الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :2001°514……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

L'estimateur de Quasi Maximum de vraisemblance pour le processus APARCH avec erreurs GED

Préparé par :

-Boussouf Chaima.
- Herrati Ghada.

Soutenue devant le jury

Rabeh Bououden	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Yakoub Boularouk	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Samira Boukaf	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinatrice

Année universitaire :2023/2024

Remerciement

Tout d'abord, nous remercions le Bon Dieu de nous avoir aidées à faire ce travail.

Un très grand remerciement à notre encadrant ***Dr : Boularouk Yakoub*** *pour ses précieuses conseils et sa disponibilité.*

On remercie également ***Dr : Boulmerka Aissa****, le chef de la faculté de mathématique pour tous ses encouragements et de son présence.*

*Nous remercions les membres de jury (****Monsieur le présidant :Bououden Rabeh*** *et* ***l'examinateur :Boukaf Samira****) qui ont accepté de lire et de juger notre travail.*

Nous tenons de remercier tous les enseignants de département de leur participation à notre formation durant notre parcours de cinq ans et qui ont cru en nous .

Nous remercions enfin tous nos collègues étudiants pour leur soutien tout au long de nos études.

<u>Dédicace</u>

Nous dédions ce modeste travail à ***nos chers parents*** *pour leur présence à nos cotés, leur affection et leur soutien sans relâche.*

Je le dédie aussi à mon mari ***Seyf Eddin*** *qui m'a encouragée tout au long de mon travail et à* ***ma belle famille*** *qui m'ont donnés la force et la confiance nécessaire pour aller au bout.*

À ma sœur ***Leila*** *et mes petites nièce* ***Nouha, Rokia*** *et* ***sadja****.*

'À mes frères : ***Abde djalil, Mounir, Issam, seyf, Amine, Mohsin et Achraf*** *ainsi que tous leurs enfants.*

À ma binôme : ***Herrati Ghada*** *pour son amour de travail, de sa compétence, de son encouragement et surtout de son esprit d'équipe.*

À mes précieuses amies de leur présence au moment de stresse et fatigue et de célébration.

Et à tous ceux qui m'ont aimée.

Chaima.B

Dédicace

Avec tous mes sentiments de respect, avec l'expérience de ma reconnaissance. Je dédie ma remise de diplôme et ma joie

*Sans oublier mon binôme **Chaima** pour sa compréhension tout au long de ce projet.*

*Mon paradis, à la source de ma joie et mon bonheur, ma lune et le fil d'espoir qui allumer mon chemin, ma moitie **Ma mère**.*

*À ma source de vie ; à mon support qui était toujours à mes cotés pour me soutenir et m'encourager, à mon prince **Papa** .*

*À mon frère unique **Amine**, n'oublie pas **Sa femme**.*

***mes adorables soeurs** qui encourager et soutenir tout au long de mes études.*

*À tous les nombres de ma famille **Herrati**.*

À tous qui m'aiment.

Ghada.H

TABLE DES MATIÈRES

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions l'estimateur de quasi-maximum vraisemblance d'un processus APARCH avec erreur GED. Pour cela, nous commençons par un aperçu général sur les notions de base et les définitions (processus stochastique, le bruit GED, processus APARCH,...). Par la suite, nous nous intéressons à l'étude de la consistance et la normalité asymptotiques de l'estimateur de quasi-maximum de vraisemblance pour les paramètres de modèle APARCH avec erreur GED. Enfin, nous ajoutons un autre intérêt de la consistance forte et la normalité asymptotique de cet estimateur paramétrique en présentant une application numérique concernant la modélisation d'une série chronologique simulée APARCH à base d'erreurs GED avec différentes valeurs des paramètres.

Mots clés :

Modèle APARCH, Estimation du quasi-maximum de vraisemblance, La distribution Généralisée des Erreurs (GED), Consistance forte, Normalité asymptotique .

Abstact

In this thesis, we study the quasi-maximum likelihood estimator of an APARCH process with GED errors. To do this, we begin with a general overview of basic concepts and definitions (stochastic process, GED noise, APARCH process, ...). Subsequently, we focus on studying the consistency and asymptotic normality of the quasi-maximum likelihood estimator for the parameters of the APARCH model with GED errors. Finally, we add another aspect of the strong consistency and asymptotic normality of this parametric estimator by presenting a numerical application concerning the modeling of a simulated time series of APARCH based on GED errors with different parameter values.

Keywords :

APARCH process, Quasi-maximum likelihood estimator, GED noise, Strong consistency , Asymptotic normality .

ملخص:

في هذه المذكرة، ندرس مقدر الاحتمالية الشبه القصوى لعملية APARCH مع أخطاء GED. لفعل ذلك، نبدأ بنظرة عامة على المفاهيم الأساسية والتعريفات (عملية عشوائية، ضوضاء GED، عملية APARCH، ...). بعد ذلك، نركز على دراسة استقرارية وتوزيع احتمالي اعتباري لمقدر الاحتمالية الشبه القصوى لمعلمات نموذج APARCH مع أخطاء GED. وأخيرًا، نضيف جانبًا آخر من الاستقرارية القوية والتوزيع الاحتمالي اعتباري لهذا المقدر المعلمي بتقديم تطبيق عددي يتعلق بنمذجة سلسلة زمنية محاكاة لعملية APARCH بناءً على أخطاء GED بقيم مختلفة للمعلمات.

الكلمات المفتاحية :

النموذج APARCH, تقدير الاحتمالية شبه القصوي, التوزيع العام للاخطاء.

NOTATIONS GÉNÉRALES

Notations

$(\Omega, A, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.

Ensemble et espace

$\mathbb{N}$	Les entiers positifs.
$\mathbb{Z}$	les entiers.
$\mathbb{R}$	les nombres réels.

Fonction

γ_X	La fonction d'auto-covariance de (X_t).
Γ	La fonction Gamma.

Processus

i.i.d	Indépendant et identiquement distribué.
$N(0, \sigma^2)$	La loi normale de moyenne 0 et variance σ^2.
p.s	Presque sûr.

Estimation

arg	Argument.
r	La forme de paramètre.
$\hat{r}$	Estimateur de r.

Probabilité

$\xrightarrow{p.s}$	La convergence presque sûre.
$\sum$	La somme.
$\prod$	Le produit.
$\int$	L'intégrale.
$\vert \cdot \vert$	La valeur absolue.
$[X]$	La partie entière de X.
X_n	Suite de variables aléatoires.
$E(\cdot)$	L'espérance.
$V(\cdot)$	La variance.
$Cov(\cdot)$	La covariance.

INTRODUCTION

Les séries chronologiques sont des outils de données essentiels dans plusieurs domaines tels que l'économie, la finance, la médecine et la démographie. Ces séries fournissent des informations précieuses sur l'évolution des phénomènes au fil du temps, justifiant ainsi une étude spécialisée pour les comprendre et les analyser de manière efficace. Parmi les modèles utilisés dans l'analyse des séries chronologiques, le modèle APARCH se distingue en permettant de traiter les variations de l'écart type des données au fil du temps.

Ce mémoire vise à explorer le modèle APARCH en utilisant l'erreur GED dans l'analyse des données chronologiques. La recherche se concentre sur l'impact de l'utilisation de cette erreur sur les performances du modèle APARCH dans l'estimation et la prédiction des séries chronologiques, contribuant ainsi à améliorer notre compréhension du comportement de ces séries et à affiner nos prévisions pour l'avenir.

Le mémoire comprend une introduction aux concepts de base des séries chronologiques et des *modèles APARCH, ainsi qu'une analyse pratique de la performance du modèle en utilisant des logiciels statistiques disponibles. Il espère apporter une contribution tangible au domaine de l'analyse des données chronologiques et à ses diverses applications dans la recherche et les applications pratiques.*

CHAPITRE 1

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Dans ce premier chapitre, nous exposons un petit rappel de quelques notions de basses concernant les processus stochastiques.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1. *Un processus stochastique est un modèle de probabilité permettant l'étude d'un phénomène aléatoire au cours du temps.*

Définition 1.1.2. *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires* $(X_t, t \in T)$, *définie sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *où* T *est un ensemble d'indices (comme* $\mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{Z}$, *ou* *bien une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$).*

— *Si $T = \mathbb{N}$, le processus stochastique est à temps discret.*

— *Si $T = \mathbb{R}_+$, le processus stochastique est à temps continu.*

Définition 1.1.3. *(l'opérateur de retard) L'opérateur L (L Lag noté aussi B pour Backward) est dit l'opérateur de retard s'il décale le processus d'une unité de temps vers le passé :*

$$LX_t = X_{t-1} \qquad \forall t > 1.$$

Si on applique m fois cette l'opérateur, on décale le processus de m unités de temps :

$$\underbrace{L(L(...L(X_t)...))} = L^m X_t = X_{t-m}.$$

L'opérateur de retard possède les propriétés suivantes :

- $L(\beta X_t) = \beta(LX_t)$. *(commutatif)*
- $L^j X_t = X_{t-j}$.
- $X_t = C \in \mathbb{R}$ *pour tout* $t \in \mathbb{Z}$, *alors* $L^j X_t = L^j C = C$, *pour tout* $j \in \mathbb{Z}$.
- $L^j(L^m X_t) = L^{j-m} X_t = X_{t-j-m}$.
- $L(X_t + Y_t) = L(X_t) + L(Y_t)$. *(distributif)*
- $(L^j + L^m)X_t = L^j X_t + L^m X_t = X_{t-j} + X_{t-m}$.

1.1.1 stationnarité :

La stationnarité joue un rôle central dans la théorie des processus. Elle se caractérise par une série chronologique qui implique que le comportement de la série ne dépend pas du temps. Plus formellement, on distingue deux types de stationnarité, à savoir forte et faible.

Espérance Mathématique

Définition 1.1.4. *L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle est -intuitivement- la valeur que l'on s'attend à trouver -en moyenne- si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Elle se note $E(X)$ et se lit espérance de X.*

- ***Dans le cas continu*** *:*

  Définition 1.1.5. *Soit X un variable aléatoire réelle continue qui admet une densité de probabilité f_X si :*

  $$\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)dx < +\infty.$$

  L'espérance mathématique de X est défini par :

  $$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\Omega} Xdp, \\ &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx, \end{aligned}$$

  avec Ω l'ensemble des variables aléatoires et P la loi de probabilité.

- ***Dans le cas discret*** *:*

  Définition 1.1.6. *Soit X un variable aléatoire réelle discrète définit sur un espace de* *probabilité* $(\Omega, A, \mathbb{P})$ *tq :* $X(\Omega) = (x_1, x_2, ...)$ *elle est dite intégrable si :*

$$\sum_{i}^{...} |x_i| P(X = x_i) < +\infty.$$

L'espérance mathématique de X est défini par :

$$E(X) = \sum_{i}^{...} x_i P(X = x_i).$$

L'espérance mathématique possède les propriétés suivantes :

- $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$,
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$,
- $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Moment d'ordre r

Définition 1.1.7. *Soit X une variable aléatoire réelle quelconque et* $r \in \mathbb{N}^*$ *on dira que la variable aléatoire réel X a un* ***Moment d'ordre r*** *si* X^r *a une espérance finie.*

- Dans le cas continu :

$$E(X^r) = \int_{\mathbb{R}} x^r f_X(x) dx.$$

- Dans le cas discret :

$$E(X^r) = \sum_{i}^{\dots} x_i^r P(X = x_i).$$

Remarques :

1. Le moment d'ordre 0 d'une variable aléatoire existe toujours et vaut

   $E(X^0) = E(1) = 1.$

2. Le moment d'ordre 1 est l'espérance de X.

Moment centré

Définition 1.1.8. *Soit X une variable aléatoire à densité, admettant une espérance. On dit que X admet un moment centré d'ordre r si la variable aléatoire centrée $X' = X - E(X)$ admet un moment d'ordre r.*

Le moment centré d'ordre r de X est :

$$E(X'^r) = E[(X - E(X))^r],$$

- Dans le cas continu :

$$E(X'^r) = \int_{\mathbb{R}} x'^r f_X(x) dx.$$

- Dans le cas discret :

$$E(X''^{r}) = \sum_{i}^{\dots} x_i''^{r} P(X = x_i).$$

La stationnarité stricte

Soit un processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{Z})$:

Définition 1.1.9. *Le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit strictement stationnaire, ou fortement stationnaire, ou stationnaire au premier ordre, si quel que soit le n-uplet du temps $t_1 < t_2 < ... < t_n$, tels que $t_i \in \mathbb{Z}$ et pour tout temps $h \in \mathbb{Z}$ avec $t_{i+h} \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \dots, n$ la suite ($X_{t_{1+h}}, \dots, X_{t_{n+h}}$) a la même loi que la suite ($X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$).*

La stationnarité au second ordre

Définition 1.1.10. *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dite stationnaire au second ordre , si les trois conditions suivant sont satisfait*

— $\forall t \in \mathbb{Z}$ $\quad E(X_t^2) < +\infty$ $\quad$ *(existence de l'espérance de X_t)*

— $\forall t \in \mathbb{Z}$ $\quad E(X_t) = m$ $\quad$ *indépend de t (m constant par apport t)*

— $\forall t \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \gamma_X &= cov(X_t, X_{t+h}) \\ &= E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h}))) \end{aligned}$$

Un processus est stationnaire au second ordre si l'ensemble de ses moments sont indépendants du temps.

La relation entre la stationnarité strict et la stationnarité au second ordre

Un processus strictement stationnaire avec un moment d'ordre 2 fini est stationnaire au second ordre.

La réciproque n'est pas général vraie.

1.1.2 Le processus bruit blanc

Parmi les classes des processus stationnaire il existe des processus particulier que sont les processus BB.

Définition 1.1.11. $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un BB faible, s'il satisfait les deux conditions suivant :*

(i) $\forall t \in \mathbb{Z}, \quad E(X_t) = 0 \quad$ *(centrée),*

(ii) $\forall (t,h) \in \mathbb{Z}^2, \quad cov(X_t, X_{t-h}) = E(X_t.X_{t-h}) = \gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma^2 & si \quad h = 0 \\ 0 & sinon. \end{cases}$

Remarques :

1. On appelle bruit blanc fort tout bruit blanc faible tel que les variables (ε_t) sont (i,i,d) et un bruit blanc gaussien tout bruit blanc fort $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tel que $\forall t$, $(\varepsilon_t) \sim N(0,\sigma^2)$.
2. Un BB faible est faiblement stationnaire.
3. Un BB fort est fortement stationnaire.

1.1.3 Causalité

Un processus stochastique X_t est dit causal s'il existe une suite de constantes $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ telle que : $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < \infty$ avec :

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varepsilon_{t-k},$$

1.1.4 Les séries chronologiques

La théorie des séries chronologiques (ou temporelles) est appliquée de nos jours dans des domaines variés que l'économétrie, la médecine ou la démographie.

Définition 1.1.12. *Une série chronologique est un ensemble d'observations d'un processus X_t, chacun étant enregistrée a un instant t.*

Remarques : Noter aussi qu'une série chronologique est une observation d'un processus stochastique a temps discret.

Objectifs principaux dans l'étude des séries chronologiques

L'étude d'une série chronologique permet d'analyser, de décrire et d'expliquer un phénomène au cours du temps. Mais l'un des objectifs principaux de l'étude d'une série chronologique est la prévision, qui consiste à prévoir les valeurs futures X_{t+h}, $(h = 1, 2, 3, \ldots)$, de la série chronologique à partir de ses valeurs observées jusqu'au temps $t = X_1, X_2, \ldots, X_t$.

domaines d'application des séries chronologiques

On trouve des exemples des séries chronologiques dans des très nombreux domaines. La liste suivante n'est qu'un échantillon :

- Finance et économétrie : évolution des indices boursiers, des productions agricoles ou industrielles, des données économiques des entreprises,
- Assurance : analyse des sinistres,
- Médecine/biologie : suivi des évolutions des pathologies, analyse d'électroencéphalogrammes et d'électrocardiogrammes.
- Science de la terre et l'espace : évolution des taches solaires, phénomènes d'avalanches, variations des phénomènes physiques (météorologie),
- Traitement de signal : signaux de communications, de radars, analyse de la parole,
- Traitement des données : mesures successives de position ou de direction d'un objet mobile (trajectographie),
- Météorologie : analyse de données climatiques,
- Démographie : analyse de l'évolution d'une population,
- Agriculture : la quantité d'un produit.

Modélisation d'une série chronologique

Un modèle est une image simplifiée de la réalité qui vise a traduire les mécanismes de fonctionnement du phénomène étudie et permet de mieux les comprendre. On distingue principalement deux types de modèles :

1. **Les modèles déterministes** : Ces modèles relèvent de la Statistique Descriptive. Ils ne font intervenir que de manière sous-jacente le calcul des probabilité et consistent à supposer que l'observation de la série à la date t est une fonction du temps t et d'une variable ε_t centrée faisant office d'erreur au modèle, représentant la différence entre la réalité et le modèle proposé :

$$X_t = f(t, \epsilon_t).$$

On suppose de plus que les ϵ_t sont décorées.

Les deux modèles de ce type les plus usité sont les suivants :

- **Le modèle additif** : C'est le modèle classique de décomposition dans le traitement des modèles d'ajustement. La variable X_t s'écrit comme la somme des trois termes :

$$X_t = Z_t + S_t + \epsilon_t,$$

Où Z_t est la composante tendancielle (déterministe), S_t la composante saisonnière (déterministe aussi) et ϵ_t les composantes aléatoires i.i.d (erreurs au modèle).

- **Le modèle multiplicatif** : La variable X_t s'écrit au terme d'erreur prés comme le produit de la tendance et d'une composante de saisonnalité :

$$X_t = Z_t(1 + S_t)(1 + \epsilon_t).$$

Où Z_t est la composante tendancielle (déterministe), S_t la composante saisonnière (déterministe aussi) et ϵ_t représente l'erreur.

2. **Les modèles stochastiques** : Ils sont du même type que les modèles déterministes Ã ceci prés que les variables de bruit ϵ_t ne sont pas i.i.d mais possèdent une structure de corrélation non nulle : ϵ_t est une fonction des valeurs passées (± lointaines suivant le modèle) et d'un terme d'erreur η_t,

$$\epsilon_t = g(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, ..., \eta_t).$$

1.2 La distribution gaussienne généralisée

Définition 1.2.1. *La distribution gaussienne généralisée est une distribution de probabilité utilisée pour modéliser une grande variété de phénomènes dans des domaines tels que le traitement du signal, le traitement d'image et la statistique. C'est une famille de distributions de probabilité qui inclut à la fois la distribution gaussienne (également connue sous le nom de distribution normale) et la distribution de Laplace en tant que cas particuliers.*

La fonction Gamma

Définition 1.2.2. *La fonction Gamma (notée par la lettre grecque* Γ*) est une fonction mathématique qui est une extension de la fonction factorielle à des valeurs non entières. Elle est donnée* *par :*

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt,$$

où x est un nombre complexe.

Remarques *:*

- *La fonction Gamma est définie pour tous les nombres complexes sauf les entiers non positif.*
- *Pour tout x réel positif, on a la récurrence* $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.
- *Pour tout entier n positif, on a* $\Gamma(n) = (n-1)!$.

1.3 Le maximum de vraisemblance

A côté de la méthode des moindres carrés ordinaires, le maximum de vraisemblance est une méthode générale permet aussi d'estimer les paramètres d'un modèle statistique. Cette méthode a été développée par le statisticien Ronald Aylmer Ficher en 1922.

1.3.1 Estimateur

Définition 1.3.1. *Un estimateur est une statistique permettant d'évaluer un paramètre inconnu relatif à une loi de probabilité.*

Définition 1.3.2. *Un estimateur est une valeur*($\hat{\theta}_n$) *calculée sur un échantillon tiré au hasard, la valeur* ($\hat{\theta}_n$) *est donc une variable aléatoire possédant une espérance* $E(\hat{\theta}_n)$, *et une variance*

$V(\hat{\theta}_n)$.

On comprend alors que sa valeur puisse fluctuer selon l'échantillon. Elle a de très faibles chances de coïncider exactement avec la valeur θ_0 qu'elle est censée représenter. L'objectif est donc de maîtriser l'erreur commise en prenant la valeur de $\hat{\theta}_n$ pour celle de θ.

1.3.2 La vraisemblance

Définition 1.3.3. *La vraisemblance est utilisé pour construire des estimateurs de paramètre caractérisant une loi de probabilité ou un modèle stochastique à partir d'un échantillon de mesures.*
La fonction de vraisemblance est définie en fonction d'un vecteur de paramètres inconnus θ comme la densité des données observées par rapport à une mesure de probabilité discrète ou continue.

- **cas$X$ variable discrète :** Dans un premier temps, on suppose que X est une variable discrète suivant la loi $L(\theta)$ avec un paramètre inconnu.On rappelle que l'on veut estimer θ à partir des données $(x_1, ..., x_n)$, le vecteur des données $(x_1, ..., x_n)$ étant une réalisation d'un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de X.
  On peut définir la vraisemblance des données $x_1, ..., x_n$ par la fonction de θ :
  $$L_n(\theta) = P((X_1, ..., X_n = x_1, ..., x_n), \theta)$$
  . Comme $(X_1, ..., X_n)$ est un n-échantillon, par l'indépendance et la distribution

identique des variable $(X_1, ..., X_n)$ on peut aussi écrire :

$$L_n(\theta) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} X_i = x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i, \theta),$$

- **Cas X variable continue :** Soit X une variable aléatoire suivant une loi continue décrite par la densité de probabilité f dépendant d'un paramètre θ. La vraisemblance est une fonction de θ, étant donné une réalisation x de la variable aléatoire X, qui s'écrit alors :

$$L_n(\theta) = f_\theta(x_1, ..., x_n).$$

Comme $(X_1, ..., X_n)$est un n-échantillon, par l'indépendance et la distribution identique des variable $(X1, ..., x_n)$ on peut aussi écrire :

$$L_n(\theta) = f_\theta(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i).$$

1.3.3 La fonction de log-vraisemblance

Définition 1.3.4. *On appelle fonction de log-vraisemblance pour $(x_1, ..., x_n)$ toute fonction de θ définie par :*

$$l_n(x_1, ..., x_n, \theta) = \log(L_n(x_1, ..., x_n, \theta)).$$

La fonction logarithme népérien étant croissante.

1.3.4 Estimateur du maximum de vraisemblance

Définition 1.3.5. *En général, la fonction de vraisemblance pour un processus X n'est pas calculable car le passé du phénomène* $(X_0, X_{-1}, ...)$ *est généralement inconnu. C'est pourquoi on utilise la quasi-vraisemblance qu'on obtient en remplaçant le passé du processus par des zéros. L'estimateur de quasi vraisemblance maximale (EQMV) est défini par l'expression suivante :*

$$\widehat{\theta}_n = \arg_{\theta\in\Theta} \max \log(x_1, ..., x_n),$$

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition 1.4.1. *Soient* $(U_1, ..., U_n)$ *et* $(V_1, ..., V_n)$ *des réels(ou des complexes). Alors : :*

$$\sum_{k=1}^{n} |U_k V_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |U_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |V_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.5 Convergence presque sûrement des variables aléatoires

Définition 1.5.1. *Nous disons que la suite Xn converge presque sûrement vers X si :*

$$\forall \varepsilon, \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{k\geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right) = 0$$

Ceci est noté $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{p.s} X.$

1.6 Le bruit GED

La distribution Généralizée des Erreurs (GED)est un type de distribution statistique utilisée dans l'analyse des données, représentant des variations hétérogènes et un symétrie altérée. Elle a été introduite par Subbotin et utilisée par Nelson dans le contexte des modèles de comportement financier pour représenter les fluctuations des données financières.

Définition 1.6.1. *La densité gaussienne généralisée également connue sous le nom de distribution d'erreur généralisée (GED(r) avec* $r > 0$ *) ou la distribution gamma de puissance est donnée par :*

$$g_r(x) = \frac{r^{1-1/r}}{2\Gamma(1/r)} e^{-\frac{|x|^r}{r}} \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

Où x est la variable aléatoire,r est le paramètre de forme et $\Gamma(1/r)$*est fonction gamma de (1/r)*
On a, pour $(r = 1)$ g_1 *est la densité de Laplace, pour* $(r = 2)$ g_2 *est la densité gaussienne.*

$$E(Z_r) = 0 \quad \text{et} \quad E(|Z_r|^r) = 1, \tag{1.2}$$

On a le résultat :

$$m_r(p) = E(|Z_r|^p) = r^{\frac{p}{r}-1} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{r})}{\Gamma(\frac{r+1}{r})} \quad \forall p > 0. \tag{1.3}$$

CHAPITRE 2

PROCESSUS PUISSANCE ASYMÉTRIQUE ARCH MODÈLE-APARCH-

Les séries temporelles sont des outils essentiels dans l'analyse des données financières et économiques, nous permettant de comprendre et d'analyser les variations temporelles des prix et des actifs financiers. Au fil des ans, de nombreux modèles statistiques ont été développés pour l'analyse des séries temporelles, et parmi ces modèles, le modèle APARCH (Asymmetric Power ARCH) se distingue comme un modèle avancé et amélioré.

Le modèle APARCH a été initialement présenté par Ding, Granger et Engle en 1993[8], et il représente une évolution significative du modèle ARCH classique. Le modèle ARCH est basé sur l'idée que la volatilité peut varier dans le temps et dépend des valeurs précédentes des variations. En introduisant une caractéristique asymétrique dans la volatilité, le modèle APARCH peut représenter les variations positives et négatives de manière différente.

Après le développement du modèle APARCH, son application a été étudiée avec différentes formes d'erreurs possibles. L'une de ces erreurs est l'erreur de distribution généralisée (GED), qui est utilisée pour représenter les erreurs non gaussiennes dans les séries temporelles.

Dans ce chapitre, nous concentrons sur le modèle APARCH (Asymmetric Power ARCH) et son utilisation pour l'analyse des séries temporelles. Nous expliquons le concept du modèle et comment utiliser l'erreur GED (Generalized Error Distribution) avec celui-ci.

En utilisant une trajectoire observée d'un processus causal nous estimons le paramètre r de la densité du bruit blanc. Cette classe de séries chronologiques a été étudiée dans les travaux antérieure de Duchenes et Francq (2008)[7], Bardet et Wintenberger (2009)[3] . nous travaillons avec un échantillon observé $(X_1, ..., X_n)$ où $(X_t)_t \in \mathbb{Z}$ représente une solution de l'équation suivante :

$$X_t = \sigma_{\theta_0}((X_{t-k})_{k\geqslant 1})\,\varepsilon_t, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

où :

- $\theta_0 \in \Theta \subset R^d$, $d \in N^*$, c'est un vecteur de paramètre inconnu, également appelé le paramètre "vrais" (mais d est connu).
- $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une séquence de variables aléatoires (i.i.d.) indépendantes centrées et distribuées de façon identique avec symétrique distribution de probabilité, et tel qu'il existe $r_0 \geqslant 1$ et $h \geqslant min(2, r)$ satisfaisant

$$E(\varepsilon_0) = 0, \quad E(|\varepsilon_0|^r) = 1 \quad \text{et} \quad E(|\varepsilon_0|^h) < \infty. \tag{2.2}$$

- pour x= $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$ où $\mathbb{R}^\infty$ est l'espace de séquences réelles avec un nombre fini de termes non nuls, $(\theta, (x_n)_{n\in N}) \to \sigma_\theta((x_n)_{n\in N}) \in (0, \infty)$ est une application connue.

Nous présentons une méthode novatrice en deux phases pour obtenir un estimateur PGGQMLE gaussien généralisé dans le cadre général d'un processus causal affine.

1. supposons que (ε_t) dans l'équation (2.1) suit un bruit blanc distribué selon une loi GED(r), où $r > 1$ est un paramètre inconnu. En utilisant conjointement les estimateurs QMLE gaussiens et laplaciens de θ_0, nous estimons$r$ avec l'estimateur $\hat{r}$, qui présente une forte consistance.
2. Après avoir établi la forte consistance de l'estimateur GGQMLE (Quasi-Maximum de Vraisemblance Gaussien Généralisé) de θ_0, construit en utilisant une densité instrumentale basée sur une loi GED(r), nous remplaçons r par $\hat{r}$ pour obtenir un

PGGQMLE (Quasi-Maximum de Vraisemblance Gaussien Généralisé Pénalisé). La consistance de cet estimateur est également démontrée.

2.1 Processus APARCH

Définition 2.1.1. *Le modèle APARCH (p,q) a été introduit comme solution de système d'équations :*

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (|X_{t-i}| - \gamma_i X_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^\delta, \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $\delta \geq 1$, $\alpha_0 > 0$, $-1 < \gamma_i < 1$ et $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, p$, $\beta_j \geq 0$ pour $j = 1, \ldots, q$ satisfaisant $\sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$.
On note le vecteur des paramètres par : $\theta = (\delta, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_p, \beta_1, \ldots, \beta_q)$.

Ce modèle inclut les modèles ARCH et GARCH, en modifiant les paramètre, nous pouvons obtenir différents modèles

- *Lorsque $\delta = 2$, $\beta_j = 0$ (pour j=1,...,p) et $\gamma_i = 0$ (pour i=1,...,q), le modèle APARCH est un modèle ARCH.*
- *Lorsque $\delta = 2$, $\gamma_i = 0$ (pour i=1,...,p), le modèle APARCH est un modèle GARCH.*
- *Lorsque $\delta = 2$, le modèle APARCH est un modèle GJR-GARCH.*
- *Lorsque $\delta = 1$, le modèle APARCH est un modèle TARCH.*
- *Lorsque $\beta_j = 0$ (pour j=1,...,p) et $\gamma_i = 0$ (pour i=1,...,q), le modèle APARCH est un modèle TARCH.*
- *Lorsque $\delta = \infty$, le modèle APARCH est un modèle Log-ARCH.*

(Plus de détails peuvent être trouvés dans Ding et al 1993)

2.2 causalité

Proposition 2.2.1. *Soit X_t le processus APARCH définie par (2.3), en utilisant L l'opérateur retard habituel tel que $LX_t = X_{t-1}$ et $(1-\sum_{j=1}^{q}\beta_jL^j)^{-1}$ existe, alors pour $t \in \mathbb{Z}$ la variance conditionnelle peut s'écrit sous la forme :*

$$\sigma_t^\delta = b_0 + \sum_{i\geq 1} b_i^+(max(X_{t-i},0))^\delta + \sum_{i\geq 1} b_i^-(max(-X_{t-i},0))^\delta \tag{2.4}$$

où $b_0 = (1-\sum_{j=1}^{q}\beta_j)^{-1}\alpha_0$ et les coefficients $(b_i^+, b_i^-)_i \geq 1$ sont définis par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} b_i^+ = \sum_{k=1}^{q}\beta_k b_{i-k}^+ + \alpha(1-\gamma_i)^\delta \quad avec \quad \alpha_i(1-\gamma_i)^\delta = 0 \quad pour \quad i > p, \\ b_i^- = \sum_{k=1}^{q}\beta_k b_{i-k}^- + \alpha(1+\gamma_i)^\delta \quad avec \quad \alpha_i(1+\gamma_i)^\delta = 0 \quad pour \quad i>p, \end{cases}$$

avec $b_i^+ = b_i^- = 0$ pour $i < 0$.

Preuve 2.2.1. *(preuve de la proposition)*

On a pour $t \in \mathbb{Z}$ la variance conditionnelle est définie par :

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i(|x_{t-i}| - \gamma_i x_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma_{t-j}^\delta, \tag{2.5}$$

En remplaçant $X_t = max(X_t,0) + min(X_t,0)$ et $|X_t| = max(X_t,0) - min(X_t,0)$ dans (2.5) on obtient :

$$(1-\sum_{j=1}^{q}\beta_jL^j)\sigma_t^\delta=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(1-\gamma_i)^\delta(max(X_{t-i},0))^\delta+\alpha_i(1+\gamma_i)^\delta(-min(X_{t-i},0))^\delta. \tag{2.6}$$

$$\sigma_t^\delta=\frac{1}{(1-\sum\limits_{j=1}^{q}\beta_jL^j)}[\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(1-\gamma_i)^\delta(max(X_{t-i},0))^\delta+\alpha_i(1+\gamma_i)^\delta(-min(X_{t-i},0))^\delta]$$

$$\sigma_t^\delta=(\sum_{j=0}^{q}\beta_jL^j)[\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(1-\gamma_i)^\delta(max(X_{t-i},0))^\delta+\alpha_i(1+\gamma_i)^\delta(-min(X_{t-i},0))^\delta]$$

on remarque que (2.6) peut s'écrire sous la forme :

$$B(L)\sigma_t^\delta=\alpha_0+\Theta^+(L)(max(X_t,0))^\delta+\Theta^-(L)(max(-X_t,0))^\delta \tag{2.7}$$

avec

$$B(L)=(1-\sum_{j=1}^{q}\beta_jL^j)$$
$$\Theta^+(L)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(1-\gamma_i)^\delta L^i=\sum_{i=1}^{p}\theta_i^+L^i$$
$$\Theta^-(L)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(1+\gamma_i)^\delta L^i=\sum_{i=1}^{p}\theta_i^-L^i$$

comme $(1\sum\limits_{j=1}^{q}\beta_jL^j)^{-1}$ *éxiste, on'a :*

$$\sigma_t^\delta=b_0+\sum_{i\geq1}b_i^+L^i(max(X_t,0))^\delta+\sum_{i\geq1}b_i^-L^i(max(-X_t,0))^\delta \tag{2.8}$$

pour déterminer les coefficients b_0 *et* $(b_i^+,b_i^-)_i\geq1$ *on a de (2.7) et (2.8) :*

$$\begin{aligned}B(L)\sum_{i\geq0}b_i^+L^i&=\alpha_0+\Theta^+(L)\\ B(L)\sum_{i\geq0}b_i^-L^i&=\alpha_0+\Theta^-(L)\end{aligned} \tag{2.9}$$

implique que

$$b_0 = b_0^+ = b_0^- = \frac{\alpha_0}{B(L)} = (1 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j)^{-1}\alpha_0$$

Le système (2.9) est équivalent au système

$$\begin{cases} (1 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j L^j) \sum_{i\geq 0} b_i^+ L^i = \sum_{i=0}^{p} \theta_i^+ L^i \\ (1 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j L^j) \sum_{i\geq 0} b_i^- L^i = \sum_{i=0}^{p} \theta_i^- L^i \end{cases} \text{, avec} \qquad \theta_0 = \alpha_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sum_{i\geq 0} b_i^+ L^i - \sum_{i\geq 0} \sum_{j=1}^{q} \beta_j b_i^+ L^{i+j} = \sum_{i=0}^{p} \theta_i^+ L^i \\ \sum_{i\geq 0} b_i^- L^i - \sum_{i\geq 0} \sum_{j=1}^{q} \beta_j b_i^- L^{i+j} = \sum_{i=0}^{p} \theta_i^- L^i \end{cases} \text{, avec} \qquad \theta_0 = \alpha_0$$

de la première équation on a :

$$b_1^+ = \beta_1 b_0^+ + \alpha_1 (1 + \gamma_1)^\delta$$

$$b_2^+ = \beta_1 b_1^+ + \beta_2 b_0^+ + \alpha_2 (1 + \gamma_2)^\delta$$

$$b_3^+ = \beta_1 b_2^+ + \beta_2 b_1^+ + \beta_3 b_0^+ + \alpha_3 (1 + \gamma_3)^\delta$$

de la deuxième équation on a :

$$b_1^- = \beta_1 b_0^- + \alpha_1 (1 + \gamma_1)^\delta$$

$$b_2^- = \beta_1 b_1^- + \beta_2 b_0^- + \alpha_2 (1 + \gamma_2)^\delta$$

$$b_3^- = \beta_1 b_2^- + \beta_2 b_1^- + \beta_3 b_0^- + \alpha_3 (1 + \gamma_3)^\delta$$

Alors les coefficients $(b_i^+, b_i^-)_i \geq 1$ *sont définis par les relations de récurence :*

$$\begin{cases} b_i^+ = \sum\limits_{k=1}^{q} \beta_k b_{i-k}^+ + \alpha_i(1-\gamma_i)^\delta \text{ avec } \alpha_i(1-\gamma_i)^\delta = 0 \text{ pour } i > p; \\ b_i^- = \sum\limits_{k=1}^{q} \beta_k b_{i-k}^- + \alpha_i(1+\gamma_i)^\delta \text{ avec } \alpha_i(1+\gamma_i)^\delta = 0 \text{ pour } i > p, \end{cases}$$

Lemme 2.2.1. *soit* $0 < \rho_0 < 1$, *en définir* $U = \{0, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + ... + \beta_\rho \leqslant p_0\}$ *pour tout* $\theta \in U$ *on a :*

$$b_i^+ \leq C_1 \rho_0^{\frac{i}{q}} \quad 0 \leq i < \infty \tag{2.10}$$

$$b_i^- \leq C_2 \rho_0^{\frac{i}{q}} \quad 0 \leq i < \infty. \tag{2.11}$$

$C_1, C_2 > 0$

Preuve 2.2.2 (**Preuve de Lemme**). *On va montrer ce lemme par récurence.*

- *Pour* $i = 0$ *on a :*

$$b_0^+ = b_0^- = \frac{\alpha_0}{1 - \sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j} \leq \frac{\alpha_0}{1-\rho_0} \rho_0^{\frac{0}{q}} \tag{2.12}$$

  relation vérifié.

- *Pour* $i \geq 1$ *:*

  Supposons que le lemme est vérifie pour tout $j > R = max(p, q)$ *tel que* $j < i$ *et on va montrer qui est reste vrais pour* i *:*

De (2.10) trouve,

$$\begin{aligned} b_i^+ &\leq (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_q) \max_{1 \leq k \leq q} b_{i-k} \\ &\leq \rho_0 C_1 \rho_0^{\frac{i-q}{q}} \\ &\leq C_1 \rho_0^{\frac{i}{q}} \end{aligned}$$

et de (2.11)

$$\begin{aligned} b_i^- &\leq (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_q) \max_{1 \leq k \leq q} b_{i-k} \\ &\leq \rho_0 C_2 \rho_0^{\frac{i-q}{q}} \\ &\leq C_2 \rho_0^{\frac{i}{q}} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

2.3 Définition et hypothèses

2.3.1 Existence et stationnarité

Selon Doukhan et Wintenberger[2] et Bardet et Wintenberger[3], l'obtention de l'existence et de la r-stationnarité (définie dans [2]) d'une solution causale et ergodique de (2.3) nécessite plusieurs inégalités de type Lipschitz sur la fonction σ_θ. Pour $k = 0, 1, 2$ et un certain espace Θ de $\mathbb{R}^d$, la condition Lipschitzienne sur la fonction σ_θ est définie. Cette condition Lipschitzienne est cruciale pour assurer la stabilité et la convergence de la solution dans l'espace des paramètres Θ.

hypothèse 2.3.1. *$(A_k(K,\Phi))$: $\forall x \in \mathbb{R}^\infty$, $\theta \in \Theta \mapsto \sigma_\theta(x) \in C^k(\Theta)$ et $\partial_\theta^k \sigma_\theta$ satisfait $\left\|\partial_\theta^k \sigma_\theta(0)\right\|_\Theta < \infty$ et il existe une suite $\left(\alpha_j^{(k)}(\sigma,\Theta)\right)_j$ de nombres non négatifs telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^\infty$*

$$\left\|\partial_\theta^k \sigma_\theta(x) - \partial_\theta^k \sigma_\theta(y)\right\|_\Theta \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(k)}(\sigma_t,\Theta)|x_j - y_j|, \text{ avec } \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(k)}(\sigma_t,\Theta) < \infty.$$

Afin d'assurer l'existence d'une solution stationnaire d'ordre r ($r > 1$) pour (2.3), l'ensemble $\Theta(r)$ définit par :

$$\Theta(r) = \left\{\theta \in \mathbb{R}^d, (A_0(\sigma_t, \{\theta\})) \text{ est vérifiée}, \frac{r^{\delta+1-\frac{1}{r}}\Gamma(\frac{\delta+1}{r})}{2\Gamma(\frac{1}{r})} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1.\right.$$

Proposition 2.3.1. *Si $\theta_0 \in \Theta$, alors le processus APARCH(p,q) à base d'erreurs GED défini par le système (2.3) est stationnaire.*

Preuve 2.3.1 (Preuve de la proposition). *Soit X_t le processus de APARCH(p,q). La fonction de densité de probabilité est :*

$$f_r(x) = \frac{r^{1-\frac{1}{r}}}{2\Gamma(\frac{1}{r})} e^{-\left|\frac{x}{r}\right|^r}$$

La condition de l'existence de $E(\sigma_t)^\delta$ et $E\,|x_t|^\delta$ est :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i E\left(|\xi_{t-i}| - \gamma \xi_{t-i}\right)^\delta + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1 \tag{2.13}$$

D'après la définition de $E\{x\}^\delta$, on a :

$$
\begin{aligned}
E\Big(|\xi_{t-i}| - \gamma\xi_{t-i}\Big)^{\delta} &= \int_{\mathbb{R}} \Big(|x| - \gamma_i x\Big)^{\delta} f(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(|x| - \gamma_i x\Big)^{\delta} \frac{r^{1-\frac{1}{r}}}{2\Gamma(\frac{1}{r})} e^{-|\frac{x}{r}|^r} dx \\
&= \frac{r^{1-\frac{1}{r}}}{2\Gamma(\frac{1}{r})} \int_{\mathbb{R}} \Big(|x| - \gamma_i x\Big)^{\delta} e^{-}|\frac{x}{r}|^r dx \\
&= \frac{r^{1-\frac{1}{r}}}{2\Gamma(\frac{1}{r})} \Big(\int_{\mathbb{R}} (x - \gamma_i x)^{\delta} e^{-(\frac{x}{r})^r} \mathbb{I}_{x\geq 0} + \int_{\mathbb{R}} (-x - \gamma_i x)^{\delta} e^{(\frac{x}{r})^r} \mathbb{I}_{x<0} \Big) \\
&= \frac{r^{1-\frac{1}{r}}}{2\Gamma(\frac{1}{r})} \Big((1 - \gamma_i) \int_{\mathbb{R}} (x)^{\delta} e^{-(\frac{x}{r})^r} \mathbb{I}_{x\geq 0} + (1 + \gamma_i)^{\delta} \int_{\mathbb{R}} (-x)^{\delta} e^{-(-\frac{x}{r})^r} \mathbb{I}_{x<0} \Big) \\
&= \frac{r^{\delta+1-\frac{1}{r}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{r}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} \Big((1 - \gamma_i)^{\delta} + (1 + \gamma_i)^{\delta} \Big)
\end{aligned}
$$

2.3.2 Définition de l'estimateur

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ une série de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) provenant d'une distribution de probabilité $P(X)$ de l'équation (2.3) et soit θ la quantité inconnue à estimer telle que $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$.

g est une fonction des données observées qui produit une estimation de θ. L'estimateur est calculé à partir des données et peut être basé sur différentes méthodes, telles que la méthode des moments, la méthode du log-vraisemblance ou la méthode des moindres carrés.

Nous appliquons la méthode de log-vraisemblance :

- La forme générale de la loi de log-vraisemblance avec l'utilisation de l'errure GED (le log-vraisemblance conditionnelle) d'observer $(X_1, \cdots, X_n)$ étant donné $(X_0, X_{-1}, \cdots)$,et il s'exprime comme suit :

$$\log L(\sigma_\theta^t) = \sum_{t=1}^{n} \log\Big(g\Big(\frac{X_t}{\sigma_\theta^t}\Big)\Big),$$

$\log L(\sigma_\theta^t)$: le logaritheme de la vraisemblance.

n : la taille de l'echantillon.

X_t : la valeur observée des données.

$g\Big(\frac{X_t}{\sigma_\theta^t}\Big)$: est la densité de probabilité conditionnelle.

La densité de probabilité conditionnelle $g\Big(\frac{X_t}{\sigma_\theta^t}\Big)$ varie en fonction du modèle statistique utilisé et de la distribution supposée des données. Dans le cas l'utilisation de l'erreur GED, la densité de probabilité conditionnelle utilisée est celle de la distribution d'erreur GED.

- Un estimateur de vraisemblance quasi-maximale (QMLE) de θ_0 peut être défini avec le respect du choix de g par :

$$\widehat{\theta}_n^{(g)} = \text{Argmax}_{\theta\in\Theta} \log\Big(QL_{(\theta)}^{(g)}(X_1, \cdots, X_n)\Big).$$

Le QMLE (Quasi-Maximum Likelihood Estimation) est généralement élaboré en utilisant la distribution gaussienne standard avec $g = g_1$ (appelée QMLE gaussienne) ou, moins fréquemment, en utilisant la distribution laplacienne standard avec $g = g_2$ (appelée QMLE laplacienne). Ce pendant, dans cette formulation alternative, nous considérons généralement $g = g_r$

En conséquence, pour tout $1 \leq r \leq h$ avec h défini en (2.1), alors l'équation (2.1) peut s'écrire à nouveau :

$$X_t = \sigma_{\theta_r}(X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots)\, \varepsilon_t^{(r)}, \qquad t \in Z, \tag{2.14}$$

avec $\varepsilon_t^{(r)} = \varepsilon_t(E(|\varepsilon_0|^r))^{-1/r}$, impliquant $E(|\varepsilon_t^{(r)}|^r) = 1$ et $\sigma_{\theta_r} = (E(|\varepsilon_0|^r))^{1/r}\sigma_{\theta_0}$. Ensuite, nous pouvons définir le généralisé Quasi-maximum de vraisemblance gaussien $\widehat{\theta}_n^{(r)}$ par :

$$\widehat{\theta}_n^{(r)} = \text{Argmin}_{\theta\in\Theta} \sum_{t=1}^{n} \widehat{q}_t(\theta),$$

où

$$\widehat{q}_t(\theta) = \sum_{t=1}^{n} \log(|\widehat{\sigma}_\theta^t|^r) + |\widehat{\sigma}_\theta^t|^{-r}|X_t|^r. \tag{2.15}$$

En d'autres termes, cet estimateur est égal à $\widehat{\theta}_n^{(g)}$ lorsque $g = g_r$ la densité GED(r).

2.3.3 Hypothèses additives requises pour l'estimation

Fixons un sous-ensemble compact Θ de $\Theta(s) \subset R^d$. Nous considérerons les hypothèses suivantes :

(Ainf) $\exists\, \sigma > 0$ tel que $inf_{\theta\in\Theta}\, \sigma_\theta(x) \geqslant \sigma$, $\forall x \in \mathbb{R}^\infty$.

(Id) $\forall\theta \in \Theta$, $(\sigma_\theta^t = \sigma_{\theta_0}^t a.s.) \Rightarrow \theta = \theta_0$.

(Var) La famille $(\partial\sigma_{\theta_0}^t/\partial\theta_i)_{1\leq i\leq d}$ est a.e. linéairement indépendant, où :

$$\frac{\partial\sigma_\theta^t}{\partial\theta} = \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}(X_{t-1}, \ldots).$$

La condition **(Id)** est une condition usuelle d'identifiable alors que la condition **(Var)** est nécessaire pour assurer la finitude de la variance asymptotique du résultat sur la normalité asymptotique.

2.4 Estimation du paramètre de la forme r_0

Dans cette section,nous proposons pour estimer la forme du paramètre r_0 lorsque (ε_t) est censé suivre exactement un GED (r_0) avec $r_0 \geqslant 1$

2.4.1 Consistance asymptotique de $\widehat{r_n}$

Nous étudions maintenant la consistance asymptotique de l'estimateur proposé $\widehat{r_n}$ pour le paramètre de forme r_0.

Théorème 2.4.1. *Soit X la stationnaire solution de l'équation (2.3) où ε_0 suit une distrubition GED (r_0) et $\Phi_0 \in \Phi$, un sous-ensemble compact de Φ_2. Supposons également que hypothèses* $(\mathbf{A_0}(\sigma, \mathbf{\Phi}))$,**(Ainf)** *et* **(Id)** *sont satisfaites avec*

$$\alpha_j^0(\sigma, \Phi) = O\Big(j^{-\ell}\Big) \ \text{pour certains} \ \ \ell > 3/2, \tag{2.16}$$

alors l'estimateur $\widehat{r_n}$ est fortement consistant, c'est-à-dire $\widehat{r_n} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} r_0$.

Preuve 2.4.1. *Il est clair que $\widehat{e_t}(\theta_1, \theta_2) := \left(\dfrac{\widehat{\sigma^t_{\theta_1}}}{\widehat{\sigma^t_{\theta_2}}}\right)^2 = H(r_0)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par définition de θ_1 et θ_2. Par conséquent, $h_n(\theta_1, \theta_2) := \frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n} \widehat{e_t}(\theta_1, \theta_2) = H(r_0)$. Mais puisque la fonction $\theta \in \mathbb{R}^d \to \sigma_\theta(x)$ est supposée être une fonction continue pour tout $x \in \mathbb{R}^\infty$, la fonction*

$(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^{2d} \mapsto h_n(\theta_1, \theta_2)$ *est également presque sûrement une fonction continue.*

Bardet et Wintenberger (2009)[3] ont montré que $\widehat{\theta_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \theta_2$ *lorsque* $n \to \infty$*, et Bardet et al. (2017) ont montré que* $\widehat{\theta_n^1} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \theta_1$ *lorsque* $n \to \infty$ *sous les hypothèses.*

Par conséquent, $h_n(\widehat{\theta_n^1}, \widehat{\theta_n^2}) - h_n(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}) \xrightarrow{a.s.} 0$*, c'est-à-dire* $h_n(\widehat{\theta_n^1}, \widehat{\theta_n^2}) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} H(r_0)$*. Puisque la fonction* H^{-1} *est également une fonction continue, la preuve est établie.*

2.5 Estimateur de θ_0

2.5.1 Construction de l'estimateur dans le cas de bruit blanc GED

Supposons maintenant que ε_0 suit un GED (r_0) et que $(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ est une trajectoire observée de (X_t) qui satisfait (2.3).Dans ce cas ,une relation simple peut etre établie entre σ_{θ_0} et $\sigma_{\theta^{(r)}}$:

Lemme 2.5.1. *pour tout* $r \geq 1$*,lorsque* $(X_1, \ldots.., X_n)$ *et une trajectoire observée de* (X_t) *qui satisfait (2.3) et* ε_0 *suit une GED* (r_0) *, Alors :*

$$\sigma_{\theta_0} = \sigma_{\theta_r} r^{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} \left(\frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{r_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{r_0}\right)} \right)^{\frac{1}{r}} \tag{2.17}$$

Preuve 2.5.1. *Ici, nous utilisons la relation fournie par la réécriture de (2.3) c'est-à-dire*

$$\sigma_{\theta_0} = \sigma_{\theta_r} (E[|\varepsilon_0|^r])^{\frac{-1}{r}} \tag{2.18}$$

et l'égalité des moments (2.6) qui induisent (2.17)

Dans la suite,nous examinerons deux cas particuliers,$r = 1$ correspondant au laplacien QMLE et $r = 2$, correspondant au QMLE gaussien classique. Ainsi, en utilisant les résultats du lemme (2.3.1) ,nous obtenons :

$$\Big(\frac{\sigma^t_{\theta_1}}{\sigma{\theta_2}^t}\Big)^2 = \frac{\Gamma^2\big(\frac{2}{r_0}\big)}{\Gamma\big(\frac{1}{r_0}\big)\Gamma\big(\frac{3}{r_0}\big)} = H(r_0) \tag{2.19}$$

— Cette fonction H est une fonction continue et croissante, donc elle est inversible. La figure 1 a venir présente le graphe de H

— La relation 2.19 conduit à la définition d'un estimateur $\widehat{r_n}$ du paramètre de forme r_0 donné par l'expression

$$\widehat{r_n} = H^{-1}\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Big(\frac{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta}_n^{(1)}}}^t}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta}_n^{(2)}}}^t}\Big)^2\Big) \tag{2.20}$$

Puisque θ_1 et θ_2 sont inconnus et peuvent être estimés l'aide des estimateur QMLE.

2.5.2 Hypothèses nécessaire pour la convergence d'EQMV

La convergence et l'asymptotique gaussienne de L'EQMV-Normale pourraient être réalisables avec certaines hypothèses supplémentaires sur Θ et la fonction σ_θ :

- H_1(compacité) :Θ est un ensemble compact.
- H_2(Borne inférieur de la variance conditionnelle) :il existe un constante α_0 positif tel que, $\forall\theta \in \Theta$ alors $\sigma_\theta(x) > \alpha_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- H_3 :$E\{|\eta_t|^r\} = 1$
- H_4(Identifiabilité) : Le fonction σ_θ est telle que pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, alors $\sigma_{\theta_1} = \sigma_{\theta_2}$.

2.5.3 Consistance asymptotique de $\widehat{\theta}_n$

Théorème 2.5.1. *Supposons que les hypothèses sont satisfaites, alors la suite d'EQMV-Normale* $(\widehat{\theta}_n)$ *converge fortement, c'est-à-dire*

$$\widehat{\theta}_n \to \theta_0 \quad p.s$$

Preuve 2.5.2. *(preuve du Théorème)*

Nous prouvons ce théorème en deux étapes dans la première étape une forte loi uniforme des grandes nombres sur θ *satisfaite par* $\frac{1}{n}\widehat{L_n}(\theta)$ *qui converge vers* $L(\theta) = -E\{q_t(\theta)\}$ *est établi. Par suite, dans la deuxième étape nous prouvons que* $L(\theta)$ *admet un maximum unique en* θ_0*.*
On démontre l'étape(1) par le même façon de la preuve du théorème 1 de Bardet, Boularouk et Djaballah (2017)[9], la loi uniforme forte des grands nombre satisfaite pour la moyenne d'échantillon $(\widehat{q_t})_{t\in\mathbb{N}^*}$ *est obtenu en prouvant que* $E|q_t(\theta)| < \infty$*. Pour tout* $t \in Z$ *et sous l'hypothèse H2, on a :*

$$\begin{aligned}
|q_t(\theta)| &= |\log(\sigma_\theta^t) + (\sigma_\theta^t)^{-1}(X_t - (\sigma_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2| \\
&\leq |\log(\sigma_\theta^t)| + (X_t(\sigma_\theta^t)^{\frac{-1}{2}} - 1)^2 \\
&\leq |\sigma_t| + (X_t - (\sigma_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2 \\
&\leq |\sigma_t| + (X_t + \Big(\frac{X_t}{(\alpha_0)^{\frac{1}{2}}} - 1\Big)^2.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sup|q_t| \leq |\sigma_t| + (X_t + \Big(\frac{X_t}{(\alpha_0)^{\frac{1}{2}}} - 1\Big)^2 \tag{2.21}$$

où, $E\{X_t^2\} < \infty$*, d'après la proposition 2.2.1 et* $E\{\sigma_\theta^t\} < \infty$ *d'après le Lemme 1 de Bardet et Wintenberger (2009) ([3]) ce qui implique que* $E\{|q_t(\theta)|\} < \infty$*, d'où on conclut que :*

$$|\frac{1}{n}L_n(\theta) - L(\theta)| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0. \tag{2.22}$$

Maintenant nous allons montrer que :

$$\frac{1}{n}|\widehat{L_n}(\theta) - L_n(\theta)| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0. \tag{2.23}$$

En effet, pour tout $\theta \in \Theta$ *et* $t \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\widehat{q_t}(\theta) - q_t(\theta) &= \log(\widehat{\sigma_\theta^t}) + (\widehat{\sigma_\theta^t})^{-1}(X_t - (\widehat{\sigma_\theta^t})^{\frac{1}{2}})^2 - \log(\sigma_\theta^t) + (\sigma_\theta^t)^{-1}(X_t - (\sigma_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2 \\
&= \log\Big(\frac{\widehat{\sigma_\theta^t}}{\sigma_\theta^t}\Big) + \Big(X_t(\widehat{\sigma_\theta^t})^{-\frac{1}{2}} - 1\Big)^2 - \Big(X_t(\widehat{\sigma_\theta^t})^{-\frac{1}{2}} - 1\Big)^2 \\
&= \log\Big(\frac{\widehat{\sigma_\theta^t}}{\sigma_\theta^t}\Big) + \Big(X_t(\widehat{\sigma_\theta^t})^{-\frac{1}{2}}) - X_t(\widehat{\sigma_\theta^t})^{-\frac{1}{2}}\Big)\Big(X_t(\widehat{\sigma_\theta^t})^{-\frac{1}{2}} + X_t(\widehat{\sigma_\theta^t})^{-\frac{1}{2}} - 2\Big) \\
&\le \log\Big(\frac{\widehat{\sigma_\theta^t}}{\sigma_\theta^t}\Big) + \Big(X_t(\widehat{\sigma_\theta^t})^{-\frac{1}{2}}) - X_t(\widehat{\sigma_\theta^t})^{-\frac{1}{2}}\Big)\Big(X_t(\widehat{\sigma_\theta^t})^{-\frac{1}{2}} + X_t(\widehat{\sigma_\theta^t})^{-\frac{1}{2}}\Big) \\
&\le \frac{\widehat{\sigma_\theta^t}}{\sigma_\theta^t} - 1 + \Big((\widehat{\sigma_\theta^t})^{-1} - (\sigma_\theta^t)^{-1}\Big)X_t^2 \\
&= \frac{\widehat{\sigma_\theta^t} - \sigma_\theta^t}{\sigma_\theta^t} + \Big((\widehat{\sigma_\theta^t})^{-1} - (\sigma_\theta^t)^{-1}\Big)X_t^2
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|\widehat{q_t}(\theta) - q_t(\theta)| &\le |\widehat{\sigma_\theta^t} - \sigma_\theta^t|\alpha_0^{-1} + |\widehat{\sigma_\theta^t} - \sigma_\theta^t|\alpha_0^{-2}|X_t| \\
&\le C|\widehat{\sigma_\theta^t} - \sigma_\theta^t|(1 + |X_t|)
\end{aligned}$$

avec C positif.

D'après le corollaire 1 de Kounias et Weng(1969)([10]), il suffit de montrer que il existe un $k \in [0,1]$ telle que :

$$\sum_{t\geq 1} \frac{1}{t^k} E\{|\widehat{q_t}(\theta) - q_t(\theta)|^k\} < \infty$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $k = 1$

$$E\{|\widehat{q_t}(\theta) - q_t(\theta)|^k\} \leq CE\{(1 + X_t^2)^2\}^{\frac{1}{2}} \times E\{(|\widehat{\sigma_\theta^t} - \sigma_\theta^t|)^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.24}$$

D'après (2.24) on a $E\{|X_t|^2\} < \infty$ et $E\{|\widehat{\sigma_t}|^2\} < \infty$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E\{|\widehat{q_t}(\theta) - q_t(\theta)|\} &\leq CE\{|X_0|^2\}^{\frac{1}{2}} (\sum_{j\geq t} \alpha_j^{(0)}(\sigma_\theta^t, \Theta)) \\ &\leq C(\sum_{j\geq t} \alpha_j^{(0)}(\sigma_\theta^t, \Theta)) \\ &\leq C \sum_{j\geq t} \rho^j \\ &\leq C'\rho^t. \end{aligned}$$

tel que $C' = C \times max(C_1, C_2)$ et $\rho = \rho_0^{\frac{1}{p}}$.

Nous avons donc :

$$\sum_{t\geq 1} \frac{1}{t} E\{|\widehat{q_t}(\theta) - q_t(\theta)|^k\} \leq T \sum_{t\geq 1} \frac{\rho^t}{t}.$$

avec $T = \dfrac{C'}{1-\rho}$.

Cette série est fini car $0 < \rho < 1$, par conséquent, nous obtenons :

comme on a :

$$\begin{aligned}|\frac{1}{n}\widehat{L_n}(\theta) - L(\theta)| &= |\frac{1}{n}\widehat{L_n}(\theta) - \frac{1}{n}L_n(\theta) + \frac{1}{n}L_n(\theta) - L(\theta)| \\ &\leq |\frac{1}{n}\widehat{L_n}(\theta) - \frac{1}{n}L_n(\theta)| + |\frac{1}{n}L_n(\theta) - L(\theta)|\end{aligned}$$

donc :

$$\frac{1}{n}\widehat{L_n}(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} L(\theta) \tag{2.25}$$

Pour prouver ***l'étape(2)*** *on suppose que* $L(\theta)$ *admet deux maximum* θ *et* θ_0 *telle que* $\theta \neq \theta_0$*, pour* $\theta \in \Theta$ *on a :*

$$\begin{aligned}L(\theta) &= -E\{q_t(\theta)\} \\ &= -E\{\log(\sigma_\theta^t) + (X_t(\sigma_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} - 1)^2\} \\ &= -E\{\log(\sigma_\theta^t) + (\sigma_\theta^t)^{-1}(X_t - (\sigma_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2\} \\ &= -E\{\log(\sigma_\theta^t) + (\sigma_\theta^t)^{-1}(\eta_\theta^t(\sigma_{\theta_0}^t)^{\frac{1}{2}}) - (\sigma_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2\} \\ &= -E\{\log(\sigma_{\theta_0}^t) + \Big(\frac{\sigma_{\theta_0}^t}{\sigma_\theta^t}\Big)\Big(\eta_t - (\frac{\sigma_\theta^t}{\sigma_{\theta_0}^t})^{\frac{1}{2}}\Big)^2\}\end{aligned}$$

D'autre par on a :

$$\begin{aligned}L(\theta_0) &= -E\{q_t(\theta_0)\} \\ &= -E\{\log(\sigma_{\theta_0}^t) + (X_t(\sigma_{\theta_0}^t)^{-\frac{1}{2}} - 1)^2\} \\ &= -E\{\log(\sigma_{\theta_0}^t) + (\sigma_{\theta_0}^t)^{-1}(X_t - (\sigma_{\theta_0}^t)^{\frac{1}{2}})^2\} \\ &= -E\{\log(\sigma_{\theta_0}^t) + (\eta_t - 1)^2\} \\ &= -E\{\log(\sigma_{\theta_0}^t) - 1\}\end{aligned}$$

Par suite en utilisant ***l'hypothèse H3****, nous obtenons :*

$$
\begin{aligned}
L(\theta_0) - L(\theta) &= -E\Big\{\log(\sigma^t_\theta) + (\eta_t - 1)\Big\} + E\Big\{\log(\sigma^t_\theta) + \Big(\frac{\sigma^t_{\theta_0}}{\sigma^t_\theta}\Big)\Big(\eta_t - \Big(\frac{\sigma^t_{\theta_0}}{\sigma^t_\theta}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2\Big\} \\
&= E\Big\{\log\Big(\frac{\sigma^t_{\theta_0}}{\sigma^t_\theta}\Big) - (\eta_t - 1)^2 + \Big(\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}\Big)\Big(\eta_t - \Big(\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}\Big)\Big)\Big\} \\
&= E\Big\{\log\Big(\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}\Big)\Big\} - 1 + E\Big\{\Big(\eta_t - \Big(\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}\Big)^{\frac{1}{2}} + 1 - 1\Big)^2\Big\} \\
&= E\Big\{\log\Big(\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}\Big)\Big\} - 1 + E\Big\{(\eta_t - 1) + \Big(1 - \Big(\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2\Big\}
\end{aligned}
$$

mais pour un η_t suivant une distribution de probabilité symétrique, nous avons pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, $E\{(\eta_t - 1 + m)^2\} > E\{(\eta_t - 1)^2\} = 1$,d'où :

avec $H(x) = -\log(x) - 1 + x$. Mais pour tout $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$, $H(x) > 0$ et $H(1) = 0$. Par conséquent si $\theta \neq \theta_0$, on a $H\Big(\frac{\sigma^t_{\theta_0}}{\sigma^t_\theta}\Big) > 0$. Cela implique, de l'hypothèse ***H4*** *(identifiabilité), que $L(\theta_0) - L(\theta) > 0$ presque sûrement pour tout $\theta \in \Theta$, $\theta \neq \theta_0$. D'où une borne supérieur de $L(\theta)$ est atteinte seulement pour $\theta = \theta_0$ qui est un maximum unique.*

2.6 Normalité asymptotique de $\widehat{\theta}_n$

Théorème 2.6.1. *Soit X_t une solution stationnaire de (2.3), avec $\theta_0 \in \Theta$, si la fonction de probabilite cumulée de ε_0 est continûment différentaible alors :*

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) \xrightarrow[n\to\infty]{D} N_d(0, F^{-1}GF^{-1}) \tag{2.26}$$

où les matrices $F(\theta_0)$ et $G(\theta_0)$ sont définit par

$$F(\theta_0) = E\Big(\frac{\partial^2 q_t(\theta_0)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\Big) \quad pour \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant p+q+1 \tag{2.27}$$

$$G(\theta_0) = E\Big(\frac{\partial q_t(\theta_0)}{\partial\theta_i}\frac{\partial q_t(\theta_0)}{\partial\theta_j}\Big) \quad pour \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant p+q+1 \tag{2.28}$$

Pour démontrer ce théorème, On a les fonctions $\dfrac{\partial L_n(\theta)}{\partial\theta}$ *et* $\dfrac{\partial^2 L_n(\theta)}{\partial\theta^2}$*sont mesurables et p.s. Fini pour tous $\theta \in \Theta$.Leurs propriétés asymptotiques sont décrites dans les deux lemmes suivants*

Preuve 2.6.1. *(Preuve du théorème)*

La première dérivée de Ł$_n$ est donnée par :

$$\frac{\partial L_n}{\partial\theta_i} = -\sum_{t=1}^{n} \frac{\partial q_t}{\partial\theta_i}$$

avec

$$\frac{\partial q_t}{\partial\theta_i} = \sigma_t^{-1}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i} - \sigma_t^{-2}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}(X_t - \sigma_t^{\frac{1}{2}})^2 + \sigma_t^{-1}\sigma_t^{-1/2}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}(X_t - (\sigma_t)^{\frac{1}{2}})$$

En utilisant l'extension de Taylor de $\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial L(\theta_n)}{\partial\theta_i}$*, on obtient :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial L_n(\theta_n)}{\partial\theta_i} = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial\theta_i} + \frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_n(\theta_n, i)}{\partial\theta\partial\theta_i}\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0)$$

Avec n suffisamment grand, de sorte que $(\theta_n, i) \in \Theta$ se situe entre $\widehat{\theta}_n$ et θ_0. En utilisant la consistance de $\widehat{\theta}_n$ et le résultat du lemme (2.6.2) on peut déduire que :

$$F_n = -\frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2 L_n(\theta_n, i)}{\partial\theta\partial\theta_i}\right)_{1\leq i\leq d} \rightarrow F(\theta_0)$$

Tel que $F(\theta_0)$ défini dans (2.27), et

$$\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j} = (\sigma_t)^{-1}\frac{\partial^2\sigma_t}{\partial\theta_j\partial\theta_i} - (\sigma_t)^{-2}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j} + \Big[\Big(2(\sigma_t)^{-3}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i} - (\sigma_t\theta)^{-2}\frac{\partial^2\sigma_t}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\Big)\Big(X_t - (\sigma_t)^{\frac{1}{2}}\Big)^2$$
$$+\Big((\sigma_t)^{-2}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\Big)\Big((\sigma_t)^{-1/2}(X_t - (\sigma_t)^{1/2})\Big)\Big]$$

Et comme on a $E\Big(\sigma_t^{-1}\Big|X_t-\sigma_t\Big|\Big) = E\Big(\Big|\varepsilon-1\Big|\Big) = 1$, *et* $E\Big(sign(X_t-\sigma_t)\Big) = E\Big(sign(\varepsilon-1)\Big) = 0$, *alors on obtient*

$$E\Big(\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\Big) == E\Big(\sigma_t^{-2}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j}\Big) + 2f_\varepsilon(1)E\Big(\sigma_t^{-2}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j}\Big)$$

En utilisant le lemme (2.6.1), nous obtenons le théorème (2.6.1) puisque $\frac{\partial L_n(\hat\theta_n)}{\partial\theta} = 0$ *($\hat\theta_n$ est un extremum local de L_n). De plus, puisque* $E\left[\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta_j\partial\theta_i}\right] < \infty$, *la loi uniforme des grands nombres pour* $\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta_j\partial\theta_i}$ *implique que :*

$$\sqrt{n}(\hat\theta_n - \theta_0) = -nF^{-1}(\theta_0)\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\partial L_n(\hat\theta_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial\theta}\right) \tag{2.29}$$

on peut conclure que $E\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\frac{\partial L_n}{\partial\theta} - \frac{\partial L_n(\hat\theta_n)}{\partial\theta}\right|\right] \to 0.$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial q_{bt}(\theta)}{\partial\theta_i} - \frac{\partial q_t(\theta)}{\partial\theta_i}\right| &= \Big|\widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial\widehat{\sigma}_t}{\partial\theta_i} - \widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial\widehat{\sigma}_t}{\partial\theta_i}\Big(X_t - \widehat{\sigma}_t^{\frac{1}{2}}\Big)^2 + \widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial\widehat{\sigma}_t}{\partial\theta_i}\Big(\eta_t - 1\Big) - \Big(\sigma_t^{-1}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i} - \sigma_t^{-1}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\Big(X_t - \widehat{\sigma}_t^{\frac{1}{2}}\Big)^2\\ &\quad + \widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial\widehat{\sigma}_t}{\partial\theta_i}\Big(\eta_t - 1\Big)\Big|\\ &= \Big|\widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial\widehat{\sigma}_t}{\partial\theta_i} - \widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial\widehat{\sigma}_t}{\partial\theta_i}\Big(\eta_t - 1\Big)^2 + \widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial\widehat{\sigma}_t}{\partial\theta_i}\Big(\eta_t - 1\Big) - \Big(\sigma_t^{-1}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i} - \sigma_t^{-1}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\Big(\eta_t - 1\Big)^2\\ &\quad + \widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial\widehat{\sigma}_t}{\partial\theta_i}\Big(\eta_t - 1\Big)\Big)\Big|\\ &= \frac{1}{2}\Big|\Big(\widehat{\sigma}_t^{-2}\frac{\partial\widehat{\sigma}_t^2}{\partial\theta_i} - \widehat{\sigma}_t^{-2}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\theta_i}\Big)\eta_t + \Big(\widehat{\sigma}_t^{-2}\frac{\partial\widehat{\sigma}_t^2}{\partial\theta_i} - \widehat{\sigma}_t^{-2}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\theta_i}\Big)\Big(\eta_t - 1\Big)^2\Big)\Big|\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha^2}\Big|\Big(\frac{\partial\widehat{\sigma_t^2}}{\partial\theta_i}-\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\theta_i}\Big)\eta_t+\Big(\frac{\partial\widehat{\sigma_t^2}}{\partial\theta_i}-\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\theta_i}\Big)\Big(\eta_t-1\Big)^2\Big|$$
$$\leq \frac{1}{2\alpha^2}\Big(\Big|\frac{\partial\widehat{\sigma_t^2}}{\partial\theta_i}-\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\theta_i}\Big||\eta_t|+\Big|\frac{\partial\widehat{\sigma_t^2}}{\partial\theta_i}-\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\theta_i}\Big|\Big(\eta_t-1\Big)^2\Big)$$

On peut écrire σ_t^2 sous la forme causale $\sigma_t^2=\sum_{i\geq 1}c_iX_{t-i}^2$, où

$\frac{\partial c_i(\theta)}{\partial\theta_k}\leq C_{2i}p_i^*$

pour tout $\theta\in\Theta$ et $i\leq 0<\infty$. Donc,

$$\Big|\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial\theta_i}-\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial\theta_i}\Big|\leq\frac{1}{2\alpha^2}\left(|\eta_t|+(1+\eta_t)^2\right)\sum_{t\leq i<\infty}ip_i^*X_{t-i}^2.$$

Donc, $\mathbb{E}\Big|\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial\theta_i}-\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial\theta_i}\Big|<\infty.$

Lemme 2.6.1. *Soit $\theta_0=(\alpha_0,\alpha_1,......,\alpha_q,\gamma_1,....,\gamma_q,\beta_1,.....,\beta_q)$ avec X_t une solution stationnaire de (2.3), alors on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial\theta}\xrightarrow[n\to\infty]{D}N_d(0,G(\theta_0))\tag{2.30}$$

avec $G(\theta_0)$ la matrice définie dans par

$$G(\theta_0)=E\Big\{\frac{\partial q_t(\theta_0)}{\partial\theta_i}\frac{\partial q_t(\theta_0)}{\partial\theta_j}\Big\}\quad pour\quad 1\leqslant i,\quad j\leqslant p+q+1\tag{2.31}$$

Preuve 2.6.2 (Preuve du lemme 2.6.1)**.** *Pour prouver le lemme :*

1. *premièrement, prouvons que $(\partial q_t(\theta)/\partial\theta_i;F_t)=\sigma(X_{t-1})$ est une martingale de différences et pour prouver cela nous devons montrer les deux point suivants :*

pour $t \in \mathbb{Z}$

$$i)\ \ E\Big[\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i}/F_t\Big] = 0 \qquad p.s$$

$$ii)\ \ E\Big|\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i}\Big| < \infty$$

Nous démontrons ces deux points :

$$\begin{aligned}
E\Big\{\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i}\Big\} &= E\Big\{\sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} - \sigma_t^{-2}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}(X_t - \sigma_t^{\frac{1}{2}})^2 + \sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}(\eta_t - 1)\Big\} \\
&= E\Big\{\sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}(1 - (\eta_t - 1)^2 + (\eta_t - 1))\Big\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\Big\{\Big|\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i}\Big|\Big\} &= E\Big\{\Big|\sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} - \sigma_t^{-2}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}(X_{-}\sigma_t^{\frac{1}{2}})^2 + \sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}(\eta_t - 1)\Big|\Big\} \\
&= E\Big\{\Big|\sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}(\eta_t - 1)^2 + \sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}(1 + \eta_t - 1)\Big|\Big\} \\
&= E\Big\{\Big|\sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}\Big|\Big|\eta_t - (\eta_t - 1)^2\Big|\Big\} \\
&\leqslant E\Big\{\Big|\sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}\Big|\eta_t + (\eta_t - 1)^2\Big\} \\
&\leqslant CE\Big\{\Big|\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i}\Big|\Big\} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Donc $(\partial q_t(\theta)/\partial \theta_i; F_t)$ *est un martingale différences.*

deuxièmement nous avons appliqué le théorème centrale limite pour les martingales de differences.

pour appliquer cette théorème nous prouvons que $E\Big\{\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}\Big\} < \infty$

$$
\begin{aligned}
E\Big\{\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i}\Big\}^2 &= E\Big\{\sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}(\eta_t - 1)^2 + \sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}(1 + \eta_t - 1)\Big\}^2 \\
&= E\Big\{\Big(\sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}\Big)^2\Big(1 - (\eta_t - 1)^2 + (\eta_t - 1)\Big)^2\Big\} \\
&= E\Big\{\Big(\sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}\Big)^2\Big(\eta_t - (\eta_t - 1)^2\Big)^2\Big\} \\
&\leqslant C'E\Big\{\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta_i}\Big\} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

par suite

$$
E\Big\{\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}\Big\}^2 = \sum_{t=1}^{n} E\Big\{\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}\Big\}^2 < \infty
$$

$$
\begin{aligned}
E\Big\{\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i}\frac{\partial q_t}{\partial \theta_j}\Big\}^2 &= E\Big\{(\sigma_t^{-2}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_j})(-(\eta_t - 1)^2 + 1 + \eta_t - 1)^2\Big\}, \\
&= E\Big\{(\sigma_t^{-2}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_j})\Big\}E\Big\{(-(\eta_t - 1)^2 + \eta_t)^2\Big\} \\
&= E\Big\{(\sigma_t^{-2}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_j})\Big\}
\end{aligned}
$$

La théorème centrale limite pour les différences de martingale implique que :

$$
n^{\frac{-1}{2}}\frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta} \xrightarrow[n\to\infty]{D} N_d(0, G(\theta_0)) \tag{2.32}
$$

tell que $G(\theta_0)$ définie dans (2.31)

Lemme 2.6.2. *Soit X_t une solution stationnaire de (2.3),avec $\theta_0 \in \Theta$, alors on'a*

$$
\Big\|\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_n(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'} - \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big\|_{\Theta} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} 0 avec \frac{\partial^2 L_n(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'} = -E\Big[\frac{\partial^2 q_n(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big] \tag{2.33}
$$

Preuve 2.6.3. *Le deuxième processus dérivé* $(\frac{\partial^2 q_n}{\partial\theta^2})_{t\in F}$ *est stationnaire ergodique (c'est une fonction mesurable de* $(X_t, X_{t_{-1}}, ...)$ *par conséquent, il satisfait à une loi uniforme des grands nombres, si son permier moment uniforme est borné .Par conséquent, en utilisant la borne* $\sigma_\theta^{-1} \leq \alpha_0^{-1}$, *il existe* $c > 0$ *telque*

$$\Big|\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\Big| \leq C\Big[\Big(\Big|\frac{\partial^2\sigma_t}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\Big| + \Big|\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j}\Big|\Big|\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\Big|\Big) + \Big(\Big|\frac{\partial^2\sigma_t}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\Big| + \Big|\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j}\Big|\Big|\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\Big|\Big)|X_t - \sigma_t|\Big]$$

Nous concluons que $E\Big|\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\Big| < +\infty$ *depuis, tout* $t \in \mathbb{Z}, 1 \leq i, j \leq d$ *tq* $d = i + j + 1$
$E \mid X_t^2 \mid < +\infty, E \mid \sigma_t \mid < +\infty, E \mid \frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i} \mid < +\infty, E\Big|\frac{\partial^2\sigma_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\Big| < +\infty$
En conséquence, le LUGN pour $\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta}$.

CHAPITRE 3

APPLICATION NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre nous concentrons sur l'application pratique à travers des exemples numériques des séries temporelles APARCH.Ces exemples démontreront à quel point il est efficace d'utiliser l'erreur GED avec le modèle APARCH.

3.1 Les points importants dont nous avons besoin

Nous avons :

$$\widehat{r_n} = H^{-1}\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\widehat{\sigma}_t^2(\widehat{\theta}_n^{(1)})}{\widehat{\sigma}_t^2(\widehat{\theta}_n^{(2)})}\Big), \tag{3.1}$$

où $\widehat{\sigma}_t^2$ est défini en utilisant $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} = 0$.

et nous utilisons l'estimateur quasi-maximum de vraisemblance gaussien généralisé $\widehat{\theta_t^{r_n}}$ pour estimer la valeur de θ, défini comme suit :

$$\widehat{\theta}_n^{(\widehat{r_n})} := \text{Argmin}_{\theta\in\Theta}\sum_{t=1}^{n} \; Big(\log|\widehat{\sigma}_\theta^t| + \frac{1}{\widehat{r_n}}\Big|\frac{X_t}{\widehat{\sigma}_\theta^t}\Big|^{\widehat{r_n}}\Big).$$

3.2 Application numérique

Dans le but d'étudier l'importance de l'estimation du paramètre "r" dans les processus APARCH, nous réaliserons des expériences de Monte-Carlo en utilisant les méthodes Gaussian QMLE, Laplace QMLE et Pseudo Generalized Gaussian QMLE, avec différentes tailles d'échantillons ($n = 100$, $n = 1000$ et $n = 5000$) et différents types de distributions de probabilité pour (ε_t) :

— Distribution gaussienne centrée notée $\mathcal{N}$;

— Distribution laplacienne centrée notée $\mathcal{L}$;

— Distribution uniforme centrée notée $\mathcal{U}$;

— Distribution de Student centrée avec 5 degrés de liberté, notée t_5 ;

Le modèle considéré est :

- un processus APARCH $(1, \delta, 1)$ défini par :

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_1(|X_{t-1}| - \gamma X_{t-1})^\delta + \beta \sigma_{t-1}^\delta, \end{cases}$$

avec $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.4$ $\gamma = 0.8$ $\beta = 0.2$ et $\delta = 1.2$ (δ est censé être connu).

Nous commençons d'abord par considérer le bruit blanc $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tel que la distribution de ε_0 soit une distribution gaussienne généralisée pour plusieurs valeurs de r ($r = 1$ (distribution de Laplace),$r = 1.3$, $r = 1.7$, $r = 2$ (distribution gaussienne) et $r = 2.6$). En utilisant 1000 réplications indépendantes de cette processus (**APARCH**), r est estimé par $\widehat{r_n}$ et son erreur quadratique moyenne (RMSE) est calculée et rapportée dans le tableau suivant :

	$r = 1$	$r = 1.3$	$r = 1.7$	$r = 2$	$r = 2.6$
$n = 100$	0.52	0.67	1.56	2.95	2.39
$n = 1000$	0.07	0.09	0.76	0.22	0.27
$n = 5000$	0.03	0.04	0.07	0.09	0.12

Table 3.1 – Erreur quadratique moyenne des composantes de $\widehat{r_n}$ pour les processus APARCH1, 1)

.

conclusion des résultats numérique

Les résultats des simulations indiquent que lorsque la taille de l'échantillon n augmente, l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de forme $\widehat{r_n}$ diminue.

De plus, ils montrent que plus la valeur du paramètre de forme r est élevée, plus l'erreur quadratique moyenne de $\widehat{r}_n$ augmente. Pour être plus précis, il semble que l'erreur quadratique moyenne de $(\widehat{r}_n/r)$ soit uniquement fonction de n. En suite, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne (RMSE) de $\widehat{\theta}_n^{(1)}$, $\widehat{\theta}_n^{(2)}$ et $\widehat{\theta}_n^{\widehat{r}_n}$ pour ces processus et les résultats sont présentés dans le tableau :

		$\mathcal{L}$			$\mathcal{N}$			t_5			$\mathcal{U}$		
		$\theta_n^{\widehat{r}_n}$	$\widehat{\theta}_n^{(1)}$	$\widehat{\theta}_n^{(2)}$	$\theta_n^{\widehat{r}_n}$	$\widehat{\theta}_n^{(1)}$	$\widehat{\theta}_n^{(2)}$	$\theta_n^{\widehat{r}_n}$	$\widehat{\theta}_n^{(1)}$	$\widehat{\theta}_n^{(2)}$	$\theta_n^{\widehat{r}_n}$	$\widehat{\theta}_n^{(1)}$	$\widehat{\theta}_n^{(2)}$
$n = 100$	α_0	0.25	0.07	0.08	0.10	0.06	0.06	0.21	0.07	0.08	0.03	0.05	0.04
	α_1	0.41	0.20	0.21	0.22	0.15	0.14	0.36	0.19	0.21	0.07	0.11	0.10
	γ	0.39	0.29	0.31	0.24	0.22	0.21	0.35	0.28	0.30	0.13	0.18	0.16
	β	0.22	0.20	0.20	0.18	0.17	0.17	0.22	0.20	0.20	0.09	0.14	0.12
	somme	1.27	0.76	0.80	0.74	0.60	0.58	1.14	0.74	0.79	0.32	0.48	0.42
	$\widehat{r}_n$		1.24			2.47			1.59			8.79	
$n = 1000$	α_0	0.030	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01	0.3	0.03	0.03	0.01	0.02	0.01
	α_1	0.07	0.07	0.07	0.05	0.05	0.05	0.08	0.06	0.08	0.02	0.04	0.03
	γ	0.12	0.12	0.13	0.09	0.10	0.10	0.11	0.11	0.13	0.03	0.08	0.07
	β	0.08	0.08	0.09	0.05	0.06	0.05	0.08	0.07	0.09	0.02	0.05	0.04
	somme	0.30	0.30	0.32	0.21	0.23	0.21	0.30	0.27	0.33	0.08	0.19	0.15
	$\widehat{r}_n$		1.02			2.03			1.23			9.74	
$n = 5000$	α_0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	α_1	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.02	0.02	0.01
	γ	0.05	0.05	0.06	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05	0.07	0.01	0.03	0.03
	β	0.03	0.03	0.04	0.02	0.03	0.02	0.03	0.03	0.04	0.01	0.02	0.02
	somme	0.12	0.12	0.14	0.09	0.10	0.09	0.12	0.12	0.16	0.05	0.08	0.07
	$\widehat{r}_n$		1.00			2.01			1.19			9.00	

TABLE 3.2 – Erreur quadratique moyenne des composantes de $\theta_n^{\widehat{r}_n}$, $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ et $\widehat{\theta}_n^{(2)}$ pour les processus APARCH $(1, 1)$.

CONCLUSION

Cette étude se concentre sur l'analyse du modèle de séries chronologiques APARCH, introduit par Ding, en mettant l'accent sur l'application du modèle GED pour les erreurs. Les définitions clés du modèle ont été présentées, ainsi qu'une analyse des propriétés des processus aléatoires dans les séries chronologiques, en plus d'une discussion sur les concepts de base. L'estimation et la probabilité ont également été étudiées, y compris un examen des propriétés de l'estimation de la vraisemblance maximale avec des conclusions liées au modèle GED. En conclusion, une application pratique des séries chronologiques simulées a été présentée, avec une comparaison des résultats entre le modèle APARCH avec les erreurs GED et le modèle APARCH sans celles-ci.

BIBLIOGRAPHIE

[1] .Ding, Z., Granger C.W.J. and Engle R.F. (1993) A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. Journal of Empirical Finance, 1, 83-106.

[2] .Doukhan, P. and Wintenberger, O. (2007), Weakly dependent chains with infinite memory. Stochastic Process. Appl, 118, 1997-2013.

[3] .Bardet, J.-M. Wintenberger, O. (2009) Asymptotic normality of the Quasi- Maximum likelihood estimator for multidimensional causal process, Ann. Statist., 37, 2730-2759.

[4] .Box, G.E.P. Jenkins, G.M. (1970), Time Series Analysis ; Forecasting and Control, San Francisco : Holden-Day.

[5] .Weiss, A.A. (1984), ARMA models with ARCH errors. J. Time Ser. Anal., 5, 2, 129-143.

[6] .Engle, R.F. (1982), Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates

of the variance of U.K. in ation, Econometrica 50, 987-1008.

[7] .Duchenes, P. and Francq, C. (2008) On diagnostic checking time series models with portmanteau test statistics based on generalized inverses and 2-inverses. COMPSTAT 2008, Proceedings in Computational Statistics, 143-154.

[8] Ding,z.,Granger,c.w.,& Engle,R.,F.(1993).Modelling volatility dynamics for financial returns.Journal of Econometrics,52(1-2),5-59.

[9] Bardet, J. M, Y. Boularouk, K. Djaballah. (2017). Asymptotic behaviour of the Laplacian quasi-maximum likeli-hood estimator of affine causal processes. Electronic Journal of Statistics 11 (1) :452-79.

[10] .Kounias, E.G. and Weng, T.-S. (1969), An inequality and almost sure convergence. Annals of Mathematical Statistics, 40, 1091-1093.