (m + n - 2i)$ cycles pairs dans un graphe H isomorphe à $K_{i,i}$. Supposons que les sommets d'une partie de H soient étiquetés v_1, \dots, v_i et nous appelons cette partie H_1 . Nous étiquetons les sommets en H_2 , l'autre partie de H , par u_1, \dots, u_i .

Supposons que C soit un cycle pair dans H et que v est un sommet de C qui appartient à H_1 . En commençant par v et traversant C , nous visiterons les sommets de H_1 à chaque autre étape jusqu'à revenir à v , étant donné que C est de longueur égale ou supérieure à 4. Cela crée un cycle d'étiquettes de sommets dans C dont la longueur est égale à la moitié de la longueur de C . D'autre part, si C est un cycle de 2, l'étiquette de v crée un cycle de 1 parmi les étiquettes des sommets dans H_1 . Sur la base de cette observation, nous allons d'abord partitionner les étiquettes dans H_1 en l cycles disjoints, ce qui peut être fait en

$\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right]$ façons. Ensuite, nous réarrangeons les sommets de H_2 de $i!$ façons et créons des cycles pairs dans H en conséquence : Soit C_1, \dots, C_l soit une partition cyclique des étiquettes des sommets dans H_1 en l cycles arrangés de gauche à droite. En commençant par le sommet le plus à gauche v' dans le cycle C' le plus à gauche qui n'est pas encore utilisé, nous ferons correspondre v' avec le sommet disponible le plus à gauche dans un réarrangement fixe de u_1, \dots, u_i . puis, en faisant des allers-retours entre H_2 et H_1 , nous faisons correspondre le sommet entre H_2 et H_1 , nous faisons correspondre le sommet à chaque étape avec le sommet disponible le plus à gauche dans l'autre partie, jusqu'à ce que tous les sommets de C' aient été visités et que nous soyons de retour à v' . Nous passons ensuite au prochain cycle disponible dans C_1, \dots, C_l et répéter ce processus. ■

Enfin, en additionnant les $k = 0, \dots, m + n$, on a

$$\begin{aligned} K_{n,m}! &= \sum_{k=0}^{m+n} \left[\begin{smallmatrix} K_{n,m} \\ k \end{smallmatrix} \right] = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n}{i} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k + 2i - (m + n) \end{smallmatrix} \right] i!, \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n}{i} i! \left(\sum_{k=0}^{m+n} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k + 2i - (m + n) \end{smallmatrix} \right] \right), \\ &= \sum_{i=0}^m m^i \binom{n}{i} \left(\sum_{k=m+n-2i}^{m+n-i} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k + 2i - (m + n) \end{smallmatrix} \right] \right), \\ &= \sum_{i=0}^m m^i \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^i \left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right] \right) = \sum_{i=0}^m m^i \binom{n}{i} i! = \sum_{i=0}^m m^i n^i. \end{aligned}$$

Ce qui confirme la partie (4) du théorème (3.6.1) avec l'hypothèse que $m = \min\{m, n\}$.

Illustration du Théorème : Pour illustrer la preuve avec un exemple concret, considérons un graphe isomorphe à $k_{3,3}$, c'est-à-dire un graphe complet biparti avec 3 sommets dans chaque partie. Voici le graphe biparti complet initial $k_{3,3}$.

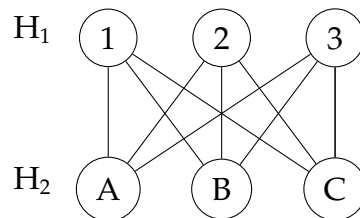


FIGURE 3.25 – Graphe biparti complet $k_{3,3}$.

1. Aucune cycle impair (sauf les cycles de longueur 1) : $K_{3,3}$ est un graphe biparti complet avec deux parties, chaque partie contenant 3 sommets. Les cycles de longueur paire sont formés en appariant les sommets de chaque partie de façon disjointe.
2. Choisir i sommets dans chaque partie :
 - Nous devons choisir un certain nombre i de sommets dans chaque partie pour les cycles pairs. Les sommets restants formeront des cycles de longueur 1.
 - Par exemple, si $i = 2$, nous choisissons 2 sommets dans chaque partie pour former des cycles pairs. Les sommets restants (1 sommet dans chaque partie) formeront des cycles de longueur 1.
3. Formation des cycles de longueur 1 :
 - Les sommets restants dans chaque partie formeront des cycles de longueur 1.
 - Il y a $m + n - 2i$ cycles de longueur 1. Par exemple, si $m + n - 2i = 3 + 3 - 2 \cdot 2 = 2$, Il y aura donc 2 cycles de longueur 1 (1 sommet dans chaque partie).
4. Nombre de cycles pairs restants :
 - Le nombre de cycles pairs restants est $l = k - (m + n - 2i)$. Pour notre exemple avec $k = 2$, $l = 2 - (3 + 3 - 2 \cdot 2) = 2 - 2 = 0$. Il n'y a donc pas de cycles pairs restants.
 - Si k était plus grand, nous devrions prendre en compte les cycles pairs restants.
5. Partition et réarrangement des sommets :
 - On partitionne les étiquettes des sommets de H_1 en l cycles disjoints.
 - Ensuite, on réarrange les sommets de H_2 en $i!$ façons et on crée des cycles pairs.
 - Pour notre exemple avec $i = 2$ et $l = 0$, il n'y a pas de cycles pairs supplémentaires à créer. Cependant, si l était plus grand, nous devrions réarranger les sommets de H_2 en $i!$ façons.

Dans cet exemple, Pour $n = 3, m = 3$ et $k = 2$, il y a 18 façons de former des cycles dans le graphe biparti complet $K_{3,3}$, en suivant le processus décrit ci-dessus.

Finalement, nous avons :

$$\left[\begin{array}{c} K_{n,m} \\ k \end{array} \right] = 0 + 0 + 0 + 18 = 18.$$

Théorème 3.7.4 Pour $n \geq 3$, on a $W_n = K_1 \bowtie C_n$. donc

1. $\left[\begin{matrix} W_n \\ k \end{matrix} \right] = \binom{k-1}{n-k} + 2 \binom{k-1}{n-k-1} + n \binom{k-1}{n-k} + 2n \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{k-1}{j}$ pour $k \geq 3$,
2. $\left[\begin{matrix} W_3 \\ 2 \end{matrix} \right] = 11$ et $\left[\begin{matrix} W_n \\ 2 \end{matrix} \right] = 2(1+2n)$ pour $n \geq 4$,
3. $\left[\begin{matrix} W_n \\ 1 \end{matrix} \right] = 2n$.

Preuve. Considérons le graphe $K_1 \bowtie C_n$ où v est le sommet représentant K_1 et C est la copie de C_n dans ce graphe. Nous examinons trois cas :

1. v est dans un cycle de longueur 1,
2. v est dans un cycle de longueur 2,
3. v est dans un cycle de longueur 3 ou plus.

Les deux premiers cas sont faciles à comprendre. Pour le troisième cas, v doit être dans un cycle C' de longueur égale ou supérieure à trois. Il y aura alors deux sommets dans C , disons u et w , qui sont adjacents à v dans C' .

Supposons que nous choisissons d'abord u , pour lequel nous avons n possibilités. Ensuite, en parcourant C dans le sens des aiguilles d'une montre, nous choisissons w et ajoutons le chemin P qui relie u à w dans C' , puis nous décidons de cette orientation sur C' . Supposons que l soit le nombre de sommets le long de P (y compris u et w). Ce qui reste de W_n lorsque nous enlevons C est un chaîne avec $n-l$ sommets.

Pour pouvoir avoir une partition cyclique de $K_1 \bowtie C_n$ en k cycles, $n-l$ doit être supérieur ou égal à $k-1$. Cela signifie que $2 \leq l \leq n-k+1$. Pour chaque choix de u , l , et l'orientation sur C' , nous devons trouver le nombre de partitions cycliques de P_{n-1} en $k-1$ cycles.

En suivant cet argument, lorsque $k \geq 3$, nous avons :

$$\left[\begin{matrix} W_n \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} C_n \\ k-1 \end{matrix} \right] + n \left[\begin{matrix} P_{n-1} \\ k-1 \end{matrix} \right] + 2n \left(\left[\begin{matrix} P_{n-2} \\ k-1 \end{matrix} \right] + \dots + \left[\begin{matrix} P_{k-1} \\ k-1 \end{matrix} \right] \right)$$

et par conséquent,

$$\left[\begin{matrix} W_n \\ k \end{matrix} \right] = \binom{k-1}{n-k} + 2 \binom{k-1}{n-k-1} + n \binom{k-1}{n-k} + 2n \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{k-1}{j}.$$

Cela prouve la partie (1) en utilisant les théorèmes (3.7.1) et (3.7.2).

Lorsque $n \geq 4$ et $k = 2$, v est soit dans un cycle de longueur 1, soit dans un cycle de longueur 3 ou plus. Dans le premier cas, l'autre cycle est C . Dans le deuxième cas, l'autre cycle est soit un cycle de longueur 1, soit un cycle de longueur 2. Par conséquent, $W_n = 2 + 2n + 2n$. Le cas où $n = 3$ et $k = 2$ peut être facilement vérifié à la main.

Enfin, la partie (3) découle du fait que $K_1 \bowtie C_n$ a n cycles hamiltoniens non dirigés. ■

Illustration du Théorème : Supposons que nous ayons un cycle C_7 , c'est-à-dire un cycle de 7 sommets (voir la Fig (3.26)) : Pour illustrer le procédé avec C_7 et expliquer les étapes

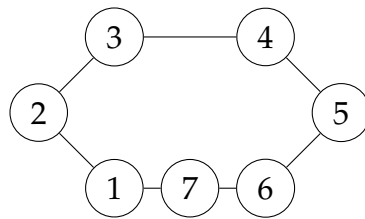


FIGURE 3.26 – Graphe cycle C_7 .

de la preuve pour partitionner $K_1 \bowtie C_7$ en cycles, nous allons considérer les différents cas et suivre les étapes indiquées.

Graphe $K_1 \bowtie C_7$

- Soit C_7 le cycle de longueur 7.
- Soit v le sommet de K_1 ajouté à C_7 .
- Les sommets de C_7 sont $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$.

Étapes

Cas 1 : v est dans un cycle de longueur 1 Si v est un cycle de longueur 1, alors les sommets restants de C_7 forment le cycle C_7 . Donc, il reste C_7 , qui est déjà un cycle de longueur 7. Cette configuration donne une partition en 2 cycles :

$$(v), (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$$

Cas 2 : v est dans un cycle de longueur 2 Si v est dans un cycle de longueur 2, il est associé à un sommet u_i de C_7 . Supposons que v soit associé à u_1 , alors v, u_1 forment un cycle de longueur 2. Les sommets restants $\{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ forment C_6 . Cette configuration donne une partition en 2 cycles :

$$(v, u_1), (u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$$

Cas 3 : v est dans un cycle de longueur 3 ou plus Si v est dans un cycle C' de longueur 3 ou plus, alors il y a deux sommets u_i et u_j adjacents à v dans C' . Supposons que v soit adjacent à u_1 et u_3 , formant ainsi le cycle (v, u_1, u_2, u_3) . Les sommets restants $\{u_4, u_5, u_6, u_7\}$ forment C_4 .

Illustration avec $k = 3$ Pour $k = 3$, nous cherchons une partition de $K_1 \bowtie C_7$ en 3 cycles.

- Cycle 1 : (v)
- Cycle 2 : $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$

Supposons que nous choissions un autre cycle :

- Cycle 1 : (v, u_1)
- Cycle 2 : $(u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$

Supposons un troisième cycle :

- Cycle 1 : (v, u_1, u_2, u_3)
- Cycle 2 : (u_4, u_5, u_6, u_7)

Vérification Pour chaque choix u, l , et orientation sur C' :

- Choix de $u = u_1, l = 3$:

$$\text{Cycle } (v, u_1, u_2, u_3)$$

$$\text{Cycle restant } C_4 : (u_4, u_5, u_6, u_7)$$

- Choix de $u = u_1, l = 4$:

$$\text{Cycle } (v, u_1, u_2, u_3, u_4)$$

$$\text{Cycle restant } C_3 : (u_5, u_6, u_7)$$

En suivant cet argument, nous avons montré comment $K_1 \bowtie C_7$ peut être partitionné en

cycles de différentes manières en choisissant des sommets et des chaîne spécifiques. Les partitions possibles démontrent les configurations cycliques basées sur les choix de sommets et les longueurs de cycles, validant le théorème et illustrant l'approche combinatoire pour C_7 .

Théorème 3.7.5 Pour $n \geq 2$, soit $F_n = K_1 \bowtie P_n$. alors pour $k \geq 1$,

$$\left[\begin{matrix} F_n \\ k \end{matrix} \right] = \binom{k-1}{n-k+1} + (2k-n) \binom{k}{n-k} + 2k \sum_{i=2}^{n-k+1} \binom{k-1}{n-i-k+1}.$$

Preuve. Soit v le sommet représentant K_1 dans $K_1 \bowtie P_n$. Nous appellerons la copie de P_n dans ce graphe P . Nous considérons trois cas :

1. v est dans un cycle de longueur 1.
2. v est dans un cycle de longueur 2.
3. v est dans un cycle de longueur 3 ou plus.

Il est facile de voir ce qui se passe dans le premier cas. Dans le deuxième cas, nous allons d'abord diviser P en k cycles, ce qui peut être fait en

$$\left[\begin{matrix} P_n \\ k \end{matrix} \right] = \binom{k}{n-k},$$

façons. Nous savons d'après la preuve du théorème (3.7.1) que le nombre de cycles de longueur 1 dans toute partition cyclique de P en k cycles est $2n - k$. Nous choisissons l'un de ces cycles et en faisons un cycle de longueur 2 dans F_n en ajoutant v .

Dans le troisième cas, supposons que le nombre de sommets dans C , le cycle contenant v , à l'exception de v lui-même, est i . Il est facile de voir que $2 \leq i \leq n - k + 1$, puisque nous avons besoin d'au moins $k - 1$ sommets qui ne sont pas dans C pour diviser F_n en k cycles. Il s'ensuit que le nombre de ces partitions est égal au nombre de solutions entières de l'équation diophantienne :

$$x_1 + \dots + x_k = n.$$

Où $x_j \in \{1, 2\}$ pour tout $1 \leq j \leq k$, à l'exception d'un seul d'entre eux qui doit être égal à i . Le raisonnement est le suivant : en partant de l'une des feuilles de P , dite u , chaque x_j

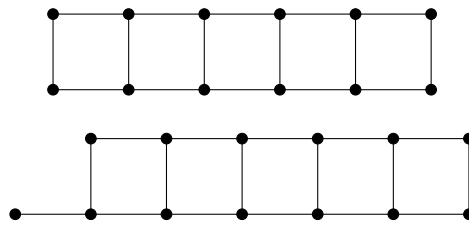


FIGURE 3.27 – L_n et L_n^* .

représente si le j -ème cycle de u le long de P est un cycle de longueur 1 ou 2, à l'exception d'un représentant le nombre de sommets de C qui appartiennent à P . Nous allons d'abord choisir le x_j qui est égal à i . Ensuite, en l'éliminant de l'équation diophantienne ci-dessus, il nous reste l'équation suivante :

$$y_1 + \dots + y_{k-1} = n - i,$$

où $y_j \in \{1, 2\}$ pour tout $1 \leq j \leq k - 1$. Nous savons que le nombre de solutions entières à cette équation est $\binom{k-1}{n-i-k+1}$. En gardant à l'esprit que C a deux orientations distinctes, nous terminons la preuve. ■

Illustration du Théorème : Prenons le graphe P_6 , un chemin de 6 sommets (voir la Figure 3.28).

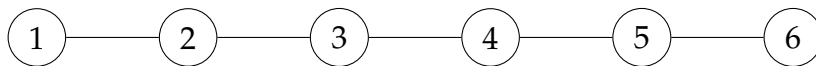


FIGURE 3.28 – Graphe chemins P_6 .

Nous voulons ajouter un sommet v à ce graphe et le placer dans un cycle.

Cas où v est dans un cycle de longueur 1 : • Il y a $6 \times 2 = 12$ possibilités, car v peut être placé sur chacun des 6 sommets, et chaque sommet peut être le début d'un cycle orienté vers la gauche ou vers la droite.

Cas où v est dans un cycle de longueur 2 : • Supposons que nous choisissons le cycle $\{1, 2\}$. Il reste quatre sommets disponibles pour v . Donc, il y a 5 possibilités dans ce cas, car chaque paire d'arêtes consécutives forme un cycle de longueur 2.

Cas où v est dans un cycle de longueur 3 ou plus : 1. Détermination du nombre de sommets dans le cycle contenant v , excluant v lui-même :

- Supposons que le cycle contenant v soit $(2, 3, 4)$. Dans ce cas, $i = 3$, car il y a 3 sommets dans ce cycle.
 - Comme mentionné précédemment, $2 \leq i \leq n - k + 1$, où $n = 6$ et k est le nombre de cycles dans lesquels P_6 est divisé. Si nous choisissons $k = 3$, alors $n - k + 1 = 4$. Ainsi, i peut être compris entre 2 et 4.
2. Choix du nombre de sommets dans le cycle contenant v :
- Supposons que nous choisissons $i = 3$. Cela signifie que le cycle contenant v est $(2, 3, 4)$.
3. Détermination de l'équation de Diophantine :
- Nous avons $k = 3$ cycles dans lesquels diviser P_6 .
 - En utilisant l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ (où $x_j \in \{1, 2\}$), nous devons choisir un des x_j qui est égal à i , qui est 3 dans notre exemple. Disons que nous choisissons $x_2 = 3$.
 - En éliminant x_2 de l'équation, nous obtenons $y_1 + y_3 = 3$ (où $y_j \in \{1, 2\}$).
4. Calcul du nombre de solutions de l'équation :
- Le nombre de solutions entières de $y_1 + y_3 = 3$ est

$$\binom{2}{3 - 3 + 1} = \binom{2}{1} = 2,$$

car il y a deux façons de choisir deux nombres parmi $\{1, 2\}$ dont la somme est 3.

Conclusion générale

En conclusion, l'étude des nombres de Stirling dans le contexte des différentes familles de graphes offre un aperçu captivant de leur structure et de leur complexité. Ces nombres permettent de quantifier diverses propriétés des graphes, telles que le nombre de façons de partitionner un ensemble de sommets ou d'arêtes, ainsi que le nombre de chemins ou de cycles dans un graphe donné. Ils sont utiles pour formuler des conjectures, prouver des propriétés et développer des algorithmes visant à résoudre des problèmes spécifiques liés aux graphes.

En examinant les nombres de Stirling pour des familles spécifiques de graphes, telles que les graphes complets, les graphes bipartis, les graphes de roues ou les graphes éventails, nous pouvons obtenir une compréhension approfondie des propriétés uniques de chaque famille. Cette compréhension est cruciale pour aborder des problèmes complexes, comme la coloration des graphes, le calcul de la connectivité ou la recherche de chemins optimaux.

L'étude des nombres de Stirling dans le domaine des graphes ouvre de nouvelles perspectives et applications dans des domaines variés tels que l'informatique, les mathématiques appliquées, la biologie et bien d'autres.

Bibliographie

- [1] M. Aigner, *A Course in Enumeration*, Springer, 2007.
- [2] C. Aslangul, *Des Mathématiques Pour les sciences , Édition 3*, 2011.
- [3] C. Auderset, *Note sur les Graphe*, Université de Fribourg(Suisse), 2003.
- [4] A. Barghi, *Stirling numbers of the first kind for graphs*, *Aus. J. Comb.*, 70(2), 253-268, 2018.
- [5] G. Barion, *Application de la théorie des graphes a des objets musicaux, Modélisation, visualisation en hyperespace*, *Thèse de doctorat, Université de Toulouse*, 2011.
- [6] C. Berge, *théorie des graphes et ses applications*, Dunod, paris, 1958 .
- [7] F. Bergeron, *Introduction à la combinatoire algébrique*, UQAM université du Québec à Montréal, 2015.
- [8] M. Bensouyad, *Approches Métaheuristiques a base de population pour la coloration de graphes*, *Thèse de doctorat, Université de Constantine 2* ,2015.
- [9] A. Benjamin, J. Quinn, *Proofs that Really Count : the Art of Combinatorial Proof*, *Mathematical Association of America*, 2003.
- [10] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1974.
- [11] M. Bóna, *A Walk Through Combinatorics : An Introduction to Enumeration and Graph Theory, (fourth edition)*, World Scientific New Jersey , 2017.
- [12] I. Bousbaa, *Combinatoire de suit de sterling généralise*.Thèse de doctorat, *Universite Des Science Et De La Technologie Houari Boumediene, Laboratoire RECITS*, 2016.
- [13] B. Bollobas, *Modern Graph Theory*, Springer, 1998 .
- [14] A. Bretto, A. Faisant, F. Hennecart, *Éléments de théorie des graphes*, Springer-Verlag France, 2012.
- [15] R. Brualdi, *Introductory Combinatorics, Édition 5*, Pearson ,2009.

- [16] L. Comtet, *Advanced Combinatoire. The Art Of Finite And Infinite Expansions, Revised And Enlarged Edition*, D.Reidel Publisching Co, Dordrecht, 1974.
- [17] Y. Chen, J. Gross, T. Mansour, On The genus distribution of Wheel and of related graphs, *Dis. Math.*, 341, 934-945, 2018.
- [18] O. Cogis, C. Robbert, *Théorie des graphes*, Vuibert, 2003.
- [19] J. Courtiel, *Combinatoire du polynôme de Tutte et des cartes planaires*, Thèse de doctorat, L'UNIVERSITÉ De BORDEAUX, 2014 .
- [20] P. Delahaye, *Le groupr symétrique*, MPSI Prytanée National Militaire, 10 mai 2017.
- [21] F. Droesbeke, M. Hallin, C. Lefevre, *Les graphes par l'exemple*, Ellipse, 1987.
- [22] D. Deford, *Matched Products and Stirling Numbers of Graphs*, Tufts University, 2018.
- [23] D. DeFord, Seating rearrangements of arbitrary graphs, *Involve*, 7(6), 787-805, 2014.
- [24] D. DeFord, Counting rearrangements on generalised wheel graphs, *Fibonacci Q.*, 51(3), 259-267, 2013.
- [25] B. Duncan, R. Peele, Bell and Stirling numbers for graphs, *J. Int. Seq.*, 12, 09.7.1 2009.
- [26] B. Duncan, *Bell number of graphs*, Ph.D.Dissertation, Auburn University, USA, 2012.
- [27] B. Duncan, R. Peele, Bell and Stirling Numbers for Graphs, *J. Int. Seq.*, 12, 2009.
- [28] D. Foata, G. Han, *Pricipes de combinatoire classique*, Cours et exercice corrigés, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2008.
- [29] J. Fournier, *Théorie des graphes et applications : Avec exercices et problèmes*, Édition 2, Hermès-Lavoisier, 2011.
- [30] M. Javaid, M. Siddique, U. Ali, Novel Connection Based Zagreb Indices of Several Wheel-Related Graphs, *Comp. J. Combin. Math*, 2, 31-58, 2020.
- [31] O. Haddouche, *Une Généralisation sur les nombres de stirling*, diplôme de magister, Université Des Science Et De La Technologie Houari Boumediene, le 17/06/2008.
- [32] D. Galvin, D. Tanh, Stirling numbers of forests and cycles, *Electr. J. Comb.*, 20(1), 2013.
- [33] Z. kareskenyi-balogh, G. Nyul, Stirling numbers of the second kind and Bell numbers for graphs, *Au. J. Comb*, 58(2), 264-274, 2014.
- [34] E. Knuth, *The Art of Computer Programming, Volume 1 : Fundamental Algorithms*, Édition 3, Addison-Wesley, 1997.
- [35] M. Lassalle, Coefficients binomiaux généralisés et polunômes de Macdonald, *J. FUNC. ANAL.*, 158, 289-324, 1998.

- [36] A. Meadows, Tutte Polynomials of Some Graphs and Multigraphes, Thesis, Elizabeth City State University, 2020 .
- [37] D. Muller, Introduction a la théorie des graphes, *Cahiers de la CRM, Cahier N6, Commission Romande de DE Mmathématique*, 2012.
- [38] A. Munagi, k -Complementing subsets of nonnegative integers, *Int. J. Math.*, 21, 215-224, 2005.
- [39] S. Nicolas, S. Francinou, H. Gianella. Oraux X-ENS, *Algèbre 1, Cassini*.
- [40] C. Noureddine, Aspects combinatoires et coloration des graphes triangulés, *Thèse de doctorat, Université USTHB*, 2021.
- [41] R. read, An Introduction to Chromatique Polynomials, *Journal Of Combinatorial Theory* 4, 52-71, 1968.
- [42] R. Stanley, Enumerative combinatorics, *Cambridge University Press, T2*, 62, 1999.
- [43] J. Stirling, Methodus Diflerentialis. Sive Tractatus De Summationr rt Interpolazione Serierum Infinitorum, *London*, 1730.
- [44] M. Tavakoli, F.Rahbarnia, R.Ashrafi, Note On Strong Product Of Graphs, *KraGujevac Journal Of Mathematics*, 37(1), 187-193, 2013.
- [45] C. Thomassen, The chromatic polynomial and list colorings, *Journal of combinatorial Theory, Series B*, 99, 474-479, 2009.
- [46] I. Tomescu, Méthods combinatoires dans le théorie des automates finis, *PhD. Thesis, Bucharest, Romania*, 1971.
- [47] S. Warnaar, The Andrews-Gordon Identities and q -Multinomial coefficients Commun.
- [48] D. West, Introduction to Graph Theory, *2nd edition, Prentice Hall*, 2001.
- [49] R. Wilson, Introduction to Graph Theory, *Fourth edition, Longman*, 1996.
- [50] H. Wilf, Which polynomials are chromatic ?, in Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie, *Accademia Nazionale dei Lincei*, Tomo 1, 247-257, 1973.
- [51] Y. Yeh, S.Ma, Stirling permutations cycle structure of permutations and perfect matchings, 22(4)(2015).

Résumé

Les mathématiques discrètes couvrent un vaste champs de concepts et d'outils, parmi lesquels on trouve les nombres de Stirling et les graphes. Ce travail se propose d'explorer ces deux notions et de mettre en lumière leurs interconnexions. Les nombres de Stirling apparaissent notamment dans l'étude des polynomes chromatiques des graphes, qui sont des outils fondamentaux pour comprendre les colorations possibles des sommets d'un graphe.

Abstract

Discrete mathematics covers a vast field of concepts and tools, including Stirling numbers and graphs. This work explores these two notions and highlights their interconnections. Stirling numbers appear in particular in the study of chromatic polynomials of graphs, which are fundamental tools for understanding the possible colorations of the vertices of a graph.

ملخص

تغطي الرياضيات المتقطعة مجالاً واسعاً من المفاهيم والأدوات، بما في ذلك أعداد ستيرلينغ والرسوم البيانية. والهدف من هذا العمل هو استكشاف هذين المفهومين وتبسيط الضوء على أوجه الترابط بينهما. تظهر أعداد ستيرلينغ على وجه الخصوص في كثيرات الحدود اللونية للرسوم البيانية، وهي أدوات أساسية لفهم الألوان الممكنة لرؤوس الرسم البياني.

