الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des Mathématiques et Informatiques

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de **Master**

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Domination dans les puissances d'un graphe

Préparé par : Djamaa Ranya
Layoune Roumaissa

Soutenue devant le jury:

Azi Mourad	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Boufelgha Ibrahim	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Encadreur
Bazeniar Abdelghafour	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire :2023/2024

Remerciements

Nous remercions d'abord et avant tout Allah qui nous a donné le courage, la santé, la possibilité et la patience pour réaliser ce travail.

Un remerciement particulier à notre encadreur Monsieur "Boufelgha Ibrahim" pour son soutient, son sérieux, sa disponibilité, ses précieux conseils et son aide tout au long de l'élaboration de ce travail.

Nous remercions également, les membres du jury d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer notre travail.

Sans oublier tous les enseignants du département de mathématique pour la qualité de l'enseignement qu'ils ont bien voulu nous prodiguer durant nos études afin de nous fournin une formation efficiente.

Nous n'aurions garde d'oublier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire et à tous ceux qui ont partagé avec nous les moments les plus difficiles dans la réalisation de ce travail et tous ceux qui nous souhaite le bon courage.

Finalement, nous remercions très sincèrement tous nos familles pour leur encouragement sans limite.

Ranya et Roumaissa

الإهداء

(و آخر دعواهم أن الحمد لله رب العالمين)

الحمد لله حبا و شكرا و امتنان على البدئ و الختام, عظم المراد فهان الطريق فجاءت لذة الوصول...لتمحي مشقة الطريق

الحمد لله ما تيقنت به خيرا و أملا إلا أغرقني سرورا

إلى العزيز الذي حملت اسمه فخرا, يردد اسمي عاليا في عنان السماء حاملا شرف لقبك, و بكل اعتزاز أنا لهذا الرجل ابنة, إلى من كلله الله بالهيبة و الوقار يا من افتقدته منذ الصغر ويرتعش قلبي لذكره, إلى من فارقني بجسده و روحه مازالت ترفرف في سماء حياتي, إلى تلك الروح الطاهرة أبي (**عبد الحكيم**) رحمه الله...

إلى ملاكي في الحياة من ساندتني في صلاتها و دعائها, إلى من سهرت الليالي تنير دربي, إلى معنى الحب و الحنان إلى أروع امرأة في الوجود...
أمي الغالية (**فهيمة**)

إلى روح جدي الطاهرة إلى من كان أبا قبل جد (**عبد القادر**) رحمه الله ...

إلى الايادي الطاهرة التي أزالت من طريقي أشواك الفشل ...إلى من ساندوني بكل حب عند ضعفي, إلى من لم يبخلوا علي بشيء, إلى من رسموا لي المستقبل بخطوط من الثقة و الحب (**عمتي بريزة وجدتي الغالية بوبة**)

إلى ضلعي الثابت و أمان أيامي, إلى من شددت عضدي بهم فكانوا ينابيع أرتوي بها, إلى من رزقت بهم سندا أخي (**أيمن**) أخواتي (**أحلام, ماجدة**)

إلى كل الأهل و العائلة الكريمة كل باسمه و مقامه عماتي (**شفيعة, ميادة**)
و ازواجهم (**عبد العالي, حمزة**)

إلى ملائكة رزقني بهم الله لأعرف من خلالهم طعم الحياة الجميلة الذين غيروا مفاهيم الحب و الصداقة, إلى صديقات المواق لا السنين **(وسام,عبير, أميرة, لمياء, راوية, رانية)**

إلى من تحلت بالإخاء و تميزت بالوفاء و العطاء رفيقتي في المشوار ... **(رانية)**

رميساء...

إهداء

الحمد لله حبا و شكرا و امتنانا، ما كنت لأفعل هذا لولا فضل الله فالحمد لله على البدء و الختام

ها أنا اليوم إهدي نجاحي إلى كل من سعى معي لإتمام هذه المسيرة

إلى الذي علمني أن الدنيا كفاح و سلاحها العلم و المعرفة

إلى من أحمل اسمه بكل إفتخار إلى أعظم و أعز رجل في الكون

.أبي الغالي " عبد الوهاب "

إلى ملاكي في الحياة من ساندتني في صلاتها و دعائها، إلى من سهرت الليالي تنير دربي، إلى معنى الحب و الحنان، إلى اروع إمرأة و أم في الوجود

. أمي الغالية " بريزة "

أعتذر منكما عن كل تعب وعن كل فشل أسأل الله أن يطيل في أعماركم و أن يوفقني لأفرحكم أهديكم هذا الإنجاز و ثمرة نجاحي الذي لطالما تمنيته، فالحمد لله على ما وهبني.

" إلى نفسي المثابرة الصبورة "

إلى جسر المحبة و العطاء مصدر قوتي أخواتي

" صليحة، نعيمة، حنان "

إلى من رزقت بهم سندا لي

" خالد، فريد، عامر"

إلى أولئك الذين يفرحهم نجاحنا و يحزنهم فشلنا خالاتي و بنات عمي العزيزات

إلى من افتقدهم في هذه الحياة، إلى من أودعوني لله أتمنى أن يتغمدهم الله برحمته و يسكنهم فسيح جناته

" أجدادي و جداتي "

إلى رفيق الطفولة و أحن وأعز رجل أفتخر به جدي الغالي " مسعود " رحمك الله و جعلك في أعلى درجات الجنة

إلى من ساندني بكل حب عند ضعفي إلى صديقات المواقف لا السنين شريكات الدرب الطويل من كانوا في سنوات العجاف سحابا ممطرا، صديقاتي العزيزات

" هاجر، مفيدة ،وفاء، سماح، ويسام، ليلى، أمينة، لبنى ، ميساء ....   "

إلى من تحلت بالإخاء، و تميزت بالعطاء، رفيقتي في المشوار

" رميساء "

و لله الشكر كله أن وفقني لهذه اللحظة، فالحمد لله رب العالمين

" شكرا لكم "

رانية

Table des matières

Table des figures

Introduction

Les graphes sont des représentations abstraites utilisées pour modéliser une variété de situations réelles impliquant des entités interagissant les unes avec les autres. Leur utilisation facilite la manipulation des objets et de leurs relations grâce à une représentation visuelle intuitive. Les techniques et les outils mathématiques développés dans le domaine de la Théorie des Graphes permettent une démonstration aisée de différentes propriétés, ainsi que la déduction de méthodes de résolution et d'algorithmes.

La théorie des graphes a connu un développement significatif ces trois dernières décennies, avec l'un de ses domaines les plus dynamiques étant l'étude de la domination. Les origines de ce concept remontent apparemment au 16ème siècle en Inde, où il était abordé dans le contexte des jeux d'échecs. L'idée fondamentale consiste à recouvrir (ou dominer) toutes les cases d'un échiquier en utilisant le moins possible de reines, de sorte que chaque case soit occupée par une reine, soit accessible en un seul mouvement par une reine.

Dans un graphe G, un ensemble dominant est défini comme un groupe de sommets tels que chaque sommet du graphe soit inclus dans cet ensemble, soit adjacent à un sommet de cet ensemble. Le défi posé par le problème de domination est de déterminer un tel ensemble avec le moins de sommets possible.

En 1958, C. Berge [2] a présenté le concept de nombre de domination dans son travail en tant que coefficient de stabilité externe, tandis qu'en 1968, Oré l'a nommé le nombre de domination. Une application pratique de ce concept a été proposée par Liu en 1968 dans son ouvrage [26], où il a exploré son utilité dans les réseaux de communication. Dans ce contexte, un ensemble dominant représente les villes hébergeant les stations de radiodiffusion, permettant la diffusion de messages à travers tout le réseau. Cependant, les transmissions sont limitées aux villes voisines.
Depuis la parution de ces ouvrages, plus de 2000 documents de recherche ont été consacrés à la domination dans les graphes. Ces dernières années ont vu l'introduction de plus de 80 paramètres de domination, dont la plupart sont répertoriés dans l'annexe du livre de Haynes et al [26]. Plus récemment, Erwin [19] a proposé un modèle dans lequel les stations de radiodiffusion ont des capacités de transmission variables, permettant la diffusion de messages sur des distances plus grandes que leurs voisines. Cette variation, appelée broadcast domination, pose un problème similaire à celui de la domination classique, mais avec

l'ajout d'une pondération sur chaque sommet du graphe. Le problème consiste alors à minimiser la somme des coûts associés aux sommets tout en garantissant que chaque sommet soit atteint à une distance maximale égale à sa pondération.

L'objectif de ce mémoire est l'étude du nombre de dominations dans la classe de puissance des graphes et de vérifier l'existence d'une relation directe entre ce dernier et le nombre de broadcast domination limité pour les chaînes, les cycles et les grilles. La notion des puissances des graphes possède quelques domaines d'applications, citons :

• Conception de réseaux : la puissance d'un graphe peut être utilisée pour modéliser la résilience et la connectivité des réseaux, assurant que des connexions existent dans un certain nombre maximum de pas.

• Algorithmes des graphes : certains problèmes comme la coloration et la domination peuvent être plus faciles à résoudre sur la puissance du graphe.

• Réseaux sociaux : dans l'analyse des réseaux sociaux, les graphes de puissance plus élevée peuvent représenter des connexions dans certains degrés de séparation.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré aux notions fondamentales et aux terminologies qui seront utiles pour la compréhension de ce travail. Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'essentiel de la domination et de la broadcast domination dans les graphes. Notre contribution personnelle dans ce mémoire est exposée dans le troisième chapitre. Nous étudions le paramètre du nombre de domination dans les k-puissances des graphes pour les classes des chaînes, des cycles et des grilles.

1

Notions et Terminologie

Dans ce chapitre, nous donnons les définitions de base et les notations nécessaires de la théorie des graphes pour la compréhension de notre travail.

1.1 Notions et terminologie

Définition générales de graphe

Les graphes sont des concepts mathématiques utilisés pour modéliser des relations binaires entre des objets d'un même ensemble. Ils sont fréquemment utilisés pour modéliser des systemes qui se présentent sous la forme d'un réseau. Il existe deux types des graphes : les graphes orientés et les graphes non orientés.

Graphe orienté

Un graphe orienté est un couple (V, E), où V est l'ensemble des sommets du graphe et E l'ensemble des ses arcs. V et E sont finis.
L'arc est une relation entre deux sommets, notée d'une orientation, si $e = (x, y)$ est un arc de E, avec $x, y \in V$, la relation est orienté de x vers y.
le graphe G est noté $G = (V, E)$.

Graphe non orienté

Un graphe $G = (V, E)$ est un couple de deux ensembles, un ensemble fini non vide V de n éléments appelé sommets du graphe G, et un ensemble fini E d'une famille de m paires d'éléments de V, appelées arêtes du graphe G.
• Une arête $e = (u, v)$ entre deux sommets u et v, noté uv. Deux arêtes sont dit adjacentes si elles ont une extrémité en commun et la boucle est une arête dont les extrémités sont confondues.
• Le nombre d'arêtes est appelé la taille du graphe G est noté par $m = |E(G)|$.
• Les sommets u et v sont appelés les extrémités de l'arête e.
• Le nombre de sommets dans le graphe G est appelé l'ordre de G, est noté $n = |V(G)|$.
• Le graphe qui contient un seul ou aucun sommet appelé graphe trivial.

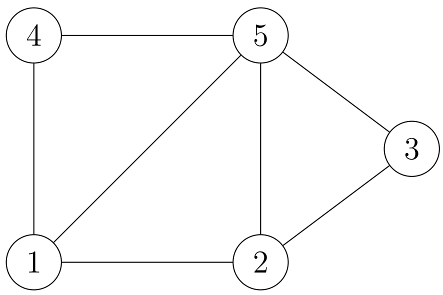


FIGURE 1.1 – Graphe non orienté.

Graphe simple et graphe multiple

Un graphe simple est un graphe sans boucle ni arêtes multiples. Dans le cas contraire, c'est-à-dire, si des boucles ou arêtes multiples sont autorisées, on dira alors que le graphe est multiple.

Degré

Pour un sommet v de graphe G, le degré de v c'est le nombre d'aretes incidentes à ce sommet, noté $d_G(v)$.

$\star$ Un sommet de degré $0(i.e : d_G(v) = 0)$ est dit sommet isolé.
$\star$ Un sommet de degré $1(i.e : d_G(v) = 1)$ est dit sommet pendant et son voisin est dit support.
$\star$ Dans un graphe tous les sommets ont le meme degré est dit régulier, si le degré commun est k alors on dit que le graphe est k-régulier.
$\star$ Le degré minimum du graphe G c'est le plus petit degré d'un sommet, noté $\delta(G)$.
$\star$ Le degré maximum c'est le plus grand degré d'un sommet de G, noté $\Delta(G)$.
$\star$ Si tous les sommets d'un graphe de degré 3 le graphe est dit cubique.

Dans un graphe orienté, ona :
• Le demi-degré extérieur d'un sommet x est égal au nombre d'arcs ayant le sommet x comme extrémité initiale, on dit aussi le nombre d'arcs incidents extérieurs au sommet x. On le note :

$$d^+(x) = \mid \{u \in E/I(u) = x\} \mid .$$

• Le demi-degré intérieur d'un sommet x est égal au nombre d'arcs ayant le sommet x comme extrémité terminale, on dit aussi le nombre d'arcs incidents intérieurs au sommet x. On le note :

$$d^-(x) = \mid \{u \in E/T(u) = x\} \mid .$$

I et T sont les applications extrémité initiale et terminale de e l'arc u.

• Le degré d'un sommet x est le nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale ou terminale, on dit aussi le nombre d'arcs adjacents à x. On le note :

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x).$$

Voisinage

Dans un graphe G, il ya deux types de voisinages :
• Le voisinage ouvert d'un sommet v, noté $N(v)$ est l'ensemble de sommets adjacents à v.

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}.$$

• Le voisinage fermé d'un sommet v, noté $N[v]$ est l'ensemble de sommets adjacents à v avec le sommet v.

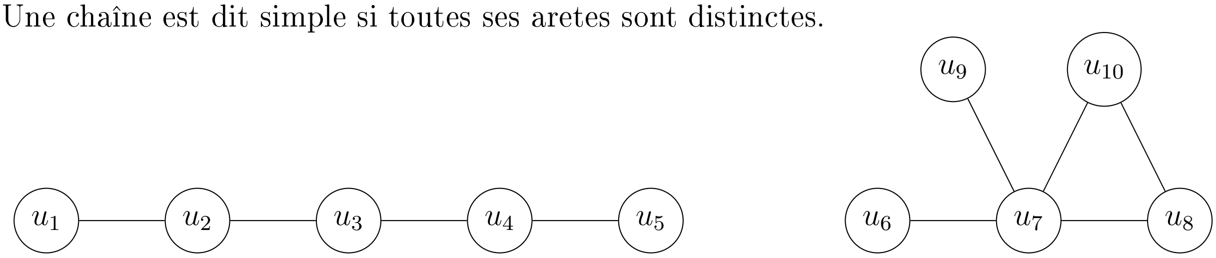
$$N_G[v] = N_G(v) \cup v.$$

• Pour un sous ensemble $D \subseteq V(G)$ le voisinage fermé est définit par $N(D) = \bigcup_{v \in D} N(v)$ et le voisinage fermé est définit par $N[D] = \bigcup_{v \in D} N[v]$.

Chaîne(Chemin)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, une chaîne dans G est une suite de sommets $u_1, u_2, ..., u_n$, noté P_n, telle que deux sommets u_i et u_j successifs $(i < j)$ sont reliés par une arete si et seulement si $(j = i + 1)$ et $e_i = u_i u_{i+1} \in E$, (dans les graphes orienté appellé chemin).

• L'entier $(n - 1)$ représente la longueur de P_n.
• x_1 c'est l'extrémité initiale de P_n.
• x_n c'est l'extrémité finale de P_n.
Une chaîne est dite élémentaire si tous ses sommets sont distincts.
Une chaîne est dit simple si toutes ses aretes sont distinctes.



(a) (b)

FIGURE 1.2 – (a) La chaîne u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 est simple et élémentaire mais (b) La chaîne u_6,u_7,u_8,u_9,u_{10} est simple mais non élémentaire.

Connexité

Un graphe non orienté est connexe s'il y a une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets distincts du graphe.

Un graphe qui n'est pas connexe, c'est dit non connexe et l'union de deux ou de plusieurs sous-graphes connexes, chaque paire de ceux-ci n'ayant pas de sommet en commun.

$*$ Les sous-graphes connexes disjoints sont les composantes connexes du graphe.

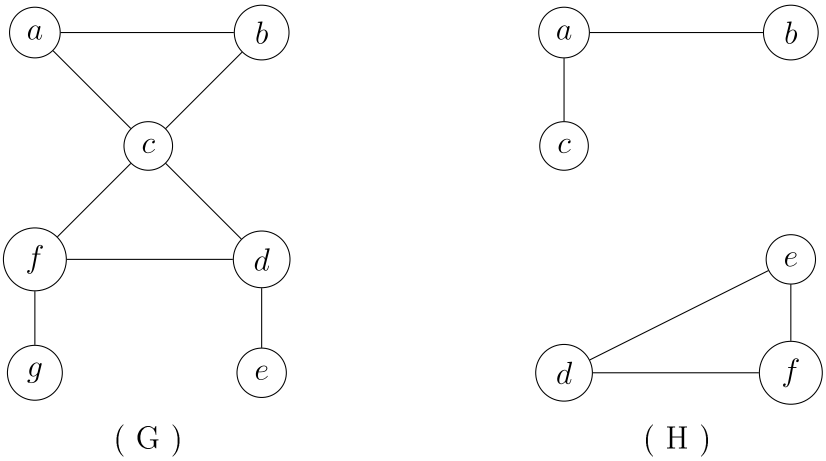


Figure 1.3 – Le graphe G est connexe et H est non-connexe.

Le graphe G est connexe puisqu'il existe une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets distincts. Le graphe H n'est pas connexe, par exemple, il n'ya pas de chaîne entre les sommets a et d.

Composantes connexes

On appelle composante connexe un ensemble de sommets qui ont, deux à deux, la relation de connexité. De plus, tout sommet en dehors de la composante n'a pas de relation de connexité avec les sommets de cette composante.

Dans la $figure 1.3$ le graphe H contient deux composantes connexes :
H_1 formé des sommets a, b et c.
H_2 formé des sommets d, e et f.

1.2 Paramètres des graphes

Distance

On peut définir la distance entre deux sommets u et v d'un graphe G, noté $d(u, v)$ par la longueur de la plus courte chaîne entre u et v.

Excentricité

L'excentricité d'un sommet u dans G est la plus grande distance entre le sommet u et n'importe quel autre sommet v de G, c'est-à-dire $e(u) = \max_{v \in V}\{d(u,v)\}$.

Rayon

Le rayon du graphe G est la plus petite exentricité dans G, c'est-à-dire $rad(G) = \min_{u \in V} e(u)$.

Diamètre

Le diamètre du graphe G est la plus grande exentricité dans G, c'est-à-dire $diam(G) = \max_{u \in V} e(u)$.

Le nombre chromatique(coloration)

Il est possible de colorier un graphe $G = (V, E)$ avec au plus k couleurs, c'est-à-dire, il est possible de partitionner V en au plus k ensembles stables.
L'objectif est d'affecter une couleur à chaque sommet de sorte que deux sommets adjacents ont toujours une couleur différente. Le probléme d'optimisation correspondant demande de déterminer le plus petit nombre de couleurs nécessaires à la coloration d'un graphe G. Ce nombre est appelé nombre chromatique du graphe et noté $\chi(G)$.

Le nombre de stabilité et le nombre de clique

Il est facile de voir qu'un graphe G a une clique de taille k si et seulement si son graphe complémentaire $\overline{G}$ a un ensemble stable de taille k.
La taille d'une plus grande clique de G noté $\omega(G)$, et la taille d'un plus grand ensemble stable appelé le nombre de stabilité noté $\alpha(G)$. Les problémes d'optimisation correspondant demandent de déterminer respectivement une clique et un ensemble stable de taille maximum du graphe G.

1.2.1 Quelques classes des graphes

On appelle classe de graphes un ensemble de graphes partageant des caractéristiques communes.
Nous définissons dans cette partie les classes de graphes les plus usuelles.

Circuit

Un circuit est un chemin dont les extrémités sont confondues. On le note par $(x_0, x_1, x_2, ..., x_k = x_0)$.

Cycle

Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues.

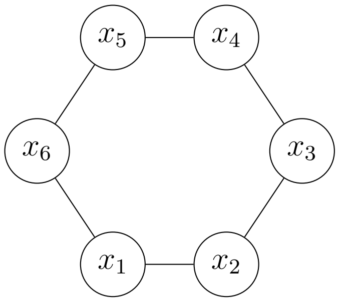


FIGURE 1.4 – Un cycle d'ordre 6.

Graphe symétrique et graphe anti-symétrique

$G = (V, E)$ est symétrique si : $\forall x, y \in V, (x, y) \in E \Longrightarrow (y, x) \in E$.
G est antisymétrique si : $\forall x, y \in V, (x, y) \in E \Longrightarrow (y, x) \notin E$.

Graphe complet

Un graphe complet d'ordre n noté par K_n, est un graphe non orienté sans boucle dont tous les sommets distincts sont adjacents . Dit autrement, un graphe est complet si chaque sommet de G est relié à tous les autres sommets. Dans le graphe complet le degré de chaque sommet est $(n - 1)$.
▲ Les cliques sont des sous-graphes qui est complets.

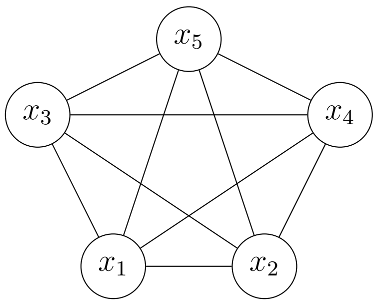


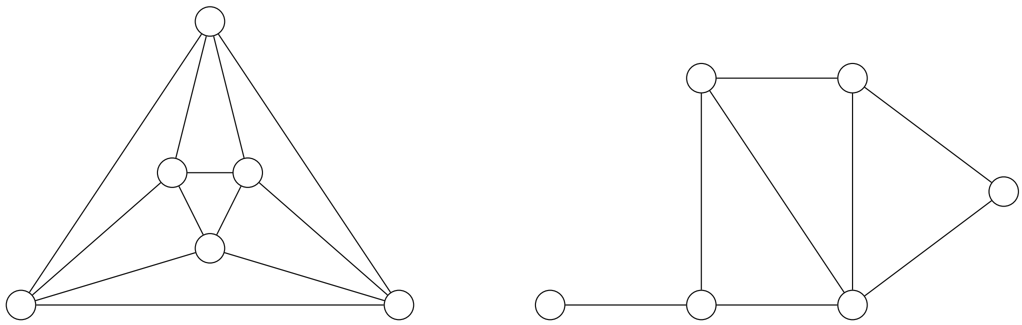
FIGURE 1.5 – Un graphe complet K_5.

Graphe triangle (graphe cordal)

Un graphe triangle est un graphe possédant 3 sommets et 3 arêtes. Un graphe triangulé, si chacun de ses cycles de nombre d'arêtes A tel que $|A| \geq 4$ possède une corde (La corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs d'un cycle) C'est-à-dire si chacun de ses cycles de G est d'ordre inférieure ou égale 3.

Le nom de graphe triangulé est employé au sein de la classification de l'**ISGCI** (Information System on Graph Classes and their Inclusions).

Un graphe est cordal s'il ne contient pas de cycle induit de longueur supérieure ou égale à 4. Dit autrement, un graphe est cordal si pour tout cycle de taille supérieure à 4 il existe une arete reliant deux sommets non adjacents du cycle.

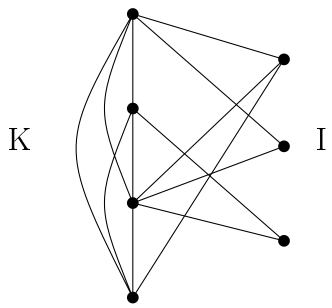


(a) (b)

FIGURE 1.6 – (a) Graphe cordal -(b) Graphe triangulé.

Graphes scindés

Les graphes scindés sont des sous-classe des graphes cordaux, on dit que G est scindé s'il est possible de partitionner ses sommets en deux ensembles K et I, tels que K induise une clique sur G et que I induise un graphe stable.



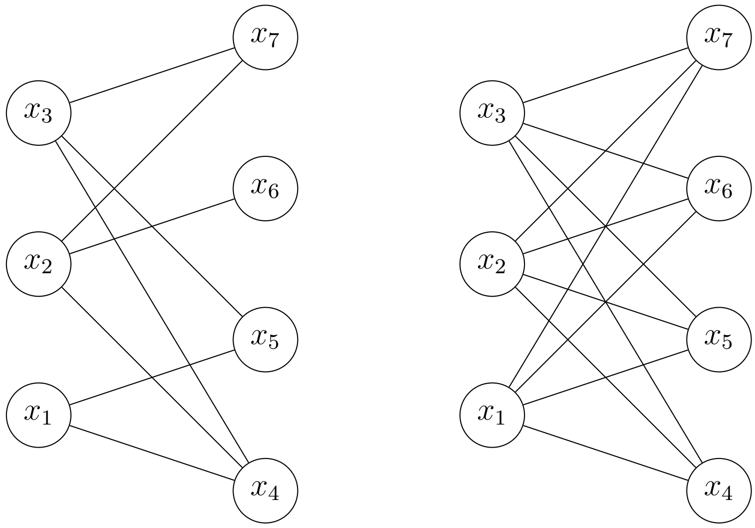
(b)

FIGURE 1.7 – Un graphe scindé.

Graphe biparti et graphe biparti complet

Un graphe G est biparti c'est l'ensemble de ses sommets peut étre partitionné en deux partiés V_1 et V_2 tels que le sous graphe V_1 ne contient aucune arête et V_2 aussi. Autrement dit, le graphe biparti ne contient pas de cycle de longueur impair.

Le graphe biparti complet c'est chaque sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2 et chaque sommet de V_2 est relié à tout sommet de V_1, noté $K_{m,n}$ avec m l'ordre de V_1 ($|V_1| = m$) et n l'ordre de V_2 ($|V_2| = n$).



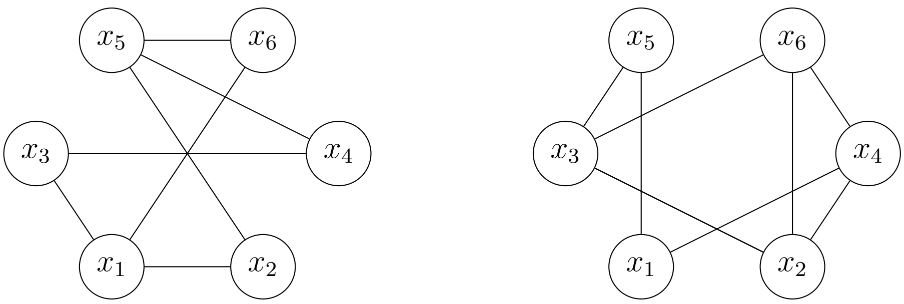
(a) (b)

FIGURE 1.8 – (a) Un graphe biparti -(b) un graphe biparti complet $K_{3,4}$.

Complémentaire d'un graphe

Le graphe complémentaire de G, noté $\overline{G}$=(V,$\overline{E}$) est un graphe tel que deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si et seulement s'ils ne le sont pas dans G.

$$\overline{G} = (\mathrm{V},\{\{\mathrm{u,v}\} : \{u, v\} \notin E\}).$$

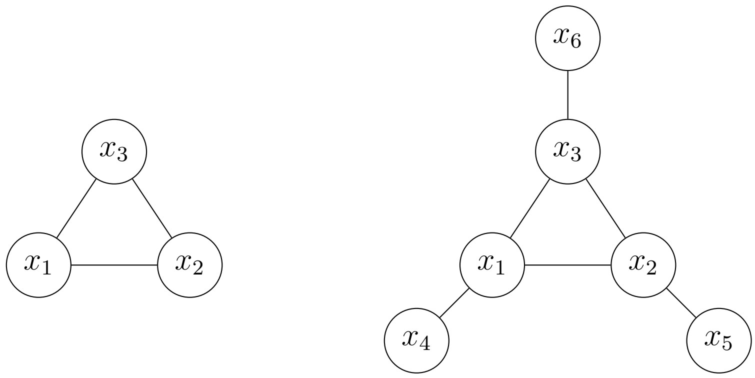


G $\overline{G}$

FIGURE 1.9 – Un graphe (G) et sont complémentaire ($\overline{G}$).

La couronne

La couronne G^* d'un graphe G est un graphe obtenu par une copie de G ou chaque sommet de G est adjacent à un sommet pendant.

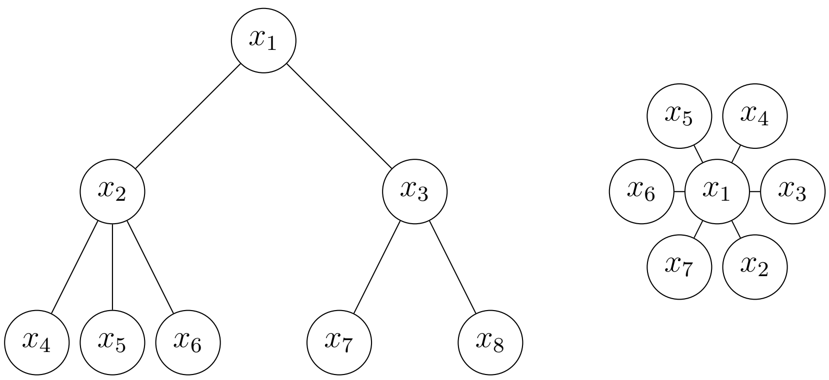


(a) (b)

FIGURE 1.10 – (a) Un graphe complet K_3 - (b) un graphe couronne K_3^*.

Arbres

L'arbre est une sous-classe trés étudiée des graphes bipartis et des graphes cordaux, un arbre est un graphe connexe sans cycle, noté T et comporte $(n-1)$ aretes.
dans l'arbre il ya trois types de sommets sont :
- Les feuilles : sont les sommets de degré 1.
- Les noeuds internes : sont les sommets de degré supérieur à 1.
- Il existe un autre type de sommet appelé racine dans les arbres enraciné.



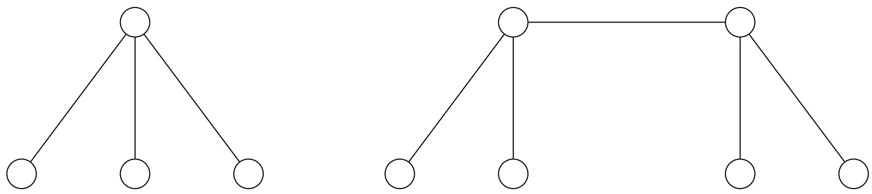
T $K_{1,6}$

FIGURE 1.11 – T Un arbre, x_1 est sa racine, x_2 et x_3 sont des noeuds internes et x_4,x_5,x_6,x_7 et x_8 sont des feuilles, $K_{1,6}$ est une étoile.

L'étoile et l'étoile double

L'étoile est un type d'arbre dont tous les sommets sont des feuilles sauf un, on peut remarque aussi que l'étoile est un graphe biparti complet noté $K_{1,n}$, $|V_1| = 1$ et $|V_2| = n$ dont le sommet de V_1 est relié à tous les sommet de V_2.

L'étoile double est un arbre obtenu à partir de deux étoiles $K_{1,n}$, $K_{1,m}$, $\{n, m\} \geq 1$, en attachant les deux centres par une arête, notée $S_{n,m}$.



$K_{1,3}$ $S_{2,2}$

FIGURE 1.12 – Une étoile $K_{1,3}$ et une étoile double $S_{2,2}$.

Chenille

Une Chenille est un arbre T tel qu'en supprimant tous ses sommets pendants, on obtient une chaîne simple (voir Fig 1.13).

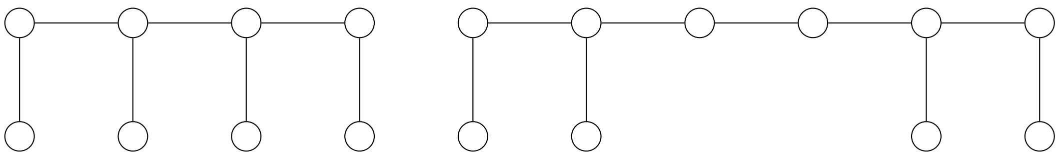


FIGURE 1.13 – Des chenilles.

1.2.2 Opérations sur les graphes

Plusieurs opérations peuvent aussi être définies sur les graphes. Certaines sont des opérations unaires comme le complémentaire, d'autres sont des opérations binaires.

Puissance d'un graphe

Dans la théorie des graphes, une branche des mathématiques, la kième puissance G^k d'un graphe non orienté G est un autre graphe qui a le même ensemble de sommets, mais dans lequel deux sommets sont adjacentes lorsque leur distance dans G est d'au plus k entre eux. Les puissances des graphes sont désignées par une terminologie proche de celle de l'exponentiation des nombres.
G^2 est appelé le carré de G.
G^3 est appelé le cube de G.

Les puissances d'un graphe doivent être distinguées des produits d'un graphe avec lui-même, qui (contrairement aux puissances) ont généralement beaucoup plus de sommets que le graphe d'origine.

La réunion disjointe complète

La réunion disjointe complète de G et H, noté $G \cup H$, est le graphe qui a pour ensemble de sommets $V(G) \cup V(H)$ et ensemble d'arêtes $E(G) \cup E(H) \cup \{x_1x_2 : x_1 \in V(G), x_2 \in V(H)$. Ainsi, la roue à $n+1$ sommets, notée W_n est la réunion disjointe complète du graphe C_n et du graphe K_n.

Produit direct/croisé

Etant donnés deux graphes G et H, le produit direct $G \times H$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets (x_1,y_1) et (x_2, y_2) sont reliés par une arête si et seulement si $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1y_2 \in E(G)$.
Autrement dit, deux sommets du produit $G \times H$ sont adjacents si et seulement si dans chaque facteur, leurs coordonnées sont des sommets adjacentes.
Là encore, on utilise le symbole $\times$ pour désigner ce produit car il représente le graphe produit de deux arêtes. on pourra remarquer que :

$$E(G \square H) \cap E(G \times H) = 0.$$

Les fibres du produit de graphes sont stables. Enfin, le degré d'un sommet dans le produit direct est le produit des degrés de ses coordonnées dans les facteurs :

$$d_{G \times H}(x_1, x_2) = d_G(x_1)d_H(x_2).$$

Produit cartésien

Le produit cartésien de $G(V(G), E(H))$ et $H(V(H), E(H))$ noté par$G \square H$ est le graphe qui a pour ensemble de sommets $V \times V'$ ou deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont adjacents si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $x_1 = x_2$ et $y_1y_2 \in E(H)$.
- $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1 = y_2$.

On utilise le symbole $\square$ pour désigner ce produit car il représente le graphe produit de deux arêtes.

Dans la suite, nous utilisons la notation G^k pour désigner la puissance $k^{\text{ème}}$ du graphe G par le produit cartésien, à savoir $G \square G \square G \square ... \square G$ $(k fois)$.

Avec le produit cartésien, tout $H - fibre$ de $G\Box H$ est isomorphe à H, et toute $G - fibre$ de $G\Box H$ est isomorphe à G.

Enfin, le degré d'un sommet dans le produit cartésien est la somme des degrés de ses coordonnées dans les facteurs.

$$d_{G\Box H}(x_1, x_2) = d_G(x_1) + d_H(x_2)$$

La Grille carrée est le produit cartésien des chemins $G_{m,n} = P_m \Box P_n$ avec : $m \geq 2$ et $n \geq 2$. Il s'agit de la forme la plus commune de grille et si elle est claire dans le contexte, elle sera juste appelée grille.

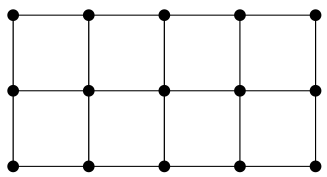


FIGURE 1.14 – Grille classique $P_3\Box P_5$.

Le Cylindre est le produit cartésien d'un cycle et d'une chaîne $G_{m,n} = P_m \Box C_n$ avec : $m \geq 1$ et $n \geq 1$.

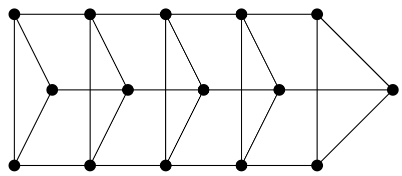


FIGURE 1.15 – Cylindre $P_5\Box C_3$.

Le Tore est le produit cartésien de deux cycles $G_{m,n} = C_m \Box C_n$ tel que $m \geq 1$, $n \geq 1$.

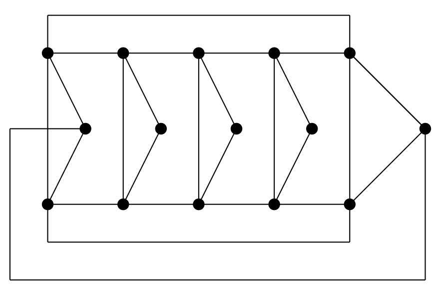


FIGURE 1.16 – Tore $C_3\Box C_5$.

Une autre classe de graphes est issue du produit cartésien de graphes, il sagit de la classe des prismes. Un prisme est un graphe de la forme $G\square K_2$, pour un certain graphe G. En particulier, une classe de prismes trés étudiés est la classe des hypercubes.

L'hypercube Q_0 est le graphe à un seul sommet et, pour tout $n \geq 1$, l'hypercube Q_n est le produit cartésien de Q_{n-1} et de K_2.

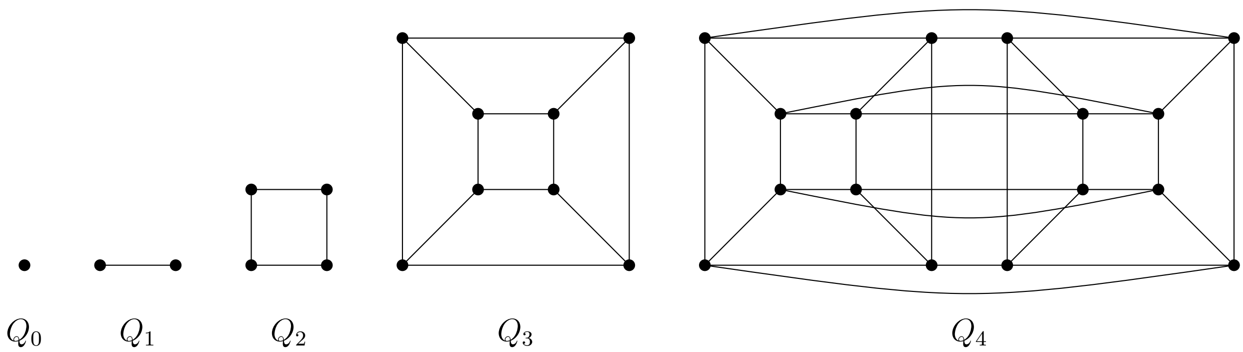


FIGURE 1.17 – Représentation des hypercubes Q_0 à Q_4.

Le produit fort

Le produit fort d'un graphe $G(V(G), E(G))$ par un graphe $H(V(H), E(H))$, noté $G \boxtimes H$, est le graphe qui a pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ ou deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont adjacents si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

- $x_1 = x_2$ et $y_1y_2 \in E(H)$.
- $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1 = y_2$.
- $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1y_2 \in E(H)$.

C'est-à-dire si les deux sommets sont adjacents ou égaux dans chaque coordonnée. On remarquera que :

$$E(G \boxtimes H) = E(G\square H) \cup E(G \times H).$$

Là encore, on utilise le symbole $\boxtimes$ pour désigner ce produit car il représente le graphe produit de deux arêtes.

Les fibres du produit direct de graphes sont identiques à celle du produit cartésien, c'est-à-dire isomorphes au facteur correspondant. Enfin, le degré d'un sommet dans le produit fort vérifie :

$$d_{G\boxtimes H}(x_1, x_2) = d_G(x_1) + d_H(x_2) + d_G(x_1)d_H(x_2).$$

Une grille du roi est le produit fort de deux chaînes, $P_m \boxtimes P_n$, son nom vient du déplacement du roi dans le jeu d'échecs.

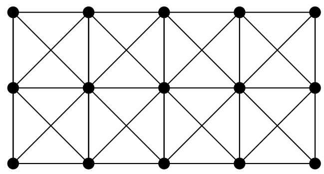


FIGURE 1.18 – Grille du roi $P_3 \boxtimes P_5$.

Remarque :

Les deux opérations : produit cartésien $\square$ et le produit fort $\boxtimes$ sont des opérations commutatives.

Produit lexicographique

Etant donnés deux graphes G et H, le produit lexicographique $G \circ H$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ sont reliés par une arête si et seulement si :

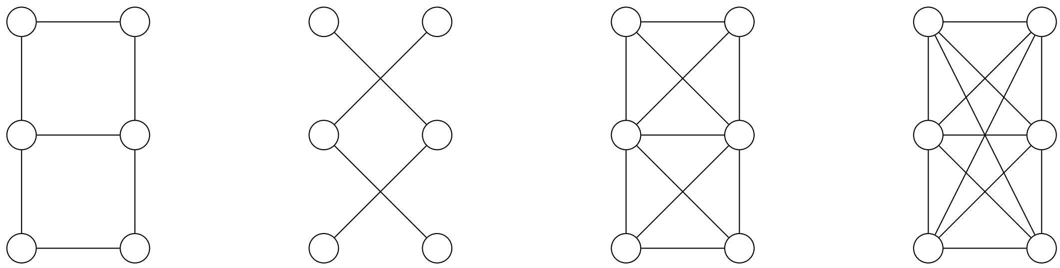
• $x_1x_2 \in E(G)$.
• $x_1 = x_2$ et $y_1y_2 \in E(H)$.

C'est-à-dire quand les sommets sont adjacents pour la première coordonnée ou quand ils sont égaux pour la première coordonnée et adjacents pour la seconde. Ona :

$$E(G \boxtimes H) \subseteq E(G \circ H).$$

Ce produit est le seul qui ne soit pas commutatif. Les fibres du produit lexicographique de graphes sont identiques à celle du produit cartésien, c'est-à-dire isomorphes au facteur correspondant. Enfin, le degré d'un sommet dans le produit lexicographique vérifie :

$$d_{G \circ H}(x_1, x_2) = d_G(x_1)|V(H)| + d_H(x_2).$$



$P_2 \Box P_3$ $\quad$ $P_2 \times P_3$ $\quad$ $P_2 \boxtimes P_3$ $\quad$ $P_2 \circ P_3$

FIGURE 1.19 – Illustration des différents produits.

2

Broadcasts et domination

Dans ce chapitre nous ennonçons l'essentiel des résultas sur la domination avec quelques invariants de la domination et la relation entre leur types. Ensuite nous donnons l'essentiel aussi de la broadcast domination, avec des invariants dans les broadcasts, et quelques relations liant γ et γ_b.

2.1 La domination dans les graphes

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble cases par certaines pièces de jeu. l'idée semble remonter au $16^{\text{ème}}$ siecle en Inde(voir [24]), En 1862, De Jaenisch [25] posa le problème suivant : Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bient peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un Echiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. le nombre minimum pour un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. pour plus de détailes voire [20].

En 1958. Claude Berge [1] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coefficient de stabilité externe.
L'appelation actuelle du nombre de dommination est due à Ore [28] en 1962. La domination n'a connue sa veritable expansion qu' aprés la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [14] en 1977. Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet (voir [5] et [26]).

2.1.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble dominant est un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ tel que tout sommet de $V \setminus D$ est adjacent à au moins un sommet de D.*
Un ensemble dominant D est dit minimal si aucun sous ensemble propre de D n'est un ensemble dominant. Un dominant de cardinalité minimum est un dominant minimale l'inverse n'est pas toujour garanti. IL existe d'autre définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples :
•$D \subseteq V$ *est un ensemble dominant* $\Longleftrightarrow \forall v \in V \setminus D, |N(v) \cap D| \geq 1.$
•$D \subseteq V$ *est un ensemble dominant*$\Longleftrightarrow N[D] = N(D) \cup D = V.$

Définition 2.2 *Soit un sommet v et un ensemble de sommets V dans un graphe $G = (V, E)$. le voisinage privé dans V, noté $pn(v, V)$ est l'ensemble des voisins de v qui ne sont voisins d'aucun autre sommet de V : $pn(v, V) = N(v) \setminus N(V - \{v\})$. De façon équivalente, on peut écrire $pn(v, V) = \{u \in V \backslash N(u) \cap V = \{v\}\}$. Si $u \in pn(v, V)$, on dit que u est un voisin privé de v dans V, où V-voisin privé.*

Définition 2.3 *Le nombre de domination inférieur (ou nombre de domination) d'un graphe G, noté $\gamma(G)$, représente* ***la cardinalité minimum*** *d'un ensemble dominant de G. Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé $\gamma(G)$-ensemble.*

On note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensemble. ***La cardinalité maximum*** *d'un ensemble dominant minimal est appelée nombre de domination supérieur, et est noté par $\mathit{\Gamma}(G)$. D'une manière générale si on considère que $\Im$ est la famille des ensembles dominants minimaux. $D \subseteq V$, alors on peut définir les deux paramétres :*

$\gamma(G) = min_{D\in\Im}(|D|)$ *:nombre de domination inférieur.*
$\mathit{\Gamma}(G) = max_{D\in\Im}(|D|)$ *:nombre de domination supérieur.*

Par exemple pour le graphe de la Figure 2.1, on a

$$\Im = \{\{v_3, v_6\}, \{v_2, v_5\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_3, v_5\}, \{v_2, v_4, v_6\}\}$$

$$D = \{v_6, v_3\}$$

.

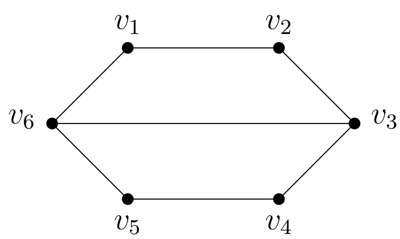


FIGURE 2.1 – Un graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\mathit{\Gamma}(G) = 3$.

2.1.2 les variantes de la domination

Ensemble dominant

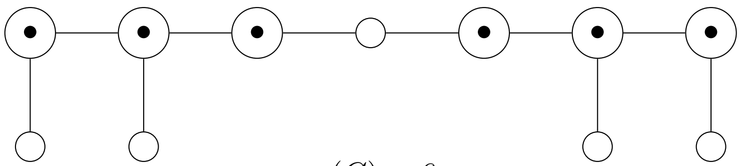
Un ensemble dominat d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $S \subseteq V$ de sommets tels que tout sommet de V est adjacent à au moins, un sommet de S.

Plus formellement, S vérifie :
$V \subseteq N(S)$ où encore $V = N(S)$. Le nombre dominant $\gamma(G)$ du graphe G est le cardinal minimum d'un ensemble dominat et on dit qu'un sommet domine un autre sommet si les deux sommets sont voisins. Un dominant est donc un ensemble de sommets qui domine tout les autres sommets.

Domination Totale

La domination totale est l'une des pricipales variantes de la domination . Elle a été introduite par Cockayne, Dawes et Hedetniemi [12].

Un sous ensemble S d'un graphe $G = (V, E)$ sans sommets isolés, est un dominant total de G si tout sommet de V est adjacent à un sommet de S (c'est-à-dire $V = N(S)$), on note par $\gamma_t(G)$ le cardinal minimum d'un dominant total (voir la Figure 2.2).



$\gamma_t(G) = 6$

FIGURE 2.2 – Ensemble dominant total.

Dans la domination totale, contrairement à la domination simple, il faut que les sommets sélectionnés dans l'ensemble eux aussi dominés par un autre sommet de l'ensemble. C'est pourquoi il n'est pas possible de trouver un dominant total dans un graphe contenant un sommet isolé, car celui-ci ne peut pat être dominé. De plus, on remarque sans peine qu'un dominant total est nécessairement un dominant, $\gamma_t(G) \geqslant \gamma(G)$.

Théorème 2.1 *:[13] Pour tout graphe connexe G sans sommets isolés d'ordre $n \geq 3$, on a $\gamma_t(G) \leq 2n/3$.*

Théorème 2.2 *:[7] Soit G un graphe connexe d'ordre n, $n \geq 3$, alors $\gamma_t(G) \leq 2n/3$ si et seulement si G est un cycle C_3 ou C_6 ou la 2-couronne d'un graphe connexe.*

Pour la classe des arbres, on a les résultats suivants :

Théorème 2.3 *:[10] Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec s supports, alors :*

(a) $\gamma_t(G) \leq (n+s)/2$.

(b)$\gamma_{pr}(G) \leq (n+2s-1)/2$.

Théorème 2.4 *:[9] Si T est un arbre d'ordre au moins trois ayant s supports alors $\gamma_t(T) \leq \gamma_{pr}(T) \leq \gamma_t(T)+s-1$.*

Théorème 2.5 *:[9] Si $G \notin \{C_3, C_5, C_6, C_{10}\}$ est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_t(G) \leq 4n/7$.*

Domination double

Soit$G=(V,E)$ un graphe et S un sous ensemble de V on dit que S est un dominant double de G si tout sommets $(V-S)$ est adjacent à au moins deux sommets de S et tout sommet de S doit avoir au moins un voisin dans S. Le nombre de domination double d'un graphe G est le cardinal minimum double noté $\gamma_{\times 2}(G)$(voir la Figure 2.3).

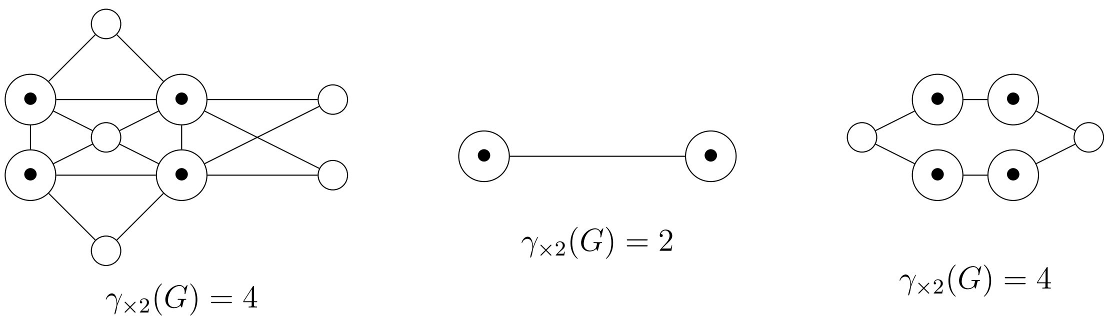


Figure 2.3 – Ensemble dominant double.

Théorème 2.6 *:[23] Soit G un graphe sans sommets isolés ayant n sommets et m arêtes alors :*

- *$\gamma_{\times 2}(G) \geq \gamma(G)+1$.*
- *Si G admet deux $\gamma(G)$-ensemble disjoint alors $\gamma_{\times 2}(G) \leq 2\gamma(G)$.*
- *$2 \leq \gamma_{\times 2}(G) \leq n$.*
- *$\gamma_{\times 2}(G) \geq (4n-m)/3$.*
- *$\gamma_{\times 2}(G) \geq 2n/(\Delta+1)$.*

Théorème 2.7 *:[12] Pour tout graphe G sans sommets isolés, on a $\gamma_{\times 2}(G) \leq n + 1 - \delta$.*

Corollaire 2.1 *:[12] Si $G \neq C_5$ est un graphe d'ordre n avec $\delta \geq 2$ alors $\gamma_{\times 2}(G) \leq \lfloor 11n/14 \rfloor$.*

Théorème 2.8 *:[3] Soit T un arbre, alors $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$ si et seulement si T possède deux $\gamma(G)$-ensemble disjoints.*

Théorème 2.9 *:[3] Soit T une chenille alors $\gamma_{\times 2}(T) = 2\gamma(T)$ si et seulement si T est la chaîne P_2 ou bien T est tel que chaque sommet support est adjacent à exactement un seul sommet pendant et la distance entre deux sommets supports consécutifs est congru à 1 ou à 2 modulo 3.*

Théorème 2.10 *:[23] Si G est un graphe tel que $diam(G) = 1$, alors on a $\gamma_{\times 2}(G) = 2$.*

Théorème 2.11 *:[23] Si G est un graphe ayant si $diam(G) = 2$, alors on a $\gamma_{\times 2}(G) \leq \Delta + \delta$.*

On appelle maille d'un graphe G, la longueur du plus petit cycle dans G. La maille d'un graphe G est noté par $g(G)$.

Théorème 2.12 *:[23] Pour tout graphe connexe G d'ordre n tel que $\delta \geqslant 2$, on a $\gamma_{\times 2}(G) \leq n + (1 - diam(G))/3$.*

Théorème 2.13 *Pour tout graphe G d'ordre n, si $g(G) \geq 5$ alors $\gamma_{\times 2}(G) \geq 2$.*

Dans le cas particulier où $g(G) = 7$, on a une valeur exacte de $\gamma_{\times 2}(G)$.

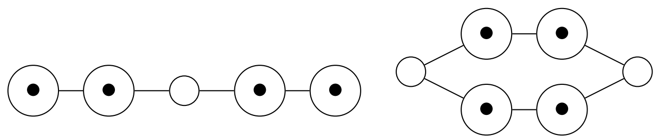
Théorème 2.14 *Soit G un graphe connexe tel que $\delta \geqslant 2$, alors $\gamma_{\times 2}(G) \geqslant 2\Delta + 1$, cette borne est atteinte si $g(G) = 7$.*

Théorème 2.15 *Pour tout graphe G, si $g(G) \geqslant 5$ alors, $\gamma_{\times 2}(G) \geqslant \Delta + \lceil (2(g) - 7)/3 \rceil$.*

Domination double exacte

Il est nécessaire de voir les graphes pour lesquels il existe un dominant double exacte. Ou bien les conditions sous lesquels il existe un ensemble dominant double exacte. ce concept a été introduit par harary et Haynes dans l'article "double domination in graphs". Nous commençons par définir un ensemble dominant exact.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et soit S un sous ensemble de V. Alors S est dit un dominant double exact si tout sommet du graphe est dominé exactement deux fois par S, noté EDDE (voir fig 2.4).



$\gamma_{\times 2}(G) = 4$

$\gamma_{\times 2}(G) = 4$

FIGURE 2.4 – EDDE.

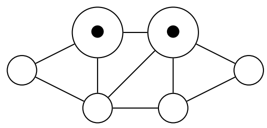
Remarque 2.1 *Les ensembles dominants doubles exacts n'existent pas toujours, puisque le problème de décision de l'existence d'un ensemble dominant double exacte est NP-complet([24])*

Proposition 2.1 *:[11] Si un graphe G possède des ensembles dominants doubles exacts, alors ils sont tous de même cardinalité.*

Domination couplé

Un sous ensemble S de sommets de G est un dominant couplé si S est un dominant et si le sous-graphe induit par S contient un couplage parfait. Le nombre de domination couplé noté par $\gamma_{pr}(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant couplé. De même, Un $\gamma_{pr}(G)$-ensemble est un dominant couplé de cardinalité minimum(voir Figure 2.5).

Remarque 2.2 - *tout graphe sans sommet isolé possède un dominant couplé.*



$$\gamma_{pr}(G) = 2$$

FIGURE 2.5 – Ensemble dominant couplé.

Proposition 2.2 *:[4]*

Soit G un graphe sans sommets isolés et S un dominant couplé de G alors S est minimal si seulement si toute paire de sommets x, y dans S satisfait l'une des conditions suivantes :
1. $\prec S \backslash \{x, y\} \succ$ ne contient pas un couplage parfait.
2. Soit x est un sommet pendant dans S adjacent a y ou bien y est un sommet pendant dans S adjacent à x.
3. Il existe un sommet $u \in (V - S)$ tel que $N(u) \cap S \subset \{x, y\}$.

Théorème 2.16 *:[21]*

Soit G un graphe sans sommets isolés d'ordre n alors :

i) $2 \leq \gamma_{pr}(G) \leq n$.

ii) $\gamma_{pr}(G) \geq n/\Delta$.

iii) Si $n \geq 6$ *et* $\delta \geqslant 2$ *alors* $\gamma_{pr} \leq 2n/3$.

Indépendance

Un ensemble S de sommets est dit stable(ou indépendant) si les sommets de S sont non adjacents deux à deux. le nombre de domination stable $i(G)$ et le nombre de stabilité $\beta_0(G)$ sont respectivement le cardinal minimum et maximum d'un stable maximal dans G. Comme tout stable maximal est un ensemble dominant minimal [3], on a :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \mathit{\Gamma}(G).$$

2.1.3 fonction de domination Romaine

Les types de domination présentent dans cette section sont des modèles d'une stratégie de défense militaire instituée par l'empereur Condtantin, entre 306 et 337 après $J.-C.$,dans la quelle les régions de l'Emprie Romaine étaient défendues par des armées stationnées à des endroits stratégique. Une région était sécurisée par les armées qui y étaient stationnées, et une région sans armée était protégée par l'envoi d'armées mobile depuis les régions voisines. Mais Constantin a décidé qu'une armée mobile de compagne ne pourrait être envoyée pour défendre une région, si cela laissait sa région d'origine non sécurisée. Cette stratégie de défense a donné naissance à ce qu'on appelle la fonction de domination Romaine, présentée ci-dessous.

Définition 2.4 *Une fonction de domination Romaine (FDR) sur un graphe G est une fonction $f : V \to \{0,1,2\}$ telle que si $f(v) = 0$, alors le sommet v doit avoir au moins un voisin u avec $f(u) = 2$. Soit (V_0, V_1, V_2) une partition ordonné de V induite par f, où $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$, pour $i = 0, 1, 2$. Notons qu'il existe une correspondance entre la fonction $f : V \to \{0,1,2\}$ et la partition ordonnée (V_0, V_1, V_2) de V. On écrira donc $f = (V_0, V_1, V_2)$.*

Le poids d'une FDR et la valeur $f(V) = \Sigma_{u \in V} f(u)$. Le nombre de domination Romaine de G, noté par $\gamma_R(G)$, est le poids minimum d'une fonction de domination Romaine sur G. A titre d'exemple le graphe de la Figure 2.6, dont le nombre de la domination Romaine est égale à 4.

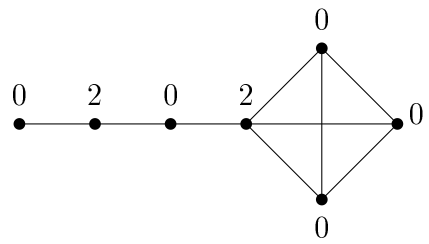


FIGURE 2.6 – Un graphe G avec $\gamma_R(G) = 4$.

2.1.4 Ensemble dominant de puissance d'un graphe

Définition 2.5 *Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble $S \subseteq V$ de sommets, nous définissons l'ensemble des sommets surveillé par l'ensemble S de la façon suivante :*

• *Domination : Tous les sommets dans S ainsi que tous les voisins des sommets dans S sont surveillés.*

• *Propagation : Chaque fois qu'un sommet v est surveillé et que tous ses voisins sauf un, disons w, sont surveillés, alors le sommet w est également surveillé. Dans ce cas, on dit que le sommet v propage vers le sommet w.*

Un ensemble initial de sommets qui finalement surveillé tout le graphe est appelé un ensemble de domination puissant. Le nombre de domination puissant est le plus petit cardinal d'un ensemble de domination puissant, noté $\gamma_p(G)$.

Le premier pas, appelé étape de domination, correspond exactement à la définition d'un ensemble dominant. Ainsi, un ensemble dominant est aussi un ensemble dominant puissant, et nous observons que pour tout graphe G, le nombre de domination puissant de G est inférieur ou égal au nombre de domination de G.

$$\forall \gamma, \gamma_p(G) \leq \gamma(G).$$

2.2 Broadcast

La notion de broadcast dans les graphes a été présenté par Erwin, en 2002, c'est est une généralisation du problème de domination standard, tel que les différents sommets peuvent être assignés pae différentes puissances de domination. Le broadcast dominant assigne une puissance de nombre entier $f(v) \geqslant 0$ à chaque sommet v du graphe donné, tel que chaque sommet du graphe est sur la distance $f(v)$ d'un certain sommet v ayant $1 \leq f(v) \leq e(v)$.

Le broadcast optimal dominant cherche à minimiser la somme des puissances assignées aux sommets du graphe. Depuis la présentation de ce problème, la complexité informatique a été ouverte, et la croyance générale a été que, il pourrait être NP-dur. Dans cette partie, nous rappelons que le broadcast optimal dominant est réellement dans P.

Depuis l'introduction de ce problème, beaucoup des paramatères du graphe reliés par domination ont été présentés et étudiés. Le problème de domination standard peut être vu comme un moyen de représenter un ensemble de villes ayant des broadcast stations. Erwin, en 2002, présenta le problème de broadcast optimal, qui est plus réaliste dans le sens où les diverses stations de broadcast sont autorisées à transmettre aux différentes puissances. Des stations par radio FM sont distinguées par leur fréquence de transmission et par leur PRE(Puissance Rayonnée Efficace). Un émetteur avec un plus haut PRE peut transmettre plus loin, mais il est plus cher à construire et à utiliser. En conséquence, le peoblème du broadcast dominant optimal demande à évaluer la fonction de puissance$f$ sur les sommets, telle que chaque sommet du graphe est à la distance au plus $f(v)$ d'un certain sommet v ayant $1 \leq f(v) \leq e(v)$, et la somme des puissances est minimisée.

2.2.1 Notions fondamentales sur la fonction broadcast

Définition 2.6 *Chaque fonction* $f : V \to \{0, 1, ..., diam(G)\}$*telle que* $f(v) \leq e(v)$ *pour tout sommet* v *de* G *est appelée un broadcast sur* G.

Un sommet v *pour lequel* $f(v) > 0$ *est un sommet f-dominant, et l'ensemble* f*-dominant est* $V_f^+(G) = \{v \in V(G) : f(v) > 0\}$. *S'il n'ya pas risque de confusion, on note par* V_f^+ *pour désigner* $V_f^+(G)$.

On suppose dans la suite que les graphes sont connexes et non triviaux.

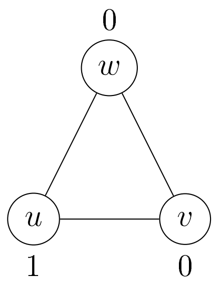


FIGURE 2.7 – u est un sommet f-dominant et $V_f^+ = \{u\}$.

Remarque 2.3 *S'il existe un sommet v avec $f(v) \geq diam(G)$ alors f est un broadcast dominant. Ainsi, il n'est pas nécessaire de considérer des broadcasts dominants avec des sommets de coût supérieur au $diam(G)$.*

Remarque 2.4 *Un sommet f-dominant v f-domine chaque sommet u avec $d(u,v) \leq f(v)$, et les sommets dans $V(G) - V_f^+$ ne f-dominent aucun sommet de G.*

On dit que tout sommet $u \in V_f^+$ est un sommet broadcast. Si $u \in V_f^+$, $v \in V$ et $d(u,v) \leq f(u)$, on dit que le sommet v peut atteindre un broadcast à partir de u. L'ensemble des sommets que $v \in V$ peut atteindre est définie par $H(v) = \{u \in V_f^+ : d(u,v) \leq f(u)\}$.

Exemple 2.1 *Dans la Figure 2.7, le sommet u est un sommet broadcast et $H(v) = H(w) = \{u\}$*

Définition 2.7 *Un broadcast dominant sur G est un broadcast f dans lequel chaque sommet est f-dominé par un certain sommet dans $V_f^+(G)$. En d'autres termes, un broadcast f est dominant si pour tout $v \in V$, $H(v) \geq 1$.*

Proposition 2.3 *:[19] Soit f un broadcast dominant minimum sur un graphe connexe G. Alors $V_f^+ = \{v\}$ si et seulement si $f(v) = e(v) = rad(G)$.*

Définition 2.8 *Soient f un broadcast sur un graphe connexe G et $\sigma(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$. Le nombre de broadcast domination $\gamma_b(G)$ est la valeur minimum de $\sigma(f)$ sur tous les broadcasts dominants de G.*

Un broadcast dominant f sur G pour lequel $\sigma(f) = \gamma_b(G)$ est dit broadcast dominant minimum sur G. Le nombre de broadcast domination supèrieur $\Gamma_b(G)$ est égal au coût maximum d'un broadcast dominant minimal sur G.

Théorème 2.17 *:[18] Soit G un graphe connexe. Alors $\gamma_b(G) = \gamma(G)$ si et seulement s'il existe un broadcast dominant f de coût minimum sur G telle que V_f^+ est un ensemble dominant.*

Définition 2.9 *Un sommet u qui est f-dominé par un sommet v est un f-voisin de v. L'ensemble des f-voisins de v est le f-voisinage fermé de v et est noté par $N_f[v]$. Si $S \subseteq V_f^+$, alors $N_f[S] = \cup_{v \in S} N_f[v]$.*

Définition 2.10 *Un broadcast f d'un certain type (domination ou autre) est dit minimal (resp. maximal) s'il n'éxiste pas un broadcast $g \neq f$ tel que pour tout sommet $u \in V$, $g(u) \leq f(u)$ (resp,$g(u) \geq f(u)$).*

Une caractérisation de la minimalité d'un broadcast dominant peut être formulée en termes des f-voisins privés des sommets f-dominants.

Théorème 2.18 *:[18] Soit f un broadcast dominant sur un graphe G. Alors, f est minimal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
1. Chaque sommet v vérifiant $f(v) \geq 2$ a un f-voisinage privé qui est à distance $f(v)$ de v.
2. Chaque sommet v vérifiant $f(v) = 1$ a un f-voisinage privé dans $N[v]$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe non trivial et $f_S : V \longrightarrow \{0, 1\}$ la fonction caractéristique d'un ensemble $S \subseteq V$.

Remarque 2.5 *1 . La fonction caractéristique f_S d'un ensemble dominant minimal S dans un graphe G est un broadcast dominant minimal et donc $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$.*

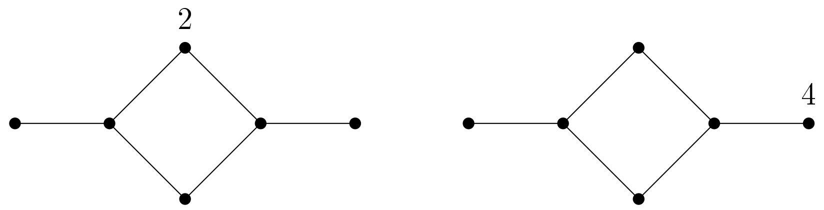
2 . Soit $u \in v$, et soit $f_u : V \to \{0, 1, ..., diam(G)\}$ la fonction définie par :

$$f_u(v) = \begin{cases} e(u) & si \quad u = v, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Le broadcast f_u est un dominant minimal, puisque chaque sommet est f-dominé par u.

Proposition 2.4 *:[18] Si f est un broadcast dominant minimal sur un graphe connexe G et $|V_f^+| \geqslant 2$, alors pour chaque sommet v, $f(v) < e(v)$.*

Définition 2.11 *Si u est un sommet dans le centre de G (i.e. $e(u) = rad(G)$), alors on dira que le broadcast $f_u$est un broadcast radial, et si $e(u) = diam(G)$, alors on dira que f_u est un broadcast diamétral.*



(a) (b)

FIGURE 2.8 – (a)Broadcast radial -(b)Broadcast diamétral.

Théorème 2.19 *:[19] Si G est un graphe connexe non trivial, alors*

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{diamG + 1}{3} \rceil.$$

Pour tout graphe connexe G d'ordre n, $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ est une borne supérieure de son nombre de broadcast domination.

Corollaire 2.2 *Pour tout graphe connexe G d'ordre n,*

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Puisque $diam(G) \geq rad(G)$, une borne inférieure en terme de rayon est prouvée par Bresar et Spacapan pour le nombre de broadcast domination.

Théorème 2.20 *:[6] Si G est un graphe connexe, alors*

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{2rad(G)}{3} \rceil.$$

La valeur de $\gamma_b(G)$ peut être calculée si le rayon ou le nombre de domination ont une valeur ≤ 3.

Proposition 2.5 *:[19] Soit G un graphe connexe.*

Si $min\{rad(G), \gamma(G)\} = k$, où $1 \leq k \leq 3$, alors $\gamma_b(G) = k$.

2.2.2 Invariants dans les broadcasts

Une théorie sur les broadcasts dans les graphes a été developpée de manière similaire à celle de la domination dans les graphes.

Broadcast indépendant :

Un broadcast f est dit indépendant si pour tout sommet $v \in V^+$, $N_f[v] \cap V^+ = \{v\}$, ou encore $|H(v)| = 1$. Le coût maximum d'un broadcast indépendant de G, noté par $\beta_b(G)$, est le nombre de broadcast d'indépendance, et le nombre de broadcast d'indépendance inférieur, noté $i_b(G)$ est égal au coût minimum d'un broadcast indépendant maximal de G. Pour tout graphe G, nous avons la chaîne d'inégalités suivante [19] :

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \beta_b(G).$$

Notons que la fonction caractéristique f_S d'un ensemble S indépendant maximal dans un graphe G est un broadcast indépendant, et donc $i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$, mais f_S n'est pas nécessairement un broadcast indépendant maximal. A titre d'exemple, considérons la chaîne P4 :(v_1, v_2, v_3, v_4) de la Figure 2.9, si on affecte aux sommets les poids : $f(v_1) = f(v_4) = 1$ et $f(v_2) = f(v_3) = 0$ (figure (a)), alors f est la fonction caractéristique d'un ensemble dominant maximal. f est aussi un broadcast indépendant et un broadcast dominant minimal. Mais cette fonction n'est pas un broadcast indépendant maximal, puisque la fonction g définie par : $g(v_1) = g(v_4) = 2$ et $g(v_2) = g(v_3) = 0$ vérifie $g(u) \geq f(u)$,$\forall u$.

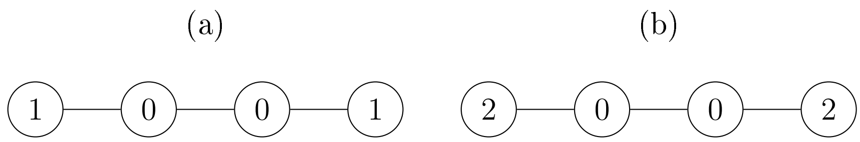


FIGURE 2.9 – Broadcasts indépendants.

La relation entre les deux invariants $\gamma_b(G)$ et $i_b(G)$ est donnée par Théorème 2.32. Pour un sommet $v \in V_f^+$, soit $d^+(v) = min\{d(v, u)/u \in V_f^+ - \{v\}\}$.

Théorème 2.21 *:[19] Soit f un broadcast indépendant sur un graphe G. Si $V^+ = \{v\}$, alors f est maximal si et seulement si $f(v) = e(v)$. Autrement dit, si $|V^+| \geq 2$, alors f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

i) f est dominant.

ii) pour tout sommet $v \in V^+$, $f(v) = d^+(v) - 1$.

Corollaire 2.3 *:[17] Pour un graphe G, si $\gamma_b(G) = rad(G)$, alors $i_b(G) = rad(G)$.*

Broadcast dominant indépendant :

Un broadcast f est dit dominant indépendant s'il est en même temps dominant et indépendant. Le coût maximum (resp. minimum) d'un broadcast dominant indépendant minimal de G est noté $\Gamma_{ib}(G)$ (resp. $\gamma_{ib}(G)$). Clairement, $\gamma_{ib}(G) \leq i(G)$ et $\Gamma_{ib}(G) \geq \beta_0(G)$, puisque la fonction caractéristique de tout ensemble indépendant maximal est un broadcast dominant indépendant minimal.

Remarque 2.6 *Notons que si f est un broadcast dominant indépendant minimal, alors pour tout broadcast $g \neq f$ qui vérifie $g \geqslant f$, g est indépendant mais n'est pas forcément un broadcast dominant.*

Théorème 2.22 *:[18] Si f est un broadcast dominant mais non indépendant de G, alors il existe un broadcast g qui est dominant, indépendant, avec $g(V) \leq f(V)$, et $V_g^+ \subset V_f^+$.*

Ce Théorème permet d'avoir un résultat liant ces deux propriétés.

Corollaire 2.4 *:[18] Tout graphe G a un γ_b-broadcast qui est indépendant, c'est à dire*

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G).$$

Proposition 2.6 *:[17] Pour tout graphe G,*

$$\gamma_{ib}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Concernant le nombre de broadcast domination independent, on a :

Proposition 2.7 *:[8] Pour tout graphe G,*

$$\beta_0(G) \leq \mathit{\Gamma}_{ib}(G) \leq min\{\mathit{\Gamma}_b(G), \beta_b(G)\}.$$

Les paramètres, $\mathit{\Gamma}_{ib}(G)$ et $\mathit{\Gamma}(G)$sont incomparables. En effet, la chaîne P_{10} vérifie $\mathit{\Gamma}(P_{10}) = 5 \leq 9 = diam(P_{10}) \leq \mathit{\Gamma}_{ib}(P_{10})$ et le graphe de Petersen (voir la Figure 2.10), vérifie $\mathit{\Gamma}_{ib}(PG) = 4 < 5 = \mathit{\Gamma}(PG)$.

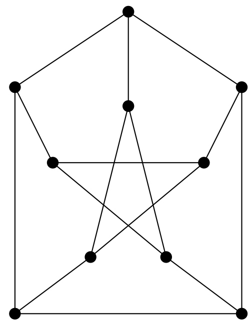


Figure 2.10 – Graphe de Petersen PG.

Broadcast efficace :

Un broadcast f est dit efficace si chaque sommet est f-dominé par un seul sommet broadcast, c'est à dire, pour tout sommet $v \in V$, $|H(v)| = 1$. Le coût maximum d'un broadcast efficace est appelé le nombre de broadcast efficace supérieur et est noté $\mathit{\Gamma}_{eb}(G)$. Le nombre de broadcast efficace $\gamma_{eb}(G)$ est égal au coût minimum d'un broadcast efficace. Par exemple, la Figure 2.11 illustre 12 broadcasts efficaces distincts sur la chaîne P_7, où $\gamma_{eb}(P_7) = 3$ et $\mathit{\Gamma}_{eb}(P_7) = 6$.

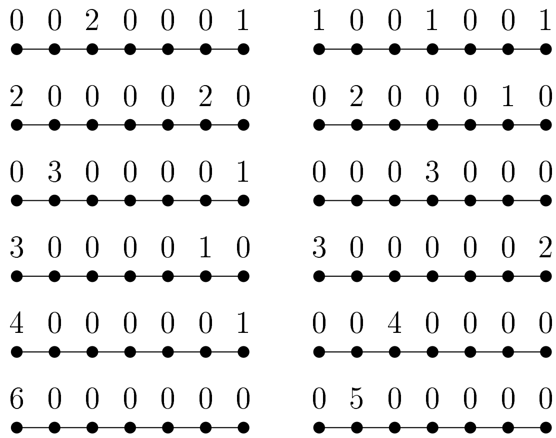


FIGURE 2.11 – Broadcasts efficaces sur P_7.

Théorème 2.23 *:[17] Tout graphe G a un γ_b-broadcast qui est efficace.*

Corollaire 2.5 *Tout graphe G a un γ_b-broadcast pour lequel la distance entre n'importe quelle paire de sommets broadcasts u et v est supérieure à $f(u) + f(v)$.*

Par définition,$\gamma_b(G) \leq \gamma_{eb}(G)$. Le Théorème 2.34 implique donc que $\gamma_b(G) = \gamma_{eb}(G)$. Nous avons d'une part $\Gamma_{eb}(G) \leq min\{\beta_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G)\}$ pour tout graphe G, puisque chaque broadcast dominant efficace est indépendant et dominant minimal. D'autre part, chaque broadcast diamétral est un broadcast dominant efficace. Il s'ensuit la chaîne d'inégalités du Corollaire 2.6.

Corollaire 2.6 *Pour tout graphe G,*

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_{eb}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Proposition 2.8 *:[17] Chaque broadcast efficace est*

i) Un broadcast packing maximal.

ii) Un broadcast dominant minimal.

iii) Un broadcast dominant indépendant minimal.

3

Domination et broadcast domination dans les puissances des graphes

Dans ce chapitre, nous étudions la domination dans les puissances des graphes. Pour cela, nous essayons de trouver une formule exacte pour la classe des chaînes, la classe des cycles et la classe des grilles.

3.1 Domination dans les puissances des graphes

Définition 3.1 *Dans la théorie des graphes, une branche des mathématiques, la kième puissance G^k d'un graphe non orienté G est un autre graphe qui a le même ensemble de sommets, mais dans lequel deux sommets sont adjacentes lorsque leur distance dans G est d'au plus k entre eux. Les puissances des graphes sont désignées par une terminologie proche de celle de l'exponentiation des nombres.*

G^2 *est appelé le carré de* G.
G^3 *est appelé le cube de* G.

Les puissances d'un graphe doivent être distinguées des produits d'un graphe avec lui-même, qui (contrairement aux puissances) ont généralement beaucoup plus de sommets que le graphe d'origine.

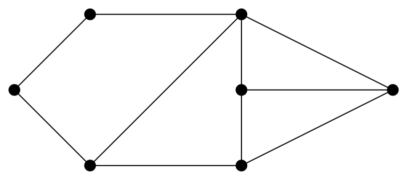


Figure 3.1 – Un graphe G.

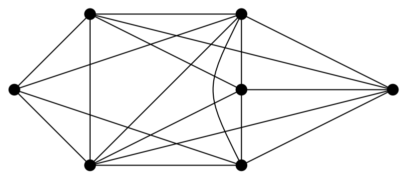


Figure 3.2 – Le carré de graphe G.

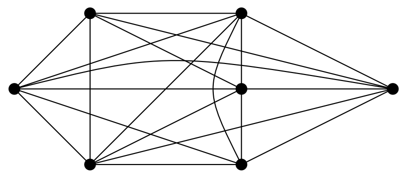


Figure 3.3 – Le cube de graphe G.

3.1.1 Domination dans les puissances d'une chaîne

On commence par la classe des chaînes, nous essayons de donner une valeur pour la puissance d'une chaîne (P_n^k) en changeant à chaque fois, l'ordre de la chaine et la puissance, en vue d'obtenir une formule exacte en fonction de n et k.

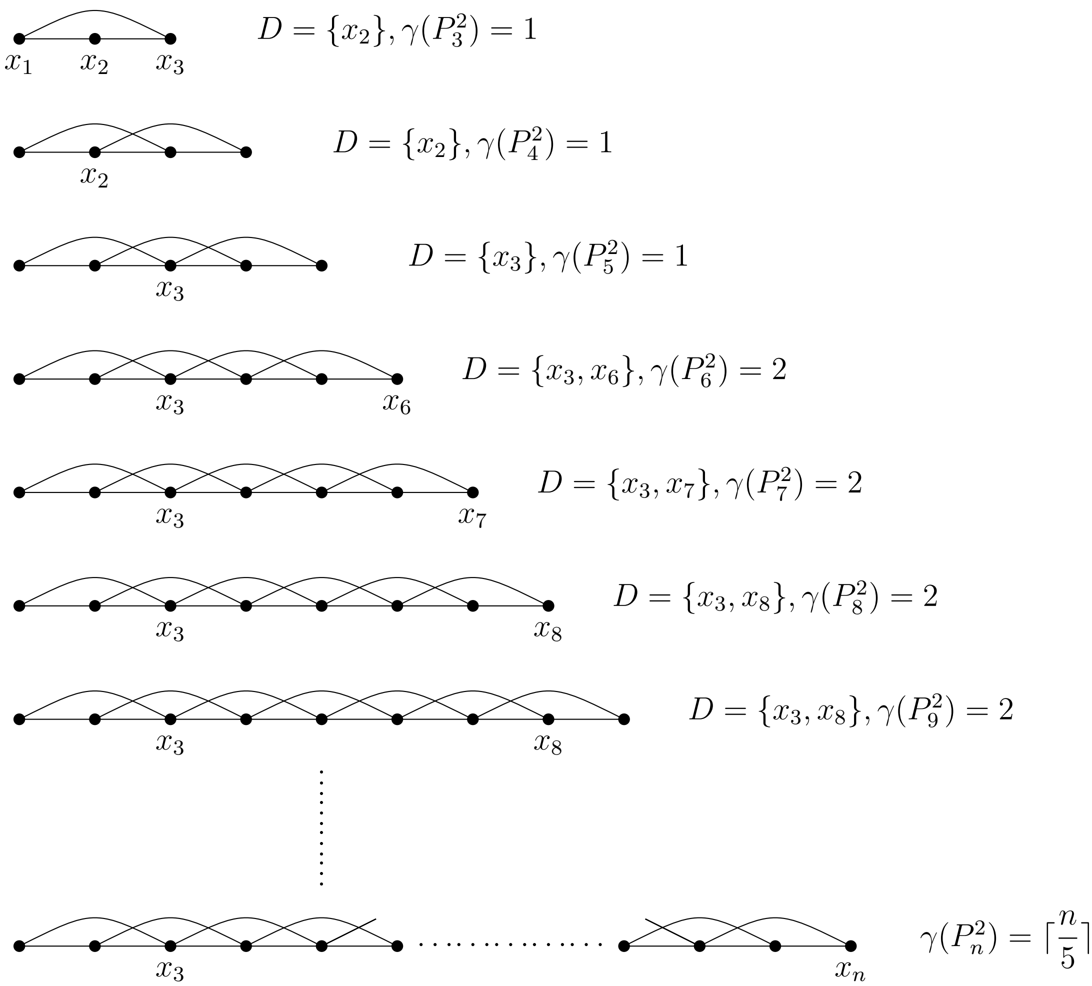


Figure 3.4 – La domination de la chaîne en puissance 2.

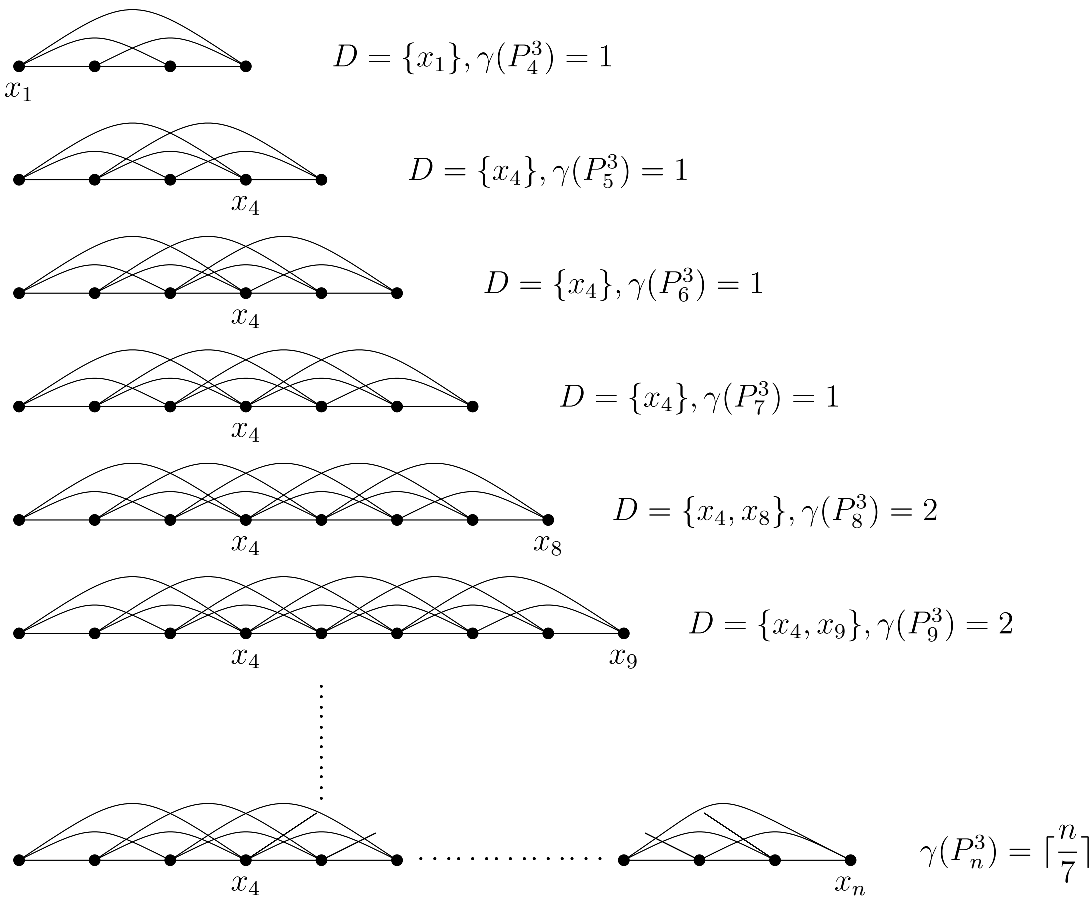


FIGURE 3.5 – La domination de la chaîne en puissance 3.

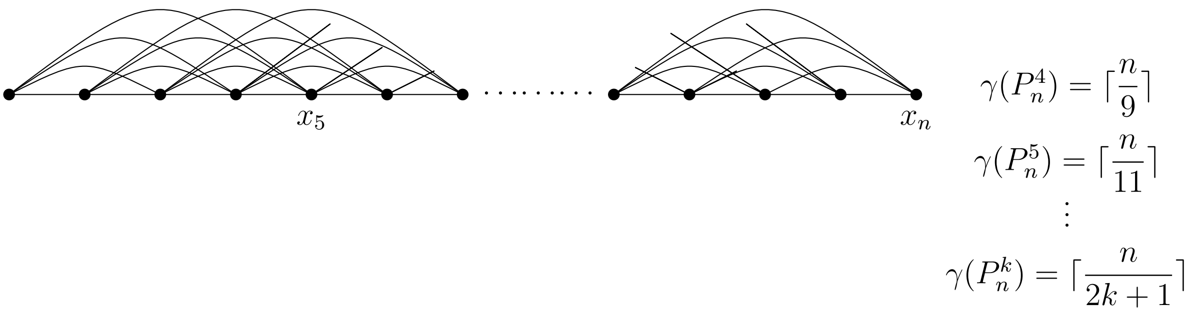


FIGURE 3.6 – La domination de la chaîne en puissance k.

Proposition 3.1 *Soit P_n une chaîne d'ordre n, et P_n^k la k puissance de P_n alors,*

$$\gamma(P_n^k) = \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil.$$

Preuve 3.1 *Soit P_n une chaîne d'ordre n, numéroteé $v_1, v_2, ..., v_n$. P_n^k est la k-îéme puissance de P_n où chaque sommet v_i est adjacent à tous les sommets v_j tels que $\mid i-j \mid \leq k$. Un ensemble D de sommets est un sommet dominant de P_n^k si chaque sommet dans P_n^k est soit dans D, soit adjacent à un sommet de D.*

Premièrement montrons que $\gamma(P_n^k) \leq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$.

Soit $D = \{v_i \in V/i = 2k+1, 2(2k+1), 3(2K+1), ...\}$

$V\{v_n si\ n\ n'est\ pas\ un\ multiple\ de\ 2k+1\}$

alors $|D| = \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$ *et D est dominant donc :*

$$\gamma(P_n^k) \leq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil.$$

Maintenant montrons que $\gamma(P_n^k) \geq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$ *, soit D un ensemble dominant sur P_n^k, alors chaque sommet v_i dans D peut dominer au plus $2k+1$ sommets (lui même plus k voisins de chaque coté), ainsi pour dominer n sommets, nous avons besoin d'au moins* $\frac{n}{2k+1}$ *sommets dans D.*

Cependant , pour les chaînes P_n, en pratique, nous considérons des intervalles de $k+1$ donc :

$$\gamma(P_n^k) \geq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil.$$

Proposition 3.2 $\gamma(P_n^k) = |V^+|$ *telque V^+ est l'ensemble de sommet broadcast limité $\gamma_{b,k}$.*

Exemple 3.1 *D'après la Figure 3.4 suivante on a :* $\mid V^+ \mid = 2$

et on a : $\gamma(P_n^k) = \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$

$\gamma(P_{20}^5) = \lceil \frac{20}{11} \rceil = 2$

alors : $\mid V^+ \mid = \gamma(P_{20}^5)$.

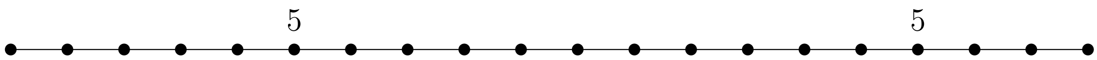


FIGURE 3.7 – Chaîne P_{20} avec $\mid V^+ \mid = 2$ pour $k \leq 5$.

3.1.2 Domination dans les puissances d'un cycle

Nous poursuivons par la classe des cycles, nous essayons de donner une valeur pour la puissance d'une cycle (C_n^k) en changeant à chaque fois, l'ordre de la chaine et la puissance, en vue d'obtenir une formule exacte en fonction de n et k.

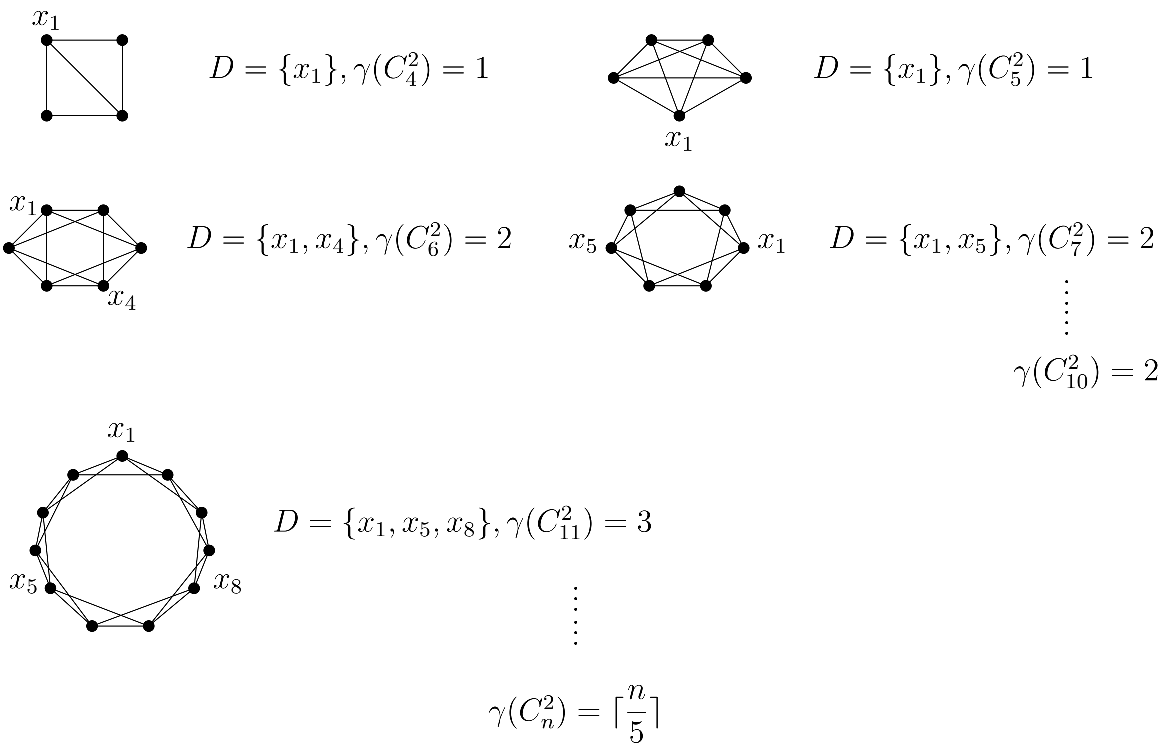
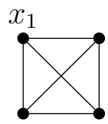
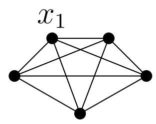


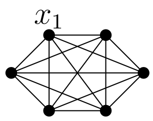
FIGURE 3.8 – La domination de puissance de la cycle en puissance 2.



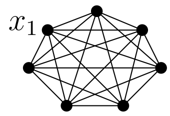
$D = \{x_1\}, \gamma(C_4^3) = 1$



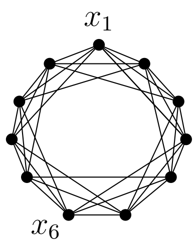
$D = \{x_1\}, \gamma(C_5^3) = 1$



$D = \{x_1\}, \gamma(C_6^3) = 1$



$D = \{x_1\}, \gamma(C_7^3) = 1$



$$\gamma(C_8^3) = 2$$
$$\vdots$$
$$D = \{x_1, x_6\}, \gamma(C_{11}^3) = 2$$
$$\vdots$$
$$\gamma(C_{14}^3) = 2$$

$$\gamma(C_{15}^3) = 3$$
$$\vdots$$
$$\gamma(C_{21}^3) = 3$$

$$\gamma(C_{22}^3) = 4$$
$$\vdots$$
$$\gamma(C_{28}^3) = 4$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\gamma(C_n^3) = \lceil \frac{n}{7} \rceil$$

FIGURE 3.9 – La domination de puissance de le cycle en puissance 3.

Proposition 3.3 *Soit C_n un cycle d'ordre n, et C_n^k la puissance de C_n, alors,*

$$\gamma(C_n^k) = \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$$

Preuve 3.2 *Soit C_n un cycle d'ordre n, numéroteé $v_1, v_2, ..., v_n, v_1$. C_n^k est la k-îéme puissance de C_n où chaque sommet v_i est adjacent à tous les sommets v_j tels que $\mid i - j \mid \leq k$. Un ensemble D de sommets est un sommet dominant de C_n^k si chaque sommet dans C_n^k est soit dans D, soit adjacent à un sommet de D.*

Premièrement montrons que $\gamma(C_n^k) \leq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$

Soit $D = \{v_i \in V/i = 2k+1, 2(2k+1), 3(2k+1), ...\}$

$V\{v_n si\ n\ n'est\ pas\ un\ multiple\ de\ 2k+1\}$,

alors $|D| = \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$ *et D est dominant donc :*

$$\gamma(C_n^k) \leq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$$

Maintenant montrons que $\gamma(C_n^k) \geq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$ *, soit D un ensemble dominant sur* $C_{\frac{k}{n}}$*, alors chaque sommet* v_i *dans D peut dominer au plus* $2k+1$ *sommets (lui même plus k voisins de chaque coté), ainsi pour dominer n sommets, nous avons besoin d'au moins* $\frac{n}{2k+1}$ *sommets dans D.*

Cependant , pour les cycles C_n*, en pratique, nous considérons des intervalles de* $2k+1$ *donc :*

$$\gamma(C_n^k) \geq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$$

Proposition 3.4 $\gamma(C_n^k) = |V^+|$ *telque* V^+ *est l'ensemble de sommet broadcast limité* $\gamma_{b,k}$.

Exemple 3.2 *D'après la Figure 3.7 suivante on a :* $\mid V^+ \mid = 2$

et on a : $\gamma(C_n^k) = \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$

$\gamma(C_{11}^4) = \lceil \frac{11}{9} \rceil = 2$

alors : $\mid V^+ \mid = \gamma(c_{11}^4)$.

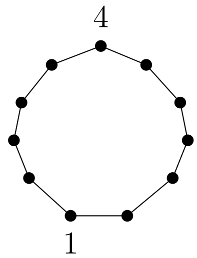
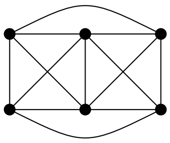


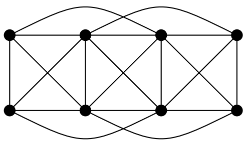
FIGURE 3.10 – Cycle C_{11} avec $\mid V^{+} \mid = 2$ pour $k \leq 4$.

3.1.3 Domination dans les puissances des grilles

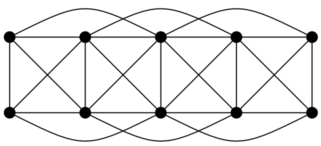
Nous continuons en examinant par la classe des grilles, nous essayons de donner une valeur pour la puissance des grilles ($G^k_{n,m}$) en changeant à chaque fois, l'ordre de la grille et la puissance, en vu d'obtenir une formule exacte en fonction de n, m et k.



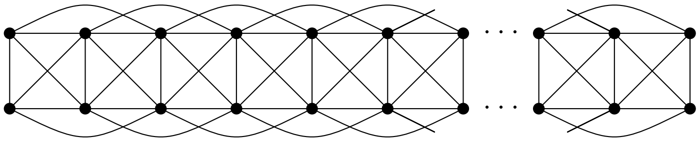
$\gamma(G^2_{2,3}) = 1$



$\gamma(G^2_{2,4}) = 2$

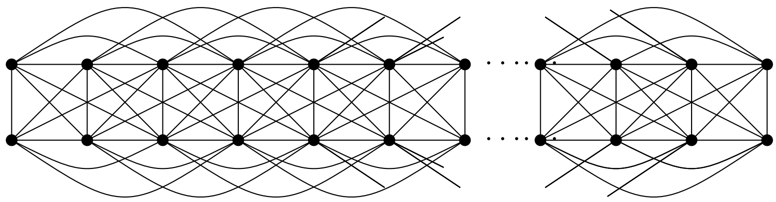


$\gamma(G^2_{2,5}) = 2$



$$\gamma\left(G^2_{2,m}\right) = \begin{cases} \lceil \dfrac{2m}{8} \rceil, & \text{si} \quad m \equiv 7[8] \\ \lceil \dfrac{2m}{7} \rceil, & \text{sinon.} \end{cases}$$

FIGURE 3.11 – La domination de puissance de la grille $G_{2,m}$ en puissance 2.



$$\gamma\left(G_{2,m}^{3}\right)=\begin{cases}\lceil\dfrac{2m}{12}\rceil, & \text{si} \quad m\equiv 11[12]\\ \lceil\dfrac{2m}{11}\rceil, & \text{sinon.}\end{cases}$$

FIGURE 3.12 – La domination de puissance de la grille $G_{2,m}$ en puissance 3.

Proposition 3.5 *Soit $G_{2,m}$ une grille d'ordre $n \times m$, et $G_{2,m}^{k}$ la k puissance de $G_{2,m}$, alors,*

$$\gamma\left(G_{2,m}^{k}\right)=\begin{cases}\lceil\dfrac{2m}{4k}\rceil, & si \quad m\equiv (4k-1)[4k]\\ \lceil\dfrac{2m}{4k-1}\rceil, & sinon.\end{cases}$$

Proposition 3.6 $\gamma(G_{2,m}^{k}) = |V^{+}|$ *telque V^{+} est l'ensemble de sommet broadcast limité* $\gamma_{b,k}$

Exemple 3.3 *D'après la Figure 3.10 suivante on a :* $\mid V^{+} \mid = 2$

et on a :

$$\gamma\left(G_{2,m}^{k}\right)=\begin{cases}\lceil\dfrac{2m}{4k}\rceil, & si \quad m\equiv (4k-1)[4k]\\ \lceil\dfrac{2m}{4k-1}\rceil, & sinon.\end{cases}$$

$\gamma(G_{2,7}^{3}) = \lceil\frac{14}{11}\rceil = 2$

alors : $\mid V^{+} \mid = \gamma(G_{2,m}^{k})$.

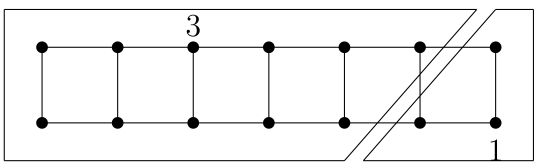


FIGURE 3.13 – Grille $G_{2,m}$ avec $\mid V^{+} \mid = 2$.

Dans le résultat suivant, nous présentons la relation entre l'ensemble de sommets broadcasts dans un broadcast k-limité sur le graphe G, noté $|V_k^+|$ et le nombre de domination sur la k-puissance de G, notée, $\gamma(G^k)$.

Proposition 3.7 *Pour tout graphe connexe G, avec égalité pour quelques classes de graphes.*

$$|V_k^+| \leq \gamma(G^k)$$

Preuve 3.3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et connexe , soit $|V_k^+|$ un ensemble de sommets de broadcast k-limité dans le graphe G. Cela signifie que tout sommet de G peut être atteint de puis au moins un sommet de S en distance maximum k.*

Maintenant, considérons la k-puissance du graphe G, notée G^k, dans G^k, deux sommets sont reliées s'ils sont à une distance de k ou moins dans G.

Si S est un ensemble de sommets broadcasts d'un broadcast k-limité dans G, alors chaque sommet u de G Peut être atteint depuis un sommet v de S tel que $f(v) \geq d(v, u)$ et $f(v) \leq k$.

Cela signifie que pour chaque sommet de G, il existe au moins un sommet dans S qui lui est adjacent dans G^k, puisque G^k represente les connexions possible en distance inférieures ou égalent à k, dans G. Ainsi, chaque sommet de G est dominé par au moins un sommet de S dans G^k, par conséquent le nombre minimum de sommets nécessaires pour dominer tous les sommets de G^k, c'est-à-dire le nombre de domination de G^k, noté $\gamma(G^k)$ est supérieur ou égal au cardinal de S donc :

$$|V_k^+| \leq \gamma(G^k).$$

Avec égalité pour quelques classes de graphes.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons travaillé sur quelques paramètres de graphes. Sur le nombre de domination dans la classe de puissance d'un graphe.

Nous avons commencé par la classe des chaînes et les cycles, pour lesquels, nous avons prouvé une valeur exacte du nombre de domination en fonction de l'ordre n et la puissance k. Aprés, nous avons essayé de donner la formule pour la classe des grilles.

La broadcast domination à pris une petite partie de notre travail, dans laquelle nous avons prouvé que le cardinal de l'ensemble de broadcast dominant limité par k, noté $\mid V_k^+ \mid$ inférieure ou égale au nombre de domination de la k-puissance d'un graphe pour G est un graphe quelconque, avec égalité pour des classes de graphes.

Bibliographie

[1] C. Berge, *Les problèmes de coloration en théorie des graphes*, Univ. Paris 9, (1960), 123-160.

[2] C. Berge, *Theory of Graphs and its Applications*, Dunod, Paris, 1958.

[3] M. Blidia, M. Chellali, T. Haynes, M. A. Henning, *Independent and double domination In trees.*

[4] M. Blidia, M. Chellali, T. Haynes, *Characterizations of trees withs equal paired and double domination*, Soumis screte mathematics, (2003).

[5] K. S Booth, J. H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*, SIAM J. Comput, 11(1982), 191-199.

[6] B. Bresar, S. Spacapan, *Broadcast domination of products of graphs*, University of Maribor, Slovenia, 2006.

[7] R. C. Brigham, J. R. Carrington, R. P. Vitray, *Connected Graphs with maximum total domination number*, J. Combin.

[8] Y. Caro, Y. Roditty, *Graph J Math*, 13(1990), 205-206.

[9] M. Chellali, *A note in the k-domination number of a Etude de quelques invariants de graphes*, these de doctorat, U. S. T. H. B, 2005.

[10] M. Chellali, T. Haynes, *A note on the total domination numbers of tree.*

[11] M. Chellali, T. Haynes, *Trees with unique minimum paired dominating sets*, Ars Comb. 73 (2004), 3-12.

[12] M. Chellali, T. Haynes, *On paired and double domination in graphs*, Utilitas math, 67(2005), 161-171.

[13] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, S. T. Hedetniemi, *Total domination in graphs*, Networks, 10 (1980), 211-219.

[14] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domation in graphs*, Networks, 7(1977), 247-261.

[15] P. Dorbec, M. Mollard, S. Klavzar, S. Spacapan , *Power domination in product graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 22(2), (2008), 554-567.

[16] M. Dorfling, M. A. Henning, *A note on power domination in grid graphs*, Discrete Applied Mathematics, 154(6), (2006), 1023-1027.

[17] J. E. Dunbar, D. J. Erwin, T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, *Broadcasts in graphs*, Discrete Appl. Math. 154(2006), 59-75.

[18] D. Erwin, *Cost domination in graphs*, Ph. D. Dissertation, Western Michigan University, 2001.

[19] D. Erwin, *Dominating broadcasts in graphs*, Bull. Inst. Combin. Appl, 42(2004), 89-105.

[20] G. H. Fricke, S .M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae, C. K. Wallis, M. S. Jacobson, H. W. Martin and W. D. Weakley, *Combinatorial problems on chessboards, A briev survey, dans Graph Theory , Combinatorics and Applications : proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Application of Graphs*, vol. 1, Y. Alavi, A. Schwenk, Eds, Wiley, (1995)507-528.

[21] T. W. Haynes, P. J. Slater, *paired dominations in graphs*, Networks, 32(1998).

[22] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[23] F. Harary, T. W. Haynes, *Double domination in graphs*, Ars Combin, 55(2000), 201-213.

[24] S. T. Hedetniemi, R. C. Laskar, *Introduction Discrete Mathematics*, 86(1990), 3-9.

[25] C. F. De Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs*, Petrograde, 1862.

[26] R. Laskar, J. Pfas, S. T. Hedetniemi, *NP-complitness of total dominationand connected domination, and irredundance for bipartite graphs*, Technical Report 428, Clemson univ, 1983.

[27] C. L. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, NewYork, 1968.

[28] O. Ore, *theory of graphs*, Amer. Math soc, 38(1962).

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons essayé d'étudier un paramètre de domination dans la classe de puissance des graphes, pour cela nous avons présenté cette classe en définition et exemples. Ensuite, nous avons étudié le nombre de domination dans les puissances de graphes pour les classes de chaînes, cycles et grilles. Finalement, nous avons prouvé le nombre de domination de la k-puissance d'un graphe G inférieure ou égale au cardinale minimum de l'ensemble de sont broadcast d'une fonction broadcast k-limité.

Mots clés : *Domination, broadcast domination, broadcast limité, k-puissance d'un graphe.*

Abstract

In this thesis, we have endeavored to study a domination parameter within the power class of graphs. To this end, we introduced this class with definitions and examples. Subsequently, we investigated the domination number in graph powers for the classes of paths, cycles, and grids. Finally, we proved that the domination number of the k-power of a graph G is less than or equal to the minimum cardinality of its k-limited broadcast set.

Keywords : *Domination, broadcast domination, limited broadcast, k-power of a graph.*