الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut de Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Etude d'une inclusion différentielle perturbée

Préparé par : Bouchra Saadi
Hadjer Khaled

Soutenue devant le jury

Yacine Halim	Prof	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Mohamed Kecies	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Encadreur
Nabila Haddad	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinatrice

Année universitaire :2023/2024

Remerciements

Nous remercions d'abord Allah pour nous avoir aidés et nous avoir donné la santé, la volonté et la patience pour accomplir ce travail.

Nous voulons exprimer notre gratitude et notre sincère reconnaissance à notre superviseur, Monsieur Mohamed Kecies, pour sa patience, le temps qu'il nous a accordé, et surtout pour ses précieux conseils qui ont contribué à nourrir notre réflexion.

Nous remercions également les membres du jury qui nous fait l'honneur en acceptant d'évaluer ce travail, sans oublier nos enseignants, nos collègues et les administrateurs du département de mathématiques.

Enfin, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à nos familles pour leur encouragement, leur soutien continu et leur patience envers nous tout au long de ces années, ainsi qu'à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin à mener à bien ce travail.

Bouchra et Hadjer

Dédicace

Ce travail modeste est dédié avec tout l'amour et l'appréciation à :

- **Mon cher père** : Allaoua , le soutien inébranlable et l'aide toujours présente, tu as tout mon respect et ma fierté..
- **Ma chère mère** : Nassima ,le cœur généreux et l'âme bienveillante, pour qui Dieu a promis que le paradis se trouve sous ses pieds, tu es au-dessus de tout..
- **Mes chers frères et sœurs** : Amira, Imad, Haoua , Fatima, Mohammed , vous êtes le bras sur lequel je m'appuie et le meilleur soutien dans mon parcours.
- **Mon cher neveu Anas**, mon petit cœur et ma seconde âme.
- **Mon cher mari** : Mohamed partenaire de vie et compagnon de route dans tous les moments, doux et amers de la vie.
- **Ma binôme Hadjar**, ma chère collègue et compagne de travail qui a partagé avec moi les efforts et le dévouement.
- **Ma chère grand-mère** : l'étreinte chaleureuse et le cœur tendre.
- **Mon chère oncle** : Abderrahmane mon deuxième père et mon soutien dans ma carrière .
- **Mes chères amies** : Aya, Farah, Zina, Insaf, Bouchra et Guemra ; un groupe qui a enlevé l'amertume des jours et ajouté à ma vie de la joie et du bonheur.

Bouchra

الإهداء

الحمد لله حبًا و شكرًا و امتنانًا على البدء و الختام

" و آخِرِ دَعْوَاهُمْ أَنْ الْحَمْدُ لِلّهِ رَبِّ الْعَالَمِينْ "

شيء جميل أن يسعى الإنسان إإلى النجاح و يحصل عليه و الأجمل أن يذكر من كان السبب في ذلك

أٌهدي ثمرة نجاحي هذا :

إلى من زيَّن اسمي بأجمل الألقاب ، من دعمني بلا حدود و أعطاني بلا مقابل ، إلى من

علمني أن الدنيا كفاح و سلاحها العلم و المعرفة، داعمي الأول في مسيرتي

وسندي و قوتي و ملاذي بعد الله ، إلى فخري و اعتزازي " *والدي* " .

إلى من جعل الجنّة تحت أقدامها و سهّلت لي الشدائد بدعائها، إلى الإنسانة العظيمة التي

لطالما تمنّت أن تقرّ عينها لرؤيتي في يوم كهذا " *أمي العزيزة* " .

إلى من شدّ الله بهم عضدي فكانوا خير معين، إلى خيرة أيامي و صفوتها أخواني

" *أحمد* و *محمد* و *يونس* " و أخواتي الغاليات" *سلوى* و *ريمة* " .

إلى كتاكيت البيت و زينته " *ميرال*، *قصي*، *أصيل*، *رنيم*، *رسيم* "

إلى صديقة السنين أخت الحياة ، صديقة إنتصاراتي و إنجازاتي و صديقة كل تقلباتي و

لحظاتي " *سارة* " .

إلى من تحلت بالإخاء، و تميزت بالعطاء، رفيقتي في المشوار " *بشرى* " .

لكل من كان عونًا و سندًا في هذا الطريق، إلى كل الأهل و الأقارب كلٍ باسمه و مقامه،

للأصدقاء الأوفياء و رفقاء السنين ممتنة لكم جميعا .

و لله الشكر كله أن وفقني لهذه اللحظة ، فالحمد لله رب العالمين .

هاجر

Table des matières

Table des figures

Abréviations et notations

Les notations suivantes seront utilisées dans ce mémoire :

c-à-d	C'est-à-dire.
resp	Respectivement.
i. e.	« C'est-à-dire ».
$\min, \max, \inf, \sup$	Minimum,Maximum,Infimum et Supremum respectivement.
p.p	Presque partout.
$:=$	Egal à, par définition.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\overline{\mathbb{R}}$	$= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
$\mathcal{P}(E)$	Ensemble des parties de E.
$\mathring{A} = int(A)$	Intérieur topologique de l'ensemble A.
$\overline{A} = cl(A)$	Adhérence topologique ou fermeture de l'ensemble A.
$Fr(A) = \partial A$	Frontière topologique de l'ensemble A.
$B\left[x, r\right]$	Boule fermée centrée en x et de rayon $r \in \left]0, +\infty\right[$.
$B(x, r)$	Boule ouverte centrée en x et de rayon $r \in \left]0, +\infty\right[$.
$\mathbb{B} = B\left[0, 1\right]$	Boule unité fermée centrée en 0.
$co(A)$	Enveloppe convexe d'un sous ensemble A.
$\|\cdot\|$	Norme sur X.
H	Espace de Hilbert.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire sur H.
s.c.i	Semi-continue inférieurement.
s.c.s	Semi-continue supérieurement.
$\psi_C(\cdot)$	Fonction indicatrice d'un ensemble C.
$\sigma_C(\cdot)$	Fonction support d'un ensemble C.
$d(\cdot, C) = d_C(\cdot)$	Fonction distance à C.
$\partial f(\cdot)$	Sous-différentiel de l'analyse convexe d'une fonction convexe f.
$N_C(x)$	Cône normal de l'analyse convexe d'un ensemble convexe C au point x.
E'	Dual topologique d'un espace vectoriel normé E.
$f : X \longrightarrow Y$	Application univoque définie sur X à valeurs dans Y.
$dom(f)$	Domaine effectif de la fonction f.
$epi(f)$	Epigraphe d'une fonction f.
$hypo(f)$	Hypographe d'une fonction f.
$\{f \leqslant r\}$	Ensemble de sous-niveau $r \in \mathbb{R}$.
$\{f \geqslant r\}$	Ensemble de sur-niveau $r \in \mathbb{R}$.
$F : X \rightrightarrows Y$	Application multivoque de X vers Y.
$dom(F)$	Domaine effectif de l'application multivoque F.
$\Im(F)$	Image de l'application multivoque F.
$gph(F)$	Graphe de l'application multivoque F.

$e(A, B)$	Excès (de Pompeiu- Hausdorff) ou écart de A sur B.
$d_H(A, B)$	Distance de Hausdorff (Pompeiu-Hausdorff) entre A et B.
$\mathcal{C}([0, T], H)$	Espace des fonctions continues définies sur $[0, T]$ à valeurs dans H.
$L^p([0, T], H)$	Espace des fonctions mesurables de puissance $p - i\grave{e}me$ intégrable sur $[0, T]$.
$L^\infty([0, T], H)$	Espace des fonctions essentiellement bornées sur $[0, T]$ à valeurs dans H.

Introduction Générale

L'analyse multivoque est une importante branche de l'analyse variationnelle. Elle étudie les propriétés des relations F d'un ensemble X dans un ensemble Y ; appelées applications multivoques qui, à chaque élément $x \in X$ associent un sous-ensemble éventuellement vide de Y. Le besoin de l'analyse multivoque s'est ainsi fait sentir pour la résolution de nombreux problèmes émergeant dans divers domaines comme : la théorie du contrôle, l'économie, la biologie, et théorie des graphes. L'analyse multivoque et les inclusions différentielles et peuvent être liées de plusieurs façons, notamment dans le cadre de la modélisation et de l'analyse de systèmes dynamiques complexes.

Les inclusions différentielles peuvent être considérées comme une généralisation du concept d'équation différentielle ordinaire (EDO) dans certains contextes. Généralement exprimées sous la forme

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), x(0) = x_0. \tag{1}$$

où $\dot{x}(\cdot)$ indique la dérivée temporelle de $x(\cdot)$, $x_0 \in X$ une condition initiale et $F : [0, T] \times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ est une application multivoque. Cela signifie que pour chaque point t dans un certain domaine, la dérivée de $x(t)$ à ce point est contrainte à appartenir à un certain ensemble F. Les équations différentielles ordinaires spécifient une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées dans un certain domaine. Cependant, les inclusions différentielles permettent une généralisation de cette relation en autorisant l'ensemble des dérivées possibles à chaque point à appartenir à un certain ensemble (Pour plus de détails voir [3], [6], [10], et [25])).

Les inclusions différentielles surviennent dans de nombreuses situations, y compris les inégalités variationnelles différentielles, les systèmes dynamiques, les processus de Rafle de Moreau, les systèmes dynamiques de complémentarité linéaire et non linéaire. Par conséquent, elles représentent un vaste champ d'étude aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Contrairement aux équations différentielles ordinaires, l'existence de solution pour une inclusion différentielle repose non seulement sur des conditions de régularité sur F (i.e, les divers types de continuité ou semi-continuité) mais aussi à des conditions de type topologique ou géométrique (comme compacité, convexité) de son image. Les principaux résultats connus reposent sur des théorèmes de point fixe, des théorèmes de sélection, d'approximation, ou par construction. Il est cependant important de mentionner que les arguments de preuve utilisés varient beaucoup suivant les hypothèses de continuité imposées à la fonction multivoque F. Les trois plus fréquentes sont la semi-continuité supérieure, la semi-continuité inférieure et une condition de Lipschitz.

Le problème (1) a été étudié par de nombreux auteurs dans le cas particulier où la fonction F est univoque, dans ce cas, il s'agit en fait d'une équation différentielle ordinaire

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(0) = x_0, f \in L^1(I, X).$$

Aubin et Cellina (voir [6]), ont fait une étude originale pour l'inclusion différentielle (1) où F : $\Omega \times X \rightrightarrows H$ est une application multivoques semi-continue supérieurement à valeurs convexes et compactes ($\Omega \subset \mathbb{R} \times X, X \subset H$).

Les inclusions différentielles perturbées constituent une classe spécifique d'inclusions différentielles où un terme de perturbation est ajouté à l'inclusion de base. Elles peuvent être utilisées pour modéliser des systèmes dynamiques sous l'influence de perturbations externes ou internes. Formellement, une inclusion différentielle perturbée prend la forme générale suivante

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) + G(t, x(t)),$$

où F est une application multivoque représentant la dynamique principale du système et G est un terme de perturbation qui peut également étre univoque ou multivoque. Les théorèmes d'existence et d'unicité pour les inclusions différentielles perturbées peuvent être plus complexes que pour les inclusions différentielles classiques (sans perturbation).

Un autre cas particulier très important, qui d'ailleurs justifie aussi le grand intérêt suscité par les inclusions différentielles est donné par le sous différentiel d'une fonction convexe, on obtient le problème connu sous le nom de processus de Rafle (En anglais : sweeping process) introduit dans les années 70 par J.J. Moreau. Ce processus de Rafle est un problème d'évolution cinématique lié à la modélisation des systèmes élastoplastiques en mécanique et se présente sous la forme d'une inclusion différentielle d'évolution du premier ordre associée à un cône normal

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p. } \ t \in [0, T], \\ \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases} \tag{2}$$

Telles que : H est un espace de Hilbert, $C(\cdot) : [0, T] \rightrightarrows H$ une application multivoque définie sur l'intervalle du temps $[0, T]$ et dont les valeurs sont convexes fermées non vides de H. $N_{C(t)}(x(t))$ est le cône normal au sens de l'analyse convexe à l'ensemble convexe $C(t)$ au point $x(t)$ avec une condition initiale donnée $x_0 \in C(0)$.

Cette inclusion différentielle peut être interprétée (dans un langage mécanique) de la manière suivante :

Si on suppose que le point $x(t)$ se trouve à l'intérieure de l'ensemble mobile $C(t)$, le cône normal $N_{C(t)}(x(t)))$ dans ce cas est réduit à zéro, ce qui signifie que la vitesse est nulle ($\dot{x}(t) = 0$) et par suite le point ne bouge pas. Tandis que, tout contact du point $x(t)$ avec la frontière conduit à un mouvement opposé à la normale à $C(t)$ au point $x(t)$ (pour rester à l'intérieur de $C(t)$ et satisfait la contrainte). Cette visualisation mécanique conduit Moreau à appeler ce problème le processus de Rafle : (la particule est raflée par l'ensemble mobile ou le problème décrit le mouvement d'un ensemble qui traîne un point).

Ce problème d'évolution abstrait a été introduit et étudié par Jean Jacques Moreau dans les années 70 dans une série d'articles [18], [19], [20], [21] dans le cas où les ensembles $C(t)$ sont supposés convexes. Il joue un rôle important dans l'élasto-plasticité, la quasi-statique, la dynamique, notamment en mécanique [9], [22], [23]. Moreau a étudié l'existence d'une solution absolument continue pour (2) sous la convexité de $C(t)$ et sous l'hypothèse que les ensembles $(C(t))_t$ bougent de façon absolument continue par rapport à la distance de Pompeiu- Hausdorff.

L'inclusion différentielle ci-dessus avec la contrainte $x(t) \in C(t)$ peut être énoncée pour presque tout $t \in [0, T]$ sous la forme d'inégalité variationnelle d'évolution suivante

$$\begin{cases} \langle -\dot{x}(t), y - x(t) \rangle \leqslant 0 \text{ pour tout } y \in C(t), \\ \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases} \tag{3}$$

Le problème (2) s'écrit aussi

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial \psi_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p. } \ t \in [0, T], \\ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

où $x_0 \in C(0)$ et $\partial\psi_{C(t)}(v)$ est le sous-différentiel de la fonction convexe $v \longmapsto \psi_{C(t)}(v)$ l'indicatrice de l'ensemble $C(t)$ (i.e. $\psi_{C(t)}(v) = 0$ si $v \in C(t)$ et $+\infty$ sinon).

Depuis les travaux de Moreau et vu les nouvelles techniques du traitement des inclusions différentielles gouvernées par le cône normal, plusieurs extensions et variantes du problème (2) ont été introduites et largement étudiées par nombreux chercheurs. Beaucoup de ces nouvelles formes touchent principalement l'ensemble des contraintes $(C(t))_t$ en considérant des ensembles non nécessairement convexes et dépendent à la fois du temps et de l'état, i.e., de la forme $C(t, u(t))$ et les processus de Rafle du second ordre et quelques autres variantes ([8], [12], [17], [15]).

Dans ce mémoire, nous détaillons les résultats prouvés dans l'article de M. Kecies, T. Haddad, et M. Sene intitulé "Degenerate sweeping process with a Lipschitz perturbation " ([14]). Le but est d'étudier une nouvelle variante du processus de rafle dans un espace de Hilbert H qui est connu sous le nom de processus de Rafle dégénéré perturbé et qui correspond à l'inclusion différentielle suivante

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t) \text{ p.p } \; t \in [0,T], \\ \\ x(0) = x_0, Ax_0 \in C(0). \end{cases} \tag{5}$$

dont la perturbation $f : [0,T] \longrightarrow H$ est une application univoque de $L^1([0,T], H)$. Le résultat de l'existence et de l'unicité de la solution a été établi en considérant les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ Pour tout $t \in [0,T]$, $(C(t))_t$ sont des sous ensembles non vides convexes et fermés de H.
$(\mathcal{H}_2)$ $C(t)$ varie d'une façon absolument continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction absolument continue $v(\cdot) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in H$ et pour tous $s, t \in I$, on ait

$$|d(x, C(t)) - d(x, C(s))| \leqslant |v(t) - v(s)|. \tag{6}$$

$(\mathcal{H}_A)$ $A : H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire, borné et symétrique et $\beta-$coercif, c'est-à-dire

$$\langle Ax, x\rangle \geqslant \beta. \|x\|^2, \forall x \in H. \tag{7}$$

Ce mémoire comprend trois chapitres ordonné comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons les outils fondamentaux de l'analyse multivoque, notamment la notion d'application multivoque, les notions de semi-continuité inférieure et supérieure et quelques notions d'excès et de distance de Hausdorff qui sont sont nécessaires pour l'étude des inclusions différentielles.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons une revue courte sur l'analyse convexe et non convexe, particulièrement, nous présentons quelques définitions des fonctions univoques semi-continues inférieurement et supérieurement et propriétés d'ensembles et de fonctions convexes ainsi que des propriétés de la sous-différentiabilité des fonctions convexes, cela est suivi par quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle.

Le troisième chapitre comporte deux sections, la première consiste à traiter l'existence de solution pour une inclusion différentielle du premier ordre sans perturbation. En utilisant ce résultat, nous présentons, dans la seconde section de ce chapitre, l'existence de solution absolument continue pour l'inclusion perturbée d'évolution (5).

Chapitre 1

Quelques notions d'analyse multivoque

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires nécessaires que nous utiliserons dans ce mémoire. Il s'agit de résultats fondamentaux d'analyse multivoque. Notamment la notion d'application multivoque, les notions de semi-continuité inférieure et supérieure et quelques notions d'excès et de distance de Hausdorff qui sont deux outils importants en analyse multivoque permettant d'évaluer l'écart entre deux ensembles.

1.1 Généralités sur les applications multivoques

Comme nous l'avons dit précédemment, nous nous intéressons dans cette section aux applications dites multivoques. Ce sont des applications dont les images ne sont pas nécessairement des points comme en analyse classique, mais des ensembles. Dans cette partie nous allons présenter quelques définitions et propriétés relatives à ces applications.

Définition 1.1.1 *Étant donné deux ensembles E et G.*
1. On appelle application multivoque (ou multi-application) F d´efinie sur E à valeurs dans G toute application qui à chaque élément $x \in E$ associe un sous ensemble $F(x)$ de G, et on note $F : E \rightrightarrows G$ ou $F : E \longrightarrow \mathcal{P}(G)$ où $\mathcal{P}(G)$ est l'ensemble des parties de G.
2. On appelle domaine de F et on note $dom(F)$ l'ensemble défini par

$$dom(F) := \{x \in E : F(x) \neq \phi\}.$$

3. On appelle image de F et on note $Im(F)$ l'ensemble défini par

$$Im(F) := \{y \in G, \exists x \in E : y \in F(x)\} = \bigcup_{x \in E} F(x).$$

Si $A \subset E$, alors l'image de A par F est

$$F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x) = \{y \in G, \exists x \in A : y \in F(x)\}.$$

Ainsi

$$Im(F) = F(E).$$

4. On appelle le graphe F est le sous-ensemble de $E \times G$ défini par

$$gph(F) := \{(x, y) \in E \times G : y \in F(x)\}.$$

F est dite non triviale si son graphe est non vide, c'est-à-dire s'il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $F(x)$ soit non vide.
5. L'inverse de F est l'application multivoque $F^{-1} : G \rightrightarrows E$ telle que

$$x \in F^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in F(x) \Longleftrightarrow (x, y) \in gph(F)$$

Nous donnons ici quelques exemples d'applications multivoques.

Exemple 1.1.1
1. L'application $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) := [a, b]\,,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, est une application multivoque (constante).
2. Considérons la multi-application $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) := \begin{cases} \phi \text{ si } x > 0 \\ \\ \left\{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\right\} \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Il est clair que

(i) $dom(F) := \{x \in \mathbb{R} : F(x) \neq \phi\} = \mathbb{R}_-$
(ii) $Im(F) := \bigcup\limits_{x \in dom(F)} F(x) = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{R}_-} \left\{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\right\} = \mathbb{R}$
(iii) $gph(F) := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \in F(x)\} = \left\{\left(x, \sqrt{-x}\right) : x \leqslant 0\right\} \cup \left\{\left(x, -\sqrt{-x}\right) : x \leqslant 0\right\}.$

De plus, l'application multivoque inverse est donnée par

$$F^{-1} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}_-,$$

telle que

$$y \in F(x) \Longleftrightarrow x \in F^{-1}(y) = \left\{-y^2\right\}.$$

Nous considérons une autre classe importante des applications multivoques.

Définition 1.1.2
1. L'application multivoque $F : E \rightrightarrows G$ est constante s'il existe un sous-ensemble C de G tel que $F(x) = C$ pour tout $x \in E$. Cela implique $F(A) = C$ pour tout $A \subset E$.
2. Une application multivoque $F : E \rightrightarrows G$ est dite à valeurs fermées, ouvertes ou compactes si, pour chaque $x \in dom(F)$, $F(x)$ est respectivement un ensemble fermé, ouvert ou compact en G.
3. Une application multivoque $F : E \rightrightarrows G$ est dite fermée, ouverte ou compacte, si son graphe est un ensemble fermé, ouvert ou compact.

Définition 1.1.3 *Soit $F : E \rightrightarrows G$ une application multivoque. Pour tout $V \subset G$, on définit*
1. L'image réciproque (large) de V par l'application multivoque F par

$$F^{-1}(V) := \{x \in E : F(x) \cap V \neq \phi\}\,.$$

2. L'image réciproque (étroite) de V par l'application multivoque F par

$$F_+^{-1}(V) := \{x \in E : F(x) \subset V\}\,.$$

Remarque 1.1.1 *Si $F : E \rightrightarrows G$ une application multivoque. Alors pour tout sous-ensemble $A \subset E$, on a*

$$(i)\ F^{-1}(C_G^A) = C_E^{F_+^{-1}(A)}$$

et

$$(ii)\ F_+^{-1}(C_G^A) = C_E^{F^{-1}(A)}$$

Exemple 1.1.2 *Soit l'application multivoque $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) := \left\{y \in [0,1] : x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\right\}.$$

Alors pour $V := \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a

$$F^{-1}(V) := \{x \in \mathbb{R} : F(x) \cap V \neq \phi\} = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

et

$$F_+^{-1}(V) := \{x \in \mathbb{R} : F(x) \subset V\} = \left[0, \frac{1}{4}\right].$$

Donnons quelques propriétés connues dans le cas univoque.

Proposition 1.1.1 *[4] Soit $F : E \rightrightarrows G$ une application multivoque. Soient $A, B \subset E$ et $V, W \subset G$. Alors on a les propriétés suivantes.*
(a_1) $A \subset B \Longrightarrow F(A) \subset F(B)$.
(a_2) $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$, $F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B)$.
(a_4) $F^{-1}(V \cup W) = F^{-1}(V) \cup F^{-1}(W)$, $F^{-1}(V \cap W) \subset F^{-1}(V) \cap F^{-1}(W)$.
(a_1) $F_+^{-1}(V \cup W) \subset F_+^{-1}(V) \cup F_+^{-1}(W)$, $F_+^{-1}(V) \cap F_+^{-1}(W) = F_+^{-1}(V \cap W)$.

1.1.1 Opérations élémentaires avec les applications multivoques

Dans cette partie, nous étudions les propriétés des opérations élémentaires sur les applications multivoques comme union, intersection et autres.

Définition 1.1.4 *On considère deux applications multivoques $F_1, F_2 : E \rightrightarrows G$, alors*
1. L'union de F_1 et F_2 est l'application multivoque de E dans G définie par

$$\begin{array}{rccl} F_1 \cup F_2 : & E & \rightrightarrows & G \\ & x & \longmapsto & (F_1 \cup F_2)(x) := F_1(x) \cup F_2(x). \end{array}$$

2. L'intersection de F_1 et F_2 est l'application multivoque de E dans G définie par

$$\begin{array}{rccl} F_1 \cap F_2 : & E & \rightrightarrows & G \\ & x & \longmapsto & (F_1 \cap F_2)(x) := F_1(x) \cap F_2(x). \end{array}$$

3. Le produit cartésien de F_1 et F_2 est l'application multivoque de E dans G définie par

$$\begin{array}{rccl} F_1 \times F_2 : & E & \rightrightarrows & G \times G \\ & x & \longmapsto & (F_1 \times F_2)(x) := F_1(x) \times F_2(x). \end{array}$$

4. Si $F_1 : E \rightrightarrows G, F_2 : G \rightrightarrows H$ deux applications multivoques, alors le produit de composition de F_1 et F_2 est l'application multivoque de E dans H définie par

$$\begin{array}{rccl} F_2 \circ F_1 : & E & \rightrightarrows & H \\ & x & \longmapsto & (F_2 \circ F_1)(x) := F_2(F_1(x)) = \bigcup\limits_{y \in F_1(x)} F_2(y). \end{array}$$

Exemple 1.1.3
1. Soient $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ deux applications multivoques telle que

$$\begin{cases} F_1(x) := [x-1, x+2] \\ \\ F_2(x) := [x, x+2]. \end{cases}$$

Alors, on a

$$(F_1 \cup F_2)(x) := F_1(x) \cup F_2(x) = [x-1, x+1] \cup [x, x+2] = [x-1, x+2]$$
$$(F_1 \cap F_2)(x) := F_1(x) \cap F_2(x) = [x-1, x+1] \cap [x, x+2] = [x, x+1].$$

2. Soient $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ deux applications multivoques telle que

$$\begin{cases} F_1(x) := \left\{x^2, x^2+1\right\} \\ \\ F_2(x) := \left\{\sqrt{|x|}, \sqrt{|x+1|}\right\}. \end{cases}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(F_1 \circ F_2)(x) := F_1(F_2(x)) = \bigcup_{y \in F_2(x)} F_1(y) = F_1(\sqrt{|x|}) \cup F_1(\sqrt{|x+1|}) = \{|x|, |x|+1, |x+1|, |x+1|+1\},$$

et

$$(F_2 \circ F_1)(x) := F_2(F_1(x)) = \bigcup_{y \in F_1(x)} F_2(y) = F_2(x^2) \cup F_2(x^2+1) = \left\{|x|, \sqrt{x^2+1}, \sqrt{x^2+2}\right\}.$$

On définit également, comme pour les applications univoques, une addition et une multiplication par un scalaire pour les applications multivoques par.

Définition 1.1.5 *Soient $F_1, F_2 : E \rightrightarrows G$ deux applications multivoques, alors les opérations de base avec les applications multivoques telles que l'addition et la multiplication par un scalaire peuvent être définies pour générer de nouvelles applications multivoques comme suit :*

$$\begin{array}{rccl} F_1 + F_2 : & E & \rightrightarrows & G \\ & x & \longmapsto & (F_1 + F_2)(x) := F_1(x) + F_2(x) = \{y_1 + y_2 : y_1 \in F_1(x) \text{ et } y_2 \in F_2(x)\}, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \alpha.F_1 : & E & \rightrightarrows & G \\ & x & \longmapsto & (\alpha.F_1)(x) := \alpha.F_1(x) = \{\alpha.y_1 : y_1 \in F_1(x)\}, \alpha \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Si $\alpha(\cdot) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application univoque, alors

$$\begin{array}{rccl} \alpha.F_1 : & E & \rightrightarrows & G \\ & x & \longmapsto & (\alpha.F_1)(x) := \alpha(x).F_1(x) = \{\alpha(x).y_1 : y_1 \in F_1(x)\}. \end{array}$$

Où

$$\begin{cases} dom(F_1 + F_2) = dom(F_1) \cap dom(F_2) \\ \\ dom(\alpha F_1) = dom(F_1). \end{cases}$$

1.1.2 Semi-continuités inférieure et supérieure des applications multivoques

Les applications multivoques semi-continues (inférieures ou supérieures) sont importantes dans divers domaines des mathématiques, notamment en analyse convexe, en optimisation non convexe, en théorie des jeux, etc. Elles jouent un rôle particulièrement significatif dans l'étude des applications multivoques.

Définition 1.1.6 ***(Semi-continuités supérieure)***
Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque.
*1. On dit que F est semi-continue supérieurement (en abrégé **s.c.s**) en $x^* \in dom(F)$ si et seulement si pour tout ouvert U de Y contenant $F(x^*)$ (i.e, $F(x^*) \subset U$) , il existe un voisinage $V \subset X$ de x^* tel que $F(V) \subset U$, c'est-à-dire*

$$F(x) \subset U, \forall x \in V.$$

*2. Lorsque la propriété est vérifiée à chaque point $x^* \in X$ (Resp. $x^* \in A$, où $A \subset E$), on dit que F est **s.c.s** sur X (Resp. **s.c.s** sur A).*

Définition 1.1.7 ***(Semi-continuités inférieure)***
*1. On dit que $F : X \rightrightarrows Y$ est semi-continue inférieurement (en abrégé **s.c.i**) en $x^* \in dom(F)$ si et seulement si pour ouvert U de Y vérifiant $F(x^*) \cap U \neq \phi$, il existe un voisinage $V \subset X$ de x^* tel que*

$$F(x) \cap U \neq \phi, \forall x \in V.$$

*2. Lorsque la propriété est vérifiée à chaque point $x^* \in X$ (Resp. $x^* \in A$, où $A \subset E$), on dit que F est **s.c.i** sur X (Resp. **s.c.i** sur A).*

Définition 1.1.8 *$F : X \rightrightarrows Y$ est dite continue en $x^* \in dom(F)$ si elle est à la fois semi-continue inférieurement et semicontinue supérieurement en x^* et elle est continue si elle est continue en tout point $x \in dom(F)$.*

Il n'est pas facile de prouver que les applications multivoques sont semi-continues supérieurement ou inférieurement en utilisant les définitions de ces continuités. La proposition suivante exprime la semi-continuité des applications multivoques en termes d'images inverses. Nous avons donc les caractérisations suivantes pour ces définitions.

Proposition 1.1.2 *[4] (Critères de semi-continuité inférieure et supérieure)*
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. Alors
1. Les assertions suivantes sont équivalentes deux à deux.
(a) F est semi-continue supérieurement.
(b) $F_+^{-1}(U) = \{x \in X : F(x) \subset V\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert U de Y.
(c) $F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \phi\}$ est un fermé de X pour tout fermé V de Y.
2. De même les assertions (a'), (b') et (c') suivantes sont deux-à-deux équivalentes :
(a') F est semi-continue inférieurement.
(b') $F^{-1}(U)$ est un ouvert de X pour tout ouvert U de Y.
(c') $F_+^{-1}(V)$ est un fermé de X pour tout fermé V de Y.

Exemple 1.1.4 *Soit l'application multivoque suivante*

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \rightrightarrows & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & F(x) := \left\{ \begin{array}{l} [-1,1] \;\; si\ x \neq 0 \\ \\ \{0\} \;\; si\ x = 0. \end{array} \right. \end{array}$$

*Alors, on a F est **s.c.i** sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas **s.c.s** au point 0. En effet, soit V un fermé de $\mathbb{R}$. Montrons que*

$$F_+^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \subset V\},$$

est un fermé de $\mathbb{R}$. On a

$$F_+^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \subset V\} = \{x = 0 : \{0\} \subset V\} \cup \{x \neq 0 : [-1,1] \subset V\}.$$

Alors
** Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $[-1,1]$ et contenant 0, alors $F_+^{-1}(V) = \{0\}$ qui est fermé de $\mathbb{R}$.*
** Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant $[-1,1]$, alors $F_+^{-1}(V) = \mathbb{R}$, qui est fermé de $\mathbb{R}$.*
** Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $[-1,1]$ et $\{0\}$, alors $F_+^{-1}(V) = \phi$, qui est fermé de $\mathbb{R}$.*
Autrement dit

$$F_+^{-1}(V) = \left\{ \begin{array}{l} \phi,\ si\ [-1,1] \not\subset V\ et\ \{0\} \not\subset V \\ \mathbb{R},\ si\ [-1,1] \subset V \\ \{0\},\ si\ [-1,1] \not\subset V\ et\ \{0\} \subset V. \end{array} \right.$$

*Donc, pour tout V fermé de $\mathbb{R}$, $F_+^{-1}(V)$ est un fermé de $\mathbb{R}$. D'où F est bien **s.c.i** sur $\mathbb{R}$.*
Par ailleurs, on a F n'est pas semi-continue supérieurement en 0. En effet, il existe $U := \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $F(0) = \{0\} \subset U$. Par contre

$$\forall \varepsilon > 0 : F\left(\left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\right) = \bigcup_{x \in]-\varepsilon, \varepsilon[} F(x) = [-1,1] \not\subset \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

Autrement dit, il n'existe pas de voisinage V de 0 tel que

$$F(x) \subset U, \forall x \in V.$$

Par conséquent, F n'est pas semi-continue supérieurement en 0.

1.2 Excès et distance de Hausdorff

Pour passer à la version ensembliste de la notion de la Lipschitzité, on aura besoin d'introduire la notion d'excès et la distance de Hausdorff qui sont deux outils importants en analyse multivoque permettant d'évaluer (dans un certain sens) l'écart entre deux ensembles.

Définition 1.2.1 *Soient (E,d) un espace métrique et A un sous ensemble non vide de E. La distance du point $x \in E$ à l'ensemble A notée $d(x,A)$ ou $d_A(x)$ est définie par*

$$d(x,A) = d_A(x) := \inf_{a \in A} d(x,a).$$

Si $A = \phi$, alors $d(x,\phi) = +\infty$.

Si A est non vide, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $y \in A$ tel que

$$d(x, y) \leqslant d(x, A) + \varepsilon.$$

Définition 1.2.2 *Soient $(E, d), (F, d')$ deux espaces métriques, U un ouvert de E, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.*
1. On dit que f est Lipschitzienne sur E de rapport l s'il existe un réel $l \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tous $x, y \in E$,

$$d(f(x), f(y)) \leqslant l d(x, y).$$

Exemple 1.2.1 *Soient A un sous ensemble non vide d'un espace métrique (E, d) et $x \in E$. Alors la fonction $x \longmapsto d(x, A)$ est Lipschitzienne de rapport 1 pour la distance d, i.e.*

$$\forall x, y \in X : |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y).$$

de plus

$$d(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \bar{A}.$$

Proposition 1.2.1 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et C un sous-ensemble de E. Alors, pour tous $x, y \in E$, on a*

$$d(x, C + y) = d(x - y, C).$$

Preuve. Soient $x, y \in H$, alors

$$d(x, C + y) = \inf_{z \in C + y} \|x - z\| = \inf_{c \in C} \|x - (c + y)\| = \inf_{c \in C} \|(x - y) - c\| = d(x - y, C).$$

$\square$

Définition 1.2.3 *Soit (E, d) un espace métrique et soient A et B deux sous-ensembles de E.*
1. On appelle excès (de Pompeiu- Hausdorff) ou écart de A sur B et on le note $e(A, B)$, la quantité suivante

$$e(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} (x, y) \right). \tag{1.1}$$

2. Dans le contexte de l'espace normé une définition équivalente de l'excès se donne par

$$e(A, B) := \inf \{ r > 0 : A \subset B + r\mathbb{B} \}, \tag{1.2}$$

telle que

$$B + r\mathbb{B} = \underset{x \in B}{\cup} B(x, r).$$

et $\mathbb{B} = B[0, 1]$ est la boule unité fermée centrée en 0.
3. Une autre formulation équivalente pour la fonction de l'excès en termes de distance d'un point à un ensemble est donnée par

$$e(A, B) = \sup_{x \in E} (d(x, B) - d(x, A)). \tag{1.3}$$

Avec les conventions

$$\begin{cases} e(\phi, B) = 0, \text{ si } B \neq \phi \text{ (ça revient au fait que le supremum sur un ensemble vide est 0).} \\ \\ e(A, \phi) = +\infty \text{ pour tout } A. \end{cases}$$

Alors l'excès prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty]$.

• $e(A, B) < +\infty$ pour tout ensemble non vide $B \subset E$ si et seulement si A est bornée.

• Il est à noter qu'en général les quantités $e(A, B)$ et $e(B, A)$ sont différentes. En effet, si $A = [0, 10]$ et $[12, 18]$, alors $e(A, B) = 12$ tandis que $e(B, A) = 8$.

Proposition 1.2.2 ***(Propriétés)***
Soit (E, d) un espace métrique et soient A, B, C et D des sous-ensembles de E. Alors
1. $e(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A \subset \bar{B}$
2. $e(A, C) \leqslant e(A, B) + e(B, C)$ (l'excès vérifie l'inégalité triangulaire).

Preuve.
1. On a

$$\begin{aligned} e(A, B) &= 0 \Longleftrightarrow \sup_{x \in A} d(x, B) = 0 \Longleftrightarrow d(x, B) = 0, \forall x \in A \\ &\Longleftrightarrow x \in \bar{B}, \forall x \in A \Longleftrightarrow A \subset \bar{B}. \end{aligned}$$

2. Soient $x \in A, y \in B, z \in C$, d'après l'inégalité triangulaire, il vient que

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

En prenant alors la borne inférieure sur les z dans C, il vient

$$\inf_{z \in C} d(x, z) \leqslant d(x, y) + \inf_{z \in C} d(y, z).$$

On obtient

$$d(x, C) \leqslant d(x, y) + d(y, C).$$

Passant à la borne inférieure sur les y dans B, il vient

$$d(x, C) \leqslant \inf_{y \in B} d(x, y) + d(y, C).$$

Ce qui donne

$$d(x, C) \leqslant d(x, B) + \sup_{y \in B} d(y, C)$$

En prenant la borne supérieure sur les x dans A, il revient

$$\sup_{x \in A} d(x, C) \leqslant \sup_{x \in A} d(x, B) + e(B, C).$$

On obtient

$$e(A, C) \leqslant e(A, B) + e(B, C).$$

□

Définition 1.2.4 *Soit (E, d) un espace métrique et soient A et B deux sous-ensembles non vides de E. La distance de Hausdorff (Pompeiu-Hausdorff) de A à B, notée $d_H(A, B)$ est définie par*

$$d_H(A, B) := \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

2. La distance de Hausdorff dans un espace normé prend la forme suivante

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset B + r\mathbb{B} \text{ et } B \subset A + r\mathbb{B}\}.$$

3. Une autre formulation équivalente pour la fonction de Hausdorff en termes de distance d'un point à un ensemble est donnée par

$$d_H(A, B) = \sup_{x \in E} |d(x, B) - d(x, A)|$$

On peut facilement vérifier les propriétés suivantes.

Proposition 1.2.3 ***(Propriétés)***
Soit (E, d) un espace métrique. Alors la distance de Hausdorff vérifie les propriétés suivantes.
1. $d_H(A, A) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$.
2. $d_H(A, B) = d_H(B, A)$, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
3. $d_H(A, B) \leqslant d_H(A, C) + d_H(C, B)$, pour tout $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Remarque 1.2.1
• *Généralement, d_H ne vérifie pas la condition*

$$d_H(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B.$$

Par conséquent d_H n'est pas une métrique classique. sur $\mathcal{P}(E)$. Par exemple, si on se place sur $\mathbb{R}$, on voit que pour $A =]0, 1[$ et $B = [0, 1]$, on a

$$d_H(A, B) = 0,$$

mais

$$A \neq B.$$

• *La distance de Hausdorrff peut être une métrique classique, lorsque nous travaillons par exemple sur l'ensemble des parties fermées bornées de E.*

Définition 1.2.5 ***(Applications Lipschitziennes)***
On dit qu'une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est lipschitzienne relativement à un sous-ensemble non vide D de $dom(F)$, si elle est à valeurs fermées sur D et s'il existe une constante $l \geqslant 0$ telle que

$$F(x) \subset F(x') + l.d(x, x').\mathbb{B}_Y \tag{1.4}$$

L'inclusion (1.4) peut être réécrite en termes de distance de Hausdorff

$$d_H(F(x), F(x')) \leqslant l.d(x, x'), \forall x, x' \in X.$$

Chapitre 2

Éléments d'analyse convexe, Autres résultats et définitions

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et outils de l'analyse convexe qui nous seront utiles par la suite. Nous introduisons dans un premier temps la notion d'ensemble convexe, donnons quelques leurs principales propriétés (géométriques et topologiques). Ensuite, nous abordons une classe particulière d'ensembles convexes : les cônes convexes qui jouent un rôle particulier dans la description des ensembles convexes. Nous proposons dans la deuxième partie de ce chapitre, l'étude de la semi-continuité des applications univoques à valeurs réelles étendues et ses propriétés. Nous étudions également, les fonctions convexes et ses propriétés. Nous proposons l'étude du sous différentiel au sens d'analyse convexe d'une fonction convexe. Dans la dernière partie, nous donnons des notions sur les opérateurs monotones, maximaux monotones et quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle qui nous serviront tout au long de ce travail.

2.1 Quelques concepts d'analyse convexe

L'analyse convexe est la branche des mathématiques qui étudie les propriétés des ensembles convexes et des fonctions convexes. Les concepts de convexité jouent un rôle crucial dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées et théoriques, ainsi que dans des domaines tels que l'optimisation, l'économie, les sciences de l'ingénieur et les sciences sociales.

2.1.1 Ensembles et enveloppes convexes

L'ensemble convexe est le concept de base de l'analyse convexe, c'est une partie d'un espace vectoriel réel qui contient tout le segment compris entre deux quelconques de ses points. L'importance des ensembles convexes réside dans leur rôle crucial dans de nombreux domaines des mathématiques et des sciences appliquées, notamment : Optimisation convexe et Analyse fonctionnelle.

Définition 2.1.1 *Soit E un espace vectoriel réel.*
1. Un sous-ensemble C de E est dit convexe si convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0, 1] : \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$$

On dit parfois que le segment $[x, y]$ est inclus dans C.
2. Dire que C est convexe, c'est donc dire que C contient un segment dès qu'elle contient ses extrémités.

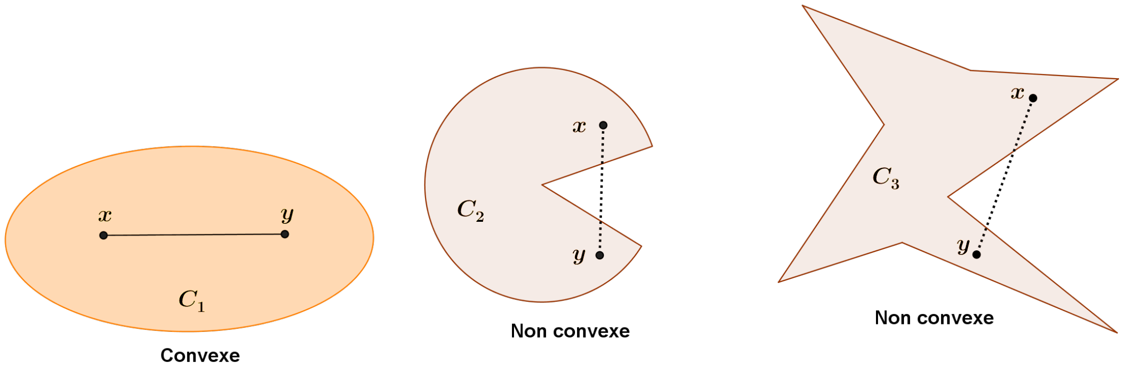

FIGURE 2.1 – Ensembles convexes et non convexes

L'exemple suivant résume les propriétés élémentaire des ensembles convexes.

Exemple 2.1.1 ***(Opérations préservant la convexité)***
1. La somme $C_1+C_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ de deux convexes C_1 et C_2 de E est un convexe.
2. Le produit (l'homothétique) $\alpha C := \{\alpha x : x \in C\}$ d'un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ par un convexe C de E est un convexe.
3. Pour tout convexe C de E et pour tout $a \in E$, le translaté $a + C := \{a + x : x \in C\}$ est convexe.
4. Si $\{C_i\}_{i\in I}$ est une famille quelconque de convexes de E, alors leur intersection est un convexe.
5. Le produit cartésien de deux ensembles convexes $C_1 \subset E, C_2 \subset E_2$ est convexe. C'est à dire $C_1 \times C_2 := \{(x, y) : x \in C_1, x_2 \in C_2\}$ est un sous-ensemble convexe de $E_1 \times E_2$.
6. Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace normé E. Alors les ensembles $\overline{C}$ et $int(C)$ sont convexes.

Comme les ensembles convexes sont stables par intersection, on peut définir le plus petit ensemble convexe (au sens de l'inclusion) contenant un ensemble donné.

Définition 2.1.2 *Soit A une partie d'un espace vectoriel E. L'enveloppe convexe de A (ou enveloppe convexe engendré par A) est l'intersection de tous les convexes contenant A et elle est notée $co(A)$.*

$$co(A) := \cap \{C : C \text{ est un convexe contenant } A\}.$$

Il est équivalent de dire que $co(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes finies d'éléments de A,

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \geqslant 1, x_i \in A, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}. \tag{2.1}$$

2.1.2 Cônes normaux convexes

Dans un espace vectoriel réel E, on va s'intéresser à certains convexes particuliers, les cônes convexes. Parmi tous les types de cônes possibles, nous nous restreignons aux cônes normaux, qui présentent un plus grand intérêt pour notre propos.

Définition 2.1.3
1. Soit E un espace vectoriel réel. Une partie C de E est un cône si si et seulement si

$$\forall x \in C, \forall \alpha \geqslant 0 : \alpha x \in C.$$

Autrement dit, $\alpha C \subset C$, pour tout $\alpha \geqslant 0$.
2. Si C est convexe, alors on dit que C est un cône convexe.
3. Une partie C de E est un cône convexe si et seulement si elle est stable par addition et par multiplication par les réels positifs, c'est à dire, si et seulement si

$$\forall x, y \in C, \forall \alpha \geqslant 0 : \left\{ \begin{array}{c} x + y \in C \\ et \\ \alpha x \in C \end{array} \right. \Longleftrightarrow \forall \alpha \geqslant 0 : \left\{ \begin{array}{c} C + C \subset C \\ et \\ \alpha C \subset C \end{array} \right. .$$

Exemple 2.1.2
1. Soit E un espace normé. L'adhérence d'un cône convexe C de E est un cône convexe.
2. Il est clair que l'intersection d'une famille quelconque de cônes convexes est convexe.
3. Un produit cartésien de cônes convexes est un cône convexe. La convexité conique est aussi stable par combinaison linéaire.

Définition 2.1.4 *Soit A une partie d'un espace vectoriel E. L'enveloppe cônique de A ou le cône convexe engendré par A est l'intersection de tous les cônes convexes contenant A et elle est notée $cone(A)$.*

$$cone(A) := \cap \{C : C \text{ est un cône convexe contenant } A\}$$

Il s'agit donc du plus petit cône convexe contenant A.
Il est équivalent de dire que $cone(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons côniques finies d'éléments de A,

$$cone(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \geqslant 1, x_i \in A, \lambda_i \geqslant 0 \right\} \tag{2.2}$$

Dans l'analyse convexe, les cônes les plus connus sont les cônes normaux qui jouent un rôle important dans les inclusions différentielles et sont fondamentaux dans l'étude des problèmes d'optimisation.

Définition 2.1.5 *Soit C un sous ensemble non vide de H. Alors, un vecteur $v \in H$ est dit normal à C au point $a \in C$ si*

$$\langle v, x - a \rangle \leqslant 0, \forall x \in C.$$

Ou d'une manière équivalente si

$$\sup_{x \in C} \langle v, x \rangle = \langle v, a \rangle .$$

Remarquons que si v est un vecteur normal à C, alors αv l'est aussi pour $\alpha \geqslant 0$. Alors l'ensemble de tous les vecteurs normaux à C au point $a \in C$ forme un cône appelé le cône normal à C au point a, noté $N_C(a)$.

Définition 2.1.6 *Soit C un sous-ensemble convexe non vide de H et soit $x \in H$. Le cône normal (au sens de l'analyse convexe) à C en x noté $N_C(x)$ est défini par*

$$N_C(x) := \left\{ \begin{array}{l} \{y \in H : \langle y, z - x \rangle \leqslant 0, \forall z \in C\}, \ si\ x \in C \\ \phi,\ si\ x \notin C. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Ou d'une manière équivalente

$$N_C(x) := \{y \in H : \sup \langle y, C - x \rangle \leqslant 0\} .$$

Remarque 2.1.1
1. Remarquons que les éléments du cône normal forment un angle obtus avec $z-x$ pour tout élément de l'ensemble C.
2. Le cône normal de C est une application multivoque de H vers H, i.e

$$N_C(\cdot) : H \rightrightarrows H.$$

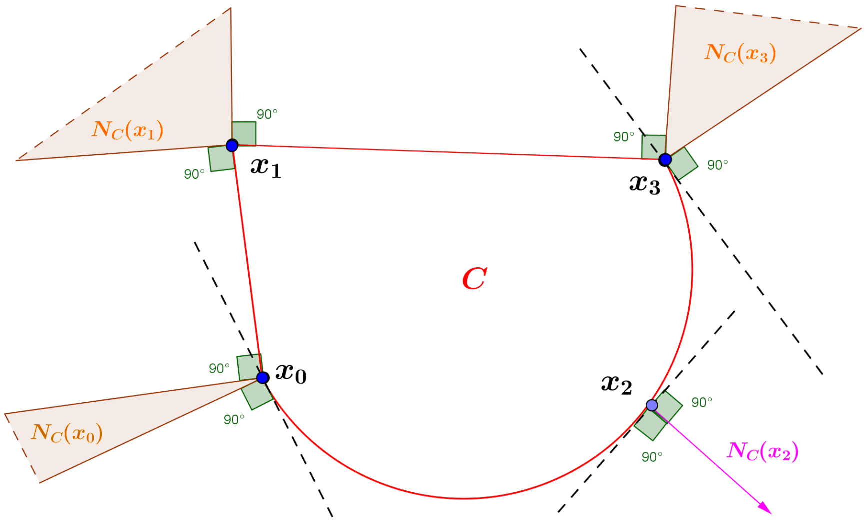

FIGURE 2.2 – Cônes normaux à un sous-ensemble convexe en différents points

Exemple 2.1.3
1. Soit $C = [0,1] \subset \mathbb{R}$, alors

$$N_{[0,1]}(1) = [0, +\infty[\,.$$

En effet, on a

$$N_{[0,1]}(1) = \{y \in \mathbb{R} : y(z-1) \leqslant 0, \forall z \in [0,1]\}\,.$$

Ce qui donne

$$N_{[0,1]}(1) = [0, +\infty[\,.$$

2. Soit $C = [0,1] \subset \mathbb{R}$, alors

$$N_C(x) = \begin{cases} \mathbb{R}_-, & si\ x = 0 \\ \mathbb{R}_+, & si\ x = 1 \\ \{0\}\,, & si\ x \in\,]0,1[\\ \phi, & Par\ ailleurs. \end{cases}$$

Proposition 2.1.1 *Si $x \in int(C)$, alors $N_C(x) = \{0\}$ (Les seuls points intéressants sont ceux sur la frontière de C).*

Preuve. Soit $x \in int(C)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule centrée en x, de rayon ε soit contenue dans C, donc on a

$$x \in int(C) \iff \exists \varepsilon >: B(x,\varepsilon) = x + \varepsilon\mathbb{B}(0,1) \subset C.$$

D'autre part, soit $v \in N_C(x)$, montrons que $v = 0$. Alors

$$v \in N_C(x) \iff \langle v, y - x\rangle \leqslant 0, \forall y \in C.$$

Puisque $x \in int(C)$, alors on peut choisir y suffisamment proche de x. ($y \in B(x,\varepsilon) \subset C$). Considérons

$$y = x + t.v,$$

$t > 0$ est choisi de manière que $y \in B(x,t)$.
On obtient

$$\begin{aligned} \langle v, y-x \rangle \leqslant 0 &\Longrightarrow \langle v, t.v \rangle \leqslant 0 \\ &\Longrightarrow t \left\| v \right\|^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $v = 0$. □

Proposition 2.1.2 *Soit C un sous-ensemble convexe non vide de H. Alors $N_C(x)$ est un sous-ensemble convexe fermé de H contenant l'origine* 0..

Preuve.
1. Par la définition du cône normal, on a $0 \in N_C(x)$.
2. On prouve d'abord que $N_C(x)$ est un cône. Soient $y \in N_C(x)$ et $\alpha \geqslant 0$, alors

$$\langle y, z-x \rangle \leqslant 0, \forall z \in C.$$

D'autre part, on a

$$\langle \alpha y, z-x \rangle = \alpha \langle y, z-x \rangle \leqslant 0, \forall z \in C.$$

Ce qui donne $\alpha y \in N_C(x)$.
3. Montrons maintenant la convexité de $N_C(x)$. Soient $y_1, y_2 \in N_C(x)$ et $\alpha \in [0,1]$, alors

$$\begin{cases} \langle y_1, z-x \rangle \leqslant 0 \\ \langle y_2, z-x \rangle \leqslant 0 \end{cases}, \forall z \in C.$$

On obtient

$$\langle \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2, z-x \rangle = \alpha \langle y_1, z-x \rangle + (1-\alpha) \langle y_2, z-x \rangle \leqslant 0.$$

Il s'ensuit alors que $\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in N_C(x)$ et donc $N_C(x)$ est convexe.
4. Montrons que $N_C(x)$ est fermé. Pour cela, on considère une suite $(y_n)_n \subset N_C(x)$ convergeant vers y. On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle y_n, z-x \rangle \leqslant 0, \forall z \in C.$$

En passant à la limite, on trouve

$$\langle y, z-x \rangle \leqslant 0, \forall z \in C.$$

Ce qui montre le résultat recherché. □

Proposition 2.1.3 *Soit C un sous-ensemble convexe non vide de H. Alors pour tout $x \in -C$ et $y, z \in H$ tels que $y + z \in C$, on a*

$$\begin{aligned} (i) N_C(y+z) &= N_{C-z}(y) \\ (ii) - N_C(-x) &= N_{-C}(x). \end{aligned}$$

Preuve. Soient $x \in -C$ et $y, z \in H$, alors
(i) Soit $t \in H$, alors

$$\begin{aligned} t \in N_C(y+z) &\Longleftrightarrow \langle t, s-(y+z) \rangle \leqslant 0, \forall s \in C \\ &\Longleftrightarrow \langle t, (s-z) - y \rangle \leqslant 0, \forall s \in C \\ &\Longleftrightarrow t \in N_{C-z}(y). \end{aligned}$$

(ii) Soit $t \in H$, alors

$$\begin{aligned} t \in N_{-C}(x) &\Longleftrightarrow \langle t, -s-x \rangle \leqslant 0, \forall s \in C \\ &\Longleftrightarrow - \langle t, s-(-x) \rangle \leqslant 0, \forall s \in C \\ &\Longleftrightarrow t \in -N_C(-x). \end{aligned}$$

□

2.2 Semi-continuité de fonctions à valeurs réelles étendues et Fonctions convexes

2.2.1 Semi-continuité de fonctions à valeurs réelles étendues

On appellera ici fonction à valeurs réelles étendues sur un ensemble non vide E toute fonction de E dans $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si E est muni d'une topologie τ et si $f(x_0)$ est fini, i.e. $f(x_0) \in \mathbb{R}$, alors la continuité de f en x_0 revient à dire que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ on ait

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{2.4}$$

En découplant les deux inégalités ci-dessus, on aboutit aux deux concepts de semi-continuité. Observons avant d'énoncer les définitions que pour $f(x_0) = +\infty$ on a $f(x_0) - \varepsilon = f(x_0)$ et donc au lieu de $f(x_0) - \varepsilon$ on est conduit à considérer un réel $r < f(x_0)$ pour la première inégalité. Une remarque similaire est valable pour la seconde inégalité.

Définition 2.2.1 ***(Semi-continuité)***
Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction à valeurs réelles étendues d'un espace topologique dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors on dit que
*1. f est semi-continue inférieurement (**s.c.i** en abrégé) en un point $a \in E$ quand pour tout réel $r < f(a)$ il existe un voisinage V de a dans E tel que pour tout $x \in V$ on ait*

$$f(x) > r.$$

*2. f est semi-continue supérieurement (**s.c.s** en abrégé) en un point $a \in E$ quand pour tout réel $r > f(a)$ il existe un voisinage V de a dans E tel que pour tout $x \in V$ on ait*

$$f(x) < r.$$

3. Si f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en tout point d'un ensemble $A \subset E$ on dit que f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur A. Quand $A = E$, on dit simplement que f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).

Exemple 2.2.1 *Soient E un espace topologique, $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions à valeurs réelles étendues et a un point de E. Alors*
1. Toute fonction réelle étendue continue en a est à la fois semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement en a.
*2. La borne supérieure (resp. La borne inférieure) d'une famille quelconque de fonctions réelles étendues **s.c.i** (resp. **s.c.s**) en un point $a \in E$ est **s.c.i** (resp. **s.c.s**) en a.*
*3. La fonction f est **s.c.s** (resp. **s.c.i**) en a si et seulement si la fonction $(-f)$ est **s.c.i** (resp. **s.c.i**) en a.*
*4. Si f et g sont **s.c.i** (resp. **s.c.s**) en a et si $f + g$ est bien définie sur un voisinage de a, alors $f + g$ est **s.c.i** (resp. **s.c.s**) en a.*
*5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante réelle non nulle. Si f est **s.c.i** en a, alors la fonction αf est **s.c.i** en a pour $\alpha > 0$ et **s.c.s** en a pour $\alpha < 0$.*

À une fonction réelle étendue $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on associe son épigraphe noté *epi*(f) et son hypographe noté *hypo*(f) définis comme sous-ensembles de $E \times \mathbb{R}$. On associe aussi à f et à chaque réel $r \in \mathbb{R}$ les ensembles $\{f \leqslant r\}$ et $\{f \geqslant r\}$ de sous-niveau et sur-niveau r respectivement.

Définition 2.2.2 *Soit E un espace topologique et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction à valeurs réelles étendues. On appelle*
1. Epigraphe de f, noté epi(f) le sous-ensemble de $E \times \mathbb{R}$ défini par

$$epi(f) := \{(x, r) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant r\}.$$

Autrement dit, l'épigraphe est la partie "au-dessus" de la courbe représentative de f.
2. Hypographe de f, noté hypo(f) le sous-ensemble de $E \times \mathbb{R}$ défini par

$$hypo(f) := \{(x, r) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \geqslant r\}.$$

Autrement dit, l'Hypographe est la partie "au-dessous" de la courbe représentative de f.
3. Ensemble de sous-niveau de f, noté $\{f \leqslant r\}$ le sous-ensemble de E défini par

$$\{f \leqslant r\} := \{x \in E : f(x) \leqslant r\}.$$

$\{f \leqslant r\}$ est l'ensemble des points où elle prend une valeur inférieure à un niveau r.
4. Ensemble de sur-niveau de f, noté $\{f \geqslant r\}$ le sous-ensemble de E défini par

$$\{f \geqslant r\} := \{x \in E : f(x) \geqslant r\}.$$

$\{f \geqslant r\}$ est l'ensemble des points où elle prend une valeur supérieure à un niveau r.

Le résultat suivant établit certaines caractérisations alternatives de semicontinuité inférieure et supérieure.

Théorème 2.2.1 *[24] Soit E un espace topologique et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors*
1. Les assertions (a), (b) et (c) suivantes sont deux-à-deux équivalentes :
(a) La fonction f est semi-continue inférieurement.
(b) L'épigraphe epi(f) de f est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.
(c) Pour chaque réel $r \in \mathbb{R}$ le sous-niveau $\{f \leqslant r\}$ est fermé dans E.
2. De même les assertions (a'), (b') et (c') suivantes sont deux-à-deux équivalentes :
(a') La fonction f est semi-continue supérieurement,
(b') L'hypographe hypo(f) de f est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.
(c') Pour chaque réel $r \in \mathbb{R}$ le sur-niveau $\{f \geqslant r\}$ est fermé dans E.

Maintenant on introduit la notion de la limite inférieure (resp. supérieure) pour une suite (ordinaire) de $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 2.2.3 *Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. On définit les limites inférieure et supérieure de $(x_n)_n$ comme suit*

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} x_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geqslant n} x_k \right), \limsup_{n \longrightarrow \infty} x_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geqslant n} x_k \right).$$

Ces deux semi-limites vérifient les inégalités suivantes

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} x_n \leqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n \leqslant \limsup_{n \longrightarrow \infty} x_n.$$

Exemple 2.2.2 *Considérons la suite $(x_n)_n$ définie comme suit*

$$x_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n+1}) = \left\{ 2, \frac{-3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{-5}{4}, \frac{6}{5}, ... \right\}$$

Il est clair que

$$\begin{cases} \inf_n x_n = \min_n x_n = \dfrac{-3}{2} \\ \sup_n x_n = \max_n x_n = 2. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} y_n := \inf_{k \geqslant n} x_k \\ z_n := \sup_{k \geqslant n} x_k. \end{cases}$$

Alors

$$y_0 = \frac{-3}{2}, y_1 = \frac{-3}{2}, y_2 = \frac{-5}{4}, ..., y_n = -\left(1 + \frac{1}{2n}\right),$$

$$z_0 = 2, z_1 = \frac{4}{3}, z_2 = \frac{4}{3}, ..., z_n = 1 + \frac{1}{2n+1}$$

La suite $(y_n)_n$ (resp. $(z_n)_n$) est croissante (resp. décroissante) alors

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geqslant n} x_k \right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} z_n = 1,$$

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geqslant n} x_k \right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = -1.$$

La semi-continuité inférieure (resp. supérieure) peut aussi être caractérisée par la limite inférieure (resp. supérieure) dse fonctions.

Définition 2.2.4 *Soit E un espace topologique et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction à valeurs réelles étendues. Alors*
1. La limite inférieure de f en a est donnée par

$$\liminf_{x \longrightarrow a} f(x) := \sup \inf \{f(V) : V \in \mathcal{V}(a)\} = \sup_{V \in \mathcal{V}(a)} \left(\inf_{x \in V} f(x) \right). \tag{2.5}$$

2. La limite supérieure de f en a est donnée par

$$\limsup_{x \longrightarrow a} f(x) := \inf \sup \{f(V) : V \in \mathcal{V}(a)\} = \inf_{V \in \mathcal{V}(a)} \left(\sup_{x \in V} f(x) \right).$$

où $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a dans E.

Exemple 2.2.3 *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction à valeurs réelles étendues. Alors*

$$\liminf_{x \longrightarrow a} f(x) = \sup_{r>0} \inf \{f(x) : |x - a| < r\}.$$

$$\limsup_{x \longrightarrow a} f(x) = \inf_{r>0} \sup \{f(x) : |x - a| < r\}.$$

On donne maintenant un certain nombre de caractérisations de la semi-continuité inférieure (resp. supérieure).

Proposition 2.2.1 *[27] SoientE un espace topologique, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction à valeurs réelles étendues et $a \in E$. Alors*
(1. Les assertions (a),(b) et (c) suivantes sont deux-à-deux équivalentes :
*(a) La fonction f est **sci** en a,*
(b) $f(a) \leqslant \liminf\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$,
(c) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergeant vers a dans E on a $f(a) \leqslant \liminf\limits_{n \longrightarrow \infty} f(x_n)$.
2. De même les assertions (a'),(b') et (c') suivantes sont deux-à-deux équivalentes :
*(a') La fonction f est **scs** en a,*
(b') $\limsup\limits_{x \longrightarrow a} f(x) \leqslant f(a)$,
(c') Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergeant vers a dans E on a $\limsup\limits_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) \leqslant f(a)$.

2.2.2 Fonctions convexes

Une différence importante par rapport aux sections précédentes est qu'on autorise ici les fonctions à valeur $+\infty$ (mais pas $-\infty$). Ainsi les fonctions considérées dans cette partie seront de la forme $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 2.2.5
1. Soit E est un espace vectoriel, le domaine effectif (ou simplement domaine) d'une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur $+\infty$. On le note

$$dom(f) := \{x \in E : f(x) < +\infty\}.$$

2. Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est propre si son domaine effectif est non vide.

Définition 2.2.6 *Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite convexe si pour tous x, y dans E avec $f(x) < +\infty$, $f(y) < +\infty$ et tout $\alpha \in [0, 1]$, on a*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \tag{2.6}$$

De manière équivalente, $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite convexe si et seulement si son épigraphe $epi(f)$ est convexe.

Remarque 2.2.1 *Une fonction identiquement égale à $+\infty$ est convexe et vérifie l'inégalité (2.6), mais présente peu d'intérêt. Autrement dit*

$$f \equiv +\infty \Longleftrightarrow epi(f) = \phi \Longleftrightarrow dom(f) = \phi.$$

Exemple 2.2.4
1. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions convexes de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors la fonction $f := \sup\limits_{i\in I} f_i$ est également convexe.
2. Si f et g sont des fonctions convexes de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et α, β des réels positifs, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est convexe.
3. Si $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe alors ses ensembles de niveaux $\{f \leqslant r\}$ sont convexes.
4. Toute application de la forme $x \in E \longmapsto \langle x', x\rangle + a$ avec $x' \in E'$ et $a \in \mathbb{R}$ est convexe. Ce sont les fonctions affines à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.2 *[5]Soit E un espace normé, et soit C un sous-ensemble fermé non vide de E. Alors la fonction distance $d(\cdot, C)$ est convexe si et seulement si C est convexe.*

Fonction indicatrice

Les fonctions d'indicatrices jouent un rôle fondamental dans l'analyse convexe similaire au rôle des fonctions caractéristiques des ensembles dans d'autres branches d'analyse.

Définition 2.2.7 *Soit C un sous-ensemble d'un espace vectoriel E.*
1. On appelle fonction indicatrice de C, notée ψ_C, la fonction définie par

$$\begin{array}{rcll} \psi_C(\cdot): & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & x & \longmapsto & \psi_C(x) := \begin{cases} 0, & si\ x \in C \\ +\infty, & si\ x \notin C. \end{cases} \end{array}$$

2. On voit facilement que $dom(\psi_C) = C$.
3. Il est clair que

$$epi(\psi_C) = C \times [0, +\infty[\,.$$

Proposition 2.2.3 *[28]Soit C un sous-ensemble d'un espace vectoriel E. Alors*
(i) La fonction indicatrice $\psi_C(\cdot)$ est propre si et seulement si C est non vide.
(ii) La fonction indicatrice $\psi_C(\cdot)$ est convexe si et seulement si C est convexe.
(iii) Si E est un espace normé, alors $\psi_C(\cdot)$ est ***s.c.i.*** *si et seulement si C est fermé.*

Preuve. Montrons la propriété (iii).Soit $(x'_n)_n$ une suite de E' convergeant dans E' vers $x' \in E'$, alors

$$\forall y \in E : \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x'_n, y \rangle = \langle x', y \rangle\,.$$

Montrons que

$$\sigma_C(x') \leqslant \liminf_{n \longrightarrow \infty} \sigma_C(x'_n).$$

D'après la définition $\sigma_C(\cdot)$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in C : \langle x', z \rangle \geqslant \sigma_C(x') - \varepsilon,$$

de plus

$$\langle x', z \rangle \leqslant \sigma_C(x').$$

Ce qui donne

$$\langle x', z \rangle \leqslant \sigma_C(x') \leqslant \langle x', z \rangle + \varepsilon. \tag{2.7}$$

Par ailleurs

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x'_n, z \rangle = \langle x', z \rangle = \liminf_{n \longrightarrow \infty} \langle x'_n, z \rangle$$

On obtient

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} \sigma_C(x'_n) \geqslant \liminf_{n \longrightarrow \infty} \langle x'_n, z \rangle = \langle x', z \rangle \geqslant \sigma_C(x') - \varepsilon.$$

Puisque cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on voit que

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} \sigma_C(x'_n) \geqslant \sigma_C(x').$$

En conséquence, on a $\sigma_C(.)$ est semi-continue inférieurement. □

Fonction support

Une autre fonction importante associée à C est la fonction support.

Définition 2.2.8 *Soient E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique. Soit C un sous-ensemble non vide de E. On appelle fonction support de C, notée $\sigma_C(\cdot)$ la fonction définie sur E' par*

$$\begin{array}{rccl} \sigma_C(\cdot): & E' & \longrightarrow & \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ & x' & \longmapsto & \sigma_C(x') := \sup\limits_{x\in C}\langle x', x\rangle. \end{array}$$

Remarque 2.2.2
1. Il est évident que cette fonction prend la valeur $-\infty$ lorsque le sup est pris sur un ensemble vide. On peut donc considérer que $\sigma_C(\cdot) \equiv -\infty$.
2. Par définition de la fonction support, si $x \in C$ alors

$$\forall x' \in E' : \langle x', x\rangle \leqslant \sigma_C(x').$$

3. Si $C = \{x\}$, alors

$$\forall x' \in E' : \sigma_C(x') = \langle x', x\rangle.$$

La proposition suivante résume quelques propriétés élémentaires de la fonction support. Sa preuve est standard et peut être trouvée, par exemple, dans [13].

Proposition 2.2.4 *La fonction support possède les propriétés suivantes :*
1. La fonction support est positivement homogène de degré 1, c'est-à-dire que

$$\forall x' \in E', \forall\alpha > 0 : \sigma_C(\alpha x') = \alpha\sigma_C(x').$$

2. La fonction support est sous-additive, c'est-à-dire que

$$\forall x', y' \in E' : \sigma_C(x' + y') \leqslant \sigma_C(x') + \sigma_C(y').$$

3. Si C_1, C_2 deux sous-ensembles de E, alors

$$\begin{cases} (i)\forall x' \in E' : \sigma_{C_1+C_2}(x') = \sigma_{C_1}(x') + \sigma_{C_2}(x'), \\ (ii)\forall x' \in E', \forall\alpha > 0 : \sigma_{\alpha C_1}(x') = \alpha\sigma_{C_1}(x'). \end{cases}$$

4. Pour tout sous-ensemble non vide C de E, la fonction $\sigma_C(\cdot)$ est convexe et semi-continue inférieurement.

Sous-différentiel des fonctions convexes

La notion de dérivée est fondamentale en analyse car elle permet d'approcher localement des fonctions par des modèles linéaires, plus simples à étudier. On rencontre beaucoup de fonctions convexes qui ne sont pas différentiables au sens classique. Pour celles-ci, on dispose toutefois de la notion de sous-différentiel. Le sous-différentiel d'une fonction convexe est un outil fondamental en analyse convexe. Il joue aussi un rôle crucial en optimisation convexe, en particulier dans les algorithmes de sous-gradients pour minimiser des fonctions convexes non différentiables. Il généralise la notion de dérivée à des fonctions qui ne sont pas nécessairement différentiables.

Soit H un espace de Hilbert, plusieurs fonctions convexes f finies en $x_0 \in dom(f)$ et ne sont pas différentiables en ce point admettent des éléments $s \in H$ satisfont

$$\langle s, x - x_0 \rangle \leqslant f(x) - f(x_0), \forall x \in H. \tag{2.8}$$

Par exemple, la fonction convexe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = |x|$ n'est pas différentiable en 0 mais tous les $s \in [-1, 1]$ vérifient (2.8) pour $x_0 = 0$. D'autre part, il est clair que f atteint son minimum en x_0 si et seulement si l'élément $s = 0$ vérifie l'inégalité (2.8).

Définition 2.2.9 *Soit H un espace de Hilbert et soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et finie en $x_0 \in H$ ($x_0 \in dom(f)$).*
1. On définit le sous-différentiel de f (au sens d'analyse convexe) au point x_0 noté $\partial f(x_0)$ comme le sous ensemble de H donné par

$$\partial f(x_0) := \{s \in H : \langle s, x - x_0 \rangle \leqslant f(x) - f(x_0), \forall x \in H\}. \tag{2.9}$$

2. Les éléments de $\partial f(x_0)$ sont appelés sous-gradients de f en x_0.
3. On dit que f est sous-différentiable en $x_0 \in H$ si $\partial f(x_0) \neq \phi$. Par convention, $\partial f(x_0) = \phi$ si $x_0 \notin dom(f)$.

Remarque 2.2.3 *1. $\partial f(\cdot)$ est une application multivoque, $\partial f(\cdot) : H \rightrightarrows H$. Le domaine de l'opérateur $\partial f(\cdot)$ est défini par*

$$dom(\partial f(\cdot)) = \{x \in H : \partial f(x) \neq \phi\}.$$

Il est clair que $dom(\partial f(\cdot)) \subset dom(f)$.
2. Le sous-différentiel d'une fonction convexe peut être un ensemble non vide même si la fonction n'est pas différentiable en x_0. Cependant, si f est différentiable en x_0, alors f est sous-différentiable en x_0 et $\partial f(x_0)$ se réduit simplement à l'ensemble contenant le gradient de f en x_0, i.e, $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
3. On peut interpréter géométriquement cette définition de la façon suivante :
La définition (2.2.9) exprime que la fonction affine continue notée g_{s,x_0} définie par

$$g_{s,x_0}(x) := \langle s, x - x_0 \rangle + f(x_0) = \langle s, x \rangle + (f(x_0) - \langle s, x_0 \rangle), x \in H,$$

de pente s, minore f sur H, i.e.

$$g_{s,x_0}(x) \leqslant f(x),$$

et coïncide avec elle en x_0, i.e.

$$g_{s,x_0}(x_0) = f(x_0).$$

En termes simples, cela signifie que le sous-différentiel d'une fonction convexe fournit une description de toutes les pentes possibles sous la courbe de la fonction à un point donné.

Exemple 2.2.5 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = |x|$. Calculons les sous-gradients de f en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.*
Si $x_0 = 0$, alors

$$\partial f(0) = [-1, 1].$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} s \in \partial f(0) &\Longleftrightarrow \langle s, x \rangle \leqslant f(x) - f(0), \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow s.x \leqslant |x|, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} s.x \leqslant x, \ si\ x \geqslant 0 \\ \quad et \\ s.x \leqslant -x, \ si\ x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x(s-1) \leqslant 0, \ \ si \ x \geqslant 0 \\ \qquad et \\ x(s+1) \leqslant 0, \ \ si \ x < 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} s \leqslant 1, \ \ si \ x \geqslant 0 \\ \qquad et \\ s \geqslant -1, \ \ si \ x < 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow s \in [-1,1]\,,$$

On obtient

$$s \in \partial f(0) = [-1,1]\,.$$

Par conséquent, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\partial f(x_0) = \begin{cases} [-1,1]\,, \ si \ x_0 = 0 \\ \{1\}\,, \ si \ x_0 > 0 \\ \{-1\}\,, \ si \ x_0 < 0. \end{cases}$$

Citons quelques propriétés fondamentales du sous-différentiel.

Proposition 2.2.5 *[7]Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre et convexe.*
1. Pour tout $x_0 \in dom(f)$, l'ensemble $\partial f(x_0)$ est un sous-ensemble convexe fermé de H.
2. Soit $\alpha > 0$, alors pour tout $x_0 \in dom(f)$, on a

$$\partial\left(\alpha f\right)(x_0) = \alpha\partial f(x_0).$$

Preuve.
1. Montrons la convexité de $\partial f(x_0)$ pour tout $x_0 \in dom(f)$. Soient $s_1, s_2 \in \partial f(x_0)$ et $\alpha \in [0,1]$, alors pour tout $x \in H$, on a

$$\langle s_1, x - x_0\rangle \leqslant f(x) - f(x_0), \tag{2.10}$$

et

$$\langle s_2, x - x_0\rangle \leqslant f(x) - f(x_0). \tag{2.11}$$

Par suite

$$\langle \alpha s_1 + (1-\alpha)\, s_2, x - x_0\rangle = \alpha \langle s_1, x - x_0\rangle + (1-\alpha)\langle s_2, x - x_0\rangle\,.$$

Les relations (2.10) , (2.11) impliquent

$$\langle \alpha s_1 + (1-\alpha)\, s_2, x - x_0\rangle \leqslant \alpha\left(f(x) - f(x_0)\right) + (1-\alpha)\left(f(x) - f(x_0)\right).$$

Ce qui donne

$$\langle \alpha s_1 + (1-\alpha)\, s_2, x - x_0\rangle \leqslant f(x) - f(x_0).$$

Ce qui implique

$$\alpha s_1 + (1-\alpha)\, s_2 \in \partial f(x_0).$$

Cela prouve la convexité de $\partial f(x_0)$.
Maintenant montrons que $\partial f(x_0)$ est fermé. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\partial f(x_0)$ telle que (s_n) converge vers $s \in H$ quand n tend vers $+\infty$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n \in \partial f(x_0) \Longleftrightarrow \langle s_n, x - x_0\rangle \leqslant f(x) - f(x_0), \forall x \in H.$$

En prenant la limite comme $n \longrightarrow +\infty$, l'inégalité ci-dessus conduit à

$$\langle s, x - x_0\rangle \leqslant f(x) - f(x_0), \forall x \in H.$$

Il s'ensuit que $s \in \partial f(x_0)$. Donc $\partial f(x_0)$ est un sous-ensemble fermé de H.
2. Soient $x_0 \in dom(f), s' \in H$, alors

$$s' \in \alpha\partial f(x_0) \Longleftrightarrow \frac{1}{\alpha}s' \in \partial f(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \left\langle \frac{1}{\alpha}s', x - x_0 \right\rangle \leqslant f(x) - f(x_0), \forall x \in H$$

$$\Longleftrightarrow \langle s', x - x_0 \rangle \leqslant \alpha f(x) - \alpha f(x_0), \forall x \in H$$

$$\Longleftrightarrow \langle s', x - x_0 \rangle \leqslant (\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0), \forall x \in H$$

$$\Longleftrightarrow s' \in \partial(\alpha f)(x_0).$$

Donc $\partial(\alpha f)(x_0) = \alpha\partial f(x_0)$. □

Une autre interprétation géométrique du sous-différentiel d'une fonction peut être donnée en termes de cône normal à son épigraphe.

Théorème 2.2.2 *[7]Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre et convexe. Soient $x_0 \in dom(f)$ et $s \in H$. Alors*

$$s \in \partial f(x_0) \Longleftrightarrow (s, -1) \in N_{epi(f)}(x_0, f(x_0)). \tag{2.12}$$

Exemple 2.2.6 *Sous-différentiel de la fonction de valeur absolue à l'origine.*

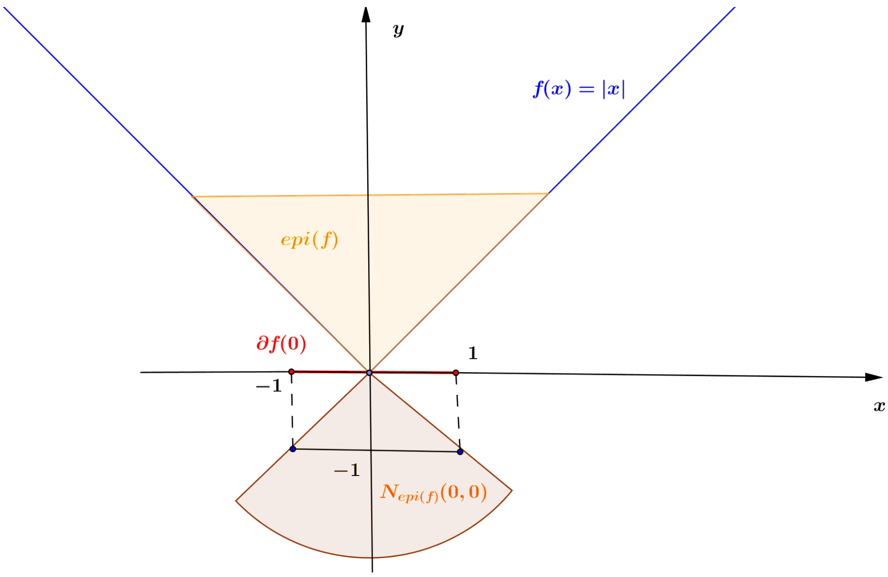

FIGURE 2.3 – Sous-différentiel de valeur absolue via le cone normal à l'épigraphe.

On peut exprimer le cône normal à un ensemble via le sous-différentiel de la fonction indicatrice. Le résultat suivant est fondamental pour notre étude et qui permet de calculer le sous-différentiel de la fonction indicatrice.

Proposition 2.2.6 *Soient C un sous-ensemble convexe non vide de H et $x \in C$. Alors, le sous-différentiel de la fonction indicatrice $\psi_C(\cdot)$ coïncide avec le cône normal $N_C(\cdot)$, c'est-à-dire*

$$\partial\psi_C(x) = N_C(x).$$

Preuve. Il est clair que $dom(\psi_C(\cdot)) = C$. D'autre part, on sait que $N_C(x) \neq \phi$ si $x \in C$.
Soit $x \in C$, alors

$$\begin{aligned} s \in \partial\psi_C(x) &\Longleftrightarrow \langle s, y - x\rangle \leqslant \psi_C(y) - \psi_C(x) = 0, \forall y \in C \\ &\Longleftrightarrow \langle s, y - x\rangle \leqslant 0, \forall y \in C \\ &\Longleftrightarrow s \in N_C(x). \end{aligned}$$

Si $x \notin C$, alors

$$N_C(x) = \phi = \partial\psi_C(x).$$

□

Théorème 2.2.3 *[7]Soient C un sous-ensemble convexe fermé non vide de H et $x \in C$. Alors*

$$\partial d_C(x) = N_C(x) \cap \mathbb{B}.$$

2.3 Opérateurs maximaux monotones

Les opérateurs monotones jouent un rôle fondamental dans l'optimisation et les inégalités variationnelles. Une classe particulièrement importante d'opérateurs monotones est la classe des opérateurs monotones maximaux, qui représentent une extension naturelle des sous-différentielles des fonctions convexes. Nous rappelons dans ce paragraphe quelques notions et résultats concernant les opérateurs maximaux monotones multivoques.

Définition 2.3.1 *Soit H un espace de Hilbert muni de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme $\|\cdot\|$.*
1. L'opérateur $A : H \longrightarrow H$ est dit multivoque s'il est définit de H dans $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble des parties de H et on écrit $A : H \rightrightarrows H$ et le domaine (resp. image) de A est l'ensemble

$$D(A) := \{x \in H : Ax \neq \phi\} \ \textit{(resp. } R(A) := \underset{x\in H}{\cup} Ax\textit{)}.$$

On identifiera l'opérateur multivoque avec son graphe dans $H \times H$ défini par

$$gph(A) := \{(x, y) \in H \times H : y \in Ax\}.$$

2. Si pour tout $x \in H$, l'ensemble Ax contient au plus un élément on dira que A est univoque.

Exemple 2.3.1
1. Soit C un sous-ensemble convexe de H, alors l'opérateur cône normal $A = N_C(\cdot)$ associé à C est multivoque.
2. Pour toute fonction convexe $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, l'opérateur sous-différentiel $A = \partial f(\cdot)$ est multivoque.

Définition 2.3.2 *Soient $A, B : H \rightrightarrows H$ des opérateurs multivoques, et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors*
1. L'opérateur inverse de A, noté A^{-1} est l'opérateur dont le graphe est symétrique de celui de A, i.e.

$$x \in A^{-1}y \Longleftrightarrow y \in Ax.$$

Il est défini sur $R(A)$ *et d'image* $D(A)$.
2. L'opérateur $\alpha A + \beta B$ *est défini par*

$$\begin{array}{rccl} \alpha A + \beta B : & H & \rightrightarrows & H \\ & x & \longmapsto & (\alpha A + \beta B)(x) := \{\alpha y_1 + \beta y_2 : y_1 \in Ax, y_2 \in Bx\}, \end{array}$$

avec

$$D(\alpha A + \beta B) = D(A) \cap D(B).$$

Définition 2.3.3 *Soit* $A : H \rightrightarrows H$ *un opérateur multivoque. Alors*
(1. On dit que A *est monotone si pour tous* $x_1, x_2 \in D(A)$, *on*

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0.$$

On écrit également

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in gph(A) : \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0.$$

Ou plus précisément,

$$\forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2 : \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0.$$

2. A *est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones. Ou d'une manière équivalente,* A *est monotone maximal si* A *est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone* $B : H \rightrightarrows H$ *autre que* A *tel que* $gph(A)$ *soit inclus dans* $gph(B)$.

Remarque 2.3.1 *L'ensemble des opérateurs multivoques est ordonné par l'inclusion des graphes*

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in H : Ax \subset Bx.$$

Exemple 2.3.2 *Soit* $A : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *un opérateur multivoque défini comme suit*

$$A(x) := \begin{cases} \{1\}, & si\ x > 1 \\ \{0\}, & si\ x < 1 \\ S \subset [0,1], & si\ x = 1. \end{cases}$$

Alors, A *est maximal monotone si et seulement si* $A(1) = [0, 1]$.

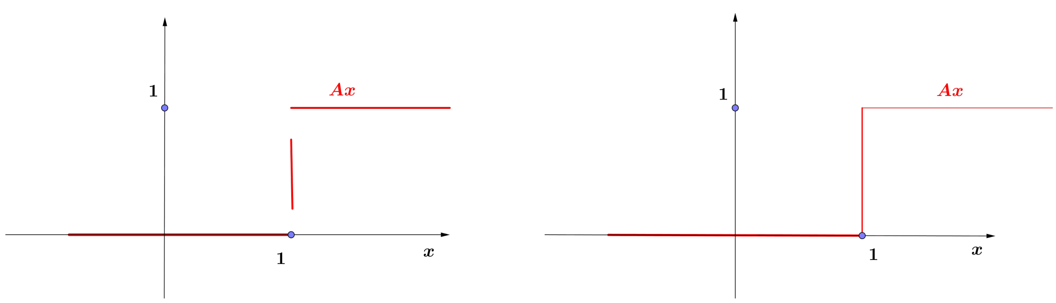

FIGURE 2.4 – Opérateur maximal monotone

Exemple 2.3.3
1. Soient A, B deux opérateurs monotones, alors les opérateurs $A^{-1}, A+B$ et $\alpha A, \alpha \geqslant 0$ sont monotones.
2. Soit C un sous-ensemble convexe de H, alors l'opérateur cône normal $N_C(\cdot)$ est monotone.
3. Pour toute fonction convexe $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, l'opérateur sous-différentiel $\partial f(\cdot)$ est monotone.

Un cas particulier et très important d'opérateurs maximaux monotones est donné par le sous-différentiel.

Théorème 2.3.1 *[26]Soit H un espace de Hilbert. Alors le sous-différence $\partial f(\cdot)$ d'une fonction convexe propre et semi-continue inférieurement $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\}$ est un opérateur maximal monotone.*

Corollaire 2.3.1 *Soit H un espace de Hilbert. Pour tout sous-ensemble convexe fermé non vide C de H, l'opérateur cône normal $N_C(\cdot)$ est un opérateur maximal monotone.*

Preuve. On sait que, pour tout sous-ensemble convexe fermé non vide C de H on a

$$N_C(\cdot) = \partial \psi_C(\cdot)$$

D'autre part, on a d'après la proposition (2.2.3), $\psi_C(\cdot)$ est semi-continue inférieurement car C est fermé. Alors on applique le théorème (2.3.1) précédent, on obtient que $N_C(\cdot)$ est maximal monotone. □

2.4 Autres résultats principaux et définitions

Dans ce qui suit, on utilisera les résultats suivants.

Définition 2.4.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors on désigne par $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable sur Ω, i.e,*

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, alors on définit

$$L^\infty(\Omega, \mathbb{R}) := \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et, } \exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| < c \text{ presque partout sur } \Omega \}$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ c > 0 : \ |f(x)| < c \text{ presque partout sur } \Omega \}$$

Définition 2.4.2 *Soit $x(\cdot)$ une application définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$. On dit que $x(\cdot)$ est absolument continue sur $[\alpha, \beta] \subset I$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour tout $s_i, t_i \in [\alpha, \beta]\,, i = 1, ..., k$, avec $s_{i-1} \leqslant r_i \leqslant s_i$ et $\sum_{i=1}^{k}(s_i - r_i) < \delta$, on a*

$$\sum_{i=1}^{k} \|x(s_i) - x(r_i)\| < \varepsilon.$$

La fonction $x(\cdot)$ est dite localement absolument continue sur I si sa restriction à tout intervalle $[\alpha, \beta]$ est absolument continue.

Il s'ensuit que toute application Lipschitzienne (resp. absolument continue) est absolument continue (resp : uniformément continue).

Théorème 2.4.1 *[11]*
(a) Soit $x(\cdot) : I \longrightarrow H$ une application telle que

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)ds, v(.) \in L^1(I, H) \text{ et } t_0, t \in I,$$

alors $x(\cdot)$ est absolument continue sur I et $\dot{x}(t) = v(t)$ pour presque tout $t \in I$.
(b) Etant donné une application absolument continue $x(\cdot) : I \longrightarrow H$, alors il existe une application $v(\cdot) : I \longrightarrow H$ telle que pour tout $t_0, t \in I$,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)ds.$$

De plus, $x(\cdot)$ est presque partout dérivable et $\dot{x}(t) = v(t)$.

Lemme 2.4.1 *[17]Soit $x(\cdot) : [0, T] \longrightarrow H$ une fonction absolument continue. Alors*

$$\int_0^T \langle \dot{x}(t), x(t) \rangle dt = \frac{1}{2}\left(\|x(T)\|^2 - \|x(0)\|^2\right).$$

Pour $s(t) := \|x(t)\|^2$, alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s(t) = \langle \dot{x}(t), x(t) \rangle.$$

Le résultat suivant est fondamental pour notre étude.

Corollaire 2.4.1 *[14] Soit $x(\cdot) : [0, T] \longrightarrow H$ une fonction absolument continue. Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire, borné et symétrique. Alors pour presque tout $t \in [0, T]$, on a*

$$\frac{d}{dt}\langle x(t), Ax(t) \rangle = 2\langle \dot{x}(t), Ax(t) \rangle.$$

Définition 2.4.3 ***(Mouvement des Ensembles)***
Soit H un espace de Hilbert. On considère l'application multivoque $C(\cdot)$ de $I = [0,T]$ dans H. Soit $t \in [0,T]$, alors on dit que
1. Les ensembles $(C(t))_t$ varient (ou bougent) d'une façon absolument continue par rapport à la distance de Hausdorff s'il existe une fonction absolument continue $v(\cdot) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in H$ et pour tous $s,t \in I$,

$$|d(x,C(t) - d(x,C(s)| \leqslant |v(t) - v(s)|\,. \tag{2.13}$$

2. Les ensembles $(C(t))_t$ varient (ou bougent) d'une façon Lipschitzienne par rapport à la distance de Hausdorff s'il existe une constante réelle $L > 0$ telle que, pour tous $s,t \in [0,T]$,

$$|d(x,C(t) - d(x,C(s)| \leqslant L\,|t - s|\,. \tag{2.14}$$

Chapitre 3

Étude d'une inclusion différentielle perturbée

Ce chapitre s'intéresse principalement à démontrer le caractère bien posé (l'existence et l'unicité) du processus de rafle dégénéré perturbé donnée par l'inclusion différentielle suivante

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t) \text{ p.p } \ t \in [0,T], \\ \\ x(0) = x_0, Ax_0 \in C(0). \end{cases} \tag{3.1}$$

dont la perturbation $f : [0,T] \longrightarrow H$ est une application univoque de $L^1([0,T], H)$. Pour ce faire, nous allons considérer la liste des hypothèses suivante :

- **Hypothèses sur l'opérateur** A.

$(\mathcal{H}_A)$ $A : H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire, borné et symétrique et $\beta-$coercif, c'est-à-dire

$$\langle Ax, x \rangle \geqslant \beta. \|x\|^2, \forall x \in H.$$

- **Hypothèses sur la fonction multivoque** $C(\cdot)$.

$(\mathcal{H}_1)$ Pour tout $t \in [0,T]$, $(C(t))_t$ sont des sous ensembles non vides convexes et fermés de H.

$(\mathcal{H}_2)$ $C(t)$ varie d'une façon absolument continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction absolument continue $v(\cdot) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in H$ et pour tous $s, t \in I$, on ait

$$|d(x, C(t)) - d(x, C(s))| \leqslant |v(t) - v(s)|.$$

Ce chapitre comporte deux sections, dans la première section de ce chapitre, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution absolument continue du problème (3.1) sans perturbation. En utilisant ce résultat, nous présentons, dans la deuxième section, l'existence de solution absolument continue pour l'inclusion d'évolution (3.1) (avec parturbation).

3.1 Processus de Rafle dégénéré sans perturbation

Le cas sans perturbation $(f \not\equiv 0)$ est traité par M. Kunze et M.D.P Monteiro Marques dans ([16]) le problème considéré est

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) \text{ p.p } \ t \in [0,T], \\ \\ x(0) = x_0, Ax_0 \in C(0). \end{cases} \tag{3.2}$$

Ce problème est connu sous le nom "le processus de Rafle dégénéré" (En anglais : Degenerate sweeping process) qui correspond au cas où un opérateur linéaire ou non linéaire est ajouté « à l'intérieur » du cône normal dans le processus de Rafle. Dans le cas du "processus de rafle dégénéré", la présence d'un opérateur linéaire et d'un opérateur non linéaire à l'intérieur du cône normal ajoute une complexité supplémentaire au processus. Cela peut conduire à des comportements dynamiques intéressants et souvent plus réalistes pour modéliser des systèmes réels. Ce type de processus est étudié dans divers domaines, notamment en théorie du contrôle, en économie mathématique et en physique statistique.

Le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (3.2) a été établi par Kunze et Monteiro Marques [16], en supposant que le mouvement des ensembles $(C(t))_t$ a un comportement Lipschitzien par rapport à la distance de Hausdorff. Dans une telle situation la solution est Lipschitzienne. Dans le cas non convexe, précisément lorsque les ensembles $(C(t))_t$ sont prox-réguliers, une version récente de tel problème a été étudiée dans[2] où les auteurs ont prouvé le caractère bien posé de ce problème en utilisant la réduction de la l'inclusion différentielle avec contrainte à l'inclusion différentielle sans contrainte gouvernée par le sous-différentiel de la fonction distance dans un espace Hilbertien de dimension finie.

Soit H un espace de Hilbert et $T > 0$ un nombre réel positif. Soit $C(\cdot) : [0,T] \rightrightarrows H$ une application multivoque à valeurs non vides fermées et convexes de H. Supposons que $t \longrightarrow C(t)$ varie d'une façon Lipschitzienne en fonction du temps, avec L comme constante de Lipschitz,. C'est-à- dire :

(H_C) Il existe une constante réelle $L > 0$ telle que pour tout $x \in H$,

$$\forall x \in H, \forall s,t \in [0,T] : |d(x,C(t)) - d(x,C(s))| \leqslant L.\,|t-s|\,,$$

pour tous $s,t \in [0,T]$. Kunze et Monteiro Marques ont prouvé le résultat d'existence suivant pour le processus de Rafle dégénéré.

Théorème 3.1.1 *[16]Soit H un espace de Hilbert réel. Soit $T > 0$ un nombre réel positif. Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire borné et auto-adjoint tel que $\langle Ax, x\rangle \geqslant \beta.\,\|x\|^2$ pour tout $x \in H$. Si (H_C) est vérifiée pour $C(\cdot)$, alors pour toute valeur initiale $u_0 \in H$ telle que $Au_0 \in C(0)$, alors l'inclusion différentielle suivante*

$$(DS) : \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(Au(t)) \ p.p. \quad [0,T] \\ \\ u(0) = u_0, Au_0 \in C(0), \end{cases}$$

admet une solution unique et cette solution est Lipschitzienne.

Le résultat suivant généralise le théorème (3.1.1) de Kunze et Monteiro Marques aux ensembles $(C(t))_t$ qui varient d'une manière absolument continue par rapport à la distance de Hausdorff. Avant d'énoncer ce résultat, faisons les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{H}_A)$ $A : H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire, borné et symétrique et $\beta-$coercif, c'est-à-dire qu'il existe $\beta > 0$ tels que

$$\langle Ax, x\rangle \geqslant \beta.\,\|x\|^2\,, \forall x \in H.$$

$(\mathcal{H}_1)$ Pour tout $t \in [0,T]$, $C(t)$ sont des sous ensembles non vides convexes et fermés de H. $(\mathcal{H}_2)$ Il existe une fonction absolument continue non négative $v(\cdot) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ avec $v(0) = 0$ telle que

$$\forall x \in H, \forall s,t \in [0,T] : |d(x,C(t)) - d(x,C(s))| \leqslant |v(t) - v(s)|\,. \tag{3.3}$$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant.

Théorème 3.1.2 *[14] Soit H un espace de Hilbert réel avec $\langle\cdot,\cdot\rangle$ comme un produit scalaire. Soit $T > 0$ un nombre réel positif et $C(\cdot) : [0,T] \rightrightarrows H$ une application multivoque. Supposons, que les hypothèses $(\mathcal{H}_A)$, $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ soient vérifiées. Alors pour toute valeur initiale $u_0 \in H$ telle que $Au_0 \in C(0)$ l'inclusion différentielle*

$$(DS) : \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(A\,(u(t)))\ p.p\ \ t \in [0,T]\,, \\ \\ u(0) = u_0, Au_0 \in C(0). \end{cases}$$

admet une solution unique absolument continue. De plus, pour presque tout $t \in [0,T]$ la solution vérifie l'inégalité suivante

$$\|\dot{u}(t)\| \leqslant \frac{1}{\beta}\,|\dot{v}(t)|\,. \tag{3.4}$$

Preuve. La preuve du théorème sera établie à travers plusieurs étapes.
Étape 1 : Soit

$$v(\cdot) : I = [0,T] \longrightarrow \mathbb{R},$$

une fonction absolument continue satisfaisant (3.3). Soit $\varepsilon > 0$ fixé dans $\mathbb{R}$, on considère la fonction

$$v_\varepsilon(\cdot) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R},$$

définie par

$$v_\varepsilon(t) := \int_0^t (|\dot{v}(r)| + \varepsilon)\, dr. \tag{3.5}$$

Il est clair que

$$v_\varepsilon(0) = 0.$$

On observe ensuite que $v_\varepsilon(\cdot)$ vérifie l'inégalité (3.3). En effet, On a

$$v_\varepsilon(t) := \int_0^t (|\dot{v}(r)| + \varepsilon)\, dr = \int_0^t |\dot{v}(r)|\, dr + \varepsilon t.$$

Donc pour tout $t, s \in I, (t \geqslant s)$, on a

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(s)| &= \left|\left(\int_0^t |\dot{v}(r)|\, dr + \varepsilon t\right) - \left(\int_0^s |\dot{v}(r)|\, dr + \varepsilon t\right)\right| \\ &= \left|\int_0^t |\dot{v}(r)|\, dr + \int_s^0 |\dot{v}(r)|\, dr + \varepsilon\,(t-s)\right| \\ &= \left|\int_s^t |\dot{v}(r)|\, dr + \varepsilon\,(t-s)\right|. \end{aligned}$$

Or

$$\varepsilon\,(t-s) \geqslant 0.$$

Alors

$$|v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(s)| \geqslant \int_s^t |\dot{v}(r)|\, dr \geqslant \left|\int_s^t \dot{v}(r) dr\right|.$$

Ce qui implique

$$|v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(s)| \geqslant |v(t) - v(s)|\,.$$

Or $v(\cdot)$ vérifie (3.3), alors on a

$$|v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(s)| \geqslant |d(x, C(t)) - d(x, C(s))|\,.$$

Autrement dit $v_\varepsilon(\cdot)$ est absolument continue. De plus

$$\dot{v}_\varepsilon(t) \geqslant \varepsilon > 0. \tag{3.6}$$

Par (3.6), nous avons $v_\varepsilon(\cdot)$ est strictement croissante. Il existe donc un inverse continu et croissant

$$v_\varepsilon^{-1}(\cdot) : \left[0, \hat{T}\right] \longrightarrow [0, T],$$

Telle que

$$\hat{T} := v_\varepsilon(T). \tag{3.7}$$

Par ailleurs, nous avons $v_\varepsilon^{-1}(\cdot)$ est ε^{-1}−Lipschitzienne sur $\left[0, \hat{T}\right]$. En effet, soient $\hat{s}, \hat{t} \in \left[0, \hat{T}\right]$ avec $\hat{s} \leqslant \hat{t}$ telles que

$$\begin{cases} \hat{s} = v_\varepsilon(s), s \in [0, T], \\ \\ \hat{t} = v_\varepsilon(t), t \in [0, T]. \end{cases}$$

Alors,

$$\left|v_\varepsilon^{-1}(\hat{t}) - v_\varepsilon^{-1}(\hat{s})\right| = |t - s| = t - s.$$

À partir de (3.6), il s'ensuit que

$$\varepsilon(t - s) = \int_s^t \varepsilon dr \leqslant \int_s^t \dot{v}_s(r) dr = v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(s).$$

Cela implique

$$|t - s| \leqslant \varepsilon^{-1} |v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(s)|.$$

On obtient

$$\left|v_\varepsilon^{-1}(\hat{t}) - v_\varepsilon^{-1}(\hat{s})\right| \leqslant \varepsilon^{-1} \left|\hat{t} - \hat{s}\right|.$$

Étape 2 : Considérons maintenant l'application multivoque

$$\widehat{C}(\cdot) : \left[0, \hat{T}\right] \rightrightarrows H, \tag{3.8}$$

définie pour tout $\tau \in \left[0, \hat{T}\right]$ par

$$\widehat{C}(\tau) := C(v_\varepsilon^{-1}(\tau)). \tag{3.9}$$

L'application multivoque $\widehat{C}(\cdot)$ est 1−Lipschitzienne. En effet, soient $x \in H, \tau_1, \tau_2 \in \left[0, \hat{T}\right]$, alors

$$\left|d(x, \widehat{C}(\tau_1)) - d(x, \widehat{C}(\tau_2))\right| = \left|d(x, C(v_\varepsilon^{-1}(\tau_1))) - d(x, C(v_\varepsilon^{-1}(\tau_2)))\right| \leqslant \left|v_\varepsilon(v_\varepsilon^{-1}(\tau_1)) - v_\varepsilon(v_\varepsilon^{-1}(\tau_2))\right|.$$

Cela donne

$$\left|d(x, \widehat{C}(\tau_1)) - d(x, \widehat{C}(\tau_2))\right| \leqslant |\tau_1 - \tau_2|.$$

De plus, on remarque que

$$\begin{cases} C(0) = C(v_\varepsilon^{-1}(0)) = C(0), \\ \\ Au_0 \in \widehat{C}(0) = C(0). \end{cases} \tag{3.10}$$

D'après théorème (3.1.1), l'inclusion différentielle associée $\left(\widehat{DS}\right)$ avec $\widehat{C}(\cdot)$ à la place de $C(\cdot)$ suivante

$$\left(\widehat{DS}\right) : \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{\widehat{C}(t)}(A\left(u(t)\right)) \text{ p.p. } \; t \in \left[0, \hat{T}\right] \\ \\ u(0) = u_0, Au_0 \in \widehat{C}(0), \end{cases} \tag{3.11}$$

admet une solution unique et Lipschitzienne.
On note la solution de $\left(\widehat{DS}\right)$ sur $\left[0, \hat{T}\right]$ par

$$U(\cdot) : \left[0, \hat{T}\right] \longrightarrow H. \tag{3.12}$$

Donc on a

$$-\dot{U}(t) \in N_{\widehat{C}(t)}(A\left(U(t)\right)) \text{ p.p. } \ t \in \left[0, \hat{T}\right]. \tag{3.13}$$

Pour tout $t \in [0, T]$, soit

$$u(t) := \left(U \circ v_\varepsilon\right)(t) = U(v_\varepsilon(t)). \tag{3.14}$$

Il est clair que $u(\cdot)$ est absolument continue. De plus, pour presque tout $t \in [0, T]$, nous avons clairement que

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{dv_\varepsilon}{dt}(t)\frac{dU}{dt}(v_\varepsilon(t)). \tag{3.15}$$

Étape 3 : Montrons que $u(\cdot)$ définie par (3.14) est une solution de (DS).
En effet, on a

$$\forall t \in [0, T] : v_\varepsilon(t) \in \left[v_\varepsilon(0), v_\varepsilon(T)\right] = \left[0, \hat{T}\right].$$

Alors, en remplaçant t par $v_\varepsilon(t)$ dans (3.13), on obtient pour presque tout $t \in [0, T]$

$$-\dot{U}(v_\varepsilon(t)) \in N_{\widehat{C}(v(t))}(AU(v_\varepsilon(t))) \Longleftrightarrow -\dot{U}(v_\varepsilon(t)) \in N_{C(t)}(Au(t))$$

$$\Longleftrightarrow -\dot{v}_\varepsilon(t)\dot{U}(v_\varepsilon(t)) \in N_{C(t)}(Au(t))$$
$$\Longleftrightarrow -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(Au(t)).$$

De plus

$$Au_0 = Au(0) = A\left(U(v_\varepsilon(0))\right) = AU(0) \in C(0) = \widehat{C}(0).$$

Par conséquent, $u(\cdot)$ est une solution de (DS).
Étape 4 : Montrons l'unicité :
Soient $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ deux solutions de (DS), alors

$$\begin{cases} -\dot{u}_1(t) \in N_{C(t)}(Au_1(t)) \text{ p.p. } \ t \in [0, T], \\ \\ u_1(0) = u_0, Au_0 \in C(0). \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\dot{u}_2(t) \in N_{C(t)}(Au_2(t)) \text{ p.p. } \ t \in [0, T], \\ \\ u_2(0) = u_0, Au_0 \in C(0). \end{cases}$$

D'après la monotonie du cône normal, on a

$$\langle -\dot{u}_1(t) + \dot{u}_2(t), Au_1(t) - Au_2(t)\rangle \geqslant 0.$$

Cela implique

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\langle u_1(t) - u_2(t), A\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right\rangle = \left\langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), A\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right\rangle \leqslant 0$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\left\langle u_1(t) - u_2(t), A\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right\rangle \leqslant 0,$$

Ce qui donne

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left\langle u_1(s) - u_2(s), A\left(u_1(s) - u_2(s)\right)\right\rangle \leqslant 0.$$

On obtient

$$\left\langle u_1(t) - u_2(t), A\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right\rangle - \left\langle u_1(0) - u_2(0), A\left(u_1(0) - u_2(0)\right)\right\rangle \leqslant 0.$$

Comme
$$u_1(0) = u_2(0),$$
Alors
$$\langle u_1(t) - u_2(t), A(u_1(t) - u_2(t)) \rangle \leqslant 0. \tag{3.16}$$
D'autre part, l'opérateur A est $\beta-$coercif, alors
$$\langle u_1(t) - u_2(t), A(u_1(t) - u_2(t)) \rangle \geqslant \beta \left\| u_1(t) - u_2(t) \right\|^2.$$
Cela donne
$$\left\| u_1(t) - u_2(t) \right\|^2 \leqslant \frac{1}{\beta} \langle u_1(t) - u_2(t), A(u_1(t) - u_2(t)) \rangle. \tag{3.17}$$
Les relations (3.16) et (3.17) impliquent
$$\left\| u_1(t) - u_2(t) \right\|^2 \leqslant 0,$$
On obtient
$$u_1(t) = u_2(t).$$
Par conséquent
$$u_1(\cdot) = u_2(\cdot).$$
Étape 5 : Montrons que pour presque tout $t \in [0, T]$,
$$\|\dot{u}(t)\| \leqslant \frac{1}{\beta} |\dot{v}(t)|. \tag{3.18}$$

Soit $t \in]0, T[$ tel que $\dot{u}(t)$ et $\dot{v}(t)$ existent. Si $\dot{u}(t) = 0$ alors l'inégalité est vérifiée.
Supposons que $\dot{u}(t) \neq 0$. Le développement de Taylor d'ordre 1 de $u(\cdot)$ donne
$$u(t - \delta) = u(t) - \delta \dot{u}(t) - \delta \varepsilon(\delta), \tag{3.19}$$

où $\varepsilon(\delta)$ est une fonction qui tend vers 0 quand δ tend vers 0.
Pour $\delta > 0$ assez petit et comme $C(t)$ sont fermés et varient d'une façon absolument continues, alors on a
$$\begin{cases} Au(t - \delta) \in C(t - \delta), \\ \\ d_H(C(t - \delta), C(t)) \leqslant |v(t) - v(t - \delta)|. \end{cases} \tag{3.20}$$
D'autre part, on peut écrire (3.3) en termes d'inclusions d'ensembles suivante
$$C(t - \delta) \subset C(t) + |v(t) - v(t - \delta)| \mathbb{B}_H. \tag{3.21}$$
Alors d'après les relations (3.20) et (3.21), ils existent $\alpha_t \in C(t)$ et $\zeta_t \in H$ avec
$$\|\zeta_t\| \leqslant |v(t) - v(t - \delta)|,$$
tels que
$$Au(t - \delta) = \alpha_t + \zeta_t.$$
Ceci et (3.19) donne
$$\alpha_t = Au(t) - \delta A\dot{u}(t) - \delta A\varepsilon(\delta) - \zeta_t \in C(t). \tag{3.22}$$
Or $-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(Au(t))$, alors
$$\langle -\dot{u}(t), w - Au(t) \rangle \leqslant 0, \forall w \in C(t).$$

En prenant $w = \alpha_t$ et en utilisant (3.22), on obtient

$$\langle -\dot{u}(t), Au(t) - \delta A\dot{u}(t) - \delta A\varepsilon(\delta) - \zeta_t - Au(t)\rangle \leqslant 0,$$

Cela implique

$$\left\langle -\dot{u}(t), -A\dot{u}(t) - A\varepsilon(\delta) - \delta^{-1}\zeta_t \right\rangle \leqslant 0.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}(t), A\dot{u}(t)\rangle &\leqslant \left\langle -\dot{u}(t), A\varepsilon(\delta) + \delta^{-1}\zeta_t \right\rangle \\ &\leqslant \|\dot{u}(t)\| \left\| A\varepsilon(\delta) + \delta^{-1}\zeta_t \right\|. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que A est $\beta-$coercif, on a

$$\begin{aligned} \beta \|\dot{u}(t)\|^2 &\leqslant \|\dot{u}(t)\| \left(\|A\| \|\varepsilon(\delta)\| + \delta^{-1} \|\zeta_t\| \right) \\ &\leqslant \|\dot{u}(t)\| \left(\|A\| \|\varepsilon(\delta)\| + \delta^{-1} |v(t) - v(t-\delta)| \right). \end{aligned}$$

Lorsque δ tend vers 0, on obtient

$$\beta \|\dot{u}(t)\|^2 \leqslant \|\dot{u}(t)\| |\dot{v}(t)|,$$

Ce qui donne

$$\|\dot{u}(t)\| \leqslant \frac{|\dot{v}(t)|}{\beta}.$$

Ceci achève la preuve. □

3.2 Processus de Rafle dégénéré avec perturbation

Dans cette partie, nous appliquons le théorème (3.1.2) étendu pour établir un résultat d'existence pour un processus dégénéré perturbé, où la perturbation est une application univoque dépend seulement du temps t. On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Proposition 3.2.1 *[14] Soit H un espace de Hilbert. Soit $f : [0,T] \longrightarrow H$ une application univoque de $L^1([0,T], H)$. On considère l'application multivoque $C(\cdot)$ de $I = [0,T]$ dans H vérifiant les hypothèses suivantes.*
($\mathcal{H}_1$) Pour tout $t \in [0,T]$, $(C(t))_t$ sont des sous ensembles non vides convexes et fermés de H.
($\mathcal{H}_2$) $C(t)$ varie d'une façon absolument continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction absolument continue $v(\cdot) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in H$ et pour tous $s, t \in I$, on ait

$$|d(x, C(t)) - d(x, C(s))| \leqslant |v(t) - v(s)|.$$

($\mathcal{H}_A$) $A : H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire, borné et symétrique et $\beta-$coercif, c'est-à-dire

$$\langle Ax, x\rangle \geqslant \beta. \|x\|^2, \forall x \in H.$$

Alors pour toute valeur initiale $x_0 \in H$ telle que $Ax_0 \in C(0)$, l'inclusion différentielle

$$(PDS) : \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t) \ p.p \ \ t \in [0,T], \\ \\ x(0) = x_0, Ax_0 \in C(0), \end{cases} \tag{3.23}$$

admet une solution unique absolument continue. De plus on a l'inégalité suivante

$$\|\dot{x}(t) + f(t)\| \leqslant \frac{\|A\| \|f(t)\| + |\dot{v}(t)|}{\beta} \ p.p \ t \in [0,T]. \tag{3.24}$$

Preuve.
Étape 1 : Pour tout $t \in [0, T]$, on pose

$$\psi(t) := \int_0^t f(s)ds \text{ et } D(t) := C(t) + A(\psi(t)).$$

Il est évident que l'application multivoque $D(\cdot)$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$. De plus

$$D(0) = C(0).$$

Soient $y \in H, t \in [0, T]$, alors

$$\begin{aligned} d(y, D(t)) &= \inf_{d(t) \in D(t)} \|y - d(t)\| = \inf_{c(t) \in C(t)} \|y - (c(t) + A(\psi(t)))\| \\ &= \inf_{c(t) \in C(t)} \|(y - A(\psi(t))) - c(t)\| = d(y - A(\psi(t)), C(t)). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $(C(t))_t$ varient d'une façon absolument continue. Nous avons donc pour tous $s, t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |d(y, D(t)) - d(y, D(s))| &= |d(y - A(\psi(t)), C(t)) - d(y - A(\psi(s)), C(s))| \\ &\leqslant \|A(\psi(t)) - A(\psi(s))\| + |v(t) - v(s)| \\ &\leqslant \|A\| \|\psi(t) - \psi(s)\| + |v(t) - v(s)|. \end{aligned}$$

D'autre part, on peut écrire

$$\psi(t) - \psi(s) = \int_s^t \dot{\psi}(r)dr = \int_s^t f(r)dr.$$

Ce qui implique

$$\|\psi(t) - \psi(s)\| = \left\| \int_s^t f(r)dr \right\| \leqslant \int_s^t \|f(r)\| dr. \tag{3.25}$$

Par ailleurs,

$$|v(t) - v(s)| = \left| \int_s^t \dot{v}(r)dr \right| \leqslant \int_s^t |\dot{v}(r)| dr \tag{3.26}$$

De (3.25) , (3.26), on a

$$\|A\| \|\psi(t) - \psi(s)\| + |v(t) - v(s)| \leqslant \int_s^t (\|A\| \|f(r)\| + |\dot{v}(r)|) dr.$$

On peut voir facilement que

$$\int_s^t (\|A\| \|f(r)\| + |\dot{v}(r)|) dr = \int_0^t (\|A\| \|f(r)\| + |\dot{v}(r)|) dr - \int_0^s (\|A\| \|f(r)\| + |\dot{v}(r)|) dr.$$

On pose

$$\gamma(t) := \int_0^t (\|A\| \|f(r)\| + |\dot{v}(r)|) dr. \tag{3.27}$$

On obtient

$$|d(y, D(t)) - d(y, D(s))| \leqslant |\gamma(t) - \gamma(s)|.$$

Ce qui signifie que l'ensemle fermé $D(t)$ varie de manière absolument continu par rapport à t avec la fonction absolument continue $\gamma(\cdot)$, car on peut écrire

$$\gamma(t) = \int_0^t \left(\|A\| . \left\| \dot{\psi}(r) \right\| + |\dot{v}(r)| \right) dr).$$

Étape 2 : Pour tout $t \in I$, on pose
$$y(t) := x(t) + \psi(t). \tag{3.28}$$
Ce qui donne, (PDS) est équivalent à l'inclusion différentielle dégénérée suivante
$$\begin{cases} -\dot{y}(t) \in N_{D(t)}(Ay(t)) \text{ p.p } \ t \in [0,T], \\ \\ y(0) = x_0, Ax_0 \in D(0). \end{cases}$$
En effet,
$$\begin{aligned} -\dot{y}(t) \in N_{D(t)}(Ay(t)) &\Longleftrightarrow -\dot{y}(t) \in N_{D(t)}((Ay(t) - A(\psi(t))) + A(\psi(t))) \\ &\Longleftrightarrow -\dot{x}(t) - \dot{\psi}(t) \in N_{C(t)+A(\psi(t))}((Ay(t) - A(\psi(t))) + A(\psi(t))) \\ &\Longleftrightarrow -\dot{x}(t) - f(t) \in N_{C(t)+A(\psi(t))}(A(y(t) - \psi(t)) + A(\psi(t))) \\ &\Longleftrightarrow -\dot{x}(t) - f(t) \in N_{C(t)}(A(y(t) - \psi(t))) \\ &\Longleftrightarrow -\dot{x}(t) - f(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) \\ &\Longleftrightarrow -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t). \end{aligned}$$
De plus
$$x(0) = y(0) = x_0, Ax_0 \in C(0) = D(0).$$
Alors, il résulte du théorème (3.1.2) que le processus suivant
$$\begin{cases} -\dot{y}(t) \in N_{D(t)}(Ay(t)) \text{ p.p } \ t \in [0,T] \\ \\ y(0) = x_0, Ax_0 \in D(0), \end{cases} \tag{3.29}$$
admet une solution unique absolument continue $y(\cdot)$. De plus, pour presque tout $t \in [0,T]$ cette solution vérifie l'inégalité suivante
$$\|\dot{y}(t)\| \leqslant \frac{1}{\beta} |\dot{\gamma}(t)|. \tag{3.30}$$
Il est clair que la fonction $x(\cdot)$ définie par
$$x(t) := y(t) - \psi(t),$$
est une solution absolument continue de (PDS).
Étape 3 : On montre l'estimation (3.24). De (3.27) , (3.28) , (3.30), on a pour presque tout $t \in [0,T]$
$$\left\| \dot{x}(t) + \dot{\psi}(t) \right\| \leqslant \frac{1}{\beta} (\|A\| \|f(t)\| + |\dot{v}(t)|).$$
Ce qui implique
$$\|\dot{x}(t) + f(t)\| \leqslant \frac{1}{\beta} (\|A\| \|f(t)\| + |\dot{v}(t)|).$$
Étape 4 : La dernière étape de la preuve de la proposition (3.2.1) est l'unicité de la solution pour (PDS).
Soient $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ deux solutions de (PDS) avec la même condition initiale
$$x_1(0) = x_2(0) = x_0. \tag{3.31}$$
Alors pour presque tout $t \in [0,T]$, on a
$$\begin{cases} -\dot{x}_1(t) - f(t) \in N_{C(t)}(Ax_1(t)), \\ \\ x_1(0) = x_0, Ax_0 \in C(0). \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\dot{x}_2(t) - f(t) \in N_{C(t)}(Ax_2(t)), \\ \\ x_2(0) = x_0, Ax_0 \in C(0). \end{cases}$$

D'après la monotonie du cône normal, on trouve

$$\langle -\dot{x}_1(t) - f(t) + \dot{x}_2(t) + f(t), Ax_1(t) - Ax_2(t)\rangle \geqslant 0.$$

Ce qui implique

$$\langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle \leqslant 0.$$

En utilisant le fait que

$$\langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\langle x_1(t) - x_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\right\rangle.$$

On obtient

$$\frac{d}{dt}\left\langle x_1(t) - x_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\right\rangle \leqslant 0,$$

Par suite

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left\langle x_1(s) - x_2(s), A\left(x_1(s) - x_2(s)\right)\right\rangle ds \leqslant 0.$$

Ce qui donne

$$\langle x_1(t) - x_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle - \langle x_1(0) - x_2(0), A\left(x_1(0) - x_2(0)\right)\rangle \leqslant 0.$$

La relation (3.31) donne

$$\langle x_1(t) - x_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle \leqslant 0. \tag{3.32}$$

D'autre part, on a l'opérateur A est $\beta-$coercif, alors

$$\beta\left\|x_1(t) - x_2(t)\right\|^2 \leqslant \langle x_1(t) - x_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle, \tag{3.33}$$

(3.32) et (3.33) impliquent

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leqslant 0.$$

En conséquence, on a $x_1(\cdot) = x_2(\cdot)$ et l'unicité des solutions est obtenue. □

Conclusion générale

Dans ce travail, en utilisant des outils de l'analyse convexe, nous avons introduit et étudié le caractère bien posé des processus de Rafle dégénérés perturbés, sous la condition de continuité absolue des ensembles fermés $C(t)$ et sous leur convexité. L'existence et l'unicité des solutions de cette classe de processus sont obtenues sous l'hypothèse de coercivité de l'opérateur impliqué. En ce qui concerne les processus de Rafle dégénérés perturbés, de nombreuses questions restent à explorer. Par exemple, il serait intéressant d'étudier le cas où les ensembles $C(t)$ sont prox-réguliers.

Bibliographie

[1] V. Acary, B. Brogliato. *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems : applications in mechanics and electronics*. Springer Science & Business Media. 2008.

[2] S. Adly , T. Haddad . *Well-posedness of nonconvex degenerate sweeping process via unconstrained evolution problems*. Nonlinear Analysis : Hybrid Systems. 2019.

[3] J.P. Aubin. *Viability theory*. Springer Science & Business Media, 2009.

[4] J. P. Aubin, H. Frankowska. *Set-valued analysis*. Springer Science & Business Media, 2009.

[5] J. P. Aubin. *Mutational and morphological analysis : tools for shape evolution and morphogenesis*. Springer Science & Business Media, 2012.

[6] J. P. Aubin, A. Cellina. *Differential inclusions : set-valued maps and viability theory*. Vol. 264. Springer Science & Business Media. 2012.

[7] H. H. Bauschke, P. L. Combettes. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. Vol. 408. New York : Springer. 2011.

[8] M. Bounkhel, C. Castaing. *State dependent sweeping process in p-uniformly smooth and q-uniformly convex Banach spaces.* Set-Valued and Variational Analysis, 20(2), 187–201, 2012.

[9] B. Brogliato, A. A. Ten Dam, L. Paoli, F. Gnot, M. Abadie. *Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems.* ASME Applied Mechanics Reviews, 55(2) :107-150, 2002.

[10] K. Deimling. *Multivalued differential equations, Series on Nonlinear Analysis and Applications 1*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992.

[11] J. Diestel, J.J. Uhl. *Vector measure, Mathematical surveys and Monograph.* Vol 15, American Mathematical Society, 1977.

[12] T. Haddad, I. Kecis, L.Thibault. *Reduction of state dependent sweeping process to unconstrained differential inclusion.* Journal of Global Optimization, 62(1), 167–182, 2015.

[13] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal. *Fundamentals of Convex Analysis*. Springer Science & Business Media, 2004.

[14] M. Kecies, T. Haddad, M. Sene. *Degenerate sweeping process with a Lipschitz perturbation.* Applicable Analysis, 100 (14), 2927–2949, 2019.

[15] M. Kunze, M.D.P. Monteiro Marques. *On parabolic quasi variational inequalities and state dependent sweeping processes.* Topological Methods in Nonlinear Analysis, 12(1), 179–191, 1998.

[16] M. Kunze, M. D. P Monteiro Marques. *On the discretization of degenerate sweeping processes.* Portugaliae Mathematica, 55(2) 219-232, 1998.

[17] M. Kunze, M.D.P. Monteiro Marques. *An introduction to Moreau's sweeping process.* In Impacts in mechanical systems, Springer, Berlin, Heidelberg, 1–60, 2000.

[18] J. J. Moreau. *Sur l'évolution d'un système élastoplastique.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série. A-B, 273, A118-A121, 1971.

[19] J. J. Moreau. *Rafle par un convexe variable I*. Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. I, Exp. No. 15, pp. 43, 1971.

[20] J. J. Moreau. *Rafle par un convexe variable II*. Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. II, Exp. No. 3, pp. 36, 1972.

[21] J. J. Moreau. *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*. Journal of differential equations, (26) 347–374, 1977.

[22] J. J. Moreau. *Liaisons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II, 296 :1473-1476, 1983.

[23] J. J. Moreau. *Numerical aspects of the sweeping process*. Computer methods in applied mechanics and engineering, (177) 329–349, 1999.

[24] D. Simovici. *Mathematical Analysis for Machine Learning and Data Mining*. World Scientific Publishing Co., Inc.2018.

[25] G.V. Smirnov. *Introduction to the theory of differential inclusions*. Vol. 41. American Mathematical Soc., 2002.

[26] D. E. Stewart. *Dynamics with Inequalities : impacts and hard constraints* (Vol. 59). SIAM, 2011.

[27] L. Thibault. *Master 1. Cours d'Analyse Fonctionnelle*. https ://thibault.xyz/workspace/cours-analfonct.pdf.

[28] J. Van Tiel. *Convex analysis*. An introductory text. John wiley and sons, 1984.

Résumé :

Dans ce travail, nous étudions le caractère bien posé, dans le sens de l'existence et de l'unicité, d'une solution d'une inclusion différentielle perturbée, impliquant des ensembles convexes dans des espaces de Hilbert. Ce problème connu sous le nom de processus de Rafle dégénéré perturbé où la perturbation est une application univoque, mesurable et dépendante du temps seulement.

Mots clés : *Processus de Rafle dégénéré, perturbation, inclusion différentielle, application multivoque, fonction absolument continue, cône normal, monotonie,*

Abstract :

In this work, we study the well-posedness in the sense of existence and uniqueness of a solution of a perturbed differential inclusion, involving convex sets in Hilbert spaces. This problem known as the degenerate sweeping process where the perturbation is a single-valued map and measurable function dependent only on time.

Key words : *Degenerate sweeping process, perturbation, differential inclusion, normal cone, set-valued map, absolutely continuous map, monotonicity.*

ملخـــــــص :

في هذا العمل، ندرس الطابع الجيد، بمعنى الوجود والوحدانية، لحل التضمين التفاضلي المضطرب، الذي يتضمن مجموعات محدبة في فضاءات هيلبرت . تُعرف هذه المشكلة باسم عملية رافل المشوهة المضطربة حيث يكون الاضطراب عبارة عن تطبيق عادي، قابل للقياس ويعتمد فقط على الزمن.

الكلمات المفتاحية :عملية المسح لرافل المشوهة ، الاضطراب, الاحتواء التفاضلي, التطبيقات المتعددة القيم, التابع المستمر مطلقا, المخروط الناظمي, الرتابة.