

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut de Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

La Contrôlabilité Et L'observabilité D'un Système Dynamique

Préparé par :

Djouambi Rania Dahdouche Aya

Soutenue devant le jury

Smail Kaouache	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Widad Laouira	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Habiba Mesekine	MAA	C.U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire :2023/2024

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ

الرَّحِيمِ

وَالصَّلَاةِ وَ

السَّلَامِ عَلَى نَبِيِّنَا

مُحَمَّدٍ أَشْرَفِ

الْمُرْسَلِينَ



REMERCEMENT

Nous tenons à remercier en premier lieu Dieu « Allah » qui nous a donné la volonté, la confiance et le courage pour faire ce modeste travail.

-En seconde lieu, nous tenons à remercier « **nos chers parents** » pour leurs patiences et leurs encouragement.

- Je remercie également mon encadrant, Madame « **Widad Laouira** », pour son écoute et ses conseils précieux.

-Et nous remercions également les membres du jury dr : « **Smail Kaouache** ». Nous exprimons notre gratitude pour le soutien et l'assistance qu'il nous a apportée. Et au Madame « **Habiba Mesekine** » d'avoir accepté d'examiner notre travail .

-Nous sommes reconnaissants à tous les professeurs de master 1 et 2 en mathématiques appliquée.

-Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué et participé à ce travail, directement et indirectement.

Merci à vous tous.



Dédicace

*Au nom d'Allah le très miséricordieux le très miséricordieux et prière et pais sur
notre prophète Mohammed.*

A mémoire

Je dédie le fruit de cet humble effort à :

✚ *Mon cher père **Ammar***

*Qui m'a apprise à donner sans attendre, qui je porte fièrement son nom, qui a
travaillé dur pour mon confort.*

*A l'homme la plus précieuse paix à son âme qu'Allah l'accueille dans son vaste
paradis.*

*A ma chère mère qui m'a arrosé de tendresse et d'espairs, à la source d'amour
incessible qui ma bénie par ces prières.*

✚ *Ma chère mère **Noudjoud***

*- A mes très chers frères **Dayaa** et **Mouad** et ma belle sœur **Douaa** que dieu
vous donne santé, bonheur et surtout réussite.*

*- A mon cher oncle **Samir Boumselat** qui m'a encouragé et motivé dans mes
études.*

*Tout la famille **Djouambi** et **Boumeslate***

Les cousins, les voisins et les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant

Merci pour leurs encouragements

✚ *A ma chère amis et mon binôme **Aya** et toutes mes amis*

✚ *A tous les collègues de 2^{ème} Année Master Math Appliquée Promo 2024.*

✚ *A chaque personne qui m'a soutenu et encouragé durant ces années
d'études*

Merci à tous

Rania Djouambi

Dédicace

À mes parents,

À mes soeurs ,

À mon neveu

À ma famille,

À ceux que j'aime et à ceux qui m'aiment.

Aya.Dahdouche

ملخص

هدفنا الرئيسي في هذه المذكرة هو دراسة قابلية التحكم وإمكانية الملاحظة في بعض الأنظمة الديناميكية الفوضوية، في البداية سنعرض مقدمة عامة حول إمكانية التحكم وإمكانية الملاحظة ، ثم نقدم الأنواع والأساليب المستخدمة في التحكم والملاحظة، بالإضافة إلى التعريفات الديناميكية الفوضوية، ثم بعدها نقوم بتطبيق التحكم في الوضع المنزلق على النظام الفوضوي ارنيودو، في الأخير نستخدم طريقة رونغ كيتا للاستشهاد على النتائج المحققة.

كلمات مفتاحية: التحكم، الملاحظة، الأنظمة الديناميكية الخطية والغير خطية، النظام الديناميكي الفوضوي، التحكم في الوضع المنزلق، مراقب.

RÉSUMÉ

Notre objectif principal dans ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité et de l'observabilité de quelques systèmes dynamiques chaotiques, Nous commençons par présenter une introduction générale sur la contrôlabilité et l'observabilité, ensuite nous aborderons les types et les méthodes utilisées en contrôle et observateurs, ainsi que les définitions des systèmes dynamiques chaotiques, Nous appliquerons ensuite le contrôle par mode glissant au système chaotiques d'Arneodo, enfin nous utiliserons la méthode de **Runge-kutta** pour appuyer nos résultats obtenus.

Mots clés : La contrôlabilité, l'observabilité, système dynamique linéaire et non linéaire, systèmes dynamiques chaotiques, le contrôle mode glissant, observateur.

ABSTRACT

Our main objective in this thesis is to study the controllability and observability of certain chaotic dynamical systems, We will begin by providing a general introduction to controllability and observability, Subsequently, we will discuss the types and methods used in control and observers, as well as the definitions of chaotic dynamical systems, We will then apply sliding mode control to the chaotic systems of Arneodo, and finally, we will use the **Runge-Kutta** method to support our obtained results.

Keywords : Controllability, observability, linear and nonlinear dynamical systems, chaotic dynamical systems, sliding mode control, observer.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 La cotrôlabilité	4
1.1 Système dynamique	4
1.1.1 Système dynamique discret	5
1.1.2 Système dynamique continu	5
1.1.3 Système autonome et non autonome	6
1.2 Système de contrôlé	6
1.2.1 Ensemble accessible	8
1.2.2 Existence et unicité de la solutions	9
1.3 Contrôlabilité non linéaire	11
1.3.1 Contôlabilité locale	12
1.3.2 Test linéaire	12
1.3.3 Itégrale première	14
1.4 Contrôlabilité linéaire	15
1.4.1 Critère de Kalman	16
1.4.2 Matrice de contrôlabilité	18
1.4.3 Forme de Brunovsky	19
1.5 Équivalence linéaire de système	20

1.6	Stabilité du système contrôlé	21
1.7	Contrôle du système à temps discret	22
2	L' Observabilité	25
2.1	Notion d'observabilité	25
2.1.1	Principe de l'observation	26
2.2	L'observabilité non linéaire	27
2.2.1	Notion de l'observabilité non linéaire	28
2.2.2	Espace d'observabilité	29
2.2.3	Observabilité et condition de rang	29
2.3	Observateurs des systèmes non linéaires	32
2.3.1	Observateur de Luenberger étendu	32
2.3.2	Filtre de Kalman étendu (EKF)	32
2.3.3	Observateurs mode glissant	32
2.4	Observabilité linéaire	33
2.4.1	Équivalence linéaire	35
2.5	Observateurs des systèmes linéaires	37
2.5.1	Observateur de Luenberger :	37
2.5.2	Observateurs asymptotiques	38
2.6	Observabilité des systèmes au temps discret	39
3	Contrôle par mode glissant	40
3.1	Généralité sur les systèmes chaotiques	40
3.2	Système dynamique chaotique	41
3.2.1	Concept mathématique	41
3.2.2	Caractérisation du chaos	42
3.3	Test du chaos dans un système dynamique	43
3.4	Critères du chaos	43
3.4.1	Exposants de Lyapunov	43
3.5	Exemples de systèmes chaotiques	45
3.5.1	Système chaotique de Lorenz	45

3.5.2	Système chaotique de Genesio-Tesi	46
3.5.3	Système chaotique de Arneodo	47
3.6	Contrôle des systèmes dynamiques chaotiques	49
3.6.1	Problèmes de stabilisation	50
3.7	Techniques de contrôle des systèmes chaotiques	51
3.8	Synchronisation	51
3.9	Généralités Le contrôle par mode glissant	52
3.10	Principe de contrôle par mode glissant	52
3.10.1	Choix des surfaces de glissement	53
3.10.2	Condition d'existence et de convergence	54
3.10.3	Calcul de contrôle	54
3.11	Détermine la loi de contrôle	55
3.12	Phénomène de chattering	58
3.12.1	Elimination du phénomène de Chattering	58
3.13	Application du mode glissant pour le système d'arneodo	59
3.13.1	Stabiliser les systèmes en orbites périodiques	60
3.13.2	Le contrôle au point d'origine	62
	Conclusion	68

TABLE DES FIGURES

1.1	<i>Shéma du système de contrôle</i>	7
1.2	<i>Problème de contrôlabilité</i>	7
1.3	<i>Ensemble accessible</i>	9
1.4	<i>Contrôlabilité non linéaire</i>	11
2.1	<i>Esemble système-observateur</i>	27
3.1	<i>Attracteur de loranze</i>	46
3.2	<i>Attracteur de Genesio-Tesi</i>	47
3.3	<i>Attracteur de Arneodo</i>	48
3.4	<i>Simulation de l'état x_1, x_2, x_3 par aux temps</i>	49
3.5	<i>Modes de fonctionnement dans le plan</i>	53
3.6	<i>Contrôle appliquée au système</i>	55
3.7	<i>La valeur continue prise par le contrôle lors des commutations entre U_{min} et U_{max}</i>	56
3.8	<i>Définition de la fonction $sign(s(t))$</i>	57
3.9	<i>Le phénomène de "Chattering"</i>	59
3.10	<i>La fonction adoucie</i>	60
3.11	<i>Attracteur Arnodo contrôlé par U</i>	62
3.12	<i>Les série temporelle de x_1, x_2, x_3</i>	63

Table des matières

3.13	<i>Les systèmes équations différentielles contrôlé par U</i>	64
3.14	<i>La convergence entre les courbes Ure et $x1$</i>	65
3.15	<i>Convergence des états vers le point d'équilibre pour le système d'Arneodo</i>	66
3.16	<i>Simulation du système équations différentielles contrôlé par U</i>	67

INTRODUCTION

La contrôlabilité d'un système dynamique fait référence à la capacité de guider ce système de son état initial à son état final en utilisant des instructions appropriées. Ces instructions sont appelées la contrôlabilité du système dynamique. Cela selève des questions telles que : "Est-il possible d'atteindre tous les états du système en utilisant des instructions acceptables?", et "Dans quelles conditions peut-on contrôler le système?".

D'autre part, l'observabilité d'un système dynamique signifie sa capacité à déterminer son état interne en fonction de ses sorties observables. Cela pose des questions telles que : "Est-il possible de reconstruire complètement l'état du système sur la base des sorties observées?", et "Quels sont les critères à prendre en compte pour évaluer la conformité du système?".

Dans les années 1950 et 1960, le domaine du contrôle dynamique des systèmes a vu l'émergence des concepts de possibilité de contrôle et d'observabilité. Les définitions et les résultats théoriques initiaux liés à ces concepts ont été développés par des figures clés telles que Richard Kalman, Rudolf Kalman et Peter Falk [1][13][29]. Divers chercheurs ont également proposé des concepts variés pour le contrôle et l'observabilité. Ces concepts influencent différents domaines de la vie, y compris le génie de contrôle, la navigation spatiale et aérienne, les robots, la biologie, la médecine, l'automatisation industrielle, l'énergie et l'environnement.

La fonction implique la gestion des phénomènes chaotiques et contribue grandement à la stabilité des systèmes dynamiques et à leur contrôle, facilitant ainsi leur étude et leur gestion, À travers des applications telles que le contrôle des missiles, des drones et des satellites, cette spécialisation est particulièrement utile.

La capacité d'observation et de contrôle sont des concepts fondamentaux dans l'analyse des systèmes dynamiques chaotiques et leur gestion. Malgré les défis comme la sensibilité aux conditions initiales et un comportement à long terme imprévisible, divers outils et techniques sont disponibles pour les analyser et les appliquer dans différents domaines.

La caractéristique principale du chaos est qu'il se manifeste par un comportement spécifique d'un système dynamique déterministe non linéaire, Contrairement à la déterminabilité, ce système est entièrement défini par ses conditions initiales et sa dynamique.[40],[38],[33] .

Les mathématiciens et physiciens comme **Edward Lorenz**, **Robert Smale** et **Norbert Wiener** ont joué un rôle clé dans l'essor de l'étude du contrôle du chaos dans les années 1960. Lorenz a découvert un comportement chaotique sensible aux conditions initiales lors de l'analyse d'un modèle mathématique élémentaire de la convection atmosphérique. Cette découverte a été cruciale pour comprendre le chaos et a encouragé la recherche sur son contrôle. Et **Norbert Wiener**, en 1948, il écrit un livre dans lequel il connaît le contrôle et la communication des animaux et des machines et établit la relation entre Théorie du contrôle et de la physiologie [11].

Ce mémoire se concentre sur l'optimisation des concepts fondamentaux de l'observabilité et de la contrôlabilité, qu'ils soient linéaires ou non, en mathématiques appliquées. Et L'accent aussi est mis sur la théorie indispensable, les techniques d'analyse et de calcul.

En plus des différentes applications dans le domaine du mode glissant, le contrôle en mode glissant (CMD) fait partie du contrôle de structure variable et constitue une technique de contrôle puissante utilisée pour réguler les systèmes dynamiques non linéaires, en particulier ceux impliquant des incertitudes ou des perturbations. Cette méthode repose sur l'idée de développer un système le long d'une surface dans l'es-

pace d'état, appelée surface de glissement, conçue pour pousser le système vers l'état souhaité.[22]

Dans ce mémoire, nous avons focalisé sur l'implémentation de la contrôlabilité et de l'observabilité dans les systèmes dynamiques chaotiques. Il est organisée de la manière suivante :

Premier chapitre : les concepts des systèmes dynamiques et les notions fondamentales de la contrôlabilité des systèmes dynamiques sont abordés ce mémoire. Dans le but de rendre plus compréhensibles les sections suivantes de ce mémoire.

Deuxième chapitre : L'objectif de ce chapitre est d'explorer l'observabilité des systèmes dynamiques. Les définitions de l'observabilité linéaire et non linéaire et la définition d'observateur. Ensuite, nous examinons les méthodes les plus indispensables employées pour évaluer la validité d'un système.

Troisième chapitre : nous abordons les définitions indispensables des systèmes dynamiques chaotiques, ainsi que la compréhension du contrôle par mode glissant. Nous nous concentrons spécifiquement sur son utilisation dans le système dynamique chaotique d'arneodo.

CHAPITRE 1

LA COTRÔLABILITÉ

Dans ce chapitre, on a défini le système dynamique et la contrôlabilité des systèmes dynamiques continu et discret et on a donné les conditions fondamentales pour le contrôle et on a cité plusieurs types de contrôlabilité (linéaire et non linéaire). Nous avons mentionné les éléments les plus importants sur lesquels chaque type se concentre, ainsi que certains types de contrôlabilité, représentés par la méthode de contrôlabilité des systèmes dynamiques. Nous avons mentionné comment simuler et enfin comment stabiliser les systèmes non linéaires.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1.1 *Du point de vue mathématique, un système dynamique est défini à partir d'un ensemble de variables qui forment le vecteur d'état $X = \{x_i \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, \dots, n$ où n représente la dimension du vecteur.*

Ces variables caractérisent complètement l'état instantané du système dynamique. En associant en plus un système de coordonnées, on obtient l'espace d'état qui est également appelé l'espace de phase.

En plus de l'espace d'état, un système dynamique est défini par une loi d'évolution, généralement

désignée par dynamique, qui caractérise l'évolution de l'état du système au cours du temps.

La notion de déterminisme provient du fait que le système considéré est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique.[23]

Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

- Systèmes dynamiques discrets, - Systèmes dynamiques continus.

1.1.1 Système dynamique discret

Un système dynamique discret est représenté par des équations aux différences de la forme :

$$x(k+1) = G(x(k), k),$$

où $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système en temps discret.

Si on associe à cette dynamique un état initial $x_0 = x(k_0)$, alors pour chaque couple (x_0, k_0) donné, on peut identifier une solution unique

$$\Phi_G(\cdot, x_0, k_0) : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

telle que :

$$\Phi_G(k_0; x_0, k_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{\Phi}_G(k+1; x_0, k_0) = G(\Phi_G(k; x_0, k_0), k),$$

en temps discret, on définit également le système autonome comme une dynamique qui ne dépend pas de l'instant $k : x(k+1) = G(x(k))$. [23]

1.1.2 Système dynamique continu

Un système dynamique continu est décrit par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t),$$

où $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente la dynamique du système.

Si on associe à cette dynamique un état initial $x_0 = x(t_0)$, alors pour chaque couple

(x_0, t_0) on peut identifier une solution unique $\Phi(\cdot, x_0, t_0) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\Phi_F(t_0; x_0, t_0) = x_0,$$

$$\dot{\Phi}_F(t; x_0, t_0) = F(\Phi_F(t; x_0, t_0), t),$$

l'évolution des ensembles d'états successifs occupés par le système à chaque instant t représente la trajectoire du système.[23]

1.1.3 Système autonome et non autonome

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x, t),$$

lorsque le champ de vecteurs f ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome. Dans le cas contraire, il est non autonome.

Par un changement de variable approprié, on peut toujours transformer un système dynamique, non autonome de dimension n en un système dynamique autonome équivalent de dimension $(n + 1)$. [23]

1.2 Système de contrôlé

Système de contrôlé, un système au temps t est décrit par son état $x(t)$ et on modélise l'évolution du vecteur $x(t)$ au cours du temps, par système contrôlé (ou commandé). [15]

Dans ces notes, on considère système de contrôlé :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \tag{1.1}$$

la signification de l'équation (1.1), où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système et $x(\cdot)$ est solution de l'équation différentielle contrôlée, une fonction $u(t)$ définie un intervalle $[0, T]$ avec $T > 0$ (où $u \in \mathbb{R}^m$) est Apple loi de contrôle. À une loi de contrôle $u(\cdot)$ est associée une

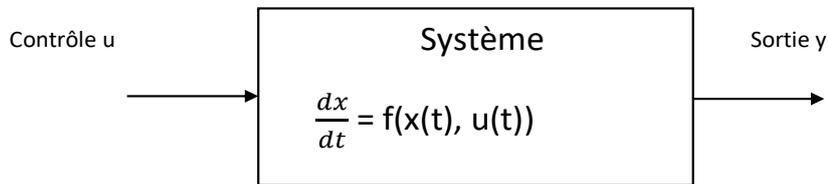


FIGURE 1.1 – *Shéma du système de contrôle*

équation différentielle ordinaire.

La fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est supposée de classe C^∞ . [27][15]

* **Problème de contrôlabilité** : est-il possible de trouver un contrôle $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ nous permettant de passer de l'état a à l'état b , c'est-à-dire que si $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, est solution de :

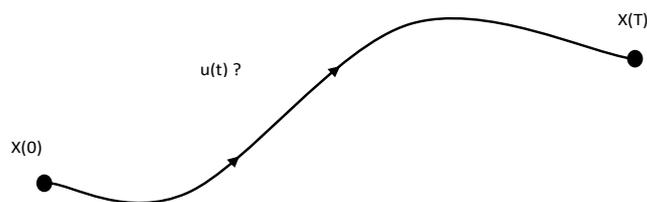


FIGURE 1.2 – *Problème de contrôlabilité*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

alors $x(T) = b$ Le temps T est fixé ou arbitraire suivant les cas considérés.

Définition 1.2.1 [37](*Trajectoire d'un système contrôlé*) On appelle trajectoire du système de contrôle (1.2) toute fonction régulière $t \in \mathbb{I} \rightarrow (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, qui satisfait identiquement sur un intervalle d'intérieur non vide I de \mathbb{R} les équations (1.2).

Définition 1.2.2 [37](*Le point d'équilibre du système* :) Un équilibre du système de contrôle $\dot{x} = f(x, u)$ est un couple $(x_e, u_e) = (0, 0)$ tel que :

$$f(x_e, u_e) = 0.$$

1.2.1 Ensemble accessible

Dans cette partie nous nous intéressons au problème générale suivant : soient n et m deux entières naturels non nuls et I un intervalle de \mathbb{R}^n , A et B deux applications de L^∞ sur I , à valeurs respectivement dans M_n et $M_{m,n}$; Soit Ω un sous-ensemble de \mathbb{R}^m et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Il s'agit de l'ensemble de contrôle U considéré : qui comprend toutes les applications mesurables et localement bornées sur I , et dont les valeurs sont dans le sous-ensemble. Avant de discuter de la notion de contrôlabilité linéaire, il est nécessaire de l'ensemble accessible.

Définition 1.2.3 [37](*l'ensemble accessible*)

On peut définir l'ensemble du point accessible à partir de x_0 en un temps $T > 0$ de la manière suivante :

$$Acc_\Omega(x_0, T) = x_u(T) \setminus u \in L^\infty([0, T], \Omega), \quad (1.4)$$

où $x_u(\cdot)$ est la solution du système (1.4) associée au contrôle u .

En d'autres termes, $Acc_\Omega(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions (1.4) sur le temps

T. Lorsqu'on modifie le contrôle u (voir figure 2.1). Pour maintenir la cohérence, on pose $Acc_{\Omega}(x_0, 0) = x_0$.

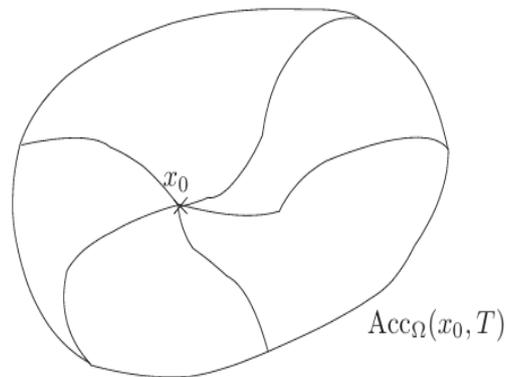


FIGURE 1.3 – Ensemble accessible

Définition 1.2.4 : *Le système contrôlé $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est dit contrôlable en temps T si $Acc_{\Omega}(x_0, T) = \mathbb{R}^n$ i.e, pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps T .*

1.2.2 Existence et unicité de la solutions

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et V un ouvert de \mathbb{R}^n . Considérons le problème de Cauchy.

[12]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

où f est une application de $I \times V$ dans \mathbb{R}^n , et $x_0 \in V$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz usuel, une solution maximale peut être trouvée si f est continue et localement lipschitzienne par rapport à x . Mais en théorie du contrôle, ces hypothèses doivent être affaiblies car on est amené à considérer des contrôles non continus (au mieux, continus par morceaux), et donc la continuité du second membre n'est plus assurée. Notamment, la solution, si elle est disponible, n'est pas en général dérivable partout, et il est donc essentiel de redéfinir de manière adéquate le concept de solution.

Définition 1.2.5 [12] On suppose que pour tout $x \in U$ la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est mesurable, et que pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue. On appelle solution du problème de Cauchy (1) tout couple $(J, x(\cdot))$, où J est un intervalle tel que $J \subset I$ et $t_0 \in J$, et où $x(\cdot)$ est une fonction absolument continue de J dans V telle que, pour tout $t \in J$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \text{ p.p. sur } J, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

une solution $(J, x(\cdot))$ est dite maximale si, pour toute autre solution $(\bar{J}, \bar{x}(\cdot))$, on a $\bar{J} \subset J$ et $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$ sur \bar{J} .

Théorème 1.2.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz).[12]

On suppose que la fonction $f : I \times V \rightarrow V$ vérifie les deux hypothèses suivantes :

1. f est localement lipschitzienne par rapport à x au sens suivant :

$$\forall x \in V \quad \exists r > 0, B(x, r) \subset V, \quad \exists \alpha \in L_{loc}^1(I, \mathbb{R}^+),$$

$$\forall t \in I \quad \forall y, z \in B(x, r) \quad \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t) \|y - z\|,$$

2. f est localement intégrable par rapport à t , i.e :

$$\forall x \in V \quad \exists \beta \in L_{loc}^1(I, \mathbb{R}^+) \quad \forall t \in I \|f(t, x)\| \leq \beta(t).$$

Alors pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in I \times V$, il existe une unique solution maximale $(J, x(\cdot))$ du problème de Cauchy ((1.5)).

Théorème 1.2.2 (Théorème d'explosion)

[12] Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, soit $(]a, b[, x(\cdot))$ une solution

maximale. Si $b < \sup I$, alors pour tout compact K contenu dans V , il existe un réel $\eta > 0$ tel que $x(t) \notin K$, pour tout $t \in]b - \eta, b[$.

Théorème 1.2.3 [12] Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, on suppose de plus que $V = \mathbb{R}^n$ et que f est globalement lipschitzienne par rapport à x , i.e.

$$\exists \alpha \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+) \mid \forall t \in I \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^n \quad \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t)\|y - z\|.$$

Alors $J = I$.

1.3 Contrôlabilité non linéaire

On considère le système (f étant une fonction régulière) :

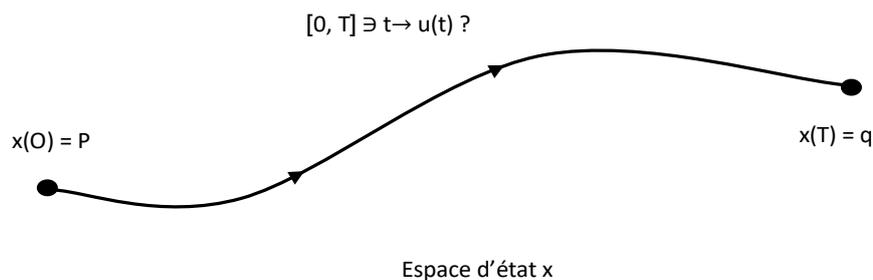


FIGURE 1.4 – Contrôlabilité non linéaire

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m. \quad (1.7)$$

1.3.1 Contôlabilité locale

Parlons maintenant de la contrôlabilité de systèmes de contrôle non linéaires. C'est un sujet très complexe, en particulier le contrôle global. C'est pourquoi nous vous proposerons la définition que nous utilisons dans ce livre pour la contrôlabilité locale d'un petit temps (nous devrions en fait dire la contrôlabilité locale d'un petit temps avec des contrôles proches de u_e).

Définition 1.3.1 [25](contrôlabilité locale) Soit $f(x_e, u_e) \in R_n \times R_m$ un équilibre du système de contrôle (1.2). Le système de contrôle (1.2) est contrôlable localement en petit temps à l'équilibre (x_e, u_e) si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, pour chaque $x_0, x_1 \in B_\eta(x_e) = \{x \in R_n; |x - x_e| < \eta\}$ il existe une fonction mesurable $u : [0, \varepsilon] \rightarrow R_m$ tels que :

$$|u(t) - u_e| \leq \varepsilon, \forall t \in [0, \varepsilon].$$

$$(\dot{x} = f(x, u(t)), x(0) = x_0) \Rightarrow (x(\varepsilon) = x_1).$$

1.3.2 Test linéaire

Dans cette partie, nous prouvons que si un système de contrôle linéarisé à un équilibre, (resp. Le long d'une trajectoire) est contrôlable, alors le système de contrôle non linéaire est Contrôlable localement à cet équilibre (resp. Le long de cette trajectoire). Nous présentons un application de ce résultat utile. Nous supposons que l'application f est uniquement de classe C^1 sur $R^n \times R^m$. Nous étudions dans cette partie[25].

-La contrôlabilité locale le long d'une trajectoire.

-Contrôlabilité locale à un point d'équilibre.

1-La contrôlabilité locale le long d'une trajectoire

Définissons maintenant la notion de (contrôlabilité locale le long d'une trajectoire).

Définition 1.3.2 Soit $(\bar{x}, \bar{u}) : [T_0, T_1]$ une trajectoire du système de contrôle $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ Le système de contrôle (1.2) est contrôlable localement le long de la trajectoire (\bar{x}, \bar{u}) si, pour tout

$\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ avec $|a - \bar{x}(T_0)| < \eta$ et $|b - \bar{x}(T_1)| < \eta$, il existe une trajectoire $(x, u) : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tel que :

$$x(T_0) = a, x(T_1) = b,$$

$$|u(t) - \bar{u}(t)| \leq \varepsilon, t \in [t_0, t_1].$$

Théorème 1.3.1 [27] Si le linéarisé autour de la trajectoire (\bar{x}, \bar{u}) est contrôlable, alors le système de contrôle, $\dot{x} = f(x, u)$ est localement contrôlable le long de la trajectoire (\bar{x}, \bar{u}) .

Définition 1.3.3 Le système de contrôle linéarisé le long de la trajectoire $(\bar{x}, \bar{u}) : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est le système de contrôle linéaire variable dans le temps.

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}), t \in [T_0, T_1],$$

où, au temps $t \in [T_0, T_1]$ l'état est $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et le contrôle est $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Théorème 1.3.2 Soit, $(\bar{x}, \bar{u}) : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ une trajectoire du système de (1.2), Supposons que le système de contrôle linéarisé le long de la trajectoire (\bar{x}, \bar{u}) est contrôlable. Alors le contrôle non linéaire le système (1.2) est contrôlable localement le long de la trajectoire (\bar{x}, \bar{u}) .

2-Contrôlabilité locale à un point d'équilibre [25]

On a (\bar{x}, \bar{u}) une trajectoire constante, et $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = (x_e, u_e) t \in [T_0, T_1]$, (x_e, u_e) est un point équilibre du système de contrôle (voir définition (1.2.2)).

Nous présentons la définition suivante :

Définition 1.3.4 Le système $\dot{x} = f(x, u)$ est localement contrôlable au point d'équilibre (x_e, u_e) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ avec $|a - x_e| < \eta$ et $|b - u_e| < \eta$ il existe $u \in C_d^0([0, \varepsilon]; \mathbb{R}^m)$ tel que :

$$(\dot{x} = f(x, u(t)) \quad \text{et} \quad x(0) = a) \implies (x(\varepsilon) = b)$$

$$|u(t) - u_e| < \varepsilon, \forall t \in [0, \varepsilon]$$

Le linéarisé au point d'équilibre $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ du système $\dot{x} = f(x, u)$ est le système de contrôle linéaire stationnaire :

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)u,$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état et $u \in \mathbb{R}^m$ le contrôle .

Théorème 1.3.3 Soit (x_e, u_e) un point d'équilibre du système de contrôle (1.2) Supposons que le système de contrôle linéarisé du système de contrôle (1.2) à (x_e, u_e) est contrôlable. Alors, le système de contrôle non linéaire (1.2) est petit temps contrôlable localement à (x_e, u_e) .

Considérons le système contrôlé (1.2) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)) & t > 0, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lisse et $f(0, 0) = 0$. Le système linéarisé à $x = 0, u = 0$ est le suivant [11] :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)u & t > 0, \\ x(t_0) = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

où :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0), \quad x_0 = 0.$$

Par conséquent, la condition de rang :

$$\text{rang} = [A, AB, AB^2, \dots, AB^{n-1}] = n,$$

C'est celui qui garantit la contrôlabilité de (1.3).

1.3.3 Intégrale première

Intégrale première sont des outils nécessaires pour analyser et contrôler les systèmes dynamiques, et elle cantine qui demeure constante le long des trajectoires du système,

peu importe le contrôle appliquée, Pour le dire autrement, l'application du contrôle ne modifie pas la valeur de l'intégrale première, Cela implique qu'une fonction a une dérivée nulle par rapport au temps le long des trajectoires du système.

•- La définition de l'intégrale première pour les systèmes contrôlés :

Définition 1.3.5 Une fonction régulière $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow h(t, x) \in \mathbb{R}$, est appelée intégrale première du système (1.3) , si elle est constante le long de toute trajectoire du système, une intégrale première est dite triviale si c'est une fonction constante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ [37].

Si $h(t)$ est une intégrale première, sa dérivée est nulle par rapport au temps le long des trajectoires du système, c.-à-d :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} \equiv 0.$$

Remarque 1.3.1 : Si l'intégrale première non triviale $h(x)$ est acceptée, alors (1.2) n'est pas contrôlable. Autrement dit, si $T > 0$ cela signifie que pour tout $p, q \in \mathbb{R}^n$ et tout instant initial t , $h(t, p) = h(t + T, q)$ il existe une trajectoire reliant p à q sur $t, (t + T)$, donc h est une fonction périodique du temps et ne dépend pas de x . Cependant, la dérivée de h le long des trajectoires du système correspond à $\frac{dh}{dt}$, étant donné qu'elle est nulle, H est une constante ce qui va à l'encontre de l'hypothèse.

Proposition 1.3.1 [37] Si le système (1.7) est contrôlable, alors ses intégrales premières sont triviales.

1.4 Contrôlabilité linéaire

A contrôlabilité linéaire est un concept fondamental en théorie du contrôle, qui détermine si un système linéaire peut être dirigé d'un état initial à un état final arbitraire en utilisant des commandes appropriées. Pour un système linéaire invariant dans le temps, la condition de contrôlabilité est généralement formulée à l'aide du critère de Kalman. Nous considérons ici les systèmes linéaires stationnaires du type :[37]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1.9}$$

ou :

- $x(t)$ est le vecteur d'état de dimension n .
- $u(t)$ est le vecteur de commande de dimension m .
- A est une matrice de transition d'état de dimension $n \times n$.
- B est une matrice d'entrée de dimension $n \times m$.

1.4.1 Critère de Kalman

Théorème 1.4.1 *Le système invariant dans le temps est globalement contrôlable \Leftrightarrow la condition de rang suivante est vérifiée :[15][9]*

$$\text{rang}(C) = \text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n.$$

Remarque 1.4.1 [15][9] *La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

Lemme 1.4.1 [12] *La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire*

$$\Phi : L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u \mapsto \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t) dt,$$

est surjective.

Preuve : Supposons tout d'abord que $\text{rang}(C) < n$, et montrons qu'alors Φ n'est pas surjective. L'application C étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que $\psi C = 0$. Par conséquent,

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1}B = 0.$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tels que

$$A^n = a_0 I + \dots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier k ,

$$\psi A^k B = 0,$$

et donc, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\psi e^{tA} B = 0.$$

Par conséquent, pour tout contrôle u , on a :

$$\psi \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0,$$

i.e. $\psi \Phi(u) = 0$, ce qui montre que ψ n'est pas surjective. Réciproquement, si ψ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait :

$$\psi \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0.$$

Ceci implique que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\psi e^{(T-t)A} B = 0.$$

En $t = T$ on obtient $\psi B = 0$

Ensuite, en dérivant par rapport à t , puis en prenant $t = T$, on obtient $\psi B A = 0$. Ainsi, par dérivations successives, on obtient finalement

$$\psi B = \psi A B = \dots = \psi A^{n-1} B = 0,$$

donc $\psi C = 0$, et donc $\text{rang} C < n$. Grâce à ce lemme, il est maintenant facile de démontrer le théorème. Lorsque la matrice C a un rang n , alors, selon le lemme, l'application est surjective, i.e. $\Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or, pour tout contrôle u , l'extrémité au temps T de la trajectoire associée à u est donnée par :

$$x(T) = e^{TA} x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} (B u(t) + r(t)) dt,$$

de manière à ce que l'ensemble accessible en temps T depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ soit

$$\text{Acc}_{\mathbb{R}^m}(T, x_0) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}r(t) dt + \Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n.$$

Cela prouve que le système peut être contrôlé.

Si le système est contrôlable de manière réciproque, il est en particulier contrôlable depuis x_0 défini par :

$$x_0 = -e^{-TA} \int_0^T e^{(T-t)A}r(t) dt.$$

Or en ce point l'ensemble accessible en temps T s'écrit :

$$\text{Acc}_{\mathbb{R}^m}(T, x_0) = \Phi(L^\infty).$$

Comme le système est contrôlable, l'ensemble est égal à \mathbb{R}^n . Ceci prouve que Φ est surjective donc, selon le lemme, la matrice C est de $\text{rang} = n$.

1.4.2 Matrice de contrôlabilité

La matrice de contrôlabilité est un concept clé en théorie du contrôle qui permet de déterminer si un système linéaire invariant dans le temps est contrôlable. Elle est utilisée pour évaluer si l'état d'un système peut être transféré de n'importe quel état initial à n'importe quel état final en utilisant des commandes appropriées. La matrice de contrôlabilité est définie comme suit [\[15\]](#) :

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

- si le rang de C est égal à n (la dimension de l'espace d'état), alors le système est contrôlable. Cela signifie qu'il est possible de choisir une séquence de commandes $u(t)$ pour déplacer le système de n'importe quel état initial $x(0)$ à n'importe quel état final $x(T)$ en un temps fini.
- Si le rang de C est inférieur à n , le système n'est pas complètement contrôlable, c'est-à-

dire qu'il existe certains états finaux qui ne peuvent pas être atteints à partir de certains états initiaux.

Exemple : Considérons un système linéaire continu avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de contrôlabilité est :

$$C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculons le rang de C :

$$\text{rang}(C) = 2$$

Puisque le rang de C est égal à la dimension de l'état

1.4.3 Forme de Brunovsky

Théorème 1.4.2 *Forme de Brunovsky [37]* Si $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$, la matrice de contrôlabilité de

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

est de rang $n = \dim(x)$ et si B est de rang $m = \dim(u)$, alors il existe un changement d'état $z = Mx$ (avec M une matrice inversible $n \times n$) et un bouclage statique régulier $u = Kz + Nv$ (avec N une matrice inversible $m \times m$), tels que les équations du système dans les variables (z, v) admettent la forme normale suivante (écriture sous la forme de m équations différentielles d'ordre ≥ 1).

$$\begin{aligned} y_1^{(\alpha_1)} &= v_1, \\ &\vdots \\ y_m^{(\alpha_m)} &= v_m, \end{aligned} \tag{1.10}$$

avec comme état

$$z = (y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, y_m, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m-1)}),$$

les α_i étant des entiers positifs. Les m quantités y_i , qui sont des combinaisons linéaires de l'état x , sont appelées sorties de Brunovsky. Les indices de contrôlabilité σ_k et les m entiers α_i de la forme de Brunovsky sont intimement liés : la connaissance des uns est équivalente à celle des autres.

1.5 Équivalence linéaire de système

Définition 1.5.1 [12] Les systèmes de contrôle linéaires $\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1$ et $\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2$ sont dits semblable (équivalence linéaire ou similitude de systèmes) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A_2 = PA_1P^{-1}$ et $B_2 = PB_1$,

remarque : $x_2 = Px_1$,

Proposition 1.5.1 de kalman est intrinsèque i.e :

$$(B_2, A_2B_2, \dots, A_2^{n-1}B_2) = P(B_1, A_1B_1, \dots, A_1^{n-1}B_1),$$

en particulier, le rang de la matrice de Kalman est invariant par similitude (équivalent linéaire).
Considérons une paire (A, B) où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Proposition 1.5.2 La paire (A', B') est semblable (équivalent linéaire) à une paire (A', B') de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_3 \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} B'_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Où $A'_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $B'_1 \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{R})$, r étant le rang de la matrice de Kalman de la paire (A, B) . De plus la paire (A', B') est contrôlable. [12]

Démonstration : [12] Supposons que le rang r de la matrice de Kalman C de la paire

(A, B) soit strictement plus petit que n (sinon, il n'y a rien à montrer). Le sous-espace :

$$F = \text{Im}C = \text{Im}B + \text{Im}AB + \dots + \text{Im}A^{n-1}B,$$

est de dimension r , et d'après le théorème d'Hamilton-Cayley il est clairement invariant par A . Soit G un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^n , et soient (f_1, \dots, f_r) une base de F , et (f_{r+1}, \dots, f_n) une base de G . Notons P la matrice de passage de la base (f_1, \dots, f_n) à la base canonique de \mathbb{R}^n . Alors, puisque F est invariant par A , on a :

$$A' = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_3 \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix},$$

et d'autre part, parce que $\text{Im}B \subset F$, on a :

$$B' = PB = \begin{pmatrix} B'_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on voit facilement que le rang de la matrice de Kalman de la paire (A'_1, B'_1) est égal à celui de la paire (A, B) .

1.6 Stabilité du système contrôlé

Considérons le système de contrôle non linéaire :

$$\dot{x} = f(x(t), u(x)),$$

Ce parti est dans les suivantes, on se donne $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ vérifiant :

$$f(0, 0) = 0.$$

Définition 1.6.1 On dit que le système $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ est localement (resp. globalement) asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback s'il existe $u \in C^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ s'annulant en 0 tel que $0 \in (\mathbb{R}^n)$ est localement (resp. globalement) asymptotiquement stable pour le système

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)).$$

Proposition 1.6.1 *Si le linéarisé de $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ en $(0, 0)$ est localement stabilisante à l'aide d'un feedback, alors le système $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ est localement asymptotiquement stabilisante à l'aide d'un feedback.*

Comme un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ contrôlable est globalement asymptotiquement stabilisante à l'aide d'un feedback .[27]

Corollaire 1.6.1 *Si le linéarisé de $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ en $(0, 0)$ est contrôlable, alors le système $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ est localement asymptotiquement stabilisé à l'aide d'un feedback.*

Montrons maintenant la proposition (1.3.1) On suppose donc que le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

où le contrôle est $u \in \mathbb{R}^m$ et l'état $y \in \mathbb{R}^n$ et où :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0),$$

est localement asymptotiquement stabilisante..

1.7 Contrôle du système à temps discret

Dans la littérature, plusieurs définitions de la contrôlabilité existent en fonction de la classe des systèmes dynamiques étudiés. Un système, qu'il soit continu ou discret, est dit contrôlable s'il existe une entrée permettant de conduire l'état d'un point a à un point b quelconque. Si cela est vrai pour toute condition initiale et à n'importe quel moment initial, le système est contrôlable.[36] Considérons le système non linéaire discret décrit par l'équation vectorielle suivante :

$$x(k + 1) = f(x(k), u(k)), \tag{1.11}$$

avec $k \in \mathbb{N}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état. $u(k) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée. La condition initiale du vecteur non linéaire ((1.11)) est donnée par :

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (1.12)$$

soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble arbitraire donné. La suite d'entrée.

$$u_l = f(k); \quad 0 \leq k \leq l; \quad u(k) \in U, \quad (1.13)$$

est appelée la suite d'entrées admissibles. L'ensemble de toutes les suites d'entrées admissibles des contrôles forment l'ensemble admissible de contrôle, noté U_l . Notons par $U_c \in \mathbb{R}^m$ le convexe fermé avec un sommet à zéro et $U^{c0} = U^c \cap \Omega^0$ est un voisinage de zéro. Pour une condition initiale donnée ((1.12)), et pour une suite d'entrées arbitraires admissibles 1.13, il existe une solution unique de l'équation de récurrence non linéaire (1.11), qui peut être calculée par des itérations successives. Pour étudier la contrôlabilité du système (1.11), le système à temps discret linéaire associé est décrit par l'équation suivante :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k).$$

Exemple 1.7.1 Soit l'équation :

$$lm\theta(t) = mg \sin(\theta(t)) - \mu m \cos(\theta(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

- Étudier la contrôlabilité du système :

► **La solution** : étudier la contrôlabilité du système, on pose :

$$\begin{cases} x_1(t) = \theta(t), \\ x_2(t) = \theta'(t). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta' = x_2(t), \\ x_2'(t) = \theta''(t), \end{cases}$$

on à :

$$\theta'' = \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) - \frac{\mu}{l} \cos(\theta(t))$$

$$= \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{\mu}{l} \cos(x_1(t)).$$

Donc :

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{\mu}{l} \cos(x_1(t)), \end{cases} .$$

non linéaire . ► Linéarisation de système au point(0.0) :

⇒

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l} \end{pmatrix} U$$

$$C = (B, AB) \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(C) = \frac{-1}{l^2} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{rang}(C) = 2.$$

Le système est localement contrôlable .

CHAPITRE 2

L' OBSERVABILITÉ

On a défini l'observabilité des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires, continus et discrets, ainsi que l'observateur et son importance fondamentale dans l'observabilité. Nous avons évoqué les principes de base sur lesquels reposent ces deux types. Enfin, nous avons mentionné les types d'observateurs.

2.1 Notion d'observabilité

La capacité d'un système dynamique à recréer l'état interne à partir des entrées et des sorties mesurées est ce qu'on appelle l'observabilité. L'observabilité est une propriété fondamentale des systèmes dynamiques qui détermine la possibilité de reconstruire l'état complet du système à partir des sorties mesurées et des entrées appliquées.

Et on appelle observabilité d'un système, la possibilité d'évaluer le vecteur d'état x à partir de mesures effectuées. On dit qu'un système est observable à l'instant t_1 si à partir de la connaissance du vecteur de sortie y et du vecteur d'entrée u , il est possible en un temps fini $t_2 > t_1$ de déterminer l'état $x(t_1)$.[\[32\]](#)

2.1.1 Principe de l'observation

Soit un système dynamique décrit par les équations d'état et de sortie suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)) & t > 0, \\ y = h(x, u), \end{cases} \quad (2.1)$$

-où $x(t) \in M$ représente l'état du système (ou l'espace d'état).

- $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ est l'entrée (ou l'espace entrée), et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie (ou l'espace sortie).

- $t \in \mathbb{R}$ et M est une variété différentiable C^∞ appelée espace d'état.

- Nous notons $f_u(x) = f(x, u)$, f_u est un champ de vecteurs C^∞ défini sur M pour tout u dans U , que nous supposons complet. L'application h définie de M dans \mathbb{R}^p est de classe C^∞ , h et f sont des fonctions non linéaire.[4]

Il est nécessaire de reconstruire les variables d'état non mesurées en utilisant les variables d'entrées et de sorties du système pour élaborer la commande. En conséquence, l'idée est d'utiliser un observateur.

* **Un observateur (ou reconstituteur d'état)**[5][37] : est un système dynamique capable de reconstituer l'état du système à partir des entrées et des sorties du système réel, ce qui veut dire qu'il Un observateur est une copie du système originale, qui a des gains correcteurs et des limites de commutation, et que l'on peut identifier comme un capteur informatique, car il est fréquemment connecté à un ordinateur pour reconstituer ou estimer en temps réel l'état actuel d'un système.

Les entrées d'un observateur sont donc les entrées $u(t)$ et les sorties $y(t)$ du système originale, et la sortie d'un observateur est l'état estimé $\widehat{x}(t)$, ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \widehat{f}(z(t), u(t), y(t)) & t > 0 \\ \widehat{x}(t) = \widehat{h}(z(t), u(t), y(t)), \end{cases} \quad (2.2)$$

l'observateur convergent asymptotiquement vers l'état réel du système. En d'autres termes, l'erreur entre le vecteur d'état $x(t)$ et $\widehat{x}(t)$ tend asymptotiquement vers zéro,

formule mathématique :

$$\| e(t) \| = \| x(t) - \hat{x}(t) \| \rightarrow 0, \text{ quant } t \rightarrow \infty.$$

* **L'objectif d'un observateur**[5][32] : est impératif de définir les fonctions $\dot{z}(t) = \hat{f}(z(t), u(t), y(t))$ et $\hat{x}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t))$, afin de garantir la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro. Peut le considérer comme un "espion" qui observe le comportement du système et essaie de déduire son état interne.

•**Remarque** : Avant de commencer à concevoir un observateur pour un système dy-

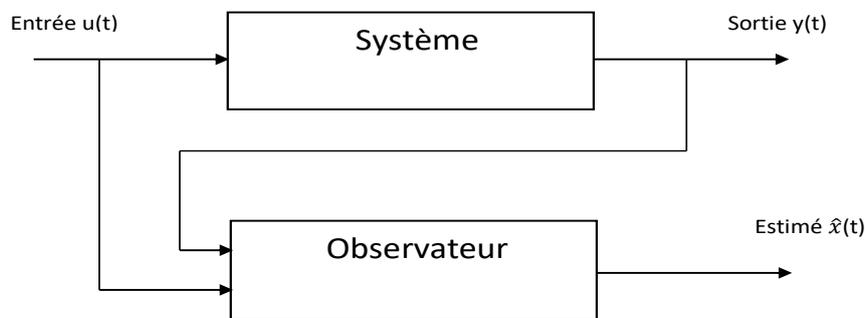


FIGURE 2.1 – *Esemble système-observateur*

namique, il est crucial de vérifier si l'état $x(t)$ peut être évalué à partir des entrées et sorties du système. (Autrement dit, le système est observable).

Cette partie présente un aperçu du problème d'observateur de l'état des systèmes linéaires et non linéaires. Nous rappelons quelques définitions concernant la notion d'observabilité.

2.2 L'observabilité non linéaire

L'observabilité d'un système garantit la possibilité de reconstruire l'état initial en se basant uniquement sur les entrées et sorties disponibles sur une période de temps

donnée. Un système est considéré comme observable lorsque l'état initial peut être reconstitué à partir des mesures des entrées et des sorties.[41]

L'observabilité des systèmes non linéaires, contrairement aux systèmes linéaires, n'a pas de définition unique et universelle. En effet, la nature non linéaire des interactions entre les variables du système rend difficile l'établissement d'une notion générale d'observabilité [32].

Considérons les systèmes non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ y = h(x(t)), \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $x \in R^n$, $u \in R^m$ et $y \in R^p$, les fonctions f et h étant régulières[5] Dans ce qui suit, les différentes définitions d'observabilité. Avant de définir l'observabilité, il est important d'abord de définir la notion de distinguable .[37]

2.2.1 Notion de l'observabilité non linéaire

La notion d'observabilité non linéaire repose sur la capacité de distinguer deux conditions initiales distinctes. On parle alors de la distinguable d'un couple de conditions initiales.[32][21]

Définition 2.2.1 *Pour le système (2.3) est dit observable sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, si toute condition L'initiale $x(t_0)$ est uniquement déterminée par l'entrée $u(t)$ et $y(t)$ la sortie correspondant au Système pour tout $t \in [t_0, t_1]$.*

Pour définir l'observabilité, il convient d'abord de définir la notion de distinguable.

Définition 2.2.2 (Distinguabilité[32][44]) : Deux états initiaux $x(t_0) = x_{01}$ et $x(t_0) = x_{02}$ tel que $x_{01} \neq x_{02}$ sont dits distinguables pour le système (2.3) si $\forall t \geq t_0$, on a les sorties correspondantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ vérifient $y_1(t) \neq y_2(t)$.

Réciproquement, on peut également définir le terme indistinguable.

Définition 2.2.3 (Indistinguabilité[32][44]) : deux états initiaux $x(t_0) = x_{01}$ et $x(t_0) = x_{02}$

sont dits indistinguables pour le système (2.3) si $\forall t \geq t_0$, on a les sorties correspondantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont identiques.

Il est maintenant possible de donner une définition de l'observabilité d'un système en un point, et par extension, de définir un système observable.

Définition 2.2.4 (Observabilité[32][44]) : Le système (2.3) est dit observable en x_0 si x_0 est distinguable de tout $x \in R^n$. Le système (2.3) est observable, si $\forall x_0 \in R^n$, x_0 est distinguable.

2.2.2 Espace d'observabilité

Définition 2.2.5 [32][30] Considérons Le système (2.3). L'espace d'observabilité, l'espace O est défini par le plus petit espace vectoriel contenant les sorties h_1, h_2, \dots, h_p et qui soit fermé sous l'opération de la dérivation de Lie par rapport au champ de vecteur $f(x, u)$, u étant fixe.

On note dO l'espace des différentielles des éléments de O . [32][30]

- ▷ Le système (2.3) est dit satisfaisant la condition de rang d'observabilité en x_0 si $\dim O(x_0) = n$.
- ▷ Le système (2.3) satisfait la condition de rang d'observabilité si, pour tout $x \in R^n$ $\dim O(x) = n$.
- ▷ On dit que le système (2.3) satisfait la condition le rang d'observabilité si :

$$\forall x \in v, \dim(dO) = n \iff \text{rang}(dO) = n.$$

★ Si le système (2.3) vérifie la condition de rang, alors il sera localement observable.

2.2.3 Observabilité et condition de rang

Dans cette section, nous exposons les cas particuliers ainsi que les conditions suffisantes d'observabilité pour le système (2.3).

Pour vérifier l'observabilité des systèmes non linéaires, il est possible d'utiliser les dérivées de Lie, qui dépendent des entrées appliquées. [12][20]. Rappelons que selon les besoins, un champ de vecteurs f peut être interprété de deux manières :

♣ **Première étape** : lorsque interprète un champ de vecteurs f , comme une application qui associe à chaque point x un vecteur $f(x)$ on peut l'écrire dans la base canonique de la manière suivante[37][3] :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

les f_i sont considérés comme les composantes du champ de vecteurs. Dans cette représentation, on affirme également que le champ de vecteurs régit un système d'équations différentielles, ou une dynamique, où les trajectoires(courbe) tangentes $x(t)$ satisfon t :

$$\dot{x} = f(x, t).$$

On dit que $x(t)$ est une courbe intégrale de f .

♣ **Deuxième étape** : Lorsqu'on le considère comme une dérivation, il doit être écrit de la manière suivante :

$$f = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Dans ce contexte, il agit sur une fonction réelle $h(x)$ de la manière suivanté :

$$L_f h = f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial h}{\partial x_n}.$$

La fonction $L_f h$ est appelée la dérivée de Lie de h dans la direction de f :

si : $f = \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors $L_f h = \frac{\partial h}{\partial x_i}$, En reconnaissant les dérivées partielles, il est clair que :

$$L_f h = dh(f) = \nabla h f = \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y}.$$

Où dh est la différentielle de h , et hf est le produit scalaire du gradient ∇f de h avec f
À présent, nous sommes prêts à formuler une définition "faible" de la notion d'observabilité telle que présentée par. [3]

Pour le système dynamique de la forme (2.3), la paire (f, h) est dite observable au sens

du rang si la différentielle de la sortie h , avec les différentielles de ses dérivées de Lie successives dans la direction de f jusqu'à l'ordre n , sont linéairement indépendantes (dans un voisinage de 0).

Définition 2.2.6 [20] *Considérons le système dynamique de la forme (2.3) On dit que la paire (f,h) est observable au sens du rang si la condition donnée par (2.4) est satisfaite.*

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = \text{rang} \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \end{pmatrix} = n, \quad (2.4)$$

où :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

être égal à la dimension du vecteur d'état n , $L_f h$ étant le dérivé de Lie de h d'ordre k le long de $f(x, u)$. L'écriture de $dL_f^k h$ est donnée par le coefficient suivant :

$$dL_f^k h = \left(\frac{\partial L_f^k h}{\partial x_1}, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_n} \right).$$

Exemple 1 : Soit, le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_1^2}{2} + \exp(x_2) + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Dans ce système, $h = [x_1 \ 0]$ et $dh = [1 \ 0]$. Appliquons la condition du rang d'observabilité donnée en (2.4) : D'après (2.5), on a :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} dh \\ dL_f h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & \exp(x_2) + 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Alors $\text{rang}(O) = 2 = n$. Le système est donc localement observable .

2.3 Observateurs des systèmes non linéaires

2.3.1 Observateur de Luenberger étendu

Ce type d'observateur intervient soit directement sur le système original avec un gain constant, soit par le biais d'un changement de coordonnées avec un gain dépendant de l'état à estimer. Dans le premier cas, l'idée repose sur la linéarisation du modèle et l'utilisation de la théorie du placement de pôles pour calculer le gain, à condition que l'état reste toujours proche de l'état d'équilibre.[17]

2.3.2 Filtre de Kalman étendu (EKF)

Le filtre de Kalman étendu est l'une des techniques d'estimation les plus populaires et largement étudiées pour les systèmes dynamiques non linéaires. Ce filtre consiste à appliquer les équations du filtre de Kalman standard à un modèle non linéaire, linéarisé à l'aide de la formule de Taylor au premier ordre. Le filtre de Kalman étendu a été utilisé avec succès sur divers types de processus non linéaires. Cependant, les preuves de stabilité et de convergence établies pour les systèmes linéaires ne peuvent généralement pas être étendues aux systèmes non linéaires.[17]

2.3.3 Observateurs mode glissant

Tout comme la commande par modes glissants, le principe des observateurs à modes glissants consiste à utiliser des fonctions discontinues pour contraindre les dynamiques d'un système d'ordre n à converger vers une variété S de dimension $(n - p)$, appelée surface de glissement, où est la dimension du vecteur de mesure. L'attractivité et l'invariance de cette surface sont garanties par la condition de glissement. Dans le cas des observateurs à modes glissants, les dynamiques concernées sont celles des erreurs d'observation, définies par : $\tilde{x} = \hat{x} - x$.[17][30]

2.4 Observabilité linéaire

Le cas linéaire autonome :[12]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.7)$$

où , $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbb{M}_{p,m}(\mathbb{R})$

On peut supposer que $D = 0$, cela ne change rien aux résultats qui suivent.

La solution du système ((2.7))est donnée par[10] :

$$z(t) = z(t, x_0, u) = Ce^{tA}x_0 + C \int_0^t e^{t-v}(A)Bu(v)dv, t \in [0, T] dv.$$

Théorème 2.4.1 [2][12] *Le système ((2.7)) est observable (en temps T quelconque) si et seulement si :*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n,$$

faisons une démonstration directe de ce théorème. On montre d'abord le lemme fondamental suivant.

Lemme 2.4.1 [12] *Le système ((2.7)) est observable en temps T si et seulement si, pour le système observé $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $y(t) = Cx(t)$, $x(0) = x_0$, on a $x_0 \neq 0 \Rightarrow y(\cdot) \neq 0$ sur $[0, T]$.*

Preuve. Le système ((2.7)) est observable en temps T si et seulement si :

$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow \exists u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) \text{ t.q. } y_u(\cdot, x_1) \neq y_u(\cdot, x_2) \text{ sur } [0, T]$$

$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow \exists u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) \exists t \in [0, T]$$

$$\iff Ce^{tA}x_1 + Ce^{tA} \int_0^t e^{-sA} Bu(s) ds \neq Ce^{tA}x_2 + Ce^{tA} \int_0^t e^{-sA} Bu(s) ds$$

$$\iff (x_0 = x_1 - x_2 \neq 0) \Rightarrow \exists t \in [0, T] | Ce^{tA}x_0 \neq 0$$

$$\iff (x_0 \neq 0) \Rightarrow y(\cdot) \neq 0 \text{ sur } [0, T] \text{ pour le système } \dot{x}(t) = Ax(t), y(t) = Cx(t), x(0) = x_0,$$

on est maintenant en mesure de montrer le théorème.

Si ((2.7)) n'est pas observable en temps T , alors

$$\exists x_0 \neq 0 | \forall t \in [0, T] y(t) = 0;$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0, T] Ce^{tA}x_0 = 0,$$

d'où, par dérivations successives, en prenant $t = 0$,

$$Cx_0 = CAx_0 = \dots = CA^{n-1}x_0 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x_0 = 0, \text{ et donc } \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} < n,$$

réciroquement, si le rang de cette matrice est strictement inférieur à n , alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que :

$$Cx_0 = CAx_0 = \dots = CA^{n-1}x_0 = 0,$$

et donc par le théorème d'Hamilton-Cayley,

$$\forall t \in \mathbb{R} Ce^{tA}x_0 = 0,$$

et par conséquent le système ((2.7)) n'est pas observable. ■

Remarque [12] On a :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} C^\top & A^\top C^\top & \dots & A^{n-1 \top} C^\top \end{pmatrix} = n,$$

et par conséquent, le système $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ est observable si et seulement si le système $\dot{x} = A^\top x + C^\top u$ est contrôlable. C'est la dualité contrôlabilité/observabilité. Ce fait, très important, permet de transférer aux systèmes observés tous les résultats établis sur les systèmes contrôlés.

On aurait pu prouver cette équivalence directement en utilisant l'application entrée-sortie, et en remarquant qu'une application linéaire $E : L^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ est surjective si et seulement si l'application adjointe $E^* : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2$ est injective.

Corollaire [12] Le système ((2.7)) est observable en temps T si et seulement si la matrice

$$O(T) = \int_0^T e^{-s^\top A} C C e^{-sA} ds$$

est inversible.

2.4.1 Équivalence linéaire

Définition :(équivalence linéaire)[12]

Les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2, \end{cases}$$

sont dits linéairement équivalents s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A_2 = P A_1 P^{-1}, \quad B_2 = P B_1, \quad C_2 = C_1 P^{-1}$$

(et dans ce cas, on a $x_2 = Px_1, u_2 = u_1, y_2 = y_1$).

Exemple2 : Soit l'équation :

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + k \frac{dx(t)}{dt} = u(t). \quad (2.8)$$

- Etudier l'observabilité du système : avec $y = x$.

► **La solution** : Etude l'observabilité de système : si : $y=x$, donc on pose :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x'' \end{cases}$$

D'après l'équation on (2.8) :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{u(t)}{m}.$$

Donc :

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\frac{k}{m}x_2 + \frac{u}{m} \end{cases}.$$

⇒

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{m} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} U$$

La sorti Si $y = x = [1 \ 0]X$. le système est observable si :

$O =$

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U \Rightarrow \text{rang}O = 2.$$

On $\det(O) = 1 \neq 0$. Donc le système est observable .

2.5 Observateurs des systèmes linéaires

2.5.1 Observateur de Luenberger :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k), \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, et $y(k) \in \mathbb{R}^p$ représentent, respectivement, le vecteur d'état, le vecteur d'entrée, et le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sont des matrices constantes.[36] L'observateur de Luenberger se base sur les techniques de placements de pôles. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) = C\hat{x}(k), \end{cases}$$

où $\hat{x}(k)$ est l'état estimé de $x(k)$ et L est un gain assurant

$$\forall x_0 \text{ et } \hat{x}_0, \lim_{k \rightarrow \infty} (x(k) - \hat{x}(k)) = 0.$$

L'erreur d'estimation entre l'état réel $x(k)$ et l'état estimé $\hat{x}(k)$ est exprimée par :

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k). \tag{2.9}$$

En partant de l'équation 2.9, la dynamique de l'erreur d'estimation est calculée :

$$e(k+1) = (A - LC)e(k).$$

Pour assurer la stabilité de l'erreur d'estimation, il suffit de trouver un gain L tel que la matrice $(A - LC)$ soit Schur stable, c'est-à-dire toutes ses valeurs propres sont à l'intérieur du cercle unité. La détectabilité du couple (A, C) est une condition nécessaire et suffisante de l'existence du gain L . [36]

2.5.2 Observateurs asymptotiques

Comme on l'a déjà dit, il est classique de noter par $\hat{x}(t)$ une estimation de la quantité $x(t)$. Nous cherchons ici à obtenir une estimation de l'état sans utiliser les dérivées de y et u . La première idée qui vient à l'esprit est de copier la dynamique du système. On intègre directement [36]

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu,$$

à partir d'une condition initiale \hat{x}_0 et des valeurs connues du contrôle u à chaque instant. Si la matrice A est stable, alors \hat{x} peut être pris comme estimation de x car l'erreur $e_x = \hat{x} - x$ tend naturellement vers 0 puisque $\frac{d}{dt}e_x = Ae_x$.

Si A est instable cette méthode ne marchera pas. En effet, une petite erreur initiale $e_x(0)$ sera amplifiée exponentiellement. Intuitivement, si l'erreur $\hat{x} - x$ devient grande alors, le système étant observable, l'erreur sur les sorties $\hat{y} - y$ deviendra grande également. Comme y est connue, il est alors tentant de modifier

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu(t),$$

par l'ajout d'un terme du type $-L(\hat{y} - y)$ qu'on connaît et qui correspond à l'erreur d'observation. Le problème suivant se pose : peut-on choisir la matrice L de façon à ce que la solution \hat{x} du système

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu(t) - L(\hat{y} - y), \quad \hat{y} = C\hat{x},$$

converge vers x Puisque $y = Cx$, la question se pose ainsi : peut-on ajuster la matrice L de façon à obtenir une équation différentielle d'erreur stable

$$\frac{d}{dt}e_x = (A - LC)e_x.$$

Soyons plus exigeants encore, par un choix judicieux de L , peut-on imposer à $A - LC$ d'avoir toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative . Or, les valeurs propres restent inchangées par la transposition : $A - LC$ admet le même spectre

que $A^T - C^T L^T$. De plus, la paire (A, C) est observable si, et seulement si, la paire (A^T, C^T) est contrôlable (comme on l'a déjà évoqué, on obtient le critère de Kalman de contrôlabilité en transposant celui de l'observabilité). Ainsi, le théorème 25 se transpose de la manière suivante. Placement de pôles. Observateur asymptotique.

★ **Placement de pôles. Observateur asymptotique :**

Théorème : Si (A, C) est observable, il existe L , une matrice $n \times p$, telle que le spectre de $A - LC$ soit le même que celui de n'importe quelle matrice réelle $n \times n$ librement choisie.

2.6 Observabilité des systèmes au temps discret

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques définitions de l'observabilité pour une classe de systèmes non linéaires à temps discret.[36] Soit le système non linéaire décrit par :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)), \\ y(k) = h(x(k)), \end{cases} \quad (2.10)$$

avec $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}^p$. Pour chaque entrée $u(k)$ constante, $f(x(k), u(k))$ est un champ de vecteur C^∞ sur \mathbb{R}^n , et l'ensemble $h(x(k))$, $k = 1, \dots, P$ sont des fonctions C^∞ de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R} . La suite d'entrées admissibles est exprimée comme suit :

$$u_l = u(k); 0 \leq k < p \quad u(k) \in U,$$

la solution à l'instant $k \leq 0$ du système (2.10) soumis à la contrôle u_l et partant de condition initiale $x(0) = x_0$ à l'instant $k = 0$ est désignée par $x_l^{(*)} = (k, 0, x_0)$.

Définition 2.6.1 [36] Soit deux états distincts x_0 et \bar{x}_0 . Ces deux états sont discernables, si $k \geq N$ et pour toute suite d'entrées admissibles u_l , les trajectoires $h(x_l^*(k, 0, x_0))$ et $h(x_l^*(k, 0, \bar{x}_0))$ sont différentes sur un même domaine de définition. x_l distingue donc les points x_0 et \bar{x}_0 . Le système (2.10) est dit observable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si l'ensemble des états indiscernables de x_0 ne contient que x_0 .

CHAPITRE 3

CONTRÔLE PAR MODE GLISSANT

On a défini les systèmes dynamiques continus, discrets, autonomes et non autonomes. Nous avons également défini les systèmes dynamiques chaotiques et les théories fondamentales. Le principe de base du chaos est représenté par l'exposant de Lyapunov. Nous avons expliqué et donné quelques exemples de systèmes dynamiques chaotiques, notamment en contrôle et dans les techniques des systèmes chaotiques. Enfin, nous avons donné la méthode du mode glissant et les principes les plus importants qui reposent sur cette méthode, ainsi qu'une application sur le système dynamique chaotique d'Arneodo.

3.1 Généralité sur les systèmes chaotiques

Pendant plusieurs siècles de l'histoire de la science et jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle, les scientifiques interprétaient les phénomènes naturels par la physique déterministe. Dans la conception déterministe, l'état présent d'un phénomène physique est l'effet d'un état antérieur et la cause d'un état futur. Néanmoins, plusieurs comportements complexes qui existaient à cette époque, tels que les phénomènes météorologiques, ne trouvaient pas d'explication dans cette vision déterministe. Au début du

vingtième siècle, Henri Poincaré a expliqué ces phénomènes par leur sensibilité aux conditions initiales. En 1967, Edward Lorenz a présenté un système dynamique déterministe ayant un comportement complexe manifesté par un attracteur étrange et caractérisé par une forte sensibilité aux conditions initiales. Quatre ans plus tard, James York a introduit pour la première fois le terme chaos pour décrire les systèmes déterministes et imprévisibles. Depuis ces découvertes, la théorie du chaos a trouvé diverses applications en mathématiques, en physique, en électronique, en biologie, en médecine et plus récemment en télécommunications.

3.2 Système dynamique chaotique

La terminologie liée aux modèles chaotiques n'est pas encore standardisée, et il existe plusieurs définitions des systèmes chaotiques. Nous présentons ici l'une des plus simples. Imaginons un système dynamique en temps continu.[28]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x), \\ y(t) = h(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où : $x(t) \in R^n$ est le vecteur système, $0 \leq t < \infty$.

Pour représenter ces systèmes dynamiques, nous allons introduire des concepts et des définitions qui nous aideront à mieux comprendre les phénomènes chaotiques.[18]

3.2.1 Concept mathématique

Il est caractérisé par les définitions suivantes[7][33] :

Définition 3.2.1 *L'ensemble fermé $\Omega \in R^n$ est appelé attracteur du système si (a) il existe un ensemble ouvert $\Omega_0 \subset \Omega$ tel que toutes les $x(t)$ du système (3.1) commençant par sont définis pour tous $t \geq 0$ et tendent à Ω pour $t \mapsto \infty$ c'est-à-dire $\text{dist}(x(t), \Omega) \mapsto 0$, pour $t \mapsto \infty$, si $x(0) \in \Omega_0$, où $\text{dist}(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$ est la distance du point x à l'ensemble Ω , et (b) aucun seuil propre de Ω possède cette propriété.*

Définition 3.2.2 *Un attracteur est appelé chaotique s'il est borné et toute trajectoire qui commence est une trajectoire instable de Lyapunov.*

Définition 3.2.3 [28] *Un système est appelé chaotique s'il a au moins un attracteur chaotique.*

L'instabilité de Lyapunov est la caractéristique principale des oscillations chaotiques, se traduisant par une sensibilité extrême aux conditions initiales. En d'autres termes, deux trajectoires initialement très proches vont nécessairement s'éloigner l'une de l'autre de manière significative au fil du temps.

Définition 3.2.4 *Un système chaotique est un système dont l'exposant de Lyapunov est strictement positif.*

3.2.2 Caractérisation du chaos

Le chaos dans les systèmes dynamiques se caractérise par plusieurs propriétés distinctives qui nous permettent de les identifier. Et ces caractéristiques sont [23] :

1 – ★) **Sensibilité aux conditions initiales** : communément appelée « effet papillon » elle a été popularisée par le météorologue Edward Lorenz, un battement d'aile d'un papillon à Paris peut provoquer une tempête à New York. Elles sont très sensibles aux conditions de départ, ce qui signifie que même des conditions initiales presque identiques entraînent une séparation rapide des trajectoires.

2 – ★) **La non-linéarité** : Un système chaotique est un système dynamique non linéaire, contrairement à un système linéaire qui ne peut pas être chaotique. La notion de système dynamique concerne tous les systèmes dont l'évolution dépend du temps. En règle générale, pour prédire les phénomènes réels générés par ces systèmes, on construit un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets (causes/effets). Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. En revanche, dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause .[33]

3 – ★) **Le déterminisme** : Un système chaotique est caractérisé par des règles fondamentales déterministes plutôt que probabilistes. En général, il est décrit par des

équations différentielles non linéaires bien définies.

4 – ★) **L'imprévisibilité** : Du fait de la sensibilité aux conditions initiales, qui ne peuvent être connues qu'avec une précision limitée.

5 – ★) **L'irrégularité** : En plus de la sensibilité aux conditions initiales, les systèmes chaotiques se caractérisent par un comportement imprévisible et aléatoire, se traduisant par une évolution complexe, non périodique et non prédictible.

3.3 Test du chaos dans un système dynamique

Certains tests sont nécessaires pour déterminer si un système est chaotique ou non. Dans un système dynamique, cette détermination se fait en éliminant les comportements. Si le comportement d'un système dynamique n'est ni un point fixe, ni périodique ou quasi périodique, on en conclut qu'il est chaotique. Cette méthode n'est pas applicable dans le cas d'un système perturbé par du bruit. L'exposant de Lyapunov est utilisé pour quantifier la divergence des trajectoires d'un système dynamique provenant de conditions initiales différentes, et sa valeur est un indicateur utilisé pour tester le chaos dans le système.[18]

3.4 Critères du chaos

3.4.1 Exposants de Lyapunov

Les valeurs propres de la matrice dynamique des systèmes linéaires permettent de caractériser les points d'équilibre et leur stabilité.

Les exposants de Lyapunov sont une généralisation de ces valeurs propres et permettent de caractériser un attracteur ω , Les exposants de Lyapunov sont des grandeurs qui mesurent la divergence entre différentes trajectoires au sein d'un attracteur. [14][33]

Soit un système dynamique autonome :

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad (3.2)$$

on considère d'abord que ce système est de dimension $n = 1$. Soient deux conditions initiales très proches, x_0 et x'_0 . La trajectoire issue de la condition initiale x_0 est $x_k = f^k(x_0)$, et celle issue de la condition initiale x'_0 est : $x'_k = f^k(x'_0)$. Si les trajectoires s'écartent à un rythme exponentiel après k itérations, alors :

$$|x'_k - x_k| = |x'_0 - x_0| \cdot \exp(k\lambda),$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ correspond au taux de divergence des deux trajectoires, il vient :

$$\lambda = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{x'_k - x_k}{x'_0 - x_0} \right|,$$

si l'on considère que les deux conditions initiales sont très proches, leur différence $\varepsilon = |x'_0 - x_0|$ tend vers 0 et, lorsque k tend vers l'infini, il vient :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x'_k - x_k}{x'_0 - x_0} \right),$$

cette relation est équivalente à :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x'_k - x_k}{x'_{k-1} - x_{k-1}} \cdot \frac{x'_{k-1} - x_{k-1}}{x'_{k-2} - x_{k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{x'_1 - x_1}{x'_0 - x_0} \right),$$

ce qui se réécrit aussi :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{x'_{i+1} - x_{i+1}}{x'_i - x_i} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{f(x'_i) - f(x_i)}{x'_i - x_i} \right|,$$

finalemt, cette relation devient :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right|.$$

Le terme λ_L est appelé exposant de Lyapunov de la trajectoire $x_k = f^k(x_0)$ et ne doit pas être confondu avec λ ou λ_i , valeur propre d'un système linéaire. λ_L mesure le taux moyen de convergence ou de divergence de deux trajectoires issues de conditions

initiales très proche. S'il est positif, les trajectoires divergent. Très souvent dans la littérature, si $\lambda_L > 0$, le système est dit chaotique. Intuitivement, cela reflète la sensibilité aux conditions initiales.

La relation se généralise aux systèmes de dimension $n > 1$, qui possèdent alors n exposants de Lyapunov. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un axe de l'espace de phase. On a alors $x_k = f^k(x_0)$ avec $x_k = [x_k^{(1)} \dots x_k^{(n)}]^T \in \mathbb{R}^n$ et $f = [f_1 \dots f_n]^T$. Les n exposants de Lyapunov λ_{L_i} s'écrivent :

$$\lambda_{L_i} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |\lambda_i(J_k \dots J_1)|, i = 1, \dots, n,$$

$\lambda_i(J_k \dots J_1)$ représente la i ème valeur propre du produit des matrices $(J_k \dots J_1)$. Les J_k sont les matrices *jacobiennes* issues de la linéarisation de f autour de x_k . Une condition nécessaire pour qu'un système dynamique à temps discret (3.2) soit chaotique est qu'au moins un de ses exposants de Lyapunov soit positif [14][33].

Tableau 1.1 Signe de l'exposant de Lyapunov et ses significations :

Etat	Attracteur	Dimension	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	Cercle	1	$\lambda_1 = 0 \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Période d'ordre 2	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Périod d'ordre k	K-Tore	K	$\lambda_1 = \dots \lambda_k = 0 \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entière	$\lambda_1 > 0 \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper chaotique		Non entière	$\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0 \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

3.5 Exemples de systèmes chaotiques

3.5.1 Système chaotique de Lorenz

En 1963, le météorologue Edward Lorenz a été le premier à mettre en évidence le caractère vraisemblablement chaotique de la météorologie. Le modèle de Lorenz, également appelé système dynamique de Lorenz, constitue une modélisation simplifiée de phénomènes météorologiques. Ce modèle tridimensionnel engendre un compor-

tement chaotique dans certaines conditions, démontrant les limites de la prédiction à long terme de l'évolution climatique et météorologique. Le modèle mathématique du système de Lorenz est donné par [31] :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = (r - z)x - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (3.3)$$

x , y et z sont les variables d'état du système. σ , r et b sont des paramètres du système. La gravité de ce système de Lorenz est représentée sur la figure (3.1), dans laquelle nous montrons la sensibilité du système aux conditions initiales qui ont provoqué le chaos.

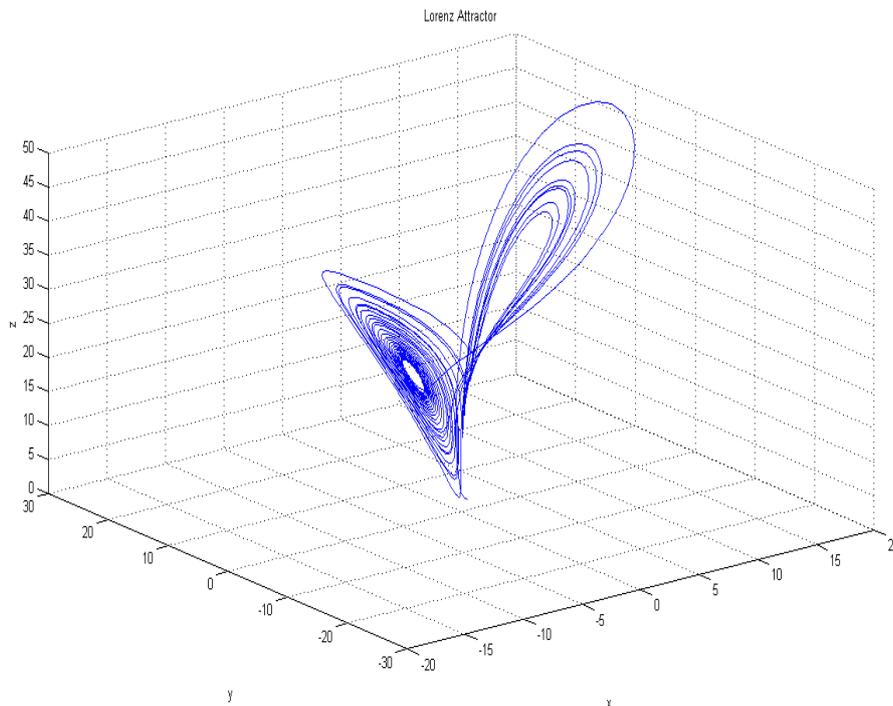


FIGURE 3.1 – *Attracteur de Lorenz*

3.5.2 Système chaotique de Genesio-Tesi

Le système chaotique proposée par Genesio et Tesi, souvent appelé système Genesio-Tesi, est un exemple fascinant de dynamique chaotique dans les systèmes dynamiques,

ce système tridimensionnel est généralement représenté par un ensemble d'équations différentielles non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -az - by - cx - x^2, \end{cases} \quad (3.4)$$

la représentation graphique de ce système est donnée par la figure (3.2), où on voit l'évolution des états de l'attracteur de Genesio-Tesi x_1 , x_2 , et x_3 en fonction du temps pour des conditions initiales différentes $x_0 = 0.2$, $y_0 = -0.3$ et $z_0 = 1$. On voit clairement le comportement chaotique due aux sensibilités des conditions initiale.

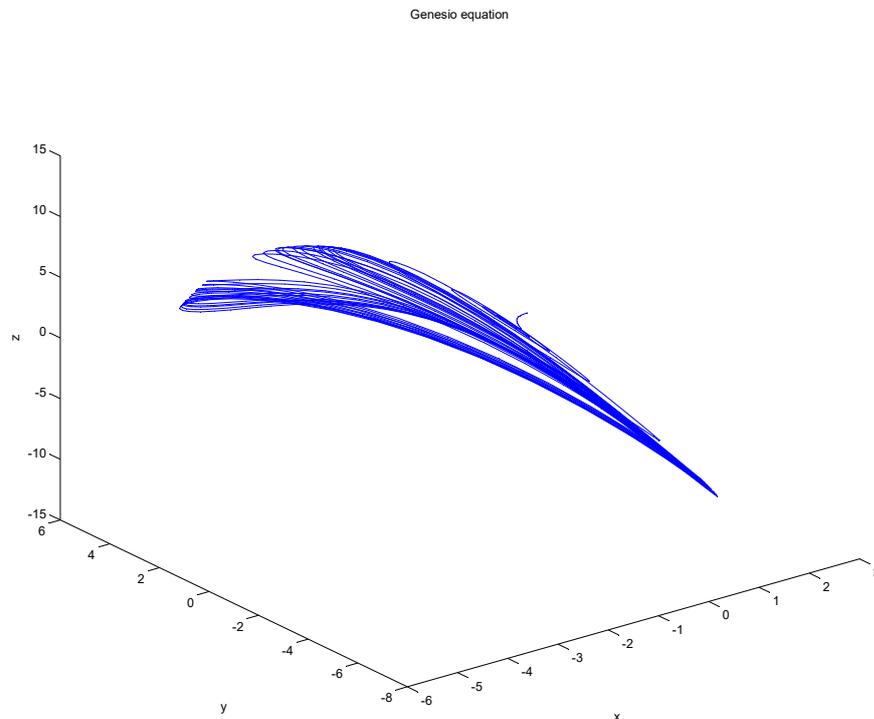


FIGURE 3.2 – *Attracteur de Genesio-Tesi*

3.5.3 Système chaotique de Arneodo

Le système Arneodo est un système dynamique non linéaire qui a été introduit par les chercheurs français Alain Arneodo et Marc Barthélemy dans les années 1980. Ce

système est caractérisé par des propriétés chaotiques et des comportements complexes, ce qui en fait un sujet d'étude intéressant en théorie du chaos et en dynamique non linéaire.[8] [43]

Nous considérons le système dynamique chaotique 3 – D Arneodo :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -\tau_1 x_1 - \tau_2 x_2 - \tau_3 x_3 + \tau_4 x_1^3, \end{cases} \quad (3.5)$$

où x_1, x_2, x_3 sont les états du système, τ_1, τ_2 et τ_4 sont des paramètres connus. Les

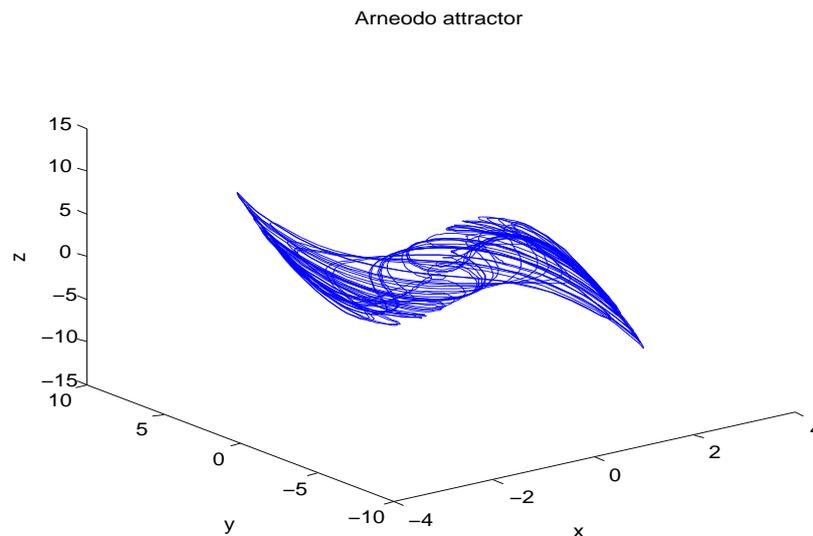


FIGURE 3.3 – *Attracteur de Arneodo*

condition initiale de cette attracteur est : $(x_1 = 1 ; x_2 = -1 ; x_3 = 0)$.

La figure (3.3) représente graphiquement l'évolution des états de l'attracteur d'Arneodo. La figure (3.4) représente graphiquement l'évolution des états x_1, x_2, x_3 Pour le

temps.

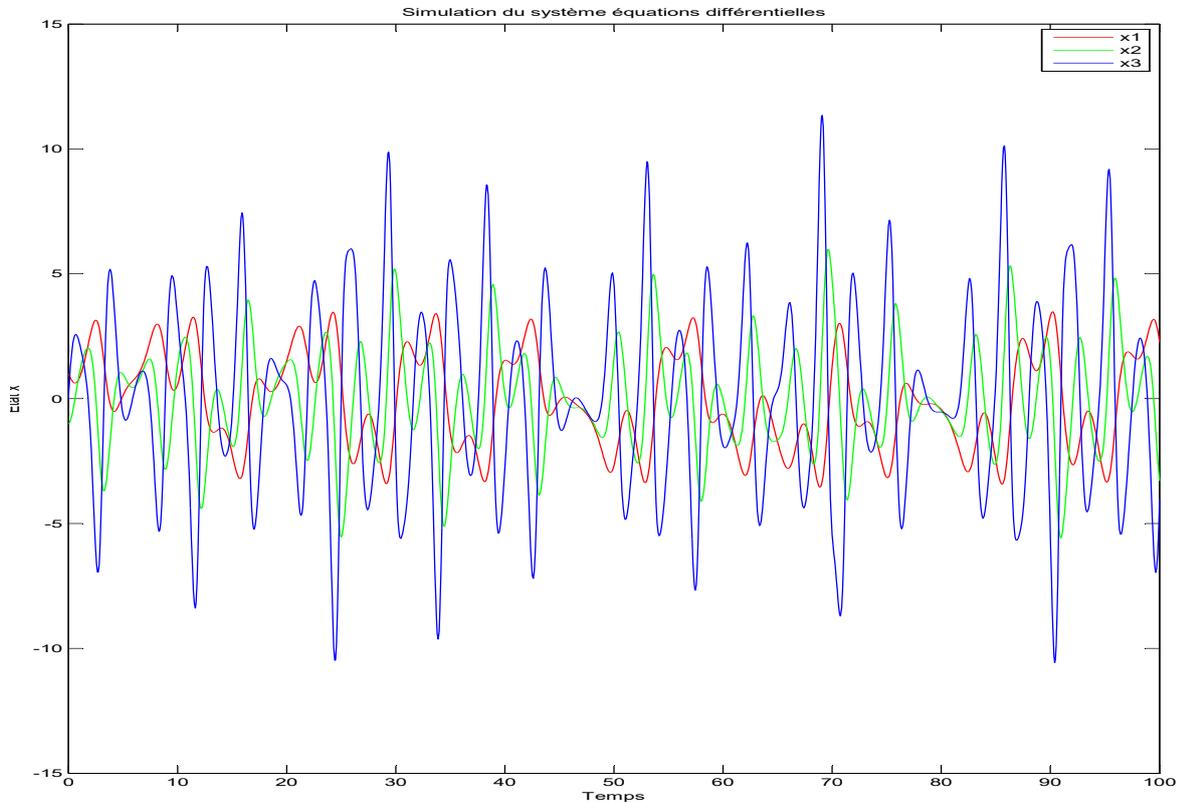


FIGURE 3.4 – Simulation de l'état x_1, x_2, x_3 par aux temps

3.6 Contrôle des systèmes dynamiques chaotiques

Les problèmes du contrôle du chaos attiraient l'attention de plusieurs chercheurs et ingénieurs depuis le début de l'année 1990. Plusieurs publications avaient apparues durant les deux dernières décennies, étant surpris par la découverte de J.A.Yorke et ses collaborateurs . En 1990, des recherches ont été développées concernant la possibilité de varier les caractéristiques du système dynamique pour une petite variation des paramètres du système. En utilisant le modèle discret de M. Hénon, ils ont démontré qu'il suffit d'une petite variation dans les paramètres du système pour transformer les trajectoires chaotiques en trajectoires périodiques et inversement. Ceci a été confirmé ex-

périmentalement par d'autres publications dans une variété de domaine d'application tel que, les lasers, les systèmes de communications, systèmes chimiques, technologiques et médicales. La conclusion paradoxale est que le chaos ; est imprédictible mais contrôlable. Il a fait l'objet d'un intérêt immense des chercheurs en utilisant toujours des modèles mathématiques, confirmant la possibilité de variation substantielle des caractéristiques pour une variété des systèmes chaotiques naturels et artificiels par une petite variation relative externe dans ses paramètres .[33]

3.6.1 Problèmes de stabilisation

Les problèmes de stabilisation de la solution périodique instable (orbite) surviennent dans la suppression de bruit ou élimination des harmoniques dans les systèmes de communication, appareils électroniques, et ainsi de suite. Ces problèmes sont distingués pour le fait que le système contrôlé est fortement oscillatoire, c.à.d. les valeurs propres de la matrice du système linéarisé sont proches de l'axe imaginaire, ces vibrations peuvent être régulières ou quasi régulières ou même chaotique. Les problèmes de suppression des oscillations chaotiques ou les réduire aux oscillations régulières ou les supprimer complètement, [33] peut être formalisé comme suit :

$$\frac{dx}{dt} = F(x, u). \quad (3.6)$$

Si $x(t)$ est une trajectoire oscillatoire périodique du système (3.6) sous la condition initiale $x_{ref}(0)$ tel que,

$$X(t + T) = x(t).$$

Pour stabiliser ce mouvement on doit ramener la solution $x(t)$ du système (3.6) vers $x_{ref}(0)$ c.à.d.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x(t) - x_{ref}(0)) = 0,$$

ou conduire la sortie du système $y(t)$ vers une fonction donnée

$$y_{ref}(t) : \lim_{k \rightarrow \infty} (y(t) - y_{ref}(0)) = 0.$$

3.7 Techniques de contrôle des systèmes chaotiques

Les techniques de contrôle des systèmes chaotiques sont des méthodes visant à stabiliser et maîtriser le comportement complexe et imprévisible des systèmes chaotiques. Elles cherchent à réduire l'instabilité et la sensibilité aux conditions initiales de ces systèmes en utilisant des signaux de contrôle adaptatifs ou en ajustant les paramètres pour les ramener vers un état souhaité ou maintenir leur dynamique dans des limites acceptables. Ces techniques sont appliquées dans différents domaines tels que la météorologie, la finance, la biologie ou l'ingénierie afin de prévenir les comportements non désirés et d'optimiser les performances des systèmes complexes. Les principes de cette technologie sont le contrôlabilité et l'observabilité.

3.8 Synchronisation

La synchronisation du chaos est un type spécial de contrôle du chaos. Il apparaît généralement dans deux systèmes chaotiques constitués, d'un système maître et d'un système esclave. Elles sont de structure et de paramètres identiques, sauf pour différentes conditions initiales. Synchroniser deux systèmes linéaires couplés linéairement est impossible. En effet, par principe de superposition toute fréquence présente en sortie du système doit être présente en entrée du système. Si la synchronisation n'est pas effective à l'instant initial elle ne le sera jamais. Par contre, pour les systèmes non linéaires, la réponse est loin d'être évidente. Pour que deux systèmes chaotiques identiques puissent se synchroniser, il faut que leur attracteur soit le même. Ils doivent donc avoir les mêmes équations, les mêmes paramètres et le même point de repos. L'opération de synchronisation consiste à rapprocher les trajectoires des deux systèmes jusqu'à ce qu'elles finissent par être confondues.

3.9 Généralités Le contrôle par mode glissant

Les modes glissants ont fait l'objet de nombreuses études et développements pour les systèmes non linéaires depuis leur introduction. C'est une méthode de contrôle non linéaire qui vise à stabiliser un système dynamique en le contraignant à suivre une trajectoire prédéfinie, appelée surface de glissement. Cette approche repose sur l'utilisation d'une loi de contrôle qui produit une force de correction permettant au système de demeurer sur cette surface de glissement malgré les perturbations et les incertitudes. L'objectif est d'assurer la convergence du système vers un état d'équilibre souhaité dans un laps de temps déterminé.[16][22]

La loi de contrôle par modes glissants est simple et robuste face à certaines perturbations, mais elle présente des inconvénients tels que la réticence et la brutalité du contrôleur discontinu. Ces aspects peuvent avoir des conséquences néfastes sur le moteur en entraînant un échauffement significatif des enroulements. Pour remédier à ce problème, on peut remplacer les fonctions de "signe" par des fonctions "sigmaïdes" plus douces ou utiliser des contrôles par modes glissants d'ordre supérieur au degré relatif du système par rapport à la variable de glissement choisie.[16] [22]

3.10 Principe de contrôle par mode glissant

La conception des contrôleurs par mode de glissement prend en compte les problèmes de stabilité et possède des bonnes performances de façon systématique dans son approche, qui est divisée en trois étapes principales :[6] [33]

- Choix de surfaces.
- L'établissement des conditions d'existence et de convergence.
- Détermination de la loi de contrôle .

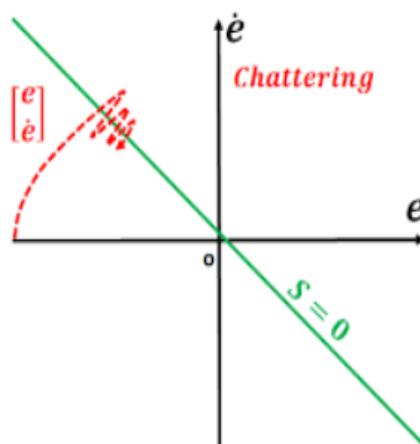


FIGURE 3.5 – Modes de fonctionnement dans le plan

3.10.1 Choix des surfaces de glissement

Le choix de la surface de glissement ne se limite pas uniquement à déterminer combien de ces surfaces sont nécessaires, mais également à définir leur forme, ce qui dépend de l'application spécifique et des objectifs de contrôle visés, de manière générale, pour un système caractérisé par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{3.7}$$

Le calcul de la surface de glissement s'appuie sur une équation proposée par J.J. Slotine. Cette équation offre une formule universelle permettant de déterminer la surface de glissement nécessaire à la convergence d'une variable vers sa valeur souhaitée. Et donné sous la forme suivante :

$$S(x) = \left(\frac{dx}{dt} + \lambda\right)^{r-1} e(x),$$

avec :

$$e(x) = X_{ref} - x,$$

- x : variable à réguler.

- $e(x)$: L'écart de la variable à régler.

- λ : Constante positive qui interprète la bande passante du contrôle désiré .

- r : Degré relatif, égal au nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pour faire apparaître le contrôle.

3.10.2 Condition d'existence et de convergence

Les conditions de convergence permettent aux dynamiques du système, dans le plan de phase de converger vers la surface de glissement, nous retenons deux conditions de la littérature : Il s'agit de formuler une fonction scalaire positive $v(x) > 0$ pour les variables d'état du système et de choisir une loi de commande qui fera décroître cette fonction $\dot{v}(x) \neq 0$ La fonction de Lyapunov doit être comme suit :[42]

$$v(x) = \frac{1}{2}S^2(x),$$

sa dérivée sera

$$\dot{v}(x) = S(x)\dot{S}(x),$$

pour une bonne dynamique de système et une convergence suitable il suffit d'assurer que [34] :

$$\dot{v}(x) = S(x)\dot{S}(x) < 0.$$

3.10.3 Calcul de contrôle

Une fois la surface de glissement sélectionnée et la vitesse de convergence déterminée, il reste à calculer le contrôle requise pour amener la variable contrôler vers cette surface, puis vers son point d'équilibre (l'origine du plan de phase), tout en préservant la condition d'existence du mode de glissement .

Une des hypothèses fondamentales dans la conception des systèmes à structures variables pour le contrôle par mode de glissement est que le contrôle doit commuter entre les valeurs maximales u_{max} et u_{min} varie de manière instantanée, avec une fréquence infinie, en fonction du signe de la surface de glissement, tel que présenté dans la figure III.2.[42].

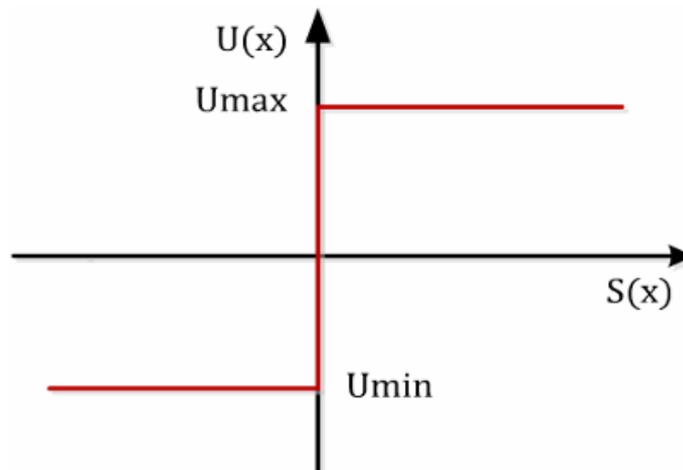


FIGURE 3.6 – Contrôle appliquée au système

3.11 Détermine la loi de contrôle

Après le choix de la surface de glissement et des conditions de convergence, il nous reste maintenant à déterminer la loi de contrôle. Dans le contrôle à structure variable, il y a différentes manières de choisir les paramètres pour définir la loi de contrôle. Il y a trois types de structures très répandues : le contrôle par contre-réaction linéaire à gains commutés, le contrôle par relais et le contrôle équivalente. Les deux dernières approches sont les préférées dans le contrôle des machines électriques.

Un vecteur de contrôle équivalente u_{eq} se définit comme celui qui produit le régime glissant idéal. Le vecteur u est composé de deux grandeurs u_{eq} et u_n soit[22]

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_n,$$

u : La grandeur de contrôle.

u_{eq} :le contrôle équivalente.

u_n : La composante non-linéaire (grandeur de contrôle discontinue).

On calcule le contrôle équivalente et par la suite, on fait le calcul de contrôle attractive

du système défini dans l'espace d'état par l'équation Lorsque la surface de commutation est atteinte, c'est-à-dire :

1-Le trajectoire d'état reste sur la surface de commutation $S(x) = 0$.

2-La dérivée de la surface $\dot{S}(x) = 0$.

Alors on peut écrire $u = u_{eq}$ avec $u_n = 0$. Le contrôle peut être interprétée comme la valeur moyenne que prend le contrôle u lors des commutations entre (u_{max}) et (u_{min}) . Le vecteur u nous permet de régler les dynamiques des modes de fonctionnement :

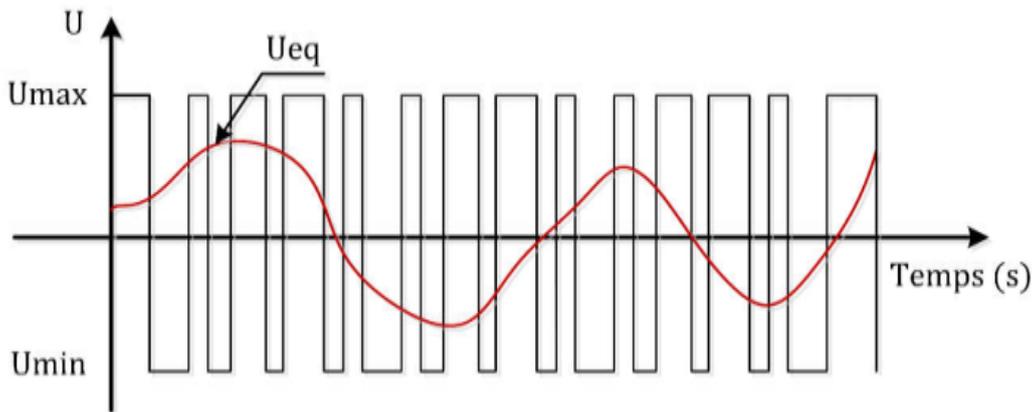


FIGURE 3.7 – La valeur continue prise par le contrôle lors des commutations entre U_{min} et U_{max}

$-u_{eq}$: elle a une influence sur le mode glissant ; on la détermine grâce aux conditions d'invariance ; u_n : elle a une influence sur le mode d'approche ; elle garantit l'attractivité de la variable vers la surface de glissement. Maintenant, on va s'intéresser au calcul de contrôle équivalente et de le contrôle attractive du système. On a l'équation qui est donnée comme suit :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

et aussi :

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_n.$$

On peut écrire :

$$\dot{S}(x, t) = \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial x} [A(x) + Bu_{eq}] + \frac{\partial s}{\partial x} [Bu_n], \quad (3.8)$$

dans le mode glissant en régime permanent, $\dot{x} = 0$ et $S(x) = 0$. On trouve à $u_n = 0$ et

$$u_{eq} = -\left[\frac{\partial s}{\partial x} B\right]^{-1} \left[\frac{\partial s}{\partial x} A(x)\right] \quad (3.9)$$

On remplace l'équation (3.8) dans (3.9), alors on aura

$$s(\dot{x}) = \frac{\partial s}{\partial x} [B(x, t) \cdot u_n,$$

le contrôle u_n est définie durant le mode de convergence et doit satisfaire la condition $\dot{s} < 0$. Afin de satisfaire cette condition, le signe de u_n doit être opposé à celui de

$$s(x, t) \cdot \frac{\partial s}{\partial x} B.$$

$$s(x)\dot{s}(x) = s(x) \left[\frac{\partial s}{\partial x} B u_n \right] < 0, \quad (3.10)$$

le contrôle u_n est donnée par la forme de base qui est celle d'un relais représenté par une fonction *sign* :

$$u_n = k \cdot \text{sign}(s(x)), \quad (3.11)$$

avec $k > 0$. La fonction est représentée dans la figure en remplaçant l'équation (3.11) dans

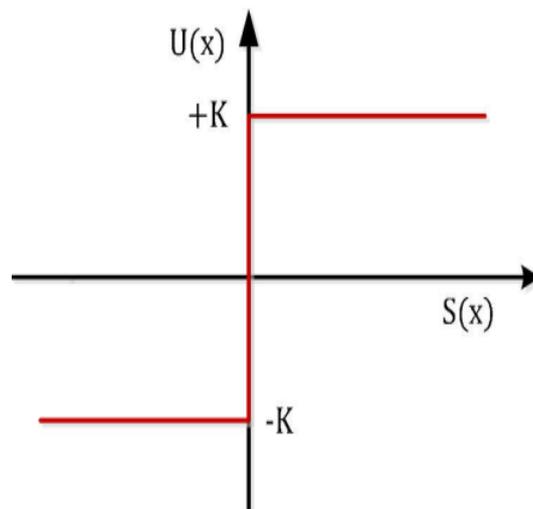


FIGURE 3.8 – Définition de la fonction $\text{sign}(s(t))$

(3.10), on obtient

$$s(x)s(\dot{x}) = |s(x)| \frac{\partial s}{\partial x} k.B < 0,$$

le facteur $\frac{\partial s}{\partial x} B$ est toujours négatif pour la classe de systèmes que nous étudions. Le gain k doit être positif afin de vérifier les conditions de l'attractivité et de stabilité. Le choix du gain k a une très grande influence sur le temps de réponse du régulateur ; si :

k : est très petit, on aura un temps de réponse très grand.

k : est très grand, on aura un temps de réponse très petit.

Pendant, l'utilisation de contrôle de type relais peut provoquer des dynamiques indésirables et de fortes oscillations au niveau de l'organe de contrôle . Le phénomène des oscillations de très hautes fréquences sont appelées « Chattering » et peuvent exciter les dynamiques, même détériorer l'organe de contrôle ou endommager les actionneurs.

3.12 Phénomène de chattering

Un régime glissant idéal suppose une fréquence d'oscillation infinie et aussi des éléments idéaux de commutation (relais sans seuil, ni hystérésis, ni retard de commutation), ce qui n'est pas le cas en pratique. Donc, durant le régime glissant, les discontinuités appliquées au contrôle, elles peuvent donner un phénomène de brouillement appelé aussi «chattering ». [22] Ce phénomène est caractérisé par des fortes oscillations des trajectoires du système autour de la surface de glissement. L'origine de ce phénomène est le caractère discontinu de la composante du contrôle de la forme « $k \cdot \text{sign}(S(x))$ » qui permet au point de fonctionnement d'osciller. autour de la surface de glissement, lorsque le régime permanent est atteint.

3.12.1 Elimination du phénomène de Chattering

Le phénomène de Chattering, se produit lors de l'utilisation de techniques de modes glissants, est causé par une commutation non infiniment rapide de contrôle, ce phénomène est considéré comme indésirable, car il introduit des composantes de haute fréquence dans le spectre de contrôle, et l'origine du phénomène des commérages est

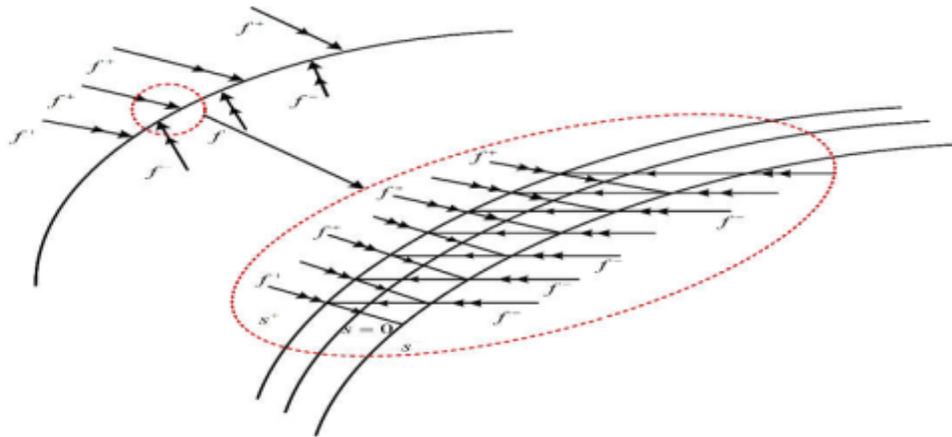


FIGURE 3.9 – Le phénomène de "Chattering"

la fonction *sign* savoir ce qui suit : $U_n = K_x \text{sign}(S(x))$.

Afin de résoudre le problème de "Chattering", on remplace la fonction signe par une fonction continue "adoucie" définie près des limites des surfaces de glissement. [42]

définition de la fonction *sign* :

$$\text{Sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si : } s(x) > 0 \\ 0 & \text{si : } s(x) = 0, \\ -1 & \text{si : } s(x) < 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

et La fonction **adoucie** est définie comme suit :

$$\text{Smooth}(S(x)) = \tanh(s(x)) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

3.13 Application du mode glissant pour le système d'ar-neodo

L'objectif du contrôle du chaos consiste à stabiliser les systèmes en orbites périodiques ou en points d'équilibre en maintenant ou en ajustant les paramètres. Dans cette section, nous présentons une stratégie de contrôle non-linéaire basée sur le mode

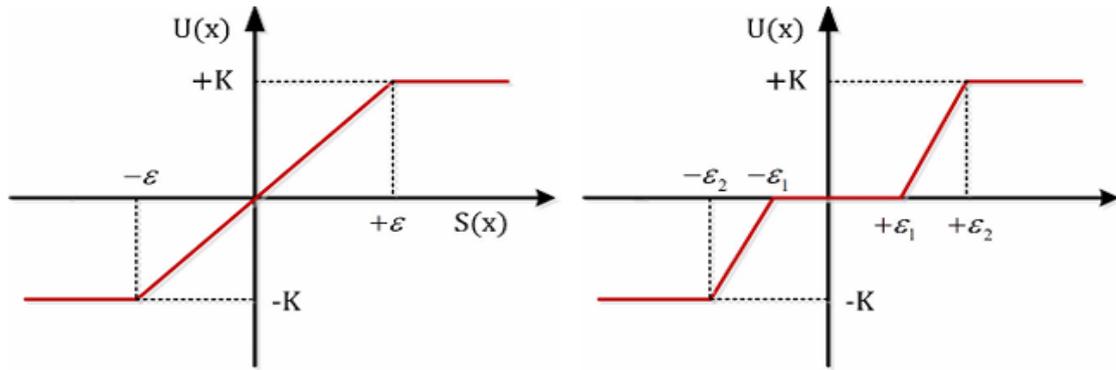


FIGURE 3.10 – La fonction adoucie

glissant d'ordre un (classique). Afin de tester l'efficacité de cette technique de contrôle, nous avons effectué des simulations appliquées à un système dynamique non linéaire représentatif, c'est le système Arneodo.

Le modèle mathématique du système Arneodo est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -\tau_1 x_1 - \tau_2 x_2 - \tau_3 x_3 + \tau_4 x_1^3, \end{cases} \quad (3.13)$$

avec : $\tau_1 = -5.5$; $\tau_2 = 3.5$; $\tau_3 = 1$; $\tau_4 = -1$. u est l'entrée de contrôle.

Hypothèse : Le système de Arneodo est contrôlable.

3.13.1 Stabiliser les systèmes en orbites périodiques

Calcul de la loi de contrôle :

Soient $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$ La sortie du système est définie comme suit : $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

où y est l'état de sortie. Le signal de référence choisi est représenté comme suite $u_{re} = 2.5 \sin(\omega t)$.

La dynamique de l'erreur représentée comme suit

$$\begin{cases} e_1 = y - u_{re}, \\ e_2 = \dot{e}_1 = \dot{y} - \dot{u}_{re}, \\ e_3 = \dot{e}_2 = \ddot{e}_1 = \ddot{y} - \ddot{u}_{re}, \end{cases} \quad (3.14)$$

alors la surface de glissement est donnée comme suit :

$$s = \dot{e}_1 + \lambda e_1,$$

la dérivée est donnée par

$$\dot{s} = \ddot{e}_1 + \lambda \dot{e}_1$$

$$\dot{s} = 0.$$

La loi de contrôle de mode glissant est donnée comme :

$$u_{eq} = -x_3 + \ddot{u}_{re} - \lambda(x_2 - \dot{u}_{re}),$$

$$u = u_{eq} - k \text{sign}(s),$$

$$u = -x_3 + \ddot{u}_{re} - \lambda(x_2 - \dot{u}_{re}) - k \text{sign}(s),$$

La structure que nous voyons à la figure (3.11) est appelée attracteur Arnoldo (chaotique). Dans les conditions initiales $(1, -1, 0)$.

D'après la programmation de MATLAB et dans les conditions initiales $(1, -1, 0)$. La figure (3.12) et figure(3.13) est présenté la simulation du système d'équations différentielles contrôlé par U ,

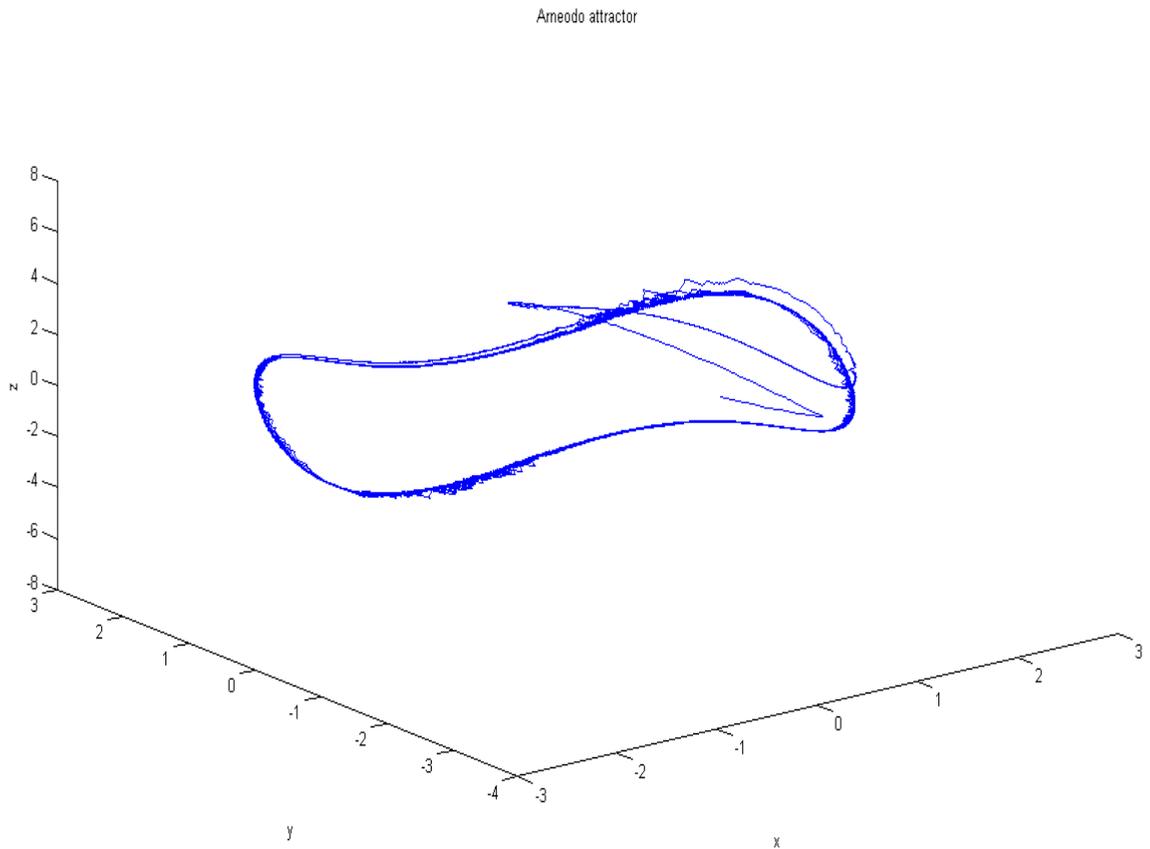


FIGURE 3.11 – *Attracteur Arneodo contrôlé par U*

3.13.2 Le contrôle au point d'origine

La dynamique de l'erreur représentée comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - x_1^{ref}, \\ e_2 = x_2 - x_2^{ref}, \\ e_3 = x_3 - x_3^{ref}. \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_1^{ref} = x_2 - x_1^{ref}, \\ \dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_2^{ref} = x_3 + u - x_2^{ref}, \\ \dot{e}_3 = 5.5x_1 - 3.5x_2 - x_3 - x_1^3 - x_3^{ref}. \end{cases} \quad (3.16)$$

$$s(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)e,$$

$$s(x) = \dot{e}_1(x) + \lambda e_1,$$

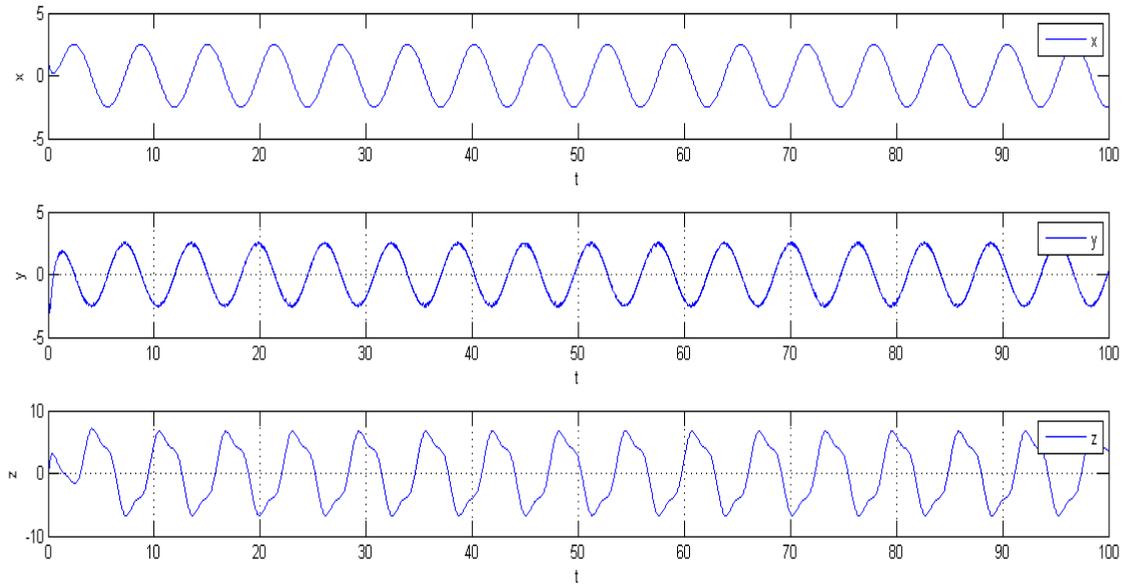


FIGURE 3.12 – Les série temporelle de x_1, x_2, x_3

$$s(x) = (x_2 - x^{ref}) + \lambda(x_1 - x^{ref}),$$

$$\dot{s}(x) = 0,$$

$$\dot{s}(x) = \ddot{e}_1 + \lambda \dot{e}_1,$$

$$\dot{s}(x) = x_3 + u - x^{ref} + \lambda(x_2 - x^{ref}),$$

$$\dot{s}(x) = 0$$

$$\Rightarrow u_{eq} = -x_3 + x^{ref} - \lambda(x_2 - x^{ref}),$$

$$u = u_{eq} - u_n.$$

$$u = -x_3 + x^{ref} - \lambda(x_2 - x^{ref}) - ksign(s(x)),$$

$$u = -x_3 - \lambda x_2 - ksign(s).$$

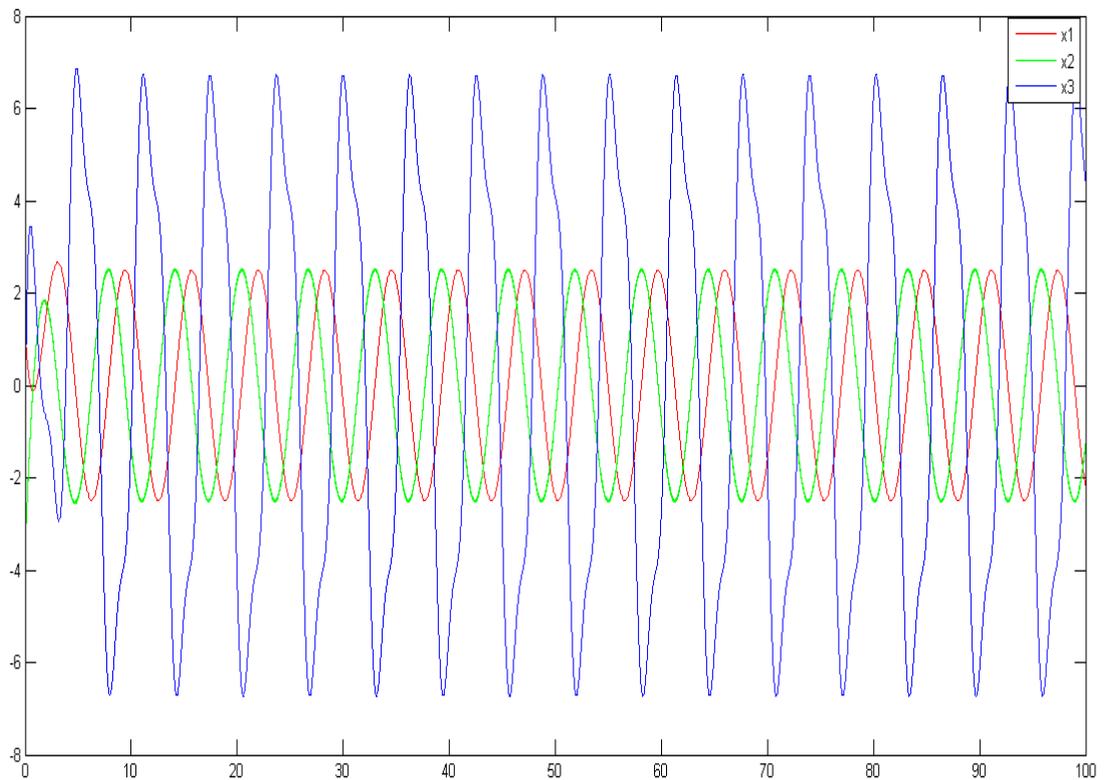


FIGURE 3.13 – *Les systèmes équations différentielles contrôlé par U*

la figure 3.14 présente correspondance approximative entre les courbes U_{re} et x_1 en fonction du temps , avec une erreur presque nulls.

La structure que nous voyons à la figure.3.15 est appelée la convergence des états vers le point d'équilibre(0.0.0), de plus la stabilité asymptotique est garantie.

La structure que nous voyons à la figure 3.16 est appelée simulation du système équations différentielles contrôlé par U , convergence vers le point d'équilibre(0.0.0).

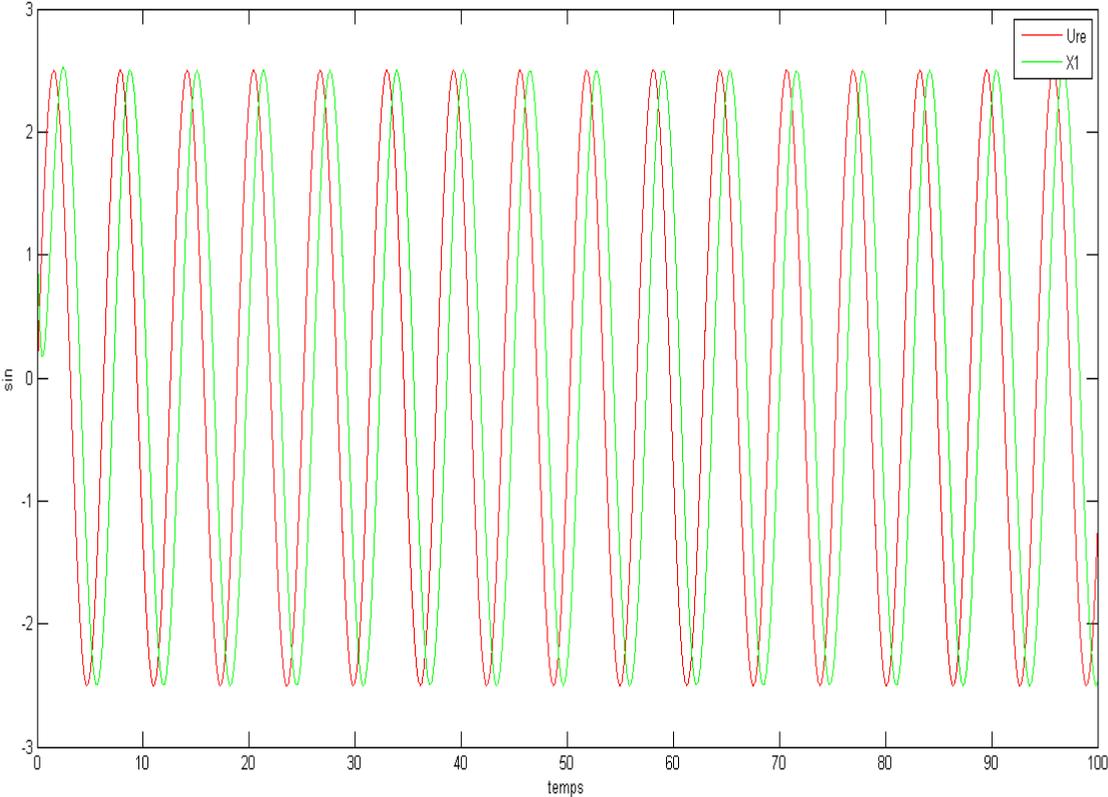


FIGURE 3.14 – La convergence entre les courbes *Ure* et *x1*

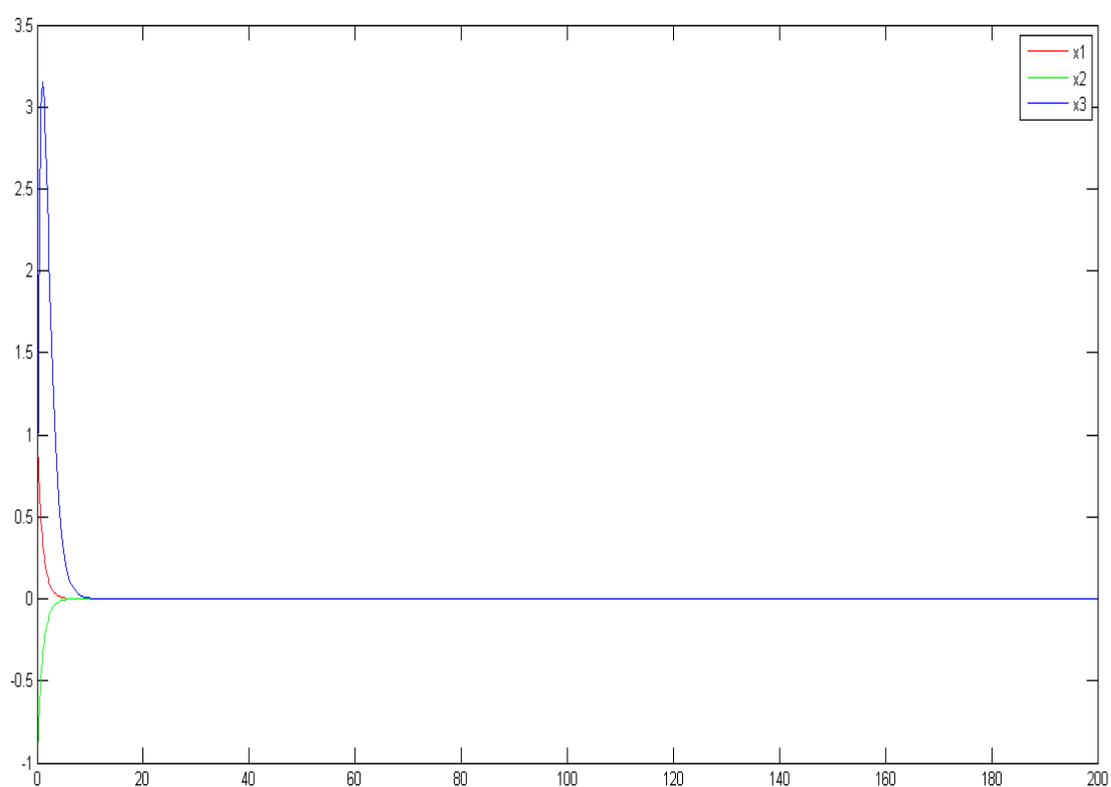


FIGURE 3.15 – Convergence des états vers le point d'équilibre pour le système d'Arneodo

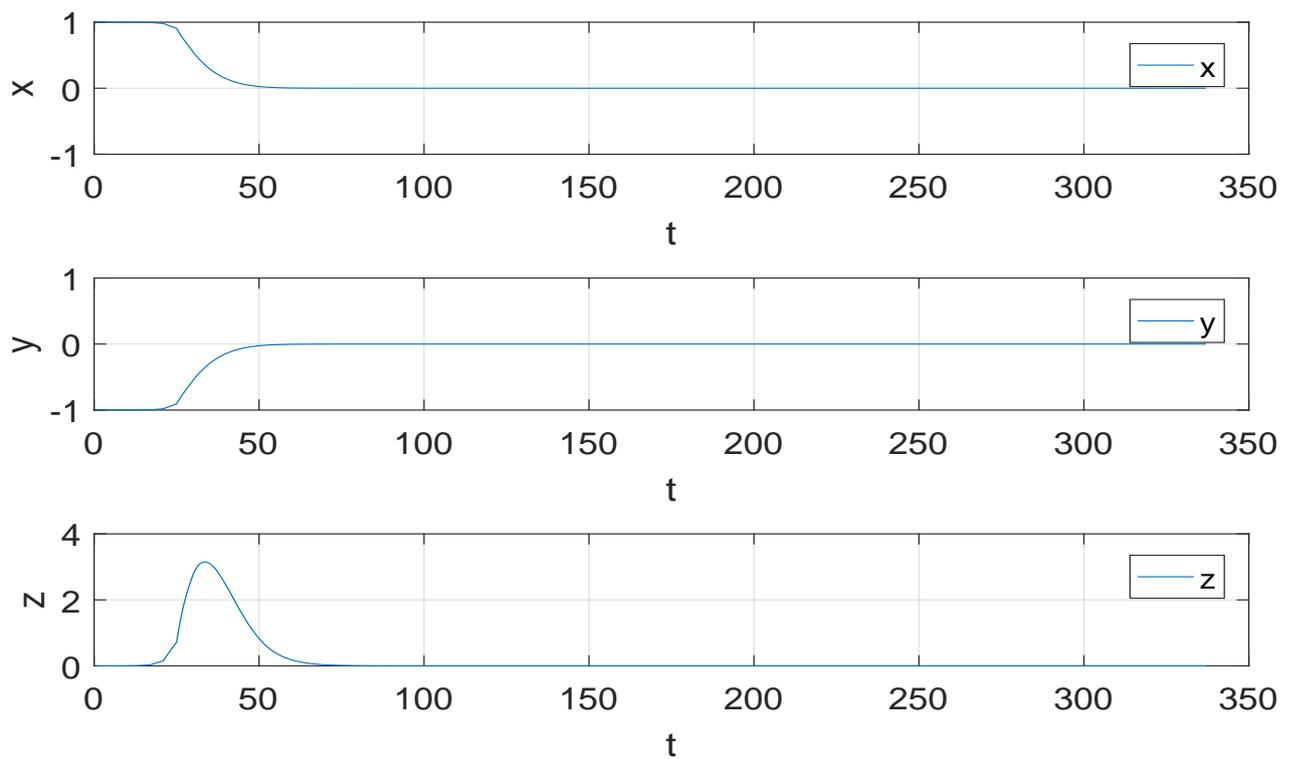


FIGURE 3.16 – Simulation du système équations différentielles contrôlé par U

CONCLUSION

Cette mémoire se concentre sur l'étude la contrôlabilité et l'observabilité d'un système dynamique, pour atteindre les objectifs fixés, le travail a été divisé en trois chapitres : le premier chapitre présente les concepts clés concernant, on a défini le système dynamique la contrôlabilité les systèmes dynamiques, leurs caractéristiques, ainsi que une telle stabilité contrôle des systèmes dynamiques, Le deuxième chapitre aborde la théorie de l'observation des systèmes dynamiques, en détaillant les différents types et les types d'observateurs. Enfin, le dernier chapitre se consacre aux définitions des systèmes dynamiques chaotiques et à l'application de la méthode du mode glissant au système **d'Arneodo** .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. El jai, *éléments d'analyse et de contrôle des système*, Presses Universitaires de Perpignan (PUP), 2004.
- [2] A.J. Krener, W. Respondek, *Non linear observers with lineazizable error dynamics*, 23(2)(1985), 197-216.
- [3] A.J .Whalen, S.N. Brennan, T.D. Sauer, S.J. Schiff, *Observability and Controlability of Nonlinear Network : The Role of Symmerty*, 5(1)(2015), 011005.
- [4] A. Sabeur, *Observabilité et système discrets*, thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz(2003).
- [5] A. Zemouche, *Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires*, thèse de doctorat, Université Louis Pasteur-Strasbourg(2007).
- [6] B. Labeled, S. Kaouache, M.S. Abdelouahab, *Control of a Novel Class of Uncertain Fractional Order Hyparchaotic System With External Distrubances Via Sliding Mode Controller* , *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 20(2)(2020), 203-213.

Bibliographie

- [7] B.R. Andrivskii, A.L. Fradkov, *Control of Chaos : Methods and Applications*, Original Russian Text Copyright, 64(5)(2003), 637-713.
- [8] C. Cheng, F. Gao, J. Xu et Y. Xang, *Adaptive control design for Arneodo chaotic system with uncertain parameters and input saturation* ,Advances in Mathematical Physics, 2020(1)(2020), 1-8.
- [9] C. Pfister, *On Dynamic Systems and Control*, thèse de doctorat, (2012).
- [10] E.D. Sontag, *Mathematical control theory : deterministic systems*, 2 ed Piscataway. NJ , 1998.
- [11] E.Fernandez-cara, E. Zuazua, *Control theory :History ,mathematical achievements and perspectives*, Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, 26(2003), 79-140.
- [12] E. Trétat, *Contrôle optimal : théorie et application*, Mathématiques concrètes, 2005.
- [13] E. Zerrik , K. Ztot, A. El jaï, *systemes dynamique analyse et contrôle des systèmes localisés*, 1 vol Presses universitaires de Perpignan, 2008.
- [14] F. Anstett, *Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement : synthèse et cryptanalyse*, Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré-Nancy I (2006).
- [15] F. Jean, *Stabilité et commande des systèmes dynamiques*, Presses de l'ENSTA, 2017.
- [16] F. Nollet, *Lois de commande par modes glissants du moteur pas-à-pas*, Thèse de doctorat ,Université des Sciences et Technologie de Lille- Lille I (2006).

Bibliographie

- [17] F. Sallem, *Détection et Isolation de Défauts Actionneurs Basées sur un Modèle de l'Organe de Commande*, Thèse de Doctorat, l'Université Toulouse III - Paul Sabatier (2013).
- [18] G.C. Layek, *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*, vol 449 New Delhi : Springer, 2015.
- [19] H. Dimassi, *Synchronisation des systèmes chaotiques par observateurs et applications à la transmission d'informations*, Thèse de Doctorat, Université Paris Sud - Paris XI (2012).
- [20] H. Hamich, *Inversion à Gauche des systèmes Dynamiques Hybrides Chaotique .Application à la Transmission Sécurisée de Données*, Thèse de Doctorat, Université de Tizi-ouzou (2011).
- [21] H .Nijmeijer, A.J schaft , *Non linear Dynamical systems* , Springer-Now york, 1990 .
- [22] H. Teiar, *Stratégies de Commande Robuste à Base D'intelligence Artificielle de La Machine Synchrone à Aimants Permanents à partir De La Plaque Signalétique*, Thèse de Doctorat, Université du Québec à Trois-Rivières (2017).
- [23] I. Ameer, *Synchronisation Chaotification et Hyperchaotification des Systèmes Non-linéaires : Méthodes et Applications*, Thèse de Doctorat, Université Mentouri de Constantine(2011).
- [24] J. Liu, X .Wang, *Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems* , Springer Berlin Heidelberg, 2011.

Bibliographie

- [25] J.M. Coron, *Control and Nonlin* , vol 136 American Mathematical Society, 2007.
- [26] J. Milota, *Invitation to mathematical control theory*, In : Proceedings of Seminar in Differential Equations, ed. P. Drábek, 2006 ,64-118.
- [27] J. M. Coron, *Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires*, les journées mathématiques X-UPS, 2008, 123.
- [28] K.T. Alligood, T.D. Sauer, J-A. Yorke, *CHAOS : An Introduction to Dynamical System*, Springer Verly New York, 1996.
- [29] M.Bergounioux, *optimisation et contrôle des systèmes linéaires* , 2ed écoles D'ingénieurs, 2001.
- [30] M. Ezzat, *commande Non lineaire sans Capteur de la Machine Synchrone a ainants permants*, thèse de Doctorat, école Central de Nantes(2011).
- [31] M. Halimi, *Observation et détection de modes pour la synchronisation des systèmes chaotiques : une approche unifiée*, thèse de Doctorat, Université de Lorraine Français (2013).
- [32] M. Oueder, *synthèse des observateurs pour les Système non linéaire*, thèse de Doctorat, Université de Caen(2012).
- [33] A. CHIBANI, *Observation et Commande par Mode Glissant pour des Systèmes Chaotiques Complexes*, Thèse de Doctorat, Université Ibn-Khaldoun Tairret(2018).
- [34] M. Roopaei, A. Argha, *Novel Adaptive Sliding Mode Synchronization in a Class of Chaotic Systems*, World Applied Sciences Journal, 12 (12)(2011), 2210-2217.

- [35] N. Gasmi, *Observation et commande d'une classe de systemes non linéaire temps discret*, thèse de doctorat, Université de Gabès (Tunisie)(2018).
- [36] N. Petit, P. Rouchon, *Automatique : Dynamique et contrôle des systèmes*, Engineering school. MINES ParisTech, 2009, 236.
- [37] P. Daniel, *Les Grandes révolutions scientifiques du XXe siècle*, 1 ed Presses Universitaires de France , 1997.
- [38] P. Langevin, C. Mendoza, *Impliquer les managers à atteindre leurs objectifs : participation*, Comptabilité-Contrôle-Audit, 20(3) (2014), 43-71.
- [39] R.C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics : An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, 2000.
- [40] R. Hermann, A.J. Krener, *Non linear controllability and observability*, IEEE Trnsaction on Automatic Control, 22(5)(1977), 728-740 .
- [41] S.Vaidyanathan ,*Anti-synchronizing backstepping control design for Arenedo chaotic system* , International Journal of Bioinformatics and Biosciences,3(1)(2013), 21-33.
- [42] V. Iutkin, *variable structure systems With Sliding Modes*,IEE Transaction on Automatic Controle, 22(2)(1977), 212-222.
- [43] W. Krabs, S. Pickl, *Dynamical Systems : Stability, Controllability and Chaotic Behavior* , Springer Science et Business Media, 2010.

Conclusion

- [44] W. Steven Gray ,J.Mesko , *observability fuctions for linear and Nonlinear systems*,systems et Controle letters ,38(2)(1999), 99-133.