

N° Réf :.....

Centre Universitaire  
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des Mathématiques et Informatiques

Département de Mathématique

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master**

**En: Mathématiques**

**Spécialité: Mathématiques appliquées**

**Génération d'un nouveau système  
hyperchaotique sans points d'équilibre:  
Application à l'anti-synchronisation**

Préparé par :

- Aya BOUGHACHA
- Takoua MEDJALDI

Soutenue devant le jury:

Yacine HALIM	Prof	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Smail KAOUACHE	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Widad LAOUIRA	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

**Année universitaire :2023/2024**

---

# DEDICACE

AYA

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail :

A mes chers parents,

ma mère YASSEMINA et mon père AHMED

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragement

A mes chers frères SIF EDINE, YASSER, IYADE

A ma belle binome TAKOUA

A tous les amis de promotion de master mathématique 2023-2024

Sans oublier tous les professeurs et les enseignants .

TAKOUA

Je dédie cette mémoire à mon cher père, que Dieu ait pitié de lui,  
À ma mère, que Dieu la protège, qui ont toujours été à mes  
côtés et m'ont toujours soutenu tout au long de ces longues années d'études.

À mes soeurs : niamat-allah, koudwa ,Hibat-allah.

À Toute ma famille qui m'a toujours soutenu.

À mon binôme : AYA

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation  
de ce modeste travail.

---

# RÉSUMÉ

Ce travail de ce mémoire consiste à construire un nouveau système hyperchaotique sans point d'équilibre instable. Le problème d'antisynchronisation de ce système est également étudié. La suite de ce mémoire est organisée de la façon suivante :

Le premier chapitre présente quelques notions de base des systèmes dynamiques déterministes. Il énonce également quelques concepts introductifs à la théorie du chaos et de la synchronisation.

Le deuxième chapitre consiste à construire un nouveau système hyperchaotique sans besoin d'un point équilibre instable et leur anti-synchronisation.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une conclusion générale.

Mots-clés :

Systèmes chaotiques, synchronisation, contrôle adaptatif, Fonction de Lyapunov.

# ملخص

يتكون عمل هذه الأطروحة من بناء نظام جديد مفرط الفوضى بدون نقطة توازن غير مستقرة. كما تمت دراسة مشكلة التزامن المضاد لهذا النظام.

يتم تنظيم بقية هذه الأطروحة على النحو التالي:

يقدم الفصل الأول بعض المفاهيم الأساسية للأنظمة الديناميكية الحتمية. كما يحدد بعض المفاهيم التمهيديّة لنظرية الفوضى والتزامن.

يتكون الفصل الثاني من بناء نظام جديد مفرط الفوضى دون الحاجة إلى نقطة توازن غير مستقرة و التزامن المضاد.

أخيرا ، تختتم هذه الأطروحة باستنتاج عام.

## الكلمات المفتاحية :

الأنظمة الفوضوية ، التزامن ، التحكم المنسجم ، دالة ليابونوف.

---

# ABSTRACT

This Memory aims to construct a new hyperchaotic system without an unstable equilibrium point. The problem of anti-synchronization for this system is also investigated.

The remainder of this Memory is organized as follows :

The first chapter introduces some basic concepts of deterministic dynamical systems. It also presents some concepts to chaos theory and synchronization.

The second chapter focuses on constructing a new hyperchaotic system without the need for an unstable equilibrium point and its anti-synchronization.

Finally, this Memory concludes with a general conclusion.

**Keywords :**

Chaotic systems, synchronization, adaptive controller, Lyapunouv function.

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques</b>	<b>3</b>
1.1 Systèmes dynamiques . . . . .	3
1.1.1 Systèmes dynamiques continus . . . . .	4
1.1.2 Systèmes dynamiques discrets . . . . .	4
1.1.3 Systèmes autonomes ou non autonomes . . . . .	4
1.1.4 Flot . . . . .	4
1.2 Attracteurs et bassin d'attraction . . . . .	5
1.2.1 Attracteurs réguliers . . . . .	5
1.2.2 Attracteurs chaotiques . . . . .	5
1.2.3 Bassin d'attraction . . . . .	7
1.3 Point d'équilibre . . . . .	7
1.4 Notions de stabilité . . . . .	7
1.4.1 Méthode directe . . . . .	8
1.4.2 Méthode indirecte . . . . .	9
1.5 Caractérisation du comportement chaotique . . . . .	10
1.5.1 Chaos et hyperchaos . . . . .	10
1.5.2 Caractéristique principales du comportement chaotique . . . . .	10

---

1.5.3	Exemple d'un système chaotique . . . . .	14
1.5.4	Exemple d'un système hyperchaotique . . . . .	16
1.6	Synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques . . . . .	20
1.6.1	Systèmes couplés . . . . .	20
1.6.2	Accouplement bidirectionnel . . . . .	20
1.6.3	Accouplement unidirectionnel . . . . .	21
1.6.4	Différents types de synchronisation . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Nouveau système hyperchaotique sans point d'équilibre</b>	<b>25</b>
2.1	Construction du système hyperchaotique sans points d'équilibre . . . . .	25
2.1.1	Points d'équilibre . . . . .	26
2.1.2	Attracteur hyperchaotique . . . . .	26
2.1.3	Exposants de Lyapounov . . . . .	28
2.2	Etude de l'anti-synchronisation . . . . .	29
	<b>Références</b>	<b>34</b>

---

## TABLE DES FIGURES

1.1	Point fixe, Cycle limite et Tore. . . . .	6
1.2	Attracteurs chaotiques du système de Lorenz. . . . .	6
1.3	Evolution temporelle d'un trajectoire du système de Lú avec trois conditions initiales différentes. . . . .	11
1.4	L'aspect aléatoire du système de Rössler. . . . .	13
1.5	Diagramme de bifurcations de l'application logistique. . . . .	14
1.6	Attracteurs de Lorenz, où $\sigma = 10$ , $b = \frac{8}{3}$ , et $r = 28$ . . . . .	15
1.7	Aspect aléatoire de l'état $x_1$ du système de Lorenz. . . . .	16
1.8	Projections de portrait de phase du système(1.16). . . . .	18
1.9	Les trois plus grand exposants de Lyapunov du système(1.16). . . . .	19
2.1	Projections de portrait de phase du système (2.3). . . . .	27
2.2	Variation des exposants de Lyapounov. . . . .	28
2.3	Courbes des états du système erreur (2.17). . . . .	32



---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les "systèmes chaotiques" ou "hyperchaotiques" sont des systèmes dynamiques non linéaires, déterministes, très sensible aux conditions initiales et définissent des comportements imprévisibles ne se répètent jamais.

Plusieurs systèmes ont été présentés ces dernières recherches exploitant les comportements chaotique dans les domaines physiques [1], chimiques [2], biologiques [3] et économiques [4], etc. L'étude de tels systèmes est liée à la théorie du chaos qui a été reconnue à partir des années 1960, grâce aux travaux d'un grand nombre de chercheurs notamment ceux de Lorenz [5], et grâce à la découverte de nouveaux instruments de calculs tel que l'ordinateur.

Le concept de la synchronisation des systèmes chaotiques a été essentiellement inspiré des travaux de Pecora et Carroll en 1990 [6]. Ils ont découvert que deux systèmes chaotiques identiques ayant des conditions initiales différentes peuvent se synchroniser s'ils sont convenablement couplés.

Les phénomènes de synchronisation du chaos ont fait l'objet d'un intérêt particulier dans l'étude des systèmes chaotiques, car ils peuvent s'appliquer à de vastes domaines de l'ingénierie et des sciences de l'information, notamment en communication sécurisée [7] et cryptologie [8].

La configuration de base d'un système de synchronisation est constituée d'un système

émetteur et un système récepteur. Dans la littérature, différentes méthodes de contrôle ont été employées pour réaliser la synchronisation, telles que : le contrôle continu [9], le contrôle adaptatif [10], le contrôle de mode glissant [11] et le contrôle adaptatif flou [12]. À l'aide de ces méthodes, plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été également étendus, à savoir la synchronisation complète [13], l'anti-synchronisation [14], la synchronisation généralisée [15], la synchronisation projective [16], la synchronisation projective modifiée [17], la synchronisation mixte modifiée [18], la synchronisation généralisée de type  $Q - S$  [19] et la synchronisation combinée [20, 21, 22, 23].

Quelques systèmes chaotiques sans points d'équilibres instables ont été récemment étudiés [24, 25, 26, 27]. Il est bien connu que ces systèmes sont complètement différents pour les systèmes chaotiques usuelles car le critère classique de Shilnikov [28] ne peut pas l'utiliser pour démontrer l'existence du chaos dans ces systèmes.

Selon la nouvelle classification des dynamiques chaotiques [29, 30], il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs auto-excités et les attracteurs cachés. Un attracteur auto-excité possède un bassin d'attraction excité par des points d'équilibres instables. En revanche, l'attracteur caché ne peut pas être trouvé en utilisant une méthode numérique dans laquelle une trajectoire partait d'un point de la variété instable au voisinage d'un point équilibre instable [29]. L'étude des systèmes hyperchaotiques avec des attracteurs cachés est encore un problème de recherche ouvert [31, 32].

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit en général dans ce contexte particulier. Nous proposons un nouveau système hyperchaotique sans besoin d'un point d'équilibre instable. Nous abordons également le problème d'anti-synchronisation de ce système.

La suite de ce mémoire est organisée de la façon suivante :

Le premier chapitre présente quelques notions de base des systèmes dynamiques déterministes. Il énonce également quelques concepts introductifs à la théorie du chaos et de la synchronisation.

Le deuxième chapitre consiste à construire un nouveau système hyperchaotique sans besoin d'un point équilibre instable et leur anti-synchronisation.

Enfin, ce mémoire est clôturée par une conclusion générale.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES

Le but de ce chapitre est de mieux faire connaître les conditions nécessaires pour qu'un système ait un comportement chaotique. Nous rappelons quelques définitions de base permettant d'étudier les caractéristiques principales des systèmes dynamiques non linéaires.

### 1.1 Systèmes dynamiques

En générale, un système dynamique est un système qui décrit des phénomènes évoluent au cours du temps, quelle que soit sa nature ( physique, chimique, électromécanique, biologique, ou économique, etc). Cette évolution peut être décrite par un ensemble fini d'équations qui peut prendre des formes mathématiques diverses : équations différentielles ordinaires (autonomes ou non), équations aux dérivées partielles, applications (inversibles ou non). Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories : systèmes dynamiques continues et systèmes dynamiques discrets.

### 1.1.1 Systèmes dynamiques continues

L'évolution d'un système dynamique continue est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t, v), \quad (1.1)$$

où,  $x \in E$  ( $E$  un ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$  appelé espace de phase) est le vecteur d'état,  $v \in \mathbb{R}^p$  est un vecteur des paramètres et  $f : E \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$  est le champ de vecteur, qui représente la dynamique du système (1.1).

Lorsque l'application  $f$  est continue et vérifiée la condition Lipschitzienne sur un certain intervalle  $I$  de la variable  $x$ , on peut assurer l'existence et l'unicité de la solution pour toute condition initiale  $x_0 \in I$ .

### 1.1.2 Systèmes dynamiques discrets

La forme générale d'un système dynamique à temps discret est décrit par une équation aux différences non linéaire suivante :

$$x_{n+1} = f(x_n, v), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

### 1.1.3 Systèmes autonomes ou non autonomes

Lorsque le champ de vecteur  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, le système (1.1) est dit autonome. Dans le cas contraire, il est dit non autonome.

En utilisant un changement de variable approprié, on peut facilement transformer un système non autonome de dimension  $n$  en un système autonome équivalent de dimension  $n + 1$ .

### 1.1.4 Flot

On appelle flot d'un système dynamique, l'application continue :

$$\Phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow I$$

$$(x, t) \rightarrow \Phi_t(x) = \Phi(x, t),$$

qui possède les propriétés suivantes :

$$\Phi_t(x_0) = x_0 \tag{1.3}$$

$$\Phi_{t+s}(x_0) = \Phi(t)(\Phi_s(x_0)), \quad \text{pour tout } t \geq s \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

## 1.2 Attracteurs et bassin d'attraction

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent toutes les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle un attracteur. Les attracteurs sont donc des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques.

Il en existe deux type d'attracteurs : attracteurs réguliers et attracteurs étranges .

### 1.2.1 Attracteurs réguliers

Il existe trois types distincts d'attracteurs réguliers.

- ❶ L'attracteur "point fixe" : c'est l'attracteur le plus simple. Il est représenté par un point dans l'espace des phases. C'est donc une solution constante et stationnaire.
- ❷ L'attracteur "cycle limite" : c'est une trajectoire fermée qui attire toutes les orbites proches. C'est donc une solution périodique du système.
- ❸ L'attracteur "quasi-périodique" : représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs fréquences, que l'on appelle parfois "tore".

### 1.2.2 Attracteurs chaotiques

Un attracteur chaotique est bien plus complexe que les autres attracteurs, il est caractérisé par :

- ❶ Un volume nul.

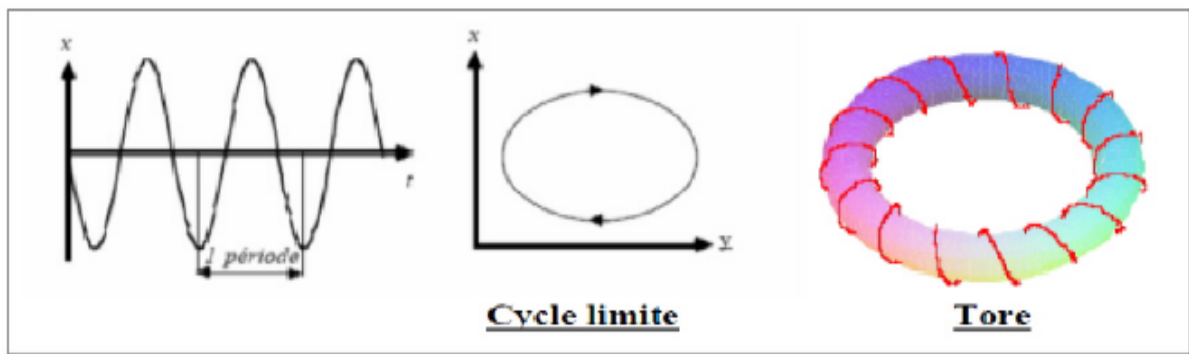


FIGURE 1.1 – Point fixe, Cycle limite et Tore.

- ② un dimension fractale (non-entière)  $d$ ,  $2 < d < n$ , où  $n$  est la dimension de l'espace de phase.
- ③ Une séparation exponentiellement rapide de deux trajectoires initialement proches.

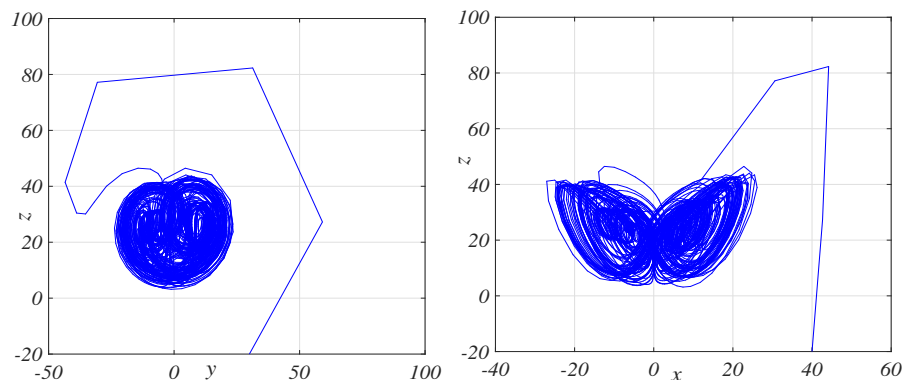


FIGURE 1.2 – Attracteurs chaotiques du système de Lorenz.

**Définition 1.2.1** Soit  $A$  un sous ensemble compact de l'espace de phases  $E$ . Un attracteur  $A$  du système (1.1) vérifie les quatre conditions suivantes :

- ①  $A$  est invariant sous l'action du flot  $\varphi_t$ , c'est-à-dire :  $\varphi_t(A) = A$ .
- ②  $A$  est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.
- ③ Il existe une orbite dense dans  $A$ .
- ④  $A$  est indécomposable, c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs ne peut pas être un attracteur .

### 1.2.3 Bassin d'attraction

**Définition 1.2.2** Lorsque  $A$  est un attracteur, l'ensemble :

$$B(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) \in A \right\}, \quad (1.5)$$

est appelé le bassin d'attraction de  $A$ . C'est donc, l'ensemble des points pour lesquels les trajectoires convergent asymptotiquement vers  $A$ .

## 1.3 Point d'équilibre

En général, on ne sait pas résoudre explicitement un système différentielle non linéaire. On fait alors une étude qualitative de ses solutions. Cette étude va commencer par la recherche des points d'équilibre de ce système.

**Définition 1.3.1** Un point  $x_{eq} \in \mathbb{R}^n$  est dit point d'équilibre du système (1.1) si :

$$\dot{x} = f(x_{eq}, t) = 0, \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (1.6)$$

Dans l'espace de phase, un point d'équilibre se représente par un point. Sa valeur est déterminée à savoir la condition initiale choisie. Par ailleurs, pour des conditions initiales différentes nous pouvons trouver plusieurs points d'équilibre. De plus, ces points peuvent être stables ou instables, à savoir la convergence ou la divergence entre les trajectoires voisines.

## 1.4 Notions de stabilité

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires au voisinage des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet alors d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est très proche d'un point d'équilibre. La théorie de stabilité au sens de Lyapunov est valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une

équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste toujours suffisamment proche.

**Définition 1.4.1 (Stabilité)** Le point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (1.1) est stable au sens de Lyapounov si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \|x_0 - x_{eq}\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0) - x_{eq}\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.7)$$

**Définition 1.4.2 (Attractivité)** Le point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (1.1) est attractif si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \|x_0 - x_{eq}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0) - x_{eq}\| = 0. \quad (1.8)$$

**Définition 1.4.3 (Stabilité asymptotique)** Le point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (1.1) est asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.

**Définition 1.4.4 (Stabilité exponentielle)** Le point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (1.1) est exponentiellement stable, s'il existe deux constantes strictement positives  $a$  et  $b$  et s'il existe  $t_0 > 0$ , tels que :

$$\|x(t, x_0) - x_{eq}\| < a \exp(-bt), \text{ pour tout } t \geq t_0. \quad (1.9)$$

**Remarque 1.4.1** Notons que l'utilisation des définitions précédentes, pour réaliser la stabilité de (1.1), au voisinage de son point d'équilibre, exige la résolution explicite de l'équation (1.1), ce qui est souvent très difficile dans la plupart des cas. De ce fait là, les deux méthodes suivantes de Lyapounov nous permettent de contourner cet obstacle.

### 1.4.1 Méthode directe

Lyapounov a proposé une méthode appelée méthode directe de Lyapounov. Elle est basée sur la recherche d'une fonction particulière, notée  $V(x)$ . Cette fonction est appelée fonction de Lyapounov. Lorsque une telle fonction existe, le système considéré est stable. Notons que cette méthode de Lyapounov nous donne une condition suffisante de stabilité, c'est à dire que le système peut être stable même devant l'impossibilité de



trouver une fonction de Lyapounov, car il n'y a pas de règle générale pour trouver cette fonction.

Considérons le système autonome défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ f(x_{eq}) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

**Théorème 1.4.1** [11] *Un point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (1.1) est dit stable (respectivement asymptotiquement stable) au sens de Lyapounov, lorsqu'il existe un voisinage  $D$  de  $(x_{eq})$  et une fonction  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  (dite fonction de Lyapounov) de classe  $C^1$  vérifiant les conditions suivantes :*

1.  $V(x_{eq}) = 0$  et  $V(x) > V(x_{eq})$ , pour tout  $x \neq x_{eq}$  dans  $D$ .
2.  $\dot{V}(x) \leq 0$  (respectivement  $\dot{V}(x) < 0$ ), pour tout  $x \neq x_{eq}$  dans  $D$ .

## 1.4.2 Méthode indirecte

Cette méthode consiste à étudier le système linéarisé (1.4.2) autour d'un point d'équilibre  $x_{eq}$ .

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.11)$$

où

$$A = D(f(x_{eq})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_{eq})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_{eq})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x_{eq})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_{eq})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_{eq})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x_{eq})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x_{eq})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_{eq})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x_{eq})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

et  $\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$  s'appelle la matrice Jacobienne de  $f$ .

**Théorème 1.4.2** [12] 1. *Si toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  ont leur partie réelle négative, le point d'équilibre  $x_{eq}$  est asymptotiquement stable.*

2. *Si l'une des valeurs propres a sa partie réelle positive, le point  $x_{eq}$  est instable.*

## 1.5 Caractérisation du comportement chaotique

L'objectif de cette partie est de mieux faire connaître les caractéristiques permettant de reconnaître un comportement chaotique. En première approche, nous rappelons quelques approches de définitions du chaos, ensuite nous présentons des caractéristiques principales du comportement chaotique d'un système dynamique déterministe. Nous citons également quelques scénarios de transition vers le chaos. Enfin, nous terminons cette partie par une application sur les systèmes chaotiques.

### 1.5.1 Chaos et hyperchaos

En générale, il n'existe pas de définition formelle du chaos. Il existe cependant plusieurs approches possibles pour définir le chaos. Ces approches ne sont pas toutes équivalentes, mais elles convergent vers certaines propriétés communes qui caractérisent le chaos.

### 1.5.2 Caractéristique principales du comportement chaotique

En générale, le chaos est défini comme un comportement particulier d'un système dynamique. Il existe un ensemble de propriétés qui résument les caractéristiques observées dans les systèmes chaotiques. Elles sont considérées comme des critères mathématiques qui le définissent. Les plus connues sont :

- \* Non- linéarité.
- \* Sensibilité aux conditions initiales.
- \* Attracteur étrange.
- \* Exposants de Lyapunov.
- \* Déterminisme.
- \* Aspect aléatoire.
- \* Diagramme de bifurcations

## Non linéarité

La non-linéarité est l'une des caractéristiques fondamentales des systèmes chaotiques. En effet, tout système linéaire ne peut pas être chaotique.

## Sensibilité aux conditions initiales

Les systèmes chaotiques sont extrêmement sensibles aux conditions initiales. De très petites perturbations sur l'état initial d'un système peuvent être mener finalement à un comportement strictement différent dans son état final. La Figure 1.5.2 [33] illustre l'évolution temporelle d'une trajectoire du système de Lü [34] avec des conditions initiales différentes et très proches.

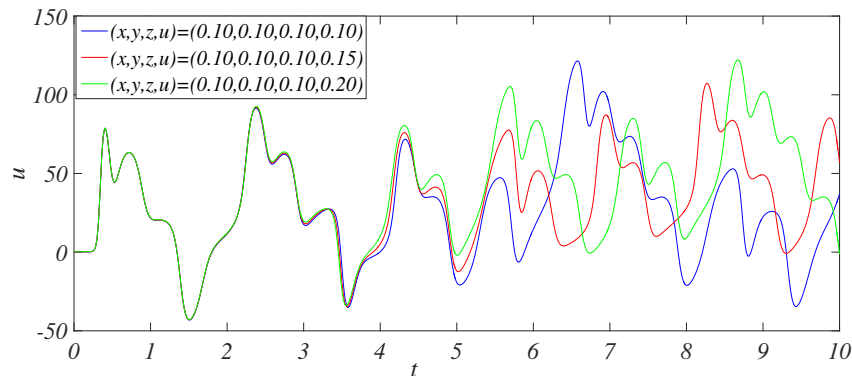


FIGURE 1.3 – Evolution temporelle d'une trajectoire du système de Lü avec trois conditions initiales différentes.

## Attracteur étrange

La figure géométrique particulière qui représente l'attracteur d'un système chaotique dans l'espace des phases en fonction du temps, appelé attracteur chaotique. Ainsi, cet attracteur se produit à l'aide de deux opérations simultanées à savoir l'étirement, responsable de la sensibilité aux conditions initiales et de l'instabilité, et le repliement, responsable du côté étrange. D'autre part, on parle d'attracteur chaotique lorsque sa dimension est fractale. Grâce de cette propriété particulière, fractale, ces attracteurs sont qualifiés d'étranges(chaotiques). Ils représentent la signature du chaos qui nous

permet d'authentifier un comportement chaotique.

### Exposants de Lyapunov

La vitesse de divergence de deux trajectoires initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapounov afin de caractériser la nature du chaos détecté. L'exposant de Lyapounov sert à mesurer le taux de divergence des deux trajectoires. Lyapunov a démontré que le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases. Par exemple, pour un système à temps continu d'ordre 4, soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  les exposants de Lyapounov de ce système satisfaisant  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ . Alors ce système se comporte de la manière suivante :

- Si  $\lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Il s'agit d'un point d'équilibre asymptotiquement stable.
- Si  $\lambda_1 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < 0$ . Il s'agit d'un cycle limite stable.
- Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < 0$ . Il s'agit d'un tore stable.
- Si  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < \lambda_4 < 0$  et  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i < 0$ . Il s'agit d'un système chaotique.
- Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$  et  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i < 0$ . Il s'agit d'un système hyperchaotique.

**Remarque 1.5.1** *Un exposant de Lyapounov négatif selon une direction, indique que les trajectoires se rapprochent et par conséquent on perd l'information sur les conditions initiales. l'orbite est donc attractive vers une orbite périodique ou un point fixe. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce genre de système exhibe une stabilité asymptotique.*

*Un exposant de Lyapounov positif selon une direction, indique que la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. les trajectoires divergent, l'orbite est donc chaotique. Intuitivement, c'est la sensibilité aux conditions initiales.*

*Un exposant de Lyapounov nul, les orbites issues de conditions initiales différentes, gardent une*

séparation constante, ni convergent, ni divergent l'une par rapport à l'autre. Dans ce cas, un tel système physique est dit conservatif.

**Remarque 1.5.2** Notons qu'il existe plusieurs algorithmes pour calculer les exposants de Lyapounov, l'un des plus connus étant l'algorithme de Wolf [25]. Cet algorithme nous permet de calculer les exposants de Lyapounov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires par rapport à la perturbation introduite parallèlement.

### Déterminisme

Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer) son évolution au cours du temps. La connaissance exacte de l'état du système à un instant donné nous permet de calculer précisément l'état du système à n'importe quel autre moment.

### Aspects aléatoires

La Figure 1.4 illustre l'évolution temporelle des trajectoires chaotiques du système de Rössler modifié [35]. Le système représente une évolution complexe, non périodique et imprévisible. C'est donc l'aspect aléatoire des systèmes chaotiques.

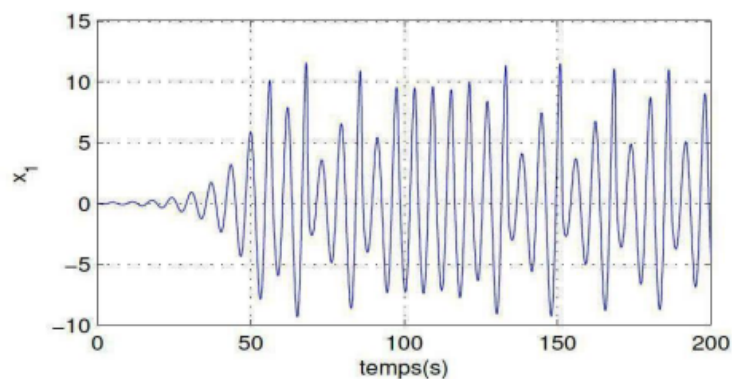


FIGURE 1.4 – L'aspect aléatoire du système de Rössler.

## Diagramme de bifurcation

On dit qu'il y a une bifurcation lorsqu'un tel changement qualitatif de la structure d'un système se produit à l'occasion de la variation quantitative de l'un de ses paramètres (qu'on l'appelle valeur de bifurcation). Les graphiques qui représentent ces bifurcations, sont appelés diagrammes de bifurcation. Donc le diagramme de bifurcation est un outil très important pour évaluer les comportements possibles d'un système en fonction des valeurs de bifurcation. La Figure 1.5 illustre le diagramme de bifurcations de l'application logistique définie sur le segment  $[0, 1]$  par :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (1.13)$$

où  $n = 0, 1, 2, \dots$  dénote le temps discret, et  $r \in [0, 4]$  un paramètre de contrôle.

Selon la Figure 1.5, on peut constater trois états différents du système selon la valeur du paramètre  $r$  : un régime stable, puis périodique à plusieurs états et enfin un régime chaotique.

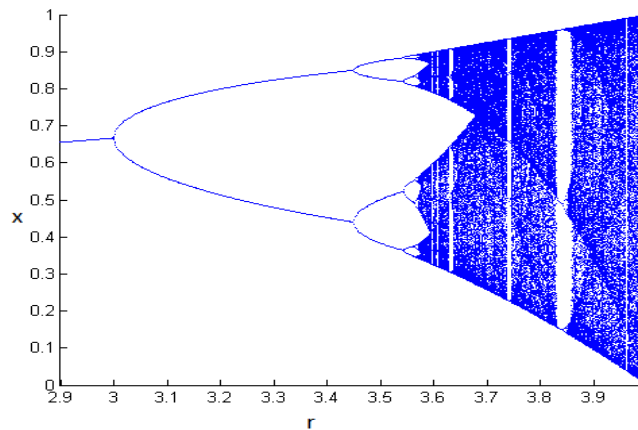


FIGURE 1.5 – Diagramme de bifurcations de l'application logistique.

### 1.5.3 Exemple d'un système chaotique

L'étude des systèmes chaotiques est liée à la théorie du chaos qui a été reconnue à partir des années 1960, grâce aux travaux d'un grand nombre de chercheurs notamment

ceux de Lorenz [36].

Le système chaotique de Lorenz est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1); \\ \dot{x}_2 = x_1(r - x_3) - x_2; \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3; \end{cases} \quad (1.14)$$

où :

$x_1$  représente l'intensité de mouvement de convection.,  $x_2$  représente la variation horizontale de la température,  $x_3$  représente la variation verticale de la température,  $b$ ,  $r$ ,  $\sigma$  sont des constantes réelles.

Lorsque  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  et  $r = 28$ , ce système est chaotique.

### Points d'équilibres

Le système de Lorenz ayant trois points d'équilibres  $P_0(0, 0, 0)$ ,  $p_1(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1))$ , et  $p_2(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1))$ .

### Attracteur de Lorenz

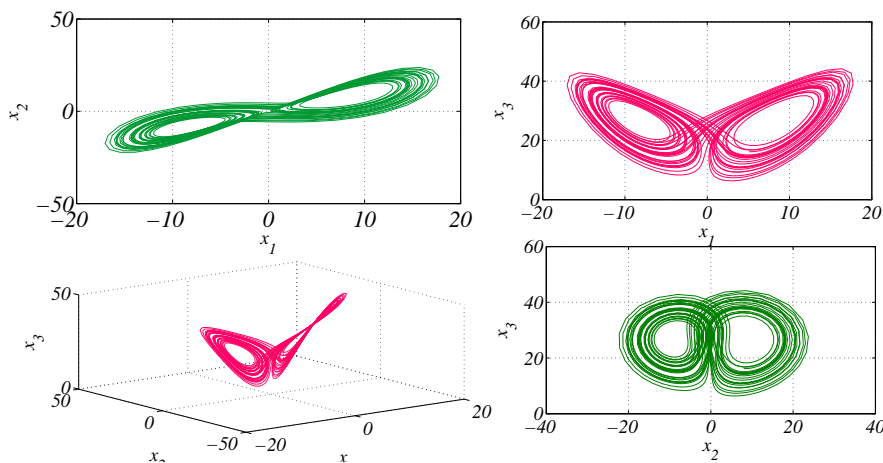


FIGURE 1.6 – Attracteurs de Lorenz, où  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ , et  $r = 28$ .

### Aspect aléatoire

La figure suivante illustre l'aspect aléatoire de l'état  $x_1$  du système de Lorenz.

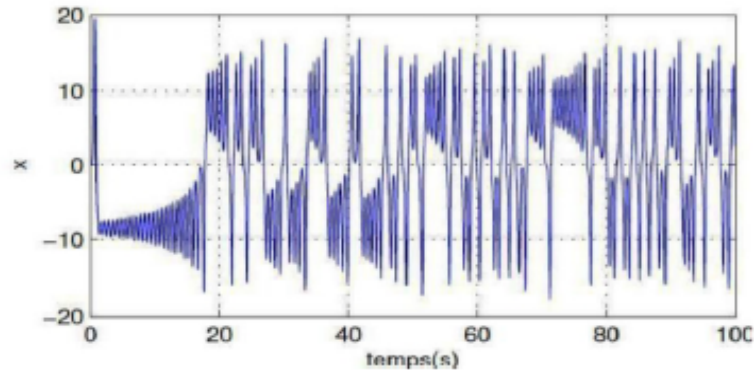


FIGURE 1.7 – Aspect aléatoire de l'état  $x_1$  du système de Lorenz.

### 1.5.4 Exemple d'un système hyperchaotique

On sait que le premier modèle où il a été démontré l'existence d'un comportement hyperchaotique est le système de Rössler suivant [37].

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3; \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 + x_4; \\ \dot{x}_3 = b + x_1x_3; \\ \dot{x}_4 = -cx_3 + dx_4, \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont des variables d'état et  $a, b, c$  et  $d$  sont des paramètres positifs. Il est bien connu que ce système présente un comportement hyperchaotique lorsque :

$$a = 0.25; b = 3; c = 0.5 \text{ et } d = 0.05$$

Dans la référence [35], l'auteur Kaouache a proposé un nouveau système hyperchaotique généré à partir d'une petite modification du système (1.15). Ce système est décrit



par un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 + x_4; \\ \dot{x}_2 = x_1 + a_1 x_2; \\ \dot{x}_3 = a_2 + x_1 x_3 - a_3 x_3; \\ \dot{x}_4 = a_4 x_1, \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont des variables d'état et  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont des paramètres positifs. Ce système ayant un seul point d'équilibre  $p(0, 0, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_2}{a_3})$ .

La matrice jacobienne du système (1.16) au point P est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 \\ a_2/a_3 & 0 & -a_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

et l'équation caractéristique est donnée par :

$$\lambda^4 + (a_3 - a_1)\lambda^3 + \left(\frac{a_2}{a_3} - a_4 - a_1 a_3 + 1\right)\lambda^2 + (a_3 + a_4(a_1 - a_3) - a_1 \frac{a_2}{a_3})\lambda + \left(a_4\left(\frac{a_2}{a_3} + 1\right) - a_4\left(\frac{a_2}{a_3} - a_1 a_3 + 1\right)\right) = 0$$

Lorsque les paramètres du système sont donnés par :

$$a_1 = 0.283; a_2 = 0.01; a_3 = 5, a_4 = 0.1 \quad (1.18)$$

On va voir que le système est hyperchaotique, et dans ce cas, les valeurs propres appartenant au système hyperchaotique (1.16) sont calculées par :

$$-3.193 \times 10^{-2}; -4.99; 0.157 \pm 0.94043 i .$$

Il est évident que le système a un point d'équilibre instable.

### Attracteur hyperchaotique

Pour la simulation numérique, l'algorithme d'intégration de Runge-Kutta de quatrième ordre a été réalisé pour résoudre ce système.

Le système(1.16) peut exhiber un attracteur hyperchaotique si les paramètres  $a_1, a_2, a_3, a_4$  prennent des valeurs comme dans le cas (1.18) et les valeurs initiales du système sont données par :

$$x_1(0) = 2, x_2(0) = -5, x_3(0) = 0.03, x_4(0) = 0.2$$

Les projections de portrait de phase sur les plans :  $x_2-x_3, x_1-x_3, x_1-x_2-x_3$  et  $x_1-x_3-x_4$  sont représentés dans la Figure 1.8.

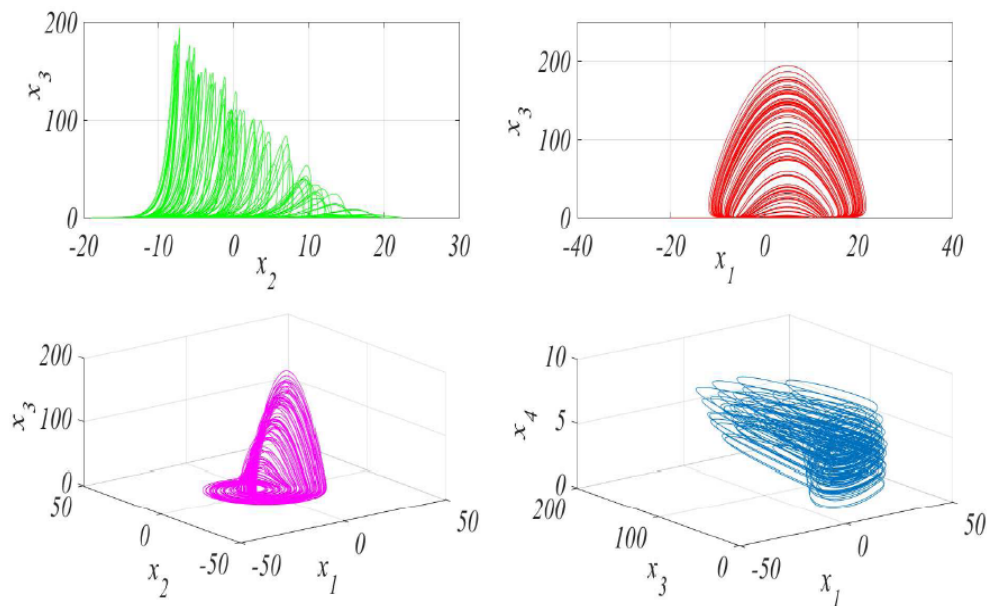


FIGURE 1.8 – Projections de portrait de phase du système(1.16).

### Spectre des exposants de Lyapounov

Pour étudier l'impact des paramètres sur le système dynamique proposé, supposons que les trois paramètres  $a_2, a_3, a_4$  sont maintenus constants et nous prenons  $a_1$  varier dans l'intervalle  $[0, 0.3]$ . La variation des trois plus grand exposants de Lyapounov pour différentes valeurs de  $a_1$  est donné dans la Figure(1.9), en utilisant l'algorithme de Wolf.

En particulier, lorsque les paramètres  $a_1, a_2, a_3, a_4$  prennent des valeurs comme dans la cas (1.18) et les conditions initiales de nouveau hyperchaotique (1.16) prennent des valeurs :

$$x_1(0) = 0.1, x_2(0) = -0.1, x_3(0) = 0, x_4(0) = 10.$$

les exposants de Lyapounov du système (1.16) sont donnés par :

$$\lambda_1 = 0.14, \lambda_2 = 0.034, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -5.27.$$

Ce qui assure que le système est bien hyperchaotique.

De plus,  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = -5.96 < 0$ ; ce qui montre que le système est bien dissipatif, et par conséquent, le volume du système va diminuer de la valeur  $V$  à 0. Cela signifie que toutes les trajectoires du nouveau système arrivent finalement à un attracteur quand  $t \rightarrow +\infty$ .

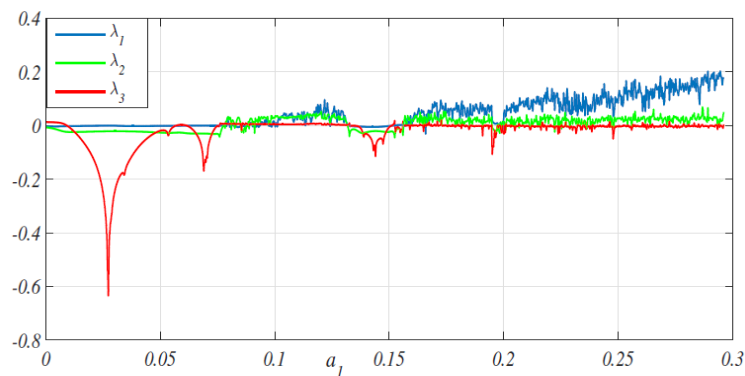


FIGURE 1.9 – Les trois plus grand exposants de Lyapunov du système(1.16).

## 1.6 Synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques

### 1.6.1 Systèmes couplés

On dit que deux oscillateurs sont couplés, si l'existence d'une petite perturbation dans l'un des oscillateurs entraîne une perturbation dans l'autre. Physiquement, cet effet se traduit par un transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. Ce type d'accouplement s'appelle en général accouplement mutuel.

### 1.6.2 Accouplement bidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes chaotiques fractionnaires, présentés par des équations suivantes :

$$\dot{X}(t) = f_1(X, t), \quad (1.19)$$

$$\dot{Y}(t) = f_2(Y, t). \quad (1.20)$$

On dit que les deux systèmes (1.19) et (1.20) sont couplés, si on peut les réécrire sous les formes suivantes :

$$\dot{X}(t) = g_1(X, X, Y, t) \quad (1.21)$$

$$\dot{Y}(t) = g_2(Y, X, Y, t), \quad (1.22)$$

où  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions non linéaires, et la première variable de chaque équation représente la variable du système, tandis que la deuxième et la troisième variable sont les résultats de l'effet d'accouplement.

La dernière représentation signifie que chaque système a un acte sur l'autre, c'est la définition de l'accouplement bidirectionnel.

### 1.6.3 Accouplement unidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes identiques représentés par les deux équations suivantes :

$$\dot{X}(t) = f(X, t), \quad (1.23)$$

$$\dot{Y}(t) = f(Y, t). \quad (1.24)$$

Lorsque l'équation (1.24) va être modifier par l'effet d'accouplement, et si le résultat de cette modification nous donne de nouvelles équations suivantes :

$$\dot{X}(t) = f(X, t), \quad (1.25)$$

$$\dot{Y}(t) = g(Y, X, t), \quad (1.26)$$

tel que  $g(Y, X, t) = f(Y, t)$ , pour  $X = Y$ , dans ce cas on parle de l'accouplement unidirectionnel. le premier système s'appelle système émetteur (maître) et le deuxième système récepteur(esclave). La dernière représentation signifie que le système émetteur a un acte sur le récepteur et le contraire est faux. Il est bien clair que ce type d'accouplement est un cas particulier d'accouplement mutuel. Dans ce travail, on s'intéresse à l'accouplement unidirectionnel.

### 1.6.4 Différents types de synchronisation

Plusieurs types de synchronisation ont été employés dans la littérature, à savoir : la synchronisation complète (SC), l'anti-synchronisation(AS), la synchronisation projective (SP) et la synchronisation projective modifiée (SPM), etc.

Par exemple, dans la synchronisation complète, nous avons une coïncidence complète entre les variables d'états des deux systèmes maître-esclave synchronisés. Cependant par exemple, dans la synchronisation projective, l'état du système maître se synchronise avec un multiple (plusieur) de l'état du système esclave.

Considérons maintenant les systèmes maître et esclave respectivement suivants :

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.27)$$

$$\dot{y} = g(y) + u, \quad (1.28)$$

où  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ; sont les vecteurs d'état des systèmes maître et esclave, respectivement,  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont les vecteurs non linéaires des fonctions continues, et  $u$  est le vecteur de contrôle. L'objectif de cette partie consiste principalement à vérifier les performances de la méthode d'un contrôle pour différents types de synchronisation des systèmes chaotiques.

### Synchronisation complète

La synchronisation complète (SC) a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnelles des système dynamiques. C'est la forme de la synchronisation la plus simple. On dit qu'il y a une SC entre les deux systèmes maître et esclave , s'il existe un contrôle  $u(t, x, y)$ , tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0, \quad (1.29)$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  des deux systèmes.

Si  $f = g$ , la SC est dite identique.

L'étude de synchronisation se ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système qui s'appelle "système erreur", ce dernier est donnée par l'équation :

$$e = y - x \quad (1.30)$$

### Anti-synchronisation

Le système maître et le système esclave sont dits prêts pour effectuer l'anti-synchronisation entre ces deux systèmes, s'il existe un contrôle  $u(t, x, y)$  tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) + x(t)\| = 0, \quad (1.31)$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  des deux systèmes.

### Synchronisation projective

On dit qu'il y a une synchronisation projective (SP) entre les deux systèmes maître et esclave, s'il existe un contrôle efficace  $u(t, x, y)$ , de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \theta x(t)\| = 0, \quad (1.32)$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  des deux systèmes, où  $\theta$  est une constante non nulle, appelée facteur d'échelle.

### Synchronisation projective modifiée

On dit qu'il y a une synchronisation projective modifiée (SPM) entre les deux systèmes maître et esclave, s'il existe un contrôle efficace  $u(t, x, y)$ , de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|By(t) - x(t)\| = 0, \quad (1.33)$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  des deux systèmes, où  $B$  est une matrice diagonale constante non nulle, appelée matrice d'échelle i.e ,

$$B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n), \quad b_i \neq b_j, \quad \text{pour tout } i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.34)$$

**Remarque 1.6.1** La synchronisation complète (respectivement, l'anti-synchronisation) est le cas particulier de synchronisation projective où le facteur d'échelle  $\theta = 1$  (respectivement  $\theta = -1$ ).

**Synchronisation généralisée de type  $Q - S$** 

On dit qu'il y a une synchronisation généralisée de type  $Q-S$  entre les deux systèmes, jusqu'à des matrices de mise à l'échelle  $Q$  et  $S$ , s'il existe un contrôle  $u(t, x, y)$ , tel que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Qy(t) - Sx(t)\| = 0, \quad (1.35)$$

pour toutes conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  des deux systèmes.



---

---

## CHAPITRE 2

---

# NOUVEAU SYSTÈME HYPERCHAOTIQUE SANS POINT D'ÉQUILIBRE

### 2.1 Construction du système hyperchaotique sans points d'équilibre

On rappelle que le système classique de Rikitake [38] est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + x_2x_3, \\ \dot{x}_2 = -ax_1 + x_1(x_3 - b), \\ \dot{x}_3 = 1 - x_1x_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x_1, x_2, x_3$  sont des variables d'état et  $a, b$  sont des paramètres positifs. Ce système présente un comportement chaotique [39] lorsque

$$a = 1 \text{ et } b = 1. \quad (2.2)$$

Dans cette section, nous proposons un nouveau système hyperchaotique sans points d'équilibre. Ce système généré à partir d'une petite modification du système (2.1). Notre nouveau système hyperchaotique est décrit par le modèle mathématique suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + x_2x_3, \\ \dot{x}_2 = -ax_1 + x_1(x_3 - b) - x_4, \\ \dot{x}_3 = 1 - x_1x_2, \\ \dot{x}_4 = 0.1x_2, \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont les variables d'état,  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles. Lorsque les paramètres du système sont donnés par

$$a = 0.7 \text{ et } b = 1 \quad (2.4)$$

on va voir que le système est hyperchaotique.

### 2.1.1 Points d'équilibre

Les points d'équilibre sont calculés à partir de la résolution du système suivant

$$\begin{cases} 0 = -ax_1 + x_2x_3, \\ 0 = -ax_1 + x_1(x_3 - b) - x_4, \\ 0 = 1 - x_1x_2, \\ 0 = x_2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Il est facile de voir que notre système n'admet aucune point d'équilibre.

### 2.1.2 Attracteur hyperchaotique

Pour la simulation numérique, l'algorithme d'intégration de Runge-Kutta de quatrième ordre a été réalisé pour résoudre ce système. Le nouveau système(2.3) peut présenter un attracteur hyperchaotique, si les paramètres  $a$  et  $b$  prennent des valeurs

comme dans le cas (2.4) et les valeurs initiales du système proposé comme

$$x_1(0) = -0.01, x_2(0) = -0.01, x_3(0) = -0.01 \text{ et } x_4(0) = -0.01. \quad (2.6)$$

Les projections de portrait de phase sur les plans :  $(x_1 - x_2), (x_1 - x_3), (x_1 - x_4), (x_2 - x_3), (x_2 - x_4), (x_3 - x_4), (x_1 - x_2 - x_3), (x_1 - x_3 - x_4), (x_2 - x_3 - x_4)$  sont représentés dans la Figure 2.1

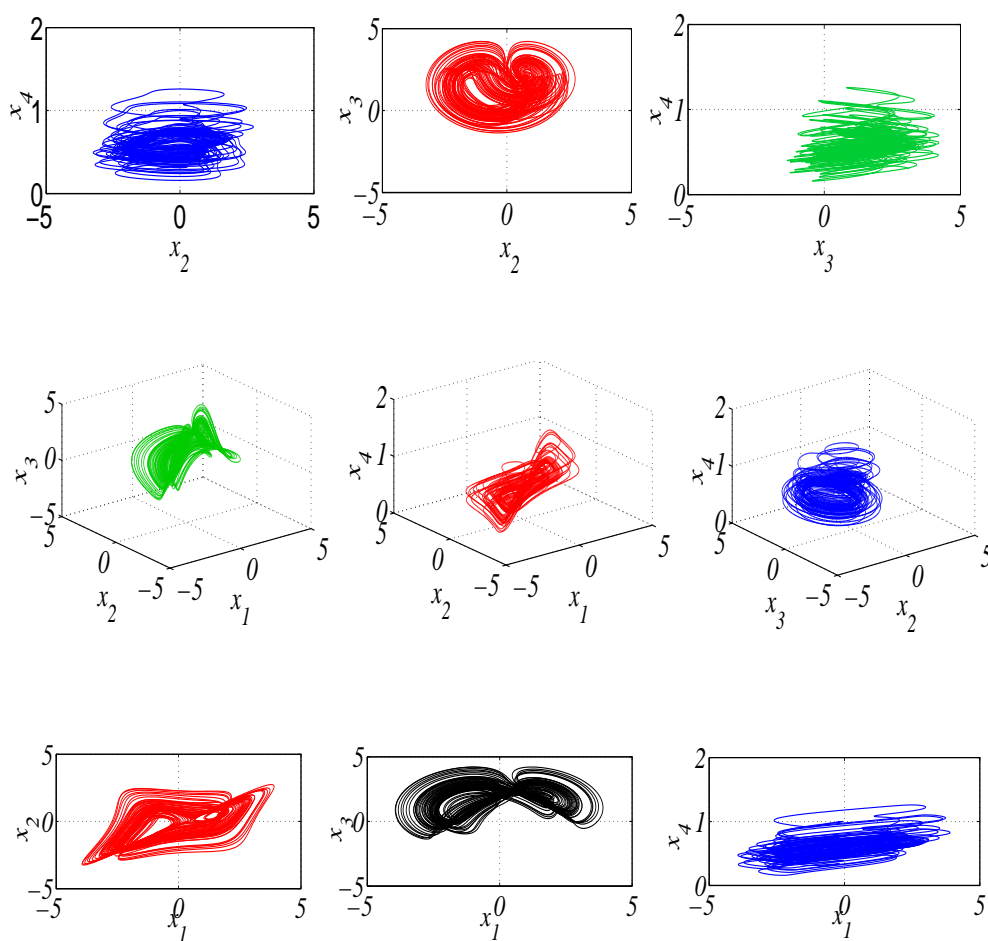


FIGURE 2.1 – Projections de portrait de phase du système (2.3).

### 2.1.3 Exposants de Lyapounov

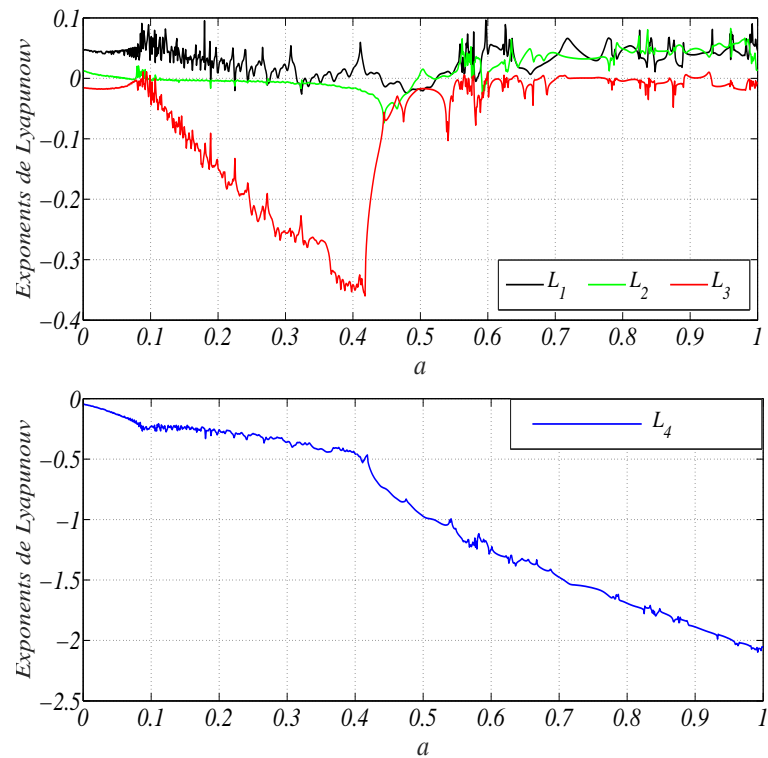


FIGURE 2.2 – Variation des exposants de Lyapounov.

Pour étudier l'impact des paramètres sur le système dynamique proposé, supposons que le paramètre  $b$  est maintenu constant et nous prenons  $a$  varier dans l'intervalle  $[0, 1]$ . La variation des exposants de Lyapounov pour différentes valeurs de  $a$  est présentée dans la Figure 2.2 en utilisant le code Matlab [25].

En particulier, lorsque les paramètres  $a$  et  $b$  prennent des valeurs comme dans le cas (2.4) et les conditions initiales de nouveau système hyperchaotique (2.3) prennent des valeurs identiques à celles du cas (2.6), les exposants de Lyapounov du système (2.3) sont donnés par :

$$L_1 = 0.06 \quad L_2 = 0.03, \quad L_3 = 0 \quad \text{et} \quad L_4 = -1.53. \quad (2.7)$$

Ce qui assure que le système est bien hyperchaotique.

De plus,  $\sum_{i=1}^4 L_i = -0.90 < 0$ , ce qui montre une fois encore que le système est bien dissipatif, et par conséquent, le volume du système va diminuer de la valeur  $V_0$  vers 0. Cela signifie que toutes les trajectoires de ce système convergent finalement vers un

attracteur, quand  $t \rightarrow +\infty$ .

## 2.2 Etude de l'anti-synchronisation

La principale motivation de cette partie est de construire un contrôle adaptatif pour assurer l'anti-synchronisation entre deux systèmes identiques proposés.

Pour quantifier notre objectif, considérons le système émetteur comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + x_2x_3, \\ \dot{x}_2 = -ax_1 + x_1(x_3 - b) - x_4, \\ \dot{x}_3 = 1 - x_1x_2, \\ \dot{x}_4 = 0.1x_2 \end{cases} \quad (2.8)$$

Considérons également le système récepteur hyperchaotique qui est supposé décrit par

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -ay_1 + y_2y_3 + u_1, \\ \dot{y}_2 = -ay_1 + y_1(y_3 - b) - y_4 + u_2, \\ \dot{y}_3 = 1 - y_1y_2 + u_3, \\ \dot{y}_4 = 0.1y_2 + u_4, \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $u_1, u_2, u_3, u_4$  sont des paramètres de contrôle à concevoir.

Notre objectif consiste à concevoir des contrôles adaptatifs  $u_1, u_2, u_3, u_4$  réalisant une anti-synchronisation pratique entre le système émetteur (2.8) et le système récepteur (2.9).

Pour quantifier cet objectif, l'erreur de l'anti-synchronisation souhaité est défini comme suit :

$$e_i = y_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.10)$$

L'étude de l'anti-synchronisation par la méthode du contrôle adaptatif consiste à choisir le contrôle  $u$ , tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.11)$$

Définissons également les erreurs d'estimations comme suit

$$e_a = a - \hat{a}, \quad e_b = b - \hat{b}. \quad (2.12)$$

La dynamique de l'erreur d'anti-synchronisation est facilement obtenue sous la forme

$$\dot{e}_i = \dot{y}_i + \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.13)$$

En substituant les équations (2.8) et (2.9) dans l'équation (2.13) on trouve

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1 + y_2y_3 + x_2x_3 + u_1, \\ \dot{e}_2 = e_1(-a - b) - e_4 + y_1y_3 + x_1x_3 + u_2, \\ \dot{e}_3 = 2 - x_1x_2 - y_1y_2 + u_3, \\ \dot{e}_4 = 0.1e_2 + u_4. \end{cases} \quad (2.14)$$

En différenciant (2.12) par rapport à t, nous obtenons

$$\dot{e}_a = -\dot{\hat{a}}, \quad \dot{e}_b = -\dot{\hat{b}}.$$

Par conséquent, le problème d'anti-synchronisation devient le problème de stabilité du système erreur (2.14). Nous obtenons alors le théorème principal suivant.

**Théorème 2.2.1** *Si les contrôles adaptatifs et la loi d'adaptation sont sélectionnés respectivement comme*

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \hat{a}e_1 - y_2y_3 - x_2x_3 - k_1e_1, \\ \dot{u}_2 = e_1(\hat{a} + \hat{b}) + e_4 - y_1y_3 - x_1x_3 - k_2e_2, \\ \dot{u}_3 = -2 + x_1x_2 + y_1y_2 - k_3e_3, \\ \dot{u}_4 = -0.1e_2 - k_4e_4. \end{cases} \quad (2.15)$$

et

$$\dot{\hat{a}} = -e_1^2 - e_1e_2, \quad \dot{\hat{b}} = -e_1e_2. \quad (2.16)$$

alors le système erreur (2.14) converge asymptotiquement vers zéro, et finalement l'anti syn-

chronisation souhaitée entre les deux systèmes (2.8) et (2.9) est achevée.

**Preuve.** Avec le choix de contrôle adaptatif (2.15), le système (2.14) devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_1(e_a + k_1), \\ \dot{e}_2 = -e_1(e_a - e_b) - k_2 e_2, \\ \dot{e}_3 = -k_3 e_3, \\ \dot{e}_4 = -k_4 e_4. \end{cases} \quad (2.17)$$

Considérons la fonction de Lyapounov candidate suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_a^2 + e_b^2). \quad (2.18)$$

En calculant la dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système erreur (2.17), nous obtenons :

$$\dot{V}(x) = -(k_1 e_1^2 + k_2 e_2^2 + k_3 e_3^2 + k_4 e_4^2) - e_a(e_1^2 + e_1 e_2 + \dot{a}) - e_b(e_1 e_2 + \dot{b}). \quad (2.19)$$

En substituant la loi d'adaptation (2.16) dans (2.19), on obtient

$$\dot{V}(x) = -(k_1 e_1^2 + k_2 e_2^2 + k_3 e_3^2 + k_4 e_4^2).$$

Evidemment,  $V$  est définie positive et  $\dot{V}$  est définie négative sur  $\mathbb{R}^6$ . D'après le théorème de la stabilité de Lyapounov, les erreurs de synchronisation  $e_i; i = 1; 2; 3; 4$  convergent asymptotiquement vers zéro, c'est-à-dire l'anti synchronisation entre le système émetteur (2.8) et le système récepteur (2.9) est achevée. ■

Pour vérifier et démontrer l'efficacité et la faisabilité de la méthode de la synchronisation présentée, les valeurs des paramètres du systèmes proposée sont identiques à celles du cas (2.4).

Les conditions initiales des systèmes émetteurs et recepneur sont sélectionnées respec-

tivement comme suit

$$x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0.01, x_3(0) = 0.1 \text{ et } x_4(0) = 0.1.$$

$$y_1(0) = 0.9, y_2(0) = -0.08, y_3(0) = 0.9 \text{ et } y_4(0) = 0.9.$$

Par suite les conditions initiales de système erreur sont données par

$$e_1(0) = 1, e_2(0) = 0.09, e_3(0) = 1 \text{ et } e_4(0) = 1.$$

Les condition initiales pour la loi d'adaptation sont données par

$$\hat{a}(0) = 0.1 \text{ et } \hat{b}(0) = 0.2.$$

Les paramètres de conception sont choisis comme suit :

$$k_i = 2, i = 1, 2, 3, 4.$$

Les courbes des états du système erreur (2.17) sont représentés dans la Figure 2.3.

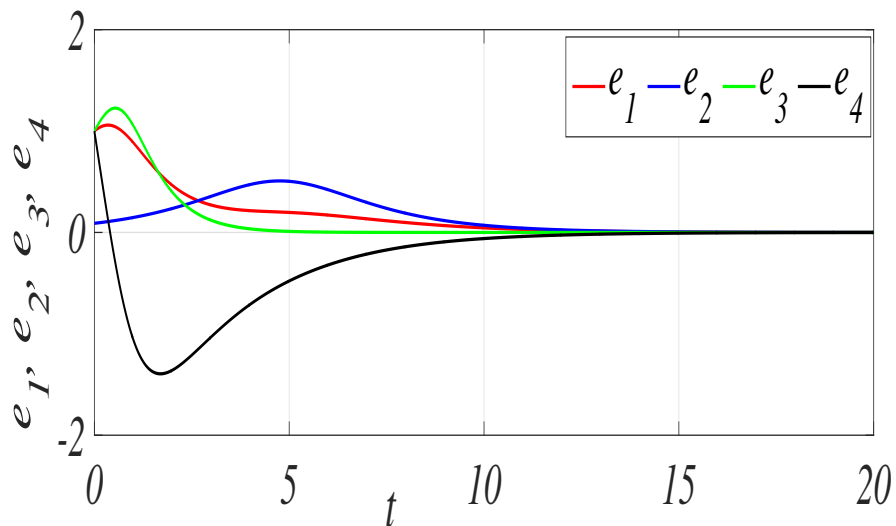


FIGURE 2.3 – Courbes des états du système erreur (2.17).



De la Figure 2.3, on peut facilement voir que toutes les variables du système (2.17) convergent rapidement vers zéro, ce qui indique que la stabilité du système proposé. C'est-à-dire que l'anti synchronisation souhaité entre le système émetteur et le système récepteur est obtenue sous la présence des contrôles (2.15) et de la loi d'adaptation (2.16).

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Roy, T.W. Murphy Jr, T.D. Maier, Z.Gills, E.R. Hunt, Dynamical control of a chaotic laser : Experimental stabilization of a globally coupled system, *Physical Review Letters*, 68(9)(1992), 1259-1262.
- [2] V. Petrov, V. Gaspar, J. Masere and K. Showalter, Controlling chaos in the Belousov—Zhabotinsky reaction, *Nature* 361(64) (1993), 240-243.
- [3] A. Garfinkel, J.N.Weiss, W.L. Ditto and M.L. Spano, Chaos control of cardiac arrhythmias, *Trends in Cardiovascular Medicine* 5(2)(1995), 76-80.
- [4] J. Ding, and H.X Yao, Chaos control of a kind of non-linear finance system, *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)*, 25(6) (2004), 500-504.
- [5] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2) (1963) 130-141.
- [6] T.L. Carroll and L.M. Pecora, Synchronizing chaotic circuits, *IEEE Trans, Circuits Syst*, 38(4) (1991), 453-456.
- [7] I.M. Olga, A.K. Alexey and E.H. Alexander, Generalized synchronization of chaos for secure communication : remarkable stability to noise, *Physics Letters A*, 374(29) (2010), 2925-2931.

- [8] E. Inzunza-Gonzalez, and C. Cruz-Hernandez, Double hyperchaotic encryption for security in biometric systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 13(1) (2013), 55-68.
- [9] H.E. Guitian and L.U.O. Maokang, Dynamic behavior of fractional order Duffing chaotic system and its synchronization via singly active control, *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed*, 33(5) (2012), 567582.
- [10] Q. Gan, Y. Yang, S. Fan and Y. Wang, Synchronization of stochastic Fuzzy cellular neural networks with leakage delay based on adaptive control, *Differ. Equ. Dyn. Syst*, 22(2014), 319-332.
- [11] W. Zhen, H. Xia and S. Hao, Control of an uncertain fractional order economic system via adaptive sliding mode, *Neuro computing*, 83(2012), 83-88.
- [12] A. Bouzeriba, A. Boulkroune and T. Bouden, Projective synchronization of two different fractional-order chaotic systems via adaptive fuzzy control, *Neural Comput. Applic*, (2015).
- [13] TL. Carroll, LM. Pecora, Synchronizing chaotic circuits, *IEEE Trans. Circuits Syst*, 38(4) (1991), 453-456.
- [14] M. Rehan, Synchronization and anti-synchronization of chaotic oscillators under input saturation, *Appl. Math. Model*, 37(2013), 6829-6837.
- [15] G. Zhang, Z. Liu, Z. Ma, Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems, *Chaos Solitons Fract*, 32(2) (2007), 773-779.
- [16] R. Manieri, J. Rehacek, Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems, *Phys. Rev. Lett*, 82(15) (1999), 3042-3045.
- [17] G.H. Li, Modified projective synchronization of chaotic system, *Chaos Solitons Fractals*, 32(5) (2007), 1786-1790.
- [18] S. Kaouache, and M-A. Abdelouahab, Modified hybrid synchronisation of identical fractional hyperchaotic systems with incommensurate order, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A : Mathematical Analysis*, 28(2021), 25-36 .

- [19] Z. Yan, Chaos  $Q^S$  synchronization between Rössler system and the new unified chaotic system, *Phys. Lett. A*, 334(5) (2005), 406-412.
- [20] S. Kaouache, A general method for hybrid projective combination synchronization of a class of nonlinear fractional-order chaotic systems, *International Journal of Applied Mathematics*, 36(4) (2023), 509-520.
- [21] S. Bensimessaoud, and S. Kaouache, A general fractional control scheme for compound combination synchronization between different fractional-order identical chaotic systems, *Aust. J. Math. Anal. Appl*, 20(2) (2023), Art. 12, 9 pp.
- [22] S. Bensimessaoud and S. Kaouache, Chaos combination anti-synchronization of some fractional-order uncertain chaotic systems perturbed by some random noise, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems : Serie A. Mathematical Analysis*, 31 (2024), 199-211.
- [23] S. Kaouache, N.E. Hamri, A.S. Hacinliyan, E. Kandiran, B. Deruni, and A.C. Keles, Increased Order Generalized Combination Synchronization of Non-Identical Dimensional Fractional-Order Systems by Introducing Different Observable Variable Functions, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 20(3) (2020), 307-315.
- [24] Z. Wang, S. Cang, E.O. Ochola and Y. Sun, A hyperchaotic system without equilibrium. *Nonlinear Dynamics*, 69 (2012), 531-537.
- [25] V-T. Pham, F. Rahma, M. Frasca and L. Fortuna, Dynamics and synchronization of a novel hyperchaotic system without equilibrium. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(6) (2014), art. no. 1450087..
- [26] V-T. Pham, Ch.K. Volos and L.V. Gambuzza, A memristive hyperchaotic system without equilibrium, *Scientific World Journal*, 2014(2014), art no. 368986.
- [27] S. Vaidyanathan, Ch.k Volos, and V-T. Pham, Analysis, Control, Synchronization and SPICE Implementation of a Novel 4 – D Hyperchaotic Rikitake Dynamo System without Equilibrium, *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 8(2) (2015), 232-244.
- [28] L. Shilnikov, A. Shilnikov, D. Turaev, and L. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*, World Scientific, Singapore, 1998.

- [29] S. Jafari, and J.C. Sprott, Simple chaotic flows with a line equilibrium. *Chaos, Solitons and Fractals*, 57 (2013), 79-84 .
- [30] G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov, O.A. Kuznetsova, S.M. Seledzhi and V.I. Vagaitsev, Hidden oscillations in dynamical systems, *WSEAS Transactions on Systems and Control*, 6(2) (2011), 54-67.
- [31] G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov and V.I. Vagaitsev Localization of hidden Chua's attractors, *Physics Letters A*, 375(23) (2011), 2230-2233.
- [32] G.A. Leonov and N.V. Kuznetsov, Hidden attractors in dynamical systems : from hidden oscillations in Hilbert Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits, *International Journal of Bifurcation and Chaos* , 23(1) (2013), art. no. 1330002.
- [33] S. Kaouache, Synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques : Application à la sécurisation des communications, Thèse de Doctorat, Université de Constantine 1, 2020.
- [34] A. Chen, J. Lu, J. Lú, and S. Yu, Generating hyperchaotic Lú attractor via state feedback control. *Physica A* , 364(2006), 103-110.
- [35] S. Kaouache, S. Projective synchronization of the modified fractional-order hyperchaotic rossler system and its application in secure communication, *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 4(2021), 50-58.
- [36] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2) (1963), 130-141.
- [37] O.E. Rössler, An equation for hyperchaos, *Physics Letters A*, 71(1979), 155-157.
- [38] I. S. Rikitake, Oscillations of a system of disk dynamos, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 54(1) (1958), 89-105.
- [39] A.E. Cook and P.H. Roberts, The Rikitake two disk dynamo system, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 68(2) (1970), 547-569.