الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالــي والبحــث العلمــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des Mathématiques et Informatique **Département de Mathématiques**

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Approximation par éléments finis P_1 des Equations aux Dérivées Partielles

Préparé par :
- Boughelourn Dalal
- Boulesnane Soundes

Soutenue devant le jury

Boudjedaa Badredine	Prof.	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Bencheikh Le Hocine Mohamed El Aime	Prof.	Univ. Amine Okal Hadj Moussa Eg Akhamouk Tamanghasset	Encadrant
Mohammed Salah Abdelouahab	Prof.	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire :2023/2024

Dédicace

Je dédie ce travail

A mes parents

A mes fréres Masaab, Mohamed islam et mes soeurs Basma, Sidra, Asinat

A toute ma famille, proche ou éloignée

(SOUNDES)

Dédicace

Je dédi ce travail :

A mes chers parents,

qui ont toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager et pour que je puisse atteindre mes objectifss.

A mes chers proches,

qui je souhaite une bonne santé. Que Dieu les protége et leurs offre la chance et le bonheur.

A touts mes amis,

qui je souhaite plus de succés.

J'espére que ce travail satisfera la confiance que vous avez en moi

(DALAL)

Remerciements

Avant tout remercions Dieu ALLAH le tout puissant de nous avoir accordé la force.le courage et la patience pour terminer ce travail .

Nous tenons également à remercier le directeur du mémoire Prof. Mohamed El Amine Bencheikh Le Hocine, professeur de mathématiques à l'université de Tamanghasset pour son encadrement, sa guidance, sa disponibilité et ses conseils.

Nous remercions également Prof. Badredine Boudjedaa, professeur de mathématiques au centre universitaire de Mila, pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Nous remercions également Prof. Mohammed Salah Abdelouahab, professeur de mathématiques au centre universitaire de Mila pour avoir accepté de faire partie du jury.

Nous remercions également toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin, par leurs conseils et suggestions, à la réalisation de ce travail.

Table des matières

.

Introduction générale

Pour analyser un phénomène naturel en générale ou un problème d'ingénierie en particulier, on est souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question.

L'élaboration d'un modèle mathématique repose généralement sur quelques postulats de base et plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir aux équations gouvernantes, qui sont généralement des équations différentielles, aux quelles s'ajoutent des conditions aux limites.

Depuis leur introduction en 1950, les équations aux dérivées partielles (en abrégé EDP) ont servi comme un outil de modélisation pour représenter analytiquement le comportement dynamique à propos de certains systèmes physiques. Aujourd'hui, l'application des EDP n'épargne presque aucun domaine : biologie, chimie, économie, dynamique des populations, traitement de signal, etc... d'où l'intérêt porté à leur résolution.

La résolution analytique des EDP pose parfois des difficultés insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. C'est dans cette optique que les recherches se sont penchées sur les méthodes numériques pour arriver à trouver une solution approchée à la solution recherchée de ces équations. Notons que malgré ces efforts indéniables, il n'existe pas de méthode universelle pour la résolution numérique des EDP...

Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions satisfaisantes. On pense par exemple à la méthode des différences finies, cette méthode travaille directement sur une discrétisation de l'équation via une discrétisation du domaine. Mais nous allons nous intéresser à une autre méthode dont l'esprit est un peu différent et plus abstrait, c'est la méthode des éléments finis qui est basée essentiellement sur la discrétisation de l'espace des solutions cherchées, plutôt que le domaine sur lequel l'équation est posée. A part la méthode des différences finies et des éléments finis, il existe bien d'autres méthodes d'approximation comme la méthode du volumes finis, la méthode spectrale, etc... Mais, la méthode des éléments finis est l'une la plus largement répandue. Le but de notre mémoire serait donc, d'introduire les bases de la résolution des EDP par la méthode des éléments finis notamment les éléments finis $\mathbb{P}_1$.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Le premier chapitre contient des rappels d'analyse fonctionnelle nécessaires à l'application de la méthode des éléments finis. Ces rappels concernent les distributions, les espaces de Hilbert et les espaces de Sobolev, ainsi que la notion de trace. Dans le second chapitre, nous allons parler de la formulation variationnelle des EDP notamment les EDP elliptiques. Le chapitre 3, est conçue pour fournir une étude de l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle dans un espace de Hilbert. Nous consacrons le quatrième chapitre à la méthode des éléments finis que l'on va illustrer par deux problèmes .unidimensionnels

CHAPITRE 1 Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et des résultats utilisés tout au lang de ce travail.

1.1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles

1.1.1 Introduction

De très nombreux problèmes en physique, en mécanique bien sûr mais aussi en chimie (systèmes de réaction-difusion) en biologie ou écologie (dynamique des populations) en économie (gestion de stocks), en finance (pricing d'options et de produits dérivés) ect. sont modélisés à l'aide d'Equations aux Dérivées Partielles, en abrégé EDP.

1.1.2 Equations aux dérivées partielles et leurs classification

Définition d'une EDP

Définition 1.1.1 (*équation de différentielle*) *Une équation faisant intervenir une fonctions inconnue, d'une seule variable ou de plusieurs variables indépendantes, leurs dérivées ordinaires ou dérivées partielles et la variable ou les variables indépendantes est appelée Equation Differentielle, ED.*

Exemple 1.1.1 *Pour examples d'ED, nous citons les suivantes :*

1. *Equation différentielle ordinaire*

$$\frac{d^2u}{dx^2} + x\ u\ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 0 \tag{1.1.1}$$

2. *Equations aux dérivées partielles*

   a .

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u \tag{1.1.2}$$

   b.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1.3}$$

Définition 1.1.2 (*équation aux dérivées ordinaire*) *Une équation différentielle faisant intervenir une fonction inconnue, d'une seule variable indépendant, ses dérivées ordinaire et la variable indépendante est appelée Equation Différentielle Ordinaire, en abrégé EDO.*

Exemple 1.1.2 *L'équation* (1.1.1) *est une EDO.*

Définition 1.1.3 (*équation aux dérivées partielles*) *Une équation différentielle faisant intervenir une fonction inconnue, de plusieurs variables indépendantes, ses dérivées partielles et les variables indépendantes est appelée Equation aux Dérivées Partielles , en abrégé EDP.*

Notation 1.1.1 *Si u est une fonction à deux variables, une EDP peut s'exprimer par la relation suivante :*

$$F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}, \ldots\right) = 0 \tag{1.1.4}$$

Exemple 1.1.3 *Les équations* (1.1.2) *et* (1.1.3) *sont des EDP.*

1. ***Dans l'équation*** (1.1.2) *: les variables x et y sont indépendantes et u est la fonction inconnue*

2. ***Dans l'équation*** (1.1.3) *: les variables x, y et z sont indépendantes et v est la fonction inconnue.*

Ordre d'une ED

Définition 1.1.4 *L'ordre le plus élevé de la dérivée figurant dans l'ED est appelé l'ordre de l'ED.*

Exemple 1.1.4 *L'EDO* (1.1.1) *est d'ordre 2. Les équations aux dérivées partielles* (1.1.2) *et* (1.1.3) *sont d'ordre 1 et 2, respectivement.*

EDP linéaire

Définition 1.1.5 (*EDP linéaire*) *Une équation aux dérivées partielles est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées figurant dans l'équation différentielle.*

Exemple 1.1.5 *Les deux EDP suivantes sont linéaires :*

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u\ e^{xy} = 0. \tag{1.1.5}$$

2. $$\sin(xy)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\ x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u = 0. \tag{1.1.6}$$

EDP non-linéaire

Définition 1.1.6 (*EDP non-linéaire*) *Une équation aux dérivées partielles est dite non-linéaire si elle n'est pas linéaire par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées figurant dans l'équation différentielle.*

Notons que l'équation aux dérivées partielle (1.1.4) *est linéaire si la fonction F est linéaire par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles figurant dans F et elle est non-linéaire si F n'est pas linéaire par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles figurant dans F.*

Exemple 1.1.6 *Les duex EDP suivantes sont nonlinéaires :*

1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u\ e^x - y = 0. \tag{1.1.7}$$

2.

$$\sin(u)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u = 0. \tag{1.1.8}$$

1.1.3 Classification mathématiques des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2

Cas de deux variables indépendantes

Définition 1.1.7 *L'EDP linéaire d'ordre deux est equation de la forme*

$$A\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\ \frac{\partial u}{\partial x} + E\ \frac{\partial u}{\partial y}\ +\ F\ u = G \tag{1.1.9}$$

où $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ et G sont des fonction dépendent que de x et y.

L'équation (1.1.9) *est dite :*

1. *hyperbolique si*

$$\Delta = B^2 - 4\ A\ C > 0;$$

2. *parabolique si*

$$\Delta = B^2 - 4\ A\ C = 0;$$

3. *elliptique si*

$$\Delta = B^2 - 4\ A\ C < 0.$$

Exemple 1.1.7 *Soit $u\,(x,\ y)$ une fonction à deux variables.*

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

   est hyperbolique.

2. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

   est parabolique.

3. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

   est elliptique.

1.1.4 Appelation physique des équations aux dérivées partielles

La majorité des phénomènes physiques appartiennent à l'une des catégories suivantes :

Les problèmes d'équilibre

Définition 1.1.8 *Un problème est dit d'équilibre s'il est régi par une EDP* ***elliptique****. Autrement dit, le problème d'équilibre étudie l'état* ***stationnaire*** *d'un phénomène (champ, chaleur, vibration, etc.) dans un domaine borné ou non.*

Exemple 1.1.8 *Pour les problèmes d'équilibre nous citons par exemple les suivants :*

1. *Equation de Poisson :*

$$-\Delta u = f.$$

2. *Equation de Laplace :*

$$\Delta u = 0.$$

3. *Equation de Helmholtz:*

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Les problèmes d'évolution

Définition 1.1.9 *Un problème est dit d'évolution s'il est régi par une EDP soit* ***parabilque*** *ou soit* ***hyperbolique****. Autrement dit, le problème d'évolution étudie* ***l'évolution*** *d'un phénomène (champ, chaleur, vibration, etc.) au cours du temps à partir d'un état initial.*

Exemple 1.1.9 *Pour les problèmes d'évolution nous citons par exemple les suivants :*

1. *Equation de la chaleur :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = f \quad (parabolique) .$$

2. Equation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \ \Delta u = 0 \quad (\textit{hyperbolique}) \, .$$

3. Equation de vibration de plaque mince :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \ \left(\Delta u\right)^2 = 0 \quad (\textit{hyperbolique}) \, .$$

1.1.5 Conditions aux limites

On doit se donner des conditions aux limites . L'équation étant vérifiée dans un domaine Ω de l'espace $\mathbb{R}^n$ (ou espace-temps), on distingue trois types de conditions.

Conditions aux limites de Dirichlet

- On impose la valeur de u sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω . Dans le cas où on étudie un problème dépendant du temps, cela inclut des conditions initiales.

Conditions aux limites de Neumann

- C'est la valeur de la dérivée normale $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \overrightarrow{\nabla u} \ \overrightarrow{\eta}$ que l'on impose.

Conditions aux limites mixte

- On impose les deux conditions (Dirichlet et Newmann) sur la frontière $\partial\Omega$.

1.1.6 Notion de problème bien posé

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un problème, associé à une EDO ou EDP dans Ω avec des conditions aux limites, est dit bien posé si:

1. Il admet une solution vérifiant EDO ou EDP dans Ω (existence).
2. La solution est unique (unicité).
3. La solustion dépend continûment des données du problème.

1.2 Espaces de Sobolev

Une grande partie des phénomènes observés dans la nature sont représentés par des Equations aux Dérivées Partielles (en abrégé EDP). Il a été démontré que l'espace des fonctions qui peuvent être suffisamment dérivables souvent pour donner des résultats significatifs dans le contexte de l'EDP n'est pas un cadre approprié pour examiner son incomplétude. Cela nécessite l'introduction d'un espace alternatif, plus complet, connu sous le nom d'espace de **Sobolev**, qui sera défini plus en détail par la suite.

Cette section est conçue pour fournir les outils fondamentaux nécessaires à l'utilisation de la méthode des éléments finis qui sera (décrite au chapitre 4). Les outils fondamentaux comprennent les concepts de distribution, d'espaces fonctionnels et de Sobolev, ainsi que la notion de trace.

1.2.1 Rappel sur la théorie des distriburions

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$.

Support d'une fonction

Définition 1.2.1 *Soit $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle support de f l'ensemble :*

$$supp\ \varphi = \overline{\{x \in \Omega\ tel\ que\ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.2.2 *La fonction φ est dite a support compact s'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que*

$$supp\ \varphi \subset K.$$

Espace des fonctions tests

Définition 1.2.3 *L'espace des fonctions tests est l'ensemble noté $\mathcal{D}(\Omega)$ défini par*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^{\infty}(\Omega) \text{ tel que } \varphi \text{ est a support compact}\}.$$

Distriburion

Définition 1.2.4 *Soit $T: \underset{\varphi \to T(\varphi) = \langle T, \varphi \ \rangle}{\mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}}$ une application. Alors T est appelée distribution si elle vérifie les deux conditions suivante :*

1. *T est linéaire;*

2. *T est continue dans le sens suivant : soit $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ tel que*

$$\varphi_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi,$$

alors on a

$$\begin{array}{ccc} \langle T, \varphi_n \rangle & \to & \langle T, \varphi \rangle \\ n & \to & +\infty \end{array}$$

Notation 1.2.1 *On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.*

Remarque 1.2.1 *$\mathcal{D}'(\Omega)$ est appelé le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\langle ., . \rangle$ est le crochet du dualité.*

Distribution associée à une fonction localement intégrable

Lemme 1.2.1 *Soit*

$$L^1_{loc} = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que pout tout compact } K \subset \Omega,\ f \text{ est intégrable sur } K\}.$$

Les éléments de L^1_{loc} sont dits des fonctions localement intégrables.

Proposition 1.2.1 *Soit f une fonction localement intégrable, alors la forme linéaire T_f définie par*

$$T_f(\varphi) = \langle T_f,\ \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} f\varphi\ dx,\ \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

est une distribution sur Ω.

Remarque 1.2.2 *L'application qui à $f \in L^1_{loc}$ on associe*

$$T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

est linéaire est injective. De ce fait, on écrit

$$T(f) = T_f.$$

Corollaire 1.2.1 *D'apèrs la remarque précédente, on a*

$$L^1_{loc}(\Omega) \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Remarque 1.2.3 *L'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ contient les espaces $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1,\ +\infty]$ c'est-à-dire que les éléments de $L^p(\Omega)$ sont des fonctions localement intégrables.*

Proposition 1.2.2 *En vertu de remarque précédente, on peut identifier l'espace des fonctions de carré intégrables $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Autrement dit*

$$L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration. On rapelle que :

1. $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f,\ g) = \int\limits_{\Omega} f(x)\, g(x)\ dx$$

avec la norme correspondante

$$\|f\| = (f,\ f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, *i.e.*,

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = \ L^2(\Omega).$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$, on lui associe distribution T_f sur Ω définie par :

$$\langle T_f,\ \varphi \rangle = \int_{\Omega} f\varphi \ dx, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(a) Si $T_f = 0$, c'est-à-dire, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} f\varphi \ dx = 0.$$

Compte tenu de la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, alors on a pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) \ dx = 0$$

ce qui implique

$$f = 0.$$

Cela veut dire que l'application $f \longmapsto T_f$ est injective de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par linéarité, ceci prouve que l'égalité de deux distributions T_f et T_g implique l'égalité des deux fonctions f et g au sens de $L^2(\Omega)$ partout. On peut donc identifier f à T_f. Autrement dit

$$L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

■

Dérivée au sens des distribution

Définition 1.2.5 *Si* $T \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$, *on définit* $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ *la dérivée de* T *au sens des distributions par*

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x},\ \varphi \right\rangle = -\left\langle T,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle,\ \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De manière analogue on peut définir les dérivées successives. Pour chaque multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, *on définit*

$$\langle D^\alpha T,\ \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T,\ D^\alpha \varphi \rangle,\ \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Remarque 1.2.4 *Comme* $\left\langle T,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle$ *est une forme linéaire continue sur* $\mathcal{D}(\Omega)$, *donc* $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ *est une distribution sur* Ω.

Remarque 1.2.5 *Toute distribution est infiniment dérivable au sens des distributions.*

1.2.2 Espaces fonctionnels

L'espace $C^k(\Omega)$

Définition 1.2.6 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Une fonction* $f : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite continue en* $x_0 \in \Omega$, *pour tout* $\epsilon > 0$, *s'il existe* $\delta > 0$ *telle que pour tout* $x \in \Omega$, *on a*

$$\|x - x_0\| < 0 \Longrightarrow |u(x) - u(x_0)| < \epsilon,$$

où $\|.\|$ *désigne la norme dans* $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.7 *On définit*

$$C^0(\Omega) = \{f : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ est continue}\}$$

et

$$C^0(\bar{\Omega}) = \left\{f : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ est continue et se prolonge continument sur } \bar{\Omega}\right\}.$$

Définition 1.2.8 *Une fonction $f:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^k sur Ω si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues.*

Formellement, $f:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe sur Ω si

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in C^0(\Omega)\,,\ \textit{pour tout } k = 0, 1, .., n.$$

On pose alors

$$C^k(\Omega) = \left\{ f:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ tel que } f \textit{ est de classe } C^k \textit{ sur } \Omega \right\}$$

et

$$C^k\left(\bar{\Omega}\right) = \left\{ \begin{array}{c} f:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ tel que } f \textit{ est de classe } C^k \textit{ sur } \Omega \textit{ et toutes ses dérivées partielles} \\ \\ \textit{jusqu'à l'ordre } k \textit{ se prolonge continument sur } \bar{\Omega} \end{array} \right\}.$$

1.2.3 Espaces de Sobolev

Espace $H^1(\Omega)$

Soit u une fonction de $L^2(\Omega)$, elle est comme étant une distribution sur Ω ,et on peut définir ses dérivées $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$, en tant que distributions sur Ω. En général $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ n'est pas une fonction de carré intégrable c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \notin L^2(\Omega)\,.$$

Définition 1.2.9 *On appelle espace de Sobolev d'ordre $H^1(\Omega)$ sur Ω l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées partielles au sens des distributions (au sens faible) sont associées à des fonctions localement intégrables qui sont aussi dans $L^2(\Omega)$, on le note $H^1(\Omega)$ et on écrit*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \textit{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\,,\ 1 \le i \le n \right\} \tag{1.2.1}$$

$$= \left\{ u \in L^2(\Omega) \textit{ tel que } \nabla u \in \left(L^2(\Omega)\right)^n \right\}.$$

Il est clair que $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel euclidien muni du produit scalaire réel

$$(u,\ v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u\ v\ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx$$

$$= \int_\Omega u\ v\ dx + \int_\Omega \nabla u\ \nabla v\ dx, \tag{1.2.2}$$

dont la norme correspondante est définie par

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u,\ u)^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\ u|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \ \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2.3}$$

Remarque 1.2.6 *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable pour son produit scalaire.*

Proposition 1.2.3 (cf. [23]) *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, alors l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$, i. e.,*

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)} \neq H^1(\Omega).$$

Remarque 1.2.7 *Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est pas dense dans $H^1(\Omega)$, i. e.,*

$$\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = H^1(\mathbb{R}^n).$$

Espace $H^1_0(\Omega)$

Définition 1.2.10 *L'espace $H^1_0(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, i. e.,*

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H^1_0(\Omega).$$

Autrement dit, les fonctions de $H^1_0(\Omega)$ sont les limites dans $H^1(\Omega)$ des suites de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Remarque 1.2.8 *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Corollaire 1.2.2 *La semi-norme*

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.2.4}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme induite par celle de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Espace $H^m(\Omega)$

Définition 1.2.11 *On appelle espace de Sobolev $H^m(\Omega)$d'ordre m sur Ω et on le note l'ensemble suivant:*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega)\,;\ \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\,,\ \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ un multi-indices tel que } |\alpha| \le m \right\}.$$

1.2.4 Quelques inégalités utiles

On dit que $p,\ q \in [1,\ +\infty]$ sont deux exposants conjugués si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Inégalité de Hölder

Théorème 1.2.1 (cf. [1]) *Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors*

$$u\ v \in L^1(\Omega)$$

et on a

$$\|u\ v\|_{L^1(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)}\ \ \|v\|_{L^q(\Omega)}\,. \tag{1.2.5}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.2.2 (cf. [1]) *Dans l'inégalite de Hölder, si $p = q = 2$, alors on a*

$$\|u\ v\|_{L^1(\Omega)} \le \|u\|_{L^2(\Omega)}\ \ \|v\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{1.2.6}$$

Inégalité de Poincaré

Théorème 1.2.3 (cf. [24]) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné de classe C^1. Alors, il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ tel que*

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C(\Omega) \quad \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{1.2.7}$$

pour toute fonction $u \in H^1_0(\Omega)$.

1.3 Notion de trace

1.3.1 Opérateur de trace

Définition 1.3.1 (***opérateur de trace***) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. L'application*

$$\gamma_0 : \begin{array}{c} \left(\mathcal{D}(\bar{\Omega}),\ \|.\|_{H^1(\Omega)}\right) \longrightarrow \left(C^0(\partial\Omega),\ \|.\|_{L^2(\partial\Omega)}\right) \\ u \to \gamma_0(u) = u\Big|_{\partial\Omega} \end{array}$$

Définition 1.3.2 *se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire et continu, noté γ_0 défini par :*

$$\begin{array}{c} \gamma_0 \ : \ H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \\ u \to \gamma_0(u) = u\Big|_{\partial\Omega} \end{array} \tag{1.3.1}$$

appelée opérateur de trace.associé à l'espace $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.3.1 (cf. [24]) (***théorème de trace***) *Le noyau de l'application trace γ_0 est dans $H^1_0(\nleqslant)$. Autrement dit,*

$$\ker \gamma_0 = H^1_0(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \ v\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \tag{1.3.2}$$

Définition 1.3.3 (***la continuité de γ_0***) *L'opérateur de trace γ_0 est continu dans le sens où, il existe $C > 0$, pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \ \|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.3.3}$$

1.3.2 Espace de trace

Théorème 1.3.2 (cf. [24]) *L'opérateur de trace γ_0 n'est pas surjectif est un sous-espace propre de $L^2(\partial\Omega)$. On notera*

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \gamma_0\left(H^1(\Omega)\right)$$

qui est défini par :

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left\{u \in L^2(\partial\Omega) : \ \textit{il existe } v \in H^1(\Omega) \ \textit{tel que } \gamma_0(v) = u \ \textit{dans } L^2(\partial\Omega)\right\} \tag{1.3.4}$$

1.3.3 Formule de Green

Théorème 1.3.3 (cf. [24]) (***formule de Green***) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. Alors pour tous u, $v \in H^1(\Omega)$ on a*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \ v \ dx = -\int\limits_{\Omega} u \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \ dx + \int\limits_{\partial\Omega} u \ v \ \eta_i \ d\sigma \tag{1.3.5}$$

où η_i est la i-ème composante du vecteur unitaire normal à l'extérieur Ω.et $d\sigma$ est la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.

CHAPITRE 2

Introduction à l'analyse variationnelle des EDP

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de certaines EDP. L'objet principal est de montrer comment il est possible de donner une écriture mathématique simple (on parle aussi de la formulation variationnelle ou faible) de ces problèmes qui permette une démonstration aisée de l'existence et l'unicité des solutions.

2.2 Ecriture variationnelle ou faible des EDP elliptiques linéaires

2.2.1 Principe général et problème modèle

Principe : .

Au cours de cette section, l'exemple modèle d'EDP que nous allons traiter sera le Laplacien, pour lequel nous étudions le problème suivant :

Problème 2.2.1 *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et soit $f \in L^2(\Omega)$. On se propose de déterminer une fonction définie dans Ω solution de l'équation de Laplace* *munie des conditions aux limites de Dirichlet homogènes suivante :*

$$\begin{cases} -\Delta\ u = f, & \textit{dans } \Omega, \\ \\ u = 0, & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

avec $\Delta\ u$ *est l'opérateur de Laplace définie par*

$$\Delta\ u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \tag{2.2.2}$$

Remarque 2.2.1 *La formulation classique de ce problème consiste à chercher une solution* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *qui vérifie* (2.2.1), *cette solution est dite solution classique ou forte.*

Ecriture variationnelle du problème (2.2.1)

Procédure :

Pour construire la formulation variationnelle du problème (2.2.1), nous pouvons atopté la procédure suivante :

1. **Etape 1 : l'intégration sur** Ω

   Soit $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ avec

$$v\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.2.3}$$

   En multipliant la première équation de problème (2.2.1) par v et on intègre sur Ω, on a

$$-\int_{\Omega} (\Delta\ u)\ v\ dx = \int_{\Omega} f\ v\ dx,$$

   qui peut s'écrire

$$-\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) v\ dx = \int_{\Omega} f\ v\ dx.$$

2. **Etape 2 : l'utilisation de la formule de Green**

   L'application de la formule de Green, donne

$$-\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) v\ dx \ = \ \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx \ - \ \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \eta_i\ v\ d\sigma$$

$$= \ \int_{\Omega} f\ v\ dx.$$

   Compte tenu à (2.2.3), il vient

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx = \int_{\Omega} f\ v\ dx$$

   ce qui s'écrit encore

$$\int_{\Omega}\nabla u\ \nabla v\ dx = \int_{\Omega} f\ v\ dx.$$

3. **Etape 3 : choix de l'espace et écriture variationnelle**

   Maintenant, si on note

$$\mathbb{V} = \left\{C^2(\Omega)\cap C^1\left(\bar{\Omega}\right),\ v\Big|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

   alors on a le problème suivant : trouver $u \in \mathbb{V}$ tel que

$$\int_{\Omega}\nabla u\ \nabla v\ dx = \int_{\Omega} f\ v\ dx,\ \text{pour tout } v\in\mathbb{V}. \tag{2.2.4}$$

   C'est la fomulation variationnelle du problème (2.2.2).

Remarque 2.2.2 *Le but de cette démarche est de faire en sorte que l' équation précédente ait une solution unique et que l'on puisse ensuite montrer que l'on a bien résolu le problème initial* (2.2.1) *Il s'agit donc de bien choisir L'espace* $\mathbb{V}$.

L'existence et l'unicité de solution à (2.2.4) s'obtient à l'aide d'un théorème qu'on va le détailler dans le chapitre 3, c'est le théorème de **Lax-Milgram**.

Théorème 2.2.1 (*Lax-Milgram*) *Soit* $\mathbb{V}$ *un espace de Hilbert et*

$$\begin{aligned} a \quad &: \quad \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{R} \\ (u,v) \quad &\to \quad a\,(u,v) \end{aligned}$$

une forme bilinéaire continue et coercive sur $\mathbb{V}\times\mathbb{V}$ *et*

$$\begin{aligned} L \quad &: \quad \mathbb{V}\to\mathbb{R} \\ v \quad &\to \quad L\,(v) \end{aligned}$$

une forme linéaire continue sur $\mathbb{V}$.

Alors, le problème : trouver $u\in\mathbb{V}$ *tel que*

$$a\,(u,\ v) = L\,(v)\,,\ \textit{pour tout } v\in\mathbb{V} \tag{2.2.5}$$

admet une solution unique.

Notons que le problème (2.2.4) est de la forme (2.2.5) avec

$$a\,(u,\ v) = \int_{\Omega} \nabla u\ \nabla v\ dx$$

et

$$L\,(v) = \int_{\Omega} f\ v\ dx.$$

Pour que le problème (2.2.5) soit bien défini , il nous faut une régularité sur l'espace $\mathbb{V}$, on voit qu'il suffit de prendre $u,\ v\in C^1\,(\Omega)\cap C^0\left(\bar{\Omega}\right)$. On remarque que le théorème de Lax-Milgram est utilisé lorsque l'espace $\mathbb{V}$ est préhilbertien complet, ce qui n'est pas le cas pour

$$\mathbb{V} = \left\{u\in C^1\,(\Omega)\cap C^0\left(\bar{\Omega}\right),\ u\Big|_{\partial\Omega}=0\right\}$$

Question importante : "Que faut il faire pour rendre l'espace $\mathbb{V}$ complet ?"

Réponse : La réponse est l'utilisation des espaces de Sobolev qui sont bien des espaces de Hilbert.

Quelle est l'utilité des espaces de Sobolev ?

Idée :

L'idée des espaces de Sobolev est d'introduire les espaces des fonctions u tels que $u \in L^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, qui sont des espaces de Hilbert, et chercher les fonctions u qui vérifient pour toute fonction test $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u \; \nabla v \; dx = \int_{\Omega} f \; v \; dx,$$

et cette derniére n'est que la formulation variationuelle du problème (2.2.1).

Corollaire 2.2.1 *Le fait que les espaces de Sobolev sont complets est très important pour démontrer l'existence de solutions aux équations aux dérivées partielles moyennant des théorèmes qui basent sur les espaces de Hilbert (théorème de projection sur un espace de Hilbert, théorème de Lax-Milgram,...etc). Donc, les espaces de Sobolev sont les espaces "naturels" de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles des équations aux dérivées partielles.*

2.3 Etablissement des formulations variationnelles

Dans cette section, nous allons appliqué tout ce qui précéde avec plus de détail à l'étude de quelques EDP elliptiques modèles, c'est-à-dire nous allons utilisé les espaces de Sobolev, les dérivées seront au sens des distributions et les conditions aux limites au sens de la théorie des traces, pour établir la formulation variationnelle.

2.3.1 Problème de Dirichlet

Définition 2.3.1 *On appelle problème de Dirichlet une équation de Laplace avec des conditions aux limites de type Dirichlet c'est à dire on spécifie les valeurs de la solution sur la frontière.*

Cas des conditions aux limites homogènes.

Problème 2.3.1 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, $\partial\Omega$ sa frontière. On se propose de mettre sous forme variationnelle le problème de Dirichlet avec conditions aux limites homogènes :*

$$\begin{cases} -\Delta\ u = f, & \text{dans } \Omega, \\ \\ u = \mathbf{0}, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3.1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ une fonction donnée.

Supposons que le problème (2.3.1) admet une solution $u \in H^2(\Omega)$ (une solution assez régulière) .

Stratégie : Pour construire la formulation variationnelle du problème (2.3.1), nous pouvons suivre la stratégie suivante :

1. **Etape 1 : Multiplication par une fonction test**

   Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, en multipliant la première équation de problème (2.3.1) par v

$$-\Delta\ u\ v = fv.$$

2. **Etape 2 : Intégration sur Ω**

   On intègre sur Ω, on a

$$\int_\Omega -(\Delta\ u)\ v\ dx = \int_\Omega f\ v\ dx,$$

3. **Etape 3 : Utilisation de la formule de Green**

L'intégration par parties en utilisant la formule de Green, entraîne

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} -(\Delta\ u)\ v\ dx &= \int_{\Omega} -\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)\ v\ dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx\ -\ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \eta_i\ v\ d\sigma \\ &= \int_{\Omega} f\ v\ dx.\end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Omega} \nabla u\ \nabla v\ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ v\ d\sigma = \int_{\Omega} f\ v\ dx.$$

avec $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \overrightarrow{\nabla} u\ \overrightarrow{\eta}$.

4. **Etape 4 : choix de l'espace** $\mathbb{V}$

On souhaite que u et v soient dans un même espace de Hilbert $\mathbb{V}$ (une condition sur $\mathbb{V}$ dans le théorème de Lax-Milgram) et que $v = 0$ sur $\partial\Omega$, d'où

$$\int_{\Omega} \nabla u\ \nabla v\ dx = \int_{\Omega} f\ v\ dx.$$

Pour que $\int_{\Omega} \nabla u\ \nabla v\ dx$ soit bien définie, il suffit de prendre $\nabla u,\ \nabla v \in L^2(\Omega)$,et on a $f \in L^2(\Omega)$ par hypothèse, donc il suffit de prendre $f \in L^2(\Omega)$ pour que $\int_{\Omega} f\ v\ dx$ soit aussi bien définie.

L'idée est de choisir l'espace

$$\mathbb{V} = H_0^1(\Omega),$$

on prend $v \in H_0^1(\Omega)$, et comme u est de classe C^1 sur Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ alors on a

$$u \in H_0^1(\Omega).$$

5. **Etape 5 : la formulation variationnelle**

De ce qui précéde, on a le nouveau problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que} \\ \\ \int\limits_\Omega \nabla u \; \nabla v \; dx = \int\limits_\Omega f \; v \; dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.3.2}$$

C'est la fomulation variationnelle du problème (2.3.1).

Question : " pour des solutions réguliéres ,la formulation variationnelle est-elle équivalente à la formulation classique du probléme initial ? "

Réponse :

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (2.3.2), alors puisque

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$$

on a pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \nabla u \; \nabla \varphi \; dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \; dx = \int\limits_\Omega f \; \varphi \; dx$$

qui peut s'écrit encore

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Puisque la dérivation est au sens des distributions, alors on a

$$-\sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},\ \varphi \right\rangle = \ \langle f,\ \varphi \rangle$$

donc

$$\langle -\Delta u,\ \varphi \rangle = \ \langle f,\ \varphi \rangle\,.$$

Par conséquent, on a

$$-\Delta u = f.$$

Ce qui montre l'équivalence.

Cas des conditions aux limites non-homogènes.

Problème 2.3.2 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, $\partial\Omega$ sa frontière. On se propose de mettre sous forme variationnelle le problème de Dirichlet avec conditions aux limites non-homogènes :*

$$\begin{cases} -\Delta\ u = f, & \textit{dans } \Omega, \\ \\ u = \mathbf{g}, & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3.3}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée.

Pour se ramener au problème de Dirichlet homogène, on va construire un **relèvement**, c'est-à-dire une fonction $u_0 \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\gamma_0(u_0) = g$$

où γ_0 est l'application trace.

Remarque 2.3.1 *Si $g \in \mathrm{Im}(\gamma_0) = \gamma_0(H^1(\Omega))$ qui est un sous-espace de $L^2(\partial\Omega)$, on sait d'après le théorème de trace qu'il existe $u_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma_0(u_0) = g$.*

D'après la remarque précédente, on cherche u sous la forme

$$u = \tilde{u} + u_0$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \\ \\ \text{et} \\ \\ u_0 \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

telle que

$$\gamma_0(u_0) = g.$$

Stratégie :

1. **Etape 1 : Multiplication par une fonction test**

   Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, en multipliant la première équation de problème (2.3.3) par v

   $$-\Delta\ u\ v = fv.$$

2. **Etape 2 : Intégration sur Ω**

   On intègre sur Ω, on a

   $$\int_\Omega -(\Delta\ u)\ v\ dx = \int_\Omega f\ v\ dx.$$

   Comme $u = \tilde{u} + u_0,$ on trouve

   $$-\int_\Omega (\Delta\ \tilde{u})\ v\ dx - \int_\Omega (\Delta\ u_0)\ v\ dx = \int_\Omega f\ v\ dx.$$

3. **Etape 3 : Utilisation de la formule de Green**

   Par la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u}\ \nabla v\ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\ v\ d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u_0\ \nabla v\ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \eta}\ v\ d\sigma = \int_{\Omega} f\ v\ dx.$$

4. **Etape 4 : La formulation variationnelle**

   Puisque $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, alors

$$\tilde{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

   et on se ramène donc au nouveau problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)\,, \text{ tel que} \\ \\ \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}\ \nabla v\ dx = \int_{\Omega} f\ v\ dx - \int_{\Omega} \nabla u_0\ \nabla v\ dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

   C'est la fomulation variationnelle du problème (2.3.3).

2.3.2 Problème de Neumann

Cas des conditions aux limites homogènes.

Problème 2.3.3 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, $\partial\Omega$ sa frontière. On se propose de mettre sous forme variationnelle l'équation de Laplace avec conditions aux limites de Newmann homogènes :*

$$\begin{cases} -\Delta\ u + u = f, & \text{dans } \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \mathbf{0}, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3.5}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ une fonction donnée.

Supposons que le problème (2.3.5) admet une solution $u \in H^2(\Omega)$ (une solution assez régulière).

Stratégie :

1. **Etape 1 : Multiplication par une fonction test**

   Soit $v \in H^1(\Omega)$, en multipliant la première équation de problème (2.3.5) par v

$$(-\Delta\ u + u)\ \ v = fv.$$

2. **Etape 2 : Intégration sur Ω**

   On intègre sur Ω, on a

$$\int\limits_{\Omega} (-\Delta\ u + u)\ \ v\ dx = \int\limits_{\Omega} f\ \ v\ dx,$$

3. **Etape 3 : Utilisation de la formule de Green**

   L'utilisation la formule de Green, entraîne

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u\ \ \nabla v + uv)\ \ dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ v\ d\sigma = \int\limits_{\Omega} f\ \ v\ dx.$$

   Comme

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega,$$

   on obtient

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u\ \ \nabla v + uv)\ \ dx = \int\limits_{\Omega} f\ \ v\ dx.$$

4. **Etape 4 : La formulation variationnelle**

   La valeur de u n'est pas connue sur $\partial\Omega$, donc la formulation variationnelle du problème (2.3.5) est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega)\,,\ \text{ tel que} \\ \\ \int\limits_{\Omega} (\nabla u\ \ \nabla v + uv)\ \ dx = \int\limits_{\Omega} f\ \ v\ dx,\ \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega)\,. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Cas des conditions aux limites non-homogènes.

Problème 2.3.4 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, $\partial\Omega$ sa frontière. On se propose de mettre sous forme variationnelle l'équation de Laplace avec conditions aux limites de Newmann non-homogènes :*

$$\begin{cases} -\Delta\ u + u = f, & dans\ \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \mathbf{g}, & sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3.7}$$

où $f \in L^2\,(\nleqslant)$ est une fonction donnée.

Stratégie :

1. **Etape 1 : Multiplication par une fonction test**

   Soit $v \in H^1\,(\Omega)$, en multipliant la première équation de problème (2.3.7) par v

$$(-\Delta\ u + u)\ \ v = fv.$$

2. **Etape 2 : Intégration sur Ω**

   On intègre sur Ω, on a

$$\int\limits_{\Omega} (-\Delta\ u + u)\ \ v\ dx = \int\limits_{\Omega} f\ v\ dx,$$

3. **Etape 3 : Utilisation de la formule de Green**

   L'utilisation la formule de Green, entraîne

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u\ \nabla v + uv)\ \ dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ v\ d\sigma = \int\limits_{\Omega} f\ v\ dx.$$

   Comme

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = g \text{ sur } \partial\Omega,$$

on obtient

$$\int_{\Omega} (\nabla u \ \nabla v + uv) \ dx - \int_{\partial\Omega} g \ v \ d\sigma = \int_{\Omega} f \ v \ dx.$$

4. **Etape 4 : La formulation variationnelle**

   Compte tenu de la valeur de u n'est pas connue sur $\partial\Omega$, donc la formulation variationnelle du problème (2.3.7) est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega), \ \text{tel que} \\ \\ \int_{\Omega} (\nabla u \ \nabla v + uv) \, dx = \int_{\Omega} f \ v \ dx + \int_{\partial\Omega} g \ v \ d\sigma, \ \text{pour tout } v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.3.8}$$

2.3.3 Problème mixte

Problème 2.3.5 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, $\partial\Omega$ sa frontière. On se propose de mettre sous forme variationnelle le problème avec condition aux limites mixte :*

$$\begin{cases} -\Delta \ u = f, & \textit{dans } \Omega, \\ \\ u = u_0, & \textit{sur } \partial\Omega_1 = \Gamma_1, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \mathbf{g}, & \textit{sur } \partial\Omega_2 = \Gamma_2 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

où $f \in L^2(\nleq)$, $\tilde{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \subset L^2(\Gamma_1)$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \subset L^2(\Gamma_2)$ sont des fonctions donnée, avec

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

et

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi.$$

Figure 2. 1: Problème mixte de Dirichlet Newmann

Stratégie :

1. **Etape 1 : Multiplication par une fonction test**

   Soit $v \in H^1(\Omega)$, en multipliant la première équation de problème (2.3.9) par v

   $$-\Delta\ u\ v = fv.$$

2. **Etape 2 : Intégration sur Ω**

   On intègre sur Ω, on a

   $$\int_\Omega -\Delta\ u\ v\ dx = \int_\Omega f\ v\ dx,$$

3. **Etape 3 : Utilisation de la formule de Green**

   L'utilisation la formule de Green, entraîne

   $$\int_\Omega \nabla u\ \nabla v\ dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ v\ d\sigma = \int_\Omega f\ v\ dx.$$

   Nous détaillons le terme de frontière de cette relation, on trouve

   $$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ v\ d\sigma &= \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ v\ d\sigma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ v\ d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ v\ d\sigma + \int_{\Gamma_1} 0\ v\ d\sigma.\end{aligned}$$

   Compte tenu de $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \mathbf{g}$ sur Γ_2, nous avons donc

   $$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\ v\ d\sigma = \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}\ v\ d\sigma$$

   et u est la solution du problème

   $$\int_\Omega \nabla u\ \nabla v\ dx = \int_\Omega f\ v\ dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}\ v\ d\sigma$$

ou, ce qui est équivalent, w est solution de

$$\int_{\Omega} \nabla w \ \nabla v \ dx = \int_{\Omega} f \ v \ dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \ \nabla v \ dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \ v \ d\sigma, \ \text{pour tout } w \in H^1(\Omega)$$

4. **Etape 4 : La formulation variationnelle**

De ce qui précede, La formulation variationnelle du problème (2.3.9) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{trouver } w \in H^1(\Omega), \ \text{pour tout } v \in H^1(\Omega) \ \text{ tel que} \\ \\ \int_{\Omega} \nabla w \ \nabla v \ dx = \int_{\Omega} f \ v \ dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \ \nabla v \ dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \ v \ d\sigma. \end{cases} \tag{2.3.10}$$

CHAPITRE 3

Théorie de Lax-Milgram et applications

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacrée au théorème de Lax-Milgram qui sera l'outil essentiel permettant de démontrer des résultats d'existence et d'unicité de solutions de la formulation variationnelle dans un espace de Hilbert.

3.2 Théorie de Lax-Milgram

Soit $\mathbb{V}$ un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(.,\ .)$ et de norme $\|.\|$. On considère une formulation variationnelle du type : ■

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \mathbb{V},\ \text{tel que} \\ \\ a\left(u,\ v\right) = L\left(v\right) \end{cases} \tag{3.2.1}$$

3.2.1 Quelques définitions basics

Forme linéaire continue sur un Hilbert

Définition 3.2.1 *Soit* $L : \begin{array}{c} \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \ \rightarrow \ L(v) \end{array}$ *Alors* L *est dite forme linéaire continue sur* $\mathbb{V}$ *si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. L *est linéaire de* $\mathbb{V}$ *dans* $\mathbb{R}$;

2. pour tout $v \in \mathbb{V}$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$|L(v)| \leq C \|v\|_{\mathbb{V}} \ \ (\textit{la continuité}). \tag{3.2.2}$$

Forme bilinéaire continue sur un Hilbert

Définition 3.2.2 *Soit* $a: \ \mathbb{V}\times \underset{(u,\ v) \longmapsto a(u,\ v)}{\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}}$ *Alors* a *est dite forme* ***bilinéaire continue,*** *si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. $a(.,\ .)$ *est* ***bilinéaire*** *sur* $\mathbb{V}$, *c'est-à-dire*

   (a) $u \longrightarrow a(u,\ v)$ *forme linéaire de* $\mathbb{V}$ *dans* $\mathbb{R}$ *pour tout* $v \in \mathbb{V}$;

   (b) $v \longrightarrow a(u,\ v)$ *forme linéaire de* $\mathbb{V}$ *dans* $\mathbb{R}$ *pour tout* $u \in \mathbb{V}$;

2. $a(.,\ .)$ *est* ***continue*** *sur* $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$, *c'est-à-dire*

   pour tous $u,\ v \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$, *il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$|a(u,\ v)| \leq M \ \ \|u\|_{\mathbb{V}} \ \ \|v\|_{\mathbb{V}} \ \ (\textit{la continuité}). \tag{3.2.3}$$

Forme bilinéaire coercive

Définition 3.2.3 *La forme* ***bilinéaire*** $a(.,\ .)$ *est dite coercive* ($\mathbb{V}-$*elliptique*) *si pour tout* $v \in \mathbb{V}$, *il existe* $\alpha > 0$ *telle que*

$$|a(v,\ v)| \geq \alpha \ \ \|v\|_{\mathbb{V}}^2. \tag{3.2.4}$$

3.2.2 Quelques théorèmes de base

Théorème de représentation de Riesz

Théorème 3.2.1 *Soient* $\mathbb{V}$ *un espace de Hilbert et* $\mathbb{V}^*$ *son dual topologique. Alors on a :*

1. *Si L est une forme* ***linéaire continue*** *sur $\mathbb{V}$. Alors, pour tout $v \in \mathbb{V}$, il existe un élément $\tau \in \mathbb{V}^*$ unique tel que*

$$L(v) = (L\tau,\ v)_{\mathbb{V}}. \tag{3.2.5}$$

2. *Si $a(.,\ .)$ est une forme* ***bilinéaire sur*** *$\mathbb{V}$. Alors, pour tous $u,\ v \in \mathbb{V}$, il existe une unique application $A:\ \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$* ***linéaire et continue*** *telle que*

$$a(u,\ v) = (Au,\ v)_{\mathbb{V}}. \tag{3.2.6}$$

De plus A est de norme égale à celle de $a(.,\ .)$.

Théorème de point fixe de Banach

Théorème 3.2.2 *Soit E un espace métrique complet et soit $\mathbb{T}:\ E \longrightarrow E$ une application contractante, c'est-à-dire, pour tous $u,\ v \in E \times E$,.il existe une constante $k \in]0,\ 1[$ telle que*

$$d(\mathbb{T}u,\ \mathbb{T}v) \leq k\ d(u,\ v). \tag{3.2.7}$$

Alors $\mathbb{T}$ admet un unique point fixe.

3.2.3 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 3.2.3 *Soit $\mathbb{V}$ un espace de Hilbert, et soient L une forme* ***linéaire continue*** *sur $\mathbb{V}$ et $a(.,\ .)$ une forme* ***bilinéaire continue*** *sur $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$. Si $a(.,\ .)$ est coercive, alors il existe une unique solution u de la formulation variationnelle* (4.1.1).

Démonstration. Puisque la forme $L:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & L(v)\end{array}$ est **linéaire continue**, donc par application du Théorème de représentation de Riesz sur les formes linéaires, on a

$$L(v) = (L\tau,\ v),\ \forall v \in \mathbb{V}. \tag{3.2.8}$$

De même, puisque la forme bilinéaire $a: \underset{(.,\ .)\longmapsto a(.,\ .)}{\mathbb{V}\times\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{R}}$ est **bilinéaire continue**, donc par application du Théorème de représentation de Riesz sur les formes billinéaires, on a

$$a(u,\ v) = (Au,\ v),\ \forall u,\ v \in \mathbb{V}. \tag{3.2.9}$$

Notons que l'application $A: \underset{u\ \longmapsto\ Au}{\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{V}}$ est **linéaire continue** et **coercive**

En effet,

1. L'application A est linéaire car on a,

   (a) pour tous $u_1,\ u_2 \in \mathbb{V},$ *et* pour tout $v \in \mathbb{V}$, d'après $(4.1.9)$ et la linéairité de $a(.,\ v)$ on a

   $$\begin{aligned}(A(u_1+u_2),\ v) &= a(u_1+u_2,\ v)\\ &= a(u_1,\ v) + a(u_2,\ v)\\ &= (Au_1,\ v) + (Au_2,\ v).\end{aligned}$$

   (b) pour tout $\lambda \in \mathbb{R},$ pour tous $u,\ v \in \mathbb{V},$ *on a*

   $$\begin{aligned}(A(\lambda u),\ v) &= a(\lambda u,\ v)\\ &= \lambda\ a(u,\ v)\\ &= \lambda\ (Au,\ v).\end{aligned}$$

2. L'application A est continue car d'après la continuité de $a\left(.,\ .\right)$ on a,

$$\|Au\|_{\mathbb{V}} = \sup_{\substack{v\neq 0\\ v\in\mathbb{V}}} \frac{a\left(u,\ v\right)}{\|v\|_{\mathbb{V}}}$$

$$\leq M\ \|v\|_{\mathbb{V}}.$$

3. L'application A est coercive car d'après la coercivité de $a\left(.,\ .\right)$ on a,

$$\left|\left(Au,\ u\right)\right| = \left|a\left(u,\ u\right)\right| \geq \alpha\ \|u\|_{\mathbb{V}}^2.$$

De 1, 2 et 3, en conclu que la résoulution du problème (3.2.1) revient à la résolution du problème équivalent suivant : trouver $u \in \mathbb{V}$ solution de

$$\left(Au,\ v\right) = \left(L\tau,\ v\right).$$

On est donc ramené à démontrer l'existence d'un unique $u \in \mathbb{V}$ tel que

$$Au = L\tau. \tag{3.2.10}$$

Ceci revient donc à montrer que A est bijective de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{V}$.

- **Etude de l'injectivité de** A

On a

$$a\left(u,\ u\right) = \left(Au,\ u\right)$$

$$\leq \|Au\|_{\mathbb{V}}\ \|u\|_{\mathbb{V}}.$$

La coercivité de $a\left(.,\ .\right)$ implique

$$\alpha\left\|u\right\|_{\mathbb{V}} \leq \left\|Au\right\|_{\mathbb{V}}.$$

Donc A est injective.

Maintenant, soit

$$\rho > 0.$$

On définit une application $\mathbb{T} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ par

$$\mathbb{T}u = u - \rho\,(Au - L)\,.$$

Remarquons que l'existence d'une solution à (3.1.10) est équivalente à l'existence d'un point fixe pour l'application $\mathbb{T}$.

Pour $u,\ v \in \mathbb{V},$ on a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{T}u - \mathbb{T}v\|_{\mathbb{V}}^2 &= \|(u - \rho\,(Au - L)) - (v - \rho\,(Av - L))\|_{\mathbb{V}}^2 \\
&= \|(u - v) - \rho A\,(u - v)\|_{\mathbb{V}}^2 \\
&= ((u - v) - \rho\ A\,(u - v)\,,\ \ (u - v) - \rho\ A\,(u - v)) \\
&= \|u - v\|_{\mathbb{V}}^2 - 2\rho\,(u - v,\ A\,(u - v)) + \rho^2\,\|A\,(u - v)\|_{\mathbb{V}}^2\,.
\end{aligned}$$

Psuique A est continu, alors on a

$$\rho^2\,\|A\,(u - v)\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \rho^2\ M^2\,\|u - v\|_{\mathbb{V}}^2\,,$$

donc

$$\|\mathbb{T}u - \mathbb{T}v\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \left(1 + \rho^2\ M^2\right)\|u - v\|_{\mathbb{V}}^2 - 2\rho\,(u - v,\ A\,(u - v))\,. \tag{3.2.11}$$

La coercivité de A, donne

$$-2\rho\,(u - v,\ A\,(u - v)) \leq -2\alpha\rho\,\|u - v\|_{\mathbb{V}}^2 \tag{3.2.12}$$

Par combinaison de (3.1.12) avec (3.1.11) , on obtient

$$\|\mathbb{T}u - \mathbb{T}v\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \left(1 + \rho^2 \ M^2 - 2\alpha\rho\right) \|u - v\|_{\mathbb{V}}^2 .$$

Poson

$$1 + \rho^2 \ M^2 - 2\alpha\rho = k.$$

Si ρ est assez petit alors

$$k \in \left]0, \ 1\right[.$$

Par conséquent $\mathbb{T}$ est une application contractante de rapport de contraction

$$k = 1 + \rho^2 \ M^2 - 2\alpha\rho.$$

Donc d'après le Théorème de point fixe de Banach, $\mathbb{T}$ admet un unique point fixe, ceci signifie que $\mathbb{T}$ est surjective, donc A est aussi surjective.

Ce qui démontre l'existence et l'unicité de $u \in \mathbb{V}$ solution du problème

$$Au = L.$$

Par conséquent, u est l'unique solution de la formulation variationnelle (3.1.1). ■

Définition 3.2.4 *Soit* $a : \begin{array}{ccc} \mathbb{V}\times \mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, \ v) & \longmapsto & a(u, \ v) \end{array}$. *Alors* a *est dite forme* ***bilinéaire symétrique,*** *si elle vérifie la condition suivante :*

$$a\left(u, \ v\right) = a\left(v, \ u\right), \qquad \forall \ u, \ v \in \mathbb{V}.$$

Proposition 3.2.1 (cf.[24]) *Si* $a\left(., \ .\right)$ *est une fomre bilinéaire est symétrqiue, alors le problème variationnelle* (3.1.1) *est équivalent au problème de minimisation suivant :*

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \mathbb{V}, \ \text{ tel que} \\ \\ J\left(u\right) = \min\limits_{v\in\mathbb{V}} J\left(v\right) = \min\limits_{v\in\mathbb{V}} \left(\dfrac{1}{2} \ a\left(v, \ v\right) - L\left(v\right)\right). \end{cases} \tag{3.2.13}$$

3.3 Application de la thèorè de Lax-Milgram à la résolution de quelques problèmes modèles

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution des problèmes variationnels établis au Chapitre 2 précédent, en vérifiant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

3.3.1 Notion de solution faible

Définition 3.3.1 *On appelle solution faible du problème variationnel : trouver $u \in \mathbb{V}$ tel que*

$$a(u,\ v) = L(v), \qquad \forall v \in \mathbb{V} \tag{3.3.1}$$

toute solution vérifiant l'équation (3.2.1).

Remarque 3.3.1 *Toute solution forte (ou classique) est une solution faible.*

3.3.2 Problème de Dirichlet

A. Cas homogène

On rappelle qu'il s'agit du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que} \\ \\ \int\limits_{\Omega} \nabla u\ \nabla v\ dx = \int\limits_{\Omega} f\ v\ dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.3.2}$$

où :

- \- la forme bilinéaire $a(u,\ v)$ est définie par :

$$a(u,\ v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u\ \nabla v\ dx; \tag{3.3.3}$$

- la forme linéaire $L(v)$ est définie par :

$$L(v) = \int_{\Omega} f \; v \; dx. \tag{3.3.4}$$

L'existence et l'unucité de la solution du problème (3.2.2), revient donc à vérifier les conditions du théorème de Lax-Milgram sur les deux formes définies par (3.2. 3) et (3.2.4) et ceci dans l'espace de sobolev $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

<u>**Procédure :**</u>

1. **Etude de la bilinéairité de** $a(u, \; v)$ **sur** $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

   Pour tous $u, \; v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |a(u, \; v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \; \nabla v \; dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u \; \nabla v| \, dx. \end{aligned}$$

   L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |a(u, \; v)| &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \; \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \; \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

   cette dernière inégalité est identique avec celle de définition de la continuité de la forme bilinéaire en prenant $M = 1$.

Par conséquent, la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

2. **Etude de la coercivité de** $a(u,\ v)$ **sur** $H_0^1(\Omega)$.

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} a(v,\ v) &= \int_\Omega \nabla v\ \nabla v\ dx \\ &= \int_\Omega (\nabla v)^2\ dx \\ &= \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

cette dernière inégalité est identique avec celle de définition de la coercivité de la forme bilinéaire en prenant $\alpha = 1$.

Par conséquent, la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive sur $H_0^1(\Omega)$.

3. **Etude de la continuité de** $L(.)$ **sur** $H_0^1(\Omega)$.

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_\Omega f\ v\ dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |\ f\ v|\ dx \\ &= \int_\Omega |f|\ \ |v|\ dx. \end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|L(v)| \leq \left(\int_\Omega |f|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|f\|_{L^2(\Omega)} \ \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Rappelons que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

donc

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} .$$

Ceci montre que

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} .$$

L'application de l'inégalité de Poincaré donne

$$|L(v)| \leq C(\Omega) \ \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$= C(\Omega) \ \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

Posons

$$M = C(\Omega) \ \|f\|_{L^2(\Omega)} > 0.$$

Donc

$$|L(v)| \leq M \ \|v\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

cette dernière inégalité est identique avec celle de définition de la continuité de la forme linéaire.

Par conséquent, la forme linéaire $L(.)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Conclusion : De 1, 2 et 3**,** d'après le théorème de **Lax-Milgram**, il existe donc une seule fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème (3.2.2) appelée **solution faible du problème initial (2.2.1).**

B. Cas non-homogène

On rappelle qu'il s'agit du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } \tilde{u} \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que} \\ \\ \int\limits_\Omega \nabla\tilde{u}\ \nabla v\ dx = \int\limits_\Omega f\ v\ dx - \int\limits_\Omega \nabla u_0\ \nabla v\ dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.3.5}$$

où :

- - la forme bilinéaire $a(u,\ v)$ est définie par :

$$a(\tilde{u},\ v) = \int\limits_\Omega \nabla\tilde{u}\ \nabla v\ dx; \tag{3.3.6}$$

  - la forme linéaire $L(v)$ est définie par :

$$L(v) = \int\limits_\Omega f\ v\ dx - \int\limits_\Omega \nabla u_0\ \nabla v\ dx. \tag{3.3.7}$$

<u>**Procédure :**</u> En procédant comme au paragraphe précédent, on obtient

1. **Etude de la bilinéairité de** $a(u,\ v)$ **sur** $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} |a(\tilde{u},\ v)| &= \left| \int\limits_\Omega \nabla\tilde{u}\ \nabla v\ dx \right| \\ \\ &\leq \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}\ \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

   C'est la continuite de la bilinéaire $a(.,.)$ sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

2. **Etude de la coercivité de** $a(u,\ v)$ **sur** $H_0^1(\Omega)$.

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} a(v,\ v) &= \int_\Omega \nabla v\ \nabla v\ dx \\ &= \int_\Omega (\nabla v)^2\ dx \\ &= \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

C'est la coercivité de la bilinéaire $a(.,.)$ sur $H_0^1(\Omega)$.

3. **Etude de la continuité de** $L(.)$ **sur** $H_0^1(\Omega)$.

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$
\begin{aligned}
|L(v)| &= \left| \int_\Omega f \ v \ dx - \int_\Omega \nabla u_0 \ \nabla v \ dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega f \ v \ dx \right| + \left| \int_\Omega \nabla u_0 \ \nabla v \ dx \right| \\
&\leq \int_\Omega | \ f \ v| \ \ dx + \int_\Omega \left| \int_\Omega \nabla u_0 \ \nabla v \right| dx \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \ \ \|v\|_{L^2(\Omega)} + \ \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \ \ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \ \ \|v\|_{H^1(\Omega)} + \ \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \ \ \|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Posons

$$M = \ \max \ \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}, \ \ \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

on obtient

$$|L(v)| \leq M \ \ \|v\|_{H^1(\Omega)} .$$

C'est la continnuité de la forme linéaire $L(.)$ sur $H_0^1(\Omega)$.

Conclusion : De 1, 2 et 3**,** d"après le théorème de **Lax-Milgram**, il existe donc une seule solution du problème (3.2.5) appelée **solution faible du problème initial (2.3.4).**

3.3.3 Problème de Neumann

A. Cas homogène

On rappelle qu'il s'agit du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega), \text{ tel que} \\ \\ \int\limits_\Omega (\nabla u \; \nabla v + uv) \; dx = \int\limits_\Omega f \; v \; dx, \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.3.8}$$

où :

- - la forme bilinéaire $a(u, \; v)$ est définie par :

$$a(u, \; v) = \int\limits_\Omega (\nabla u \; \nabla v + uv) \; dx \tag{3.3.9}$$

  - la forme linéaire $L(v)$ est définie par :

$$L(v) = \int\limits_\Omega f \; v \; dx. \tag{3.3.10}$$

<u>**Procédure :**</u>

1. **Etude de la continuité de la forme bilinéaire** $a(u, \; v)$ **sur** $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

   Pour tous $u, \; v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |a(u, \; v)| &= \left| \int\limits_\Omega (\nabla u \; \nabla v + uv) \; dx \right| \\ &\leq \int\limits_\Omega |\nabla u \; \nabla v| \, dx + \int\limits_\Omega |u \; v| \, dx. \end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$
\begin{aligned}
|a(u,\ v)| &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\ \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

C'est la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

2. **Etude de la coercivité de $a(.,\ .)$ sur $H^1(\Omega)$.**

Pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$
\begin{aligned}
a(v,\ v) &= \int_\Omega \nabla v\ \nabla v\ dx + \int_\Omega v\ v\ dx \\
&= \int_\Omega (\nabla v)^2\ dx + \int_\Omega (v)^2\ dx \\
&= \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \|v\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

C'est la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ sur $H^1(\Omega)$.

3. **Etude de la continuité de $L(.)$ sur $H^1(\Omega)$.**

Pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
|L(v)| &= \left| \int_\Omega f \ v \ dx \right| \\
&\leq \int_\Omega | \ f \ v| \ dx \\
&= \int_\Omega |f| \ \ |v| \ dx.
\end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
|L(v)| &\leq \left(\int_\Omega |f|^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{L^2(\Omega)} \ \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \ \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

C'est la continuité de la forme bilinéaire $L(.)$ sur $H^1(\Omega)$.

Conclusion : De 1, 2 et 3**,** d'après le théorème de **Lax-Milgram**, il existe donc une seule solution du problème (3.2.8) appelée **solution faible du problème initial (2.3.5).**

B. Cas non-homogène

On rappelle qu'il s'agit du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega), \text{ tel que} \\ \int_\Omega (\nabla u \ \nabla v + uv) \ dx = \int_\Omega f \ v \ dx + \int_{\partial\Omega} g \ v \ d\sigma, \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.3.11}$$

où :

- - la forme bilinéaire $a(u,\ v)$ est définie par :

$$a(u,\ v) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u\ \nabla v + uv)\ dx; \tag{3.3.12}$$

- la forme linéaire $L(v)$ est définie par :

$$L(v) = \int\limits_{\Omega} f\ v\ dx + \int\limits_{\partial\Omega} g\ v\ d\sigma. \tag{3.3.13}$$

<u>**Procédure :**</u>

1. **On a prouvé précedemment que la forme bilinéairité $a(.,\ .)$ est coercive continue.**

2. **Etude de la continuité de $L(.)$ sur $H^1(\Omega)$.**

   Pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
|L(v)| &= \left| \int\limits_{\Omega} f\ v\ dx + \int\limits_{\partial\Omega} g\ v\ d\sigma \right| \\
&\leq \left| \int\limits_{\Omega} f\ v\ dx \right| + \left| \int\limits_{\partial\Omega} g\ v\ d\sigma \right| \\
&\leq \int\limits_{\Omega} |\ f\ v|\ dx + \int\limits_{\partial\Omega} |\ \ g\ v\ | d\sigma \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\ \ \|v\|_{L^2(\Omega)} + \ \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\ \ \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

   Puisque l'application trace $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ est continue, alors il existe une constante C_1 telle que

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}
|L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \ \|v\|_{L^2(\Omega)} + C_1 \ \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \ \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \ \|v\|_{H^1(\Omega)} + C_1 \ \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \ \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq C \ \|v\|_{H^1(\Omega)} .
\end{aligned}$$

C'est la continnuité de la forme linéaire $L(.)$ sur $H^1(\Omega)$.

Conclusion : De 1 et 2**,** d'après le théorème de **Lax-Milgram**, il existe donc une seule solution du problème (3.2.11) appelée **solution faible du problème initial (2.3.8).**

3.3.4 Problème mixte

La formulation variationnelle du problème de type Dirichlet-Neumann est :

$$\begin{cases} \text{trouver } w \in H^1(\Omega), \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int\limits_\Omega \nabla w \ \nabla v \ dx = \int\limits_\Omega f \ v \ dx - \int\limits_\Omega \nabla u_0 \ \nabla v \ dx + \int\limits_{\Gamma_2} \mathbf{g} \ v \ d\sigma. \end{cases} \tag{3.3.14}$$

où :

- - la forme bilinéaire $a(u, v)$ est définie par :

$$a(w, v) = \int\limits_\Omega \nabla w \ \nabla v \ dx \tag{3.3.15}$$

- la forme linéaire $L(v)$ est définie par :

$$L(v) = \int\limits_\Omega f \ v \ dx - \int\limits_\Omega \nabla u_0 \ \nabla v \ dx + \int\limits_{\partial\Omega_2} g \ v \ d\sigma. \tag{3.3.16}$$

Procédure :

1. **On a prouvé précedemment que la forme bilinéairité** $a(.,\ .)$ **est coercive continue.**

2. **Etude de la continuité de** $L(.)$ **sur** $H^1(\Omega)$.

   Pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$
\begin{aligned}
|L(v)| &= \left| \int_\Omega f\ v\ dx - \int_\Omega \nabla u_0\ \nabla v\ dx + \int_{\partial\Omega_2} g\ v\ d\sigma \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega f\ v\ dx \right| + \left| \int_\Omega \nabla u_0\ \nabla v\ dx \right| + \left| \int_{\partial\Omega_2} g\ v\ d\sigma \right| \\
&\leq \int_\Omega |\ f\ \varphi|\ dx + \int_\Omega |\nabla u_0\ \nabla v|\ dx + \int_{\partial\Omega_2} |g\ v|\, d\sigma \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\ \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}\ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_2)}\ \|v\|_{L^2(\partial\Omega_2)}. \\
&\leq C\ \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

   C'est la continnuité de la forme linéaire $L(.)$ sur $H^1(\Omega)$.

   Conclusion : De 1 et 2**,** d'après le théorème de **Lax-Milgram**, il existe donc une seule solution du problème (3.2.14) appelée **solution faible du problème initial (2.3.9).**

CHAPITRE 4

Approximation des EDP elliptiques par éléments finis $\mathbb{P}_1$

4.1 Introduction

La résolution analytique d'une EDP pose parfois des difficultés insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. Le recours au traitement numérique (l'approximation) de ces équations est devenu plus que nécessaire.

Avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des systèmes d'équations différentielles très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions approchées satisfaisantes.

Dans ce chapitre, nous présentons les grandes lignes de la méthode des éléments finis. Son application sera illustrée par deux problèmes simples aux limites.

4.2 Méthode des éléments finis

4.2.1 Bref historique

Historiquement, l'origine de la méthode des éléments finis peut se trouver dans les travaux de Fermat et Bernoulli (1743) avec le calcul des variations, puis il faut attendre le début du XX éme siècle avec les progrès en analyse avec la méthode de Galerkin se basant sur des théorèmes de projection dans les espaces de Hilbert. En 1943 Robert Courant introduit le principe variationnel avec des fonctions de base a supports locaux ouvrant la voie a une division d'un domaine considéré en " éléments". Cependant ce n'est qu'avec le développement des ordinateurs que ces travaux trouvent leurs applications avec les travaux pionniers de Zienckiewiz et Argyris qui définiront la méthode en 1960.

Ce qui amène le succès de la méthode et sa puissance est l'apport du calcul matriciel, introduit par un ingénieur civil anonyme. La méthode connait alors un développement fulgurant accompagne par les progrès de l'informatique. La méthode des éléments finis est une méthode puissante basée sur une théorie mathématique rigoureuse. Aujourd'hui, les éléments finis sont un outil majeur, incontournable en mécanique (fluides et solides, interactions, structures), et applicable dans de nombreux domaines impliquant des problèmes d'EDP comme par exemple en mathématiques financières ou l'électromagnétisme..ect.

4.2.2 Principe de la méthode

Le principe de la méthode des éléments finis consiste à transformer le système d'EDP continu en un système discret ou approché. La géométrie considérée initiale étant complexe est subdivisée en un nombre fini de sous domaines simples appelés éléments dont l'assemblage permet d'obtenir la géométrie initiale. Chaque élément est lié a son voisin par un noeud.

Considérons à titre d'exemple la géométrie suivante et supposons que l'on veuille calculer sa surface :

FIGURE 4.1 : Géométrie à étudier

Cette géométrie n'étant pas usuelle, on ne sait pas comment calculer directement sa surface. La méthode des éléments finis propose qu'on la subdivise en un nombre fini d'objets simples (carreaux, rectangles ..) pour lesquels le calcul de la surface ne pose pas de problèmes.

FIGURE 4.2 : Maillage de la géométrie à étudier

4.2.3 Approximation interne et système matriciel équivalent

Principe

Le principe de la méthode de Galerkin, consiste à résoudre le problème variationnel dans un espace de dimension finie $\mathbb{V}_h$ inclus dans $\mathbb{V}$, approchant l'espace $\mathbb{V}$. En outre,la construction de l'espace $\mathbb{V}_h$ repose sur la notion géométrique de **maillage**. Dans ce contexte, le paramètre h correspond à la taille maximale des mailles ou cellules qui composent le maillage; il est strictement positif et destiné à tendre vers 0, l'espace $\mathbb{V}_h$ sera de plus en plus grand et approchera de mieux en mieux l'espace $\mathbb{V}$ tout entier.

Définition 4.2.1 (Maillage) *Un maillage est un pavage de l'espace en volumes élémentaires très simples : intervalles, triangles, tétraèdres, parallélépipèdes...ect*

FIGURE 4.3 : Exemple de maillage triangulaire

Approximation interne ou méthode de Galerkin

On a vu dans les chapitres précédents que divers problèmes d'EDP pouvaient se mettre sous la forme variationnelle suivante : déterminer $u \in \mathbb{V}$ solution

$$a(u,\ v) = L(v), \qquad \forall v \in \mathbb{V}. \tag{4.2.1}$$

avec $\mathbb{V}$ un espace vectoriel normé de **dimension infinie**.

Remarque 4.2.1 *L'existence et l'unicité de la solution $u \in \mathbb{V}$ de (4.2.1) est assurée par le théorème de Lax-Milgram.*

Dans cette section, on cherche à déterminer une suite $(u_h)_h$ de $\mathbb{V}$ de sort que u_h converge vers u la solution de (4.2.1) quand h tend vers 0, c'est-à-dire

$$\|u_h - u\|_{\mathbb{V}} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

La substitution de l'espace $\mathbb{V}$ de dimension infinie par un sous-espace $\mathbb{V}_h$ de **dimension finie** inclu dans $\mathbb{V}$ est l'une des techniques pour contourner cette difficulté. C'est ce que on appelle **l'approximation interne.**

Soit donc $\mathbb{V}_h$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{V}$ de dimension finie N, on considérera dans la suite que $\mathbb{V}_h$ est engendré par les fonctions de base

$$\varphi_j(x), \qquad j = 1, ..., N. \tag{4.2.2}$$

On cherche la solution du problème, qu'on notera $u_h \in \mathbb{V}_h$ sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions tests $\varphi_j(x) \in \mathbb{V}_h$, soit

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j^h \, \varphi_j(x) \tag{4.2.3}$$

et l'on considère le problème en dimension finie associé au problème (4.2.1), que l'on écrit comme suit : déterminer $u_h \in \mathbb{V}_h$ solution du problème suivant :

$$a(u_h, \ v_h) = L(v_h), \qquad \forall v_h \in \mathbb{V}_h. \tag{4.2.4}$$

Remarque 4.2.2 *Le problème* (4.2.4) *est appelé le problème (discret) approché du problème continu* (4.2.1).

Remarque 4.2.3 *La construction de l'espace* $\mathbb{V}_h$ *doit satisfaire deux conditions :*

1. $\mathbb{V}_h$ *doit être facile à construire : on pourra choisir un espace dont la base sera formée de fonctions* $\varphi_j(x)$ ***polynomiales par morceaux****.*

2. *La matrice du système sera* ***creuse****, c'est-à-dire, elle aura beaucoup d'éléments nuls. Pour cela, on choisira une base dont les fonctions* $\varphi_j(x)$ *ont* ***un support dans quelques mailles****.*

Existence et unicité de la solution

Proposition 4.2.1 *Soit* $\mathbb{V}$ *un espace de Hilbert, et* $\mathbb{V}_h$ *un sous-espace de dimension finie. Soit* $a(.,.)$ *une forme bilinéaire continue et coercive sur* $\mathbb{V}$ *, et* $L(.)$ *une forme linéaire continue sur* $\mathbb{V}$*. Alors le problème* (4.2.4) *admet une unique solution.*

Démonstration. L'existence et l'unicité de $u_h \in \mathbb{V}_h$, solution de (4.2.4), découle du théorème de Lax- Milgram appliqué à $\mathbb{V}_h$. ■

Lemme 4.2.1 *Si la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique et coercive, alors la résolution du problème* (4.2.4) *aboutit à la résolution d'un système algébrique linéaire dont la matrice*

$$\mathbb{A}_h = \left[a\left(\varphi_j,\ \varphi_i\right)\right]_{1\leq j,\ i\leq N} \tag{4.2.5}$$

est symétrique, définie positive donc inversible.

Démonstration. Dans $(4.2.4)$, en remplaçant u_h par son expression donnée dans $(4.2.3)$, on obtient

$$a\left(\sum_{j=1}^{N} u_j^h\ \varphi_j\left(x\right),\ v_h\right) = L\left(v_h\right). \tag{4.2.6}$$

Dans (4.2.6), en choisissant $v_h = \varphi_i\left(x\right),\quad i = 1, ..., N$, donc on a

$$a\left(\sum_{j=1}^{N} u_j^h\ \varphi_j\left(x\right),\ \varphi_i\left(x\right)\right) = L\left(\varphi_i\left(x\right)\right), \qquad \forall i = 1, ..., N.$$

Cette dernière relation définit le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \text{pour } i = 1: \ \sum\limits_{j=1}^{N} a\left(u_j^h\ \varphi_j\left(x\right),\ \varphi_1\left(x\right)\right) = L\left(\varphi_1\left(x\right)\right), \\ \\ \text{pour } i = 2: \ \sum\limits_{j=1}^{N} a\left(u_j^h\ \varphi_j\left(x\right),\ \varphi_2\left(x\right)\right) = L\left(\varphi_2\left(x\right)\right), \\ \\ . \\ . \\ . \\ \\ \text{pour } i = N_h: \ \sum\limits_{j=1}^{N} a\left(u_j^h\ \varphi_j\left(x\right),\ \varphi_N\left(x\right)\right) = L\left(\varphi_N\left(x\right)\right). \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a(\varphi_1,\ \varphi_1)\ u_1^h + a(\varphi_2,\ \varphi_1)\, u_2^h + ... + a\left(\varphi_{N_h},\ \varphi_1\right) u_N^h = L(\varphi_1), \\ \\ a(\varphi_1,\ \varphi_2)\ u_1^h + a(\varphi_2,\ \varphi_2)\, u_2^h + ... + a\left(\varphi_{N_h},\ \varphi_2\right) u_N^h = L(\varphi_2), \\ \\ . \\ . \\ . \\ \\ a\left(\varphi_1,\ \varphi_{N_h}\right)\ u_1^h + a\left(\varphi_2,\ \varphi_{N_h}\right) u_2^h + ... + a\left(\varphi_{N_h},\ \varphi_{N_h}\right) u_N^h = L\left(\varphi_N\right). \end{cases}$$

il est claire que les inconnues de ce système sont $\left\{u_j^h\right\}_{j=1}^{j=N}$, qui représentent en fait les composantes de u_h dans la base $\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=1}^{j=N}$.

Ce système peut se présente aussi sous la forme matricielle

$$\mathbb{A}_h u_h = b_h$$

avec :

1.

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_h &= \left[a\left(\varphi_j,\ \varphi_i\right)\right]_{1\le j,\ i\le N} \\ &= \begin{bmatrix} a(\varphi_1,\ \varphi_1) & a(\varphi_2,\ \varphi_1) & . & . & . & a(\varphi_N,\ \varphi_1) \\ a(\varphi_1,\ \varphi_2) & a(\varphi_2,\ \varphi_2) & . & . & . & a(\varphi_N,\ \varphi_2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a\left(\varphi_1,\ \varphi_N\right) & a\left(\varphi_2,\ \varphi_N\right) & . & . & . & a\left(\varphi_N,\ \varphi_N\right) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

2.
$$b_h = \begin{bmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ . \\ . \\ . \\ L\left(\varphi_{N_h}\right) \end{bmatrix}.$$

3.
$$u_h = \begin{bmatrix} u_1^h \\ u_2^h \\ . \\ . \\ . \\ u_N^h \end{bmatrix}$$

Or la forme bilinéaire est symétrique, alors on a

$$a\left(\varphi_j,\ \varphi_i\right) = a\left(\varphi_i,\ \varphi_j\right).$$

Danc la matrice $\mathbb{A}_h \left[a\left(\varphi_j,\ \varphi_i\right)\right]_{1\leq j,\ i\leq N}$ est symétrique.

Maintenant, soit Π le vecteur de composantes $\left\{u_j^h\right\}_{j=1}^{j=N}$; formons :

$$\mathbb{A}_h\Pi = \left(\sum_{j=1}^{N} a\left(\varphi_j(x),\ \varphi_i(x)\right) u_j^h\right) = a\left(\sum_{j=1}^{N} u_j^h \varphi_j(x),\ \varphi_i(x)\right).$$

En utilisant $(4.2.3)$, il vient

$$\mathbb{A}_h\Pi = a\left(u_h,\ \varphi_i(x)\right)$$

et

$$\begin{aligned}\Pi^t\ \mathbb{A}_h\Pi &= \sum_{j=1}^{N} a\left(u_h,\ \varphi_j\left(x\right)\right) u_j^h \\ &= a\left(u_h,\ \sum_{j=1}^{N} u_j^h\varphi_j\left(x\right)\right) \\ &= a\left(u_h,\ u_h\right).\end{aligned}$$

Puisque la forme bilinéaire $a\left(.,\ .\right)$ est coercive, alors on a

$$\Pi^t\ \mathbb{A}_h\Pi = \ a\left(u_h,\ u_h\right) \geq \alpha \left\|u_h\right\|_{\mathbb{V}_h}^2 > 0.$$

Donc la matrice $\mathbb{A}_h$ est bien symétrique définie positive donc inversible. ∎

Définition 4.2.2 *La matrice $\mathbb{A}_h$ est appelée matrice de* ***rigidité*** *du système associé à l'approximation interne.*

Convergence de la méthode

Le fait de projeter la solution de l'espace de dimension infinie $\mathbb{V}$ dans l'espace de dimension finie $\mathbb{V}_h$ a pour effet de faire perdre de l'information sur le problème initial ; en fait, dans cette opération, on commet une erreur dont on peut donner la majoration suivante :

Lemme 4.2.2 (lemme de Céa) *Soit u la solution du problème* (4.2.1) *et celle du problème* (4.2.4)*. On a alors la majoration*

$$\left\|u - u_h\right\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h\in\mathbb{V}_h} \left\|u - v_h\right\|_{\mathbb{V}} \tag{4.2.7}$$

où M et α sont les deux constantes définies dans (3.1.3) *et* (3.1.4)*.*

Démonstration. Soit $v_h \in \mathbb{V}_h$. On pose

$$w_h = v_h - u_h \in \mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$$

donc

$$w_h \in \mathbb{V}.$$

et

$$u_h = v_h - w_h. \tag{4.2.8}$$

Maintenant, en substituant w_h dans (4.2.1) à la fois dans (4.2.4), on obtient

$$a\left(u,\ w_h\right) = L\left(w_h\right) \tag{4.2.9}$$

et

$$a\left(u_h,\ w_h\right) = L\left(w_h\right) \tag{4.2.10}$$

En substituant (4.2.9) de (4.2.10), il vient

$$a\left(u - u_h,\ w_h\right) = 0. \tag{4.2.11}$$

D'une part, puisque $a\left(.,\ .\right)$ est coercive, alors on a

$$a\left(u - u_h,\ u - u_h\right) \geq \ \alpha \left\|u - u_h\right\|^2. \tag{4.2.12}$$

D'une autre part, en utilisant (4.2.8) et (4.2.11) on a

$$\begin{aligned}
a\left(u - u_h,\ u - u_h\right) &= a\left(u - u_h,\ u - v_h + w_h\right) \\
&= a\left(u - u_h,\ u - v_h\right) + a\left(u - u_h,\ w_h\right) \\
&= a\left(u - u_h,\ u - v_h\right)
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de $a(.,\ .)$, nous obtenons

$$a(u-u_h,\ u-u_h)=a(u-u_h,\ u-v_h)\leq M\ \|u-u_h\|\ \ \|u-v_h\| \tag{4.2.13}$$

Par conséquent, de (4.2.12) et (4.2.13) il vient

$$\|u-u_h\|\leq\frac{M}{\alpha}\ \|u-v_h\|_{\mathbb{V}}.$$

Cette dernière inégalité prouve le lemme de Céa. ■

Théorème 4.2.1 (cf. [24]) (***théorème de convergence***) *On suppose qu'il existe un sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathbb{V}$ dense dans $\mathbb{V}$ tel qu'il existe une application linéaire r_h de $\mathcal{V}$ vérifiant*

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\ \|u-r_hv_h\|_{\mathbb{V}}=0,\qquad \textit{pour tout } v\in\mathcal{V}. \tag{4.2.14}$$

L'application r_h est appelée opérateur d'interpolation de $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{V}_h$. Alors, la solution $u_h\in\mathbb{V}_h$ de (4.2.4) *converge vers la solution u de* (4.2.1), *au sense où on a*

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\ \|u-u_h\|_{\mathbb{V}}=0.$$

4.3 Méthode des éléments finis en dimension 1

4.3.1 Discrétisation

Au point de vue analyse mathématique et numérique, le principe de la méthode des éléments finis consiste à construire des espaces d'**approximation interne** $\mathbb{V}_h$, des espaces fonctionnels usuels tels que $\mathbb{V}=H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$,...etc dont la définition est basée sur la notion géométrique de maillage du domaine Ω. Autrement dit, la méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut discretiser le domaine Ω. La discrétisation du domaine Ω signifie qu'il faut découper le domaine à étudier en **éléments**. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de **noeuds** bien déterminé qui constituent en général ses sommets.

FIGURE 4.4: Exemple d'éléments finis en 1, 2 et 3 dimensions

4.3.2 Exemples d'application de la méthode

Dans cette sous-section, on décrit la méthode des éléments finis en dimension 1 pour deux problèmes elliptiques posés sur $\Omega = [0,\ 1]$.

Exemple 4.3.1 (***Conditions de Dirichlet homogènes***) *On considère l'équation de Poisson munie des conditions aux limites de Dirichlet homogènes :*

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \text{dans }]0,\ 1[, \\ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.3.1}$$

où $f \in L^2(]0,\ 1[)$ est une fonction donnée, u est une fonction inconnue de x, et u'' est la dérivée seconde de u par rapport à x.

Le problème (4.3.1) peut être résolu directement en calculant des primitives. Cependant, cette méthode de résolution du problème aux limites ne fonctionne que lorsqu'il y a une dimension ($1\ D$) spatiale et ne se généralise pas aux problèmes de dimension supérieure ($2D,\ 3D, ...$) ou à des problèmes comme $u'' + u = f$. Pour cette raison, nous allons développer la méthode des éléments finis pour $\mathbb{P}_1$.

Eléments finis $\mathbb{P}_1$.

Pour résoudre le problème (4.3.1) moyennant la méthode des éléments finis, nous devons suivre les deux étapes suivantes :

- l'écriture variationnelle où faible du problème aux limites original.

- la discrétisation de la formulation variationnelle obtenue dans l'étape 1 dans un espace de dimension finie.

Etape 1 : écriture variationnelle où faible du problème aux limites original.

Cette étape consiste à mettre le problème (4.3.1) sous la formulation variationnelle équivalente suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \mathbb{V} = H_0^1\left(]0,\ 1[\right), \text{ tel que} \\ \\ \int\limits_0^1 u'(x)\ v'(x)\ dx = \int\limits_0^1 f(x)\ v(x)\ dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1\left(]0,\ 1[\right). \end{cases} \tag{4.3.2}$$

où $H_0^1\left(]0,\ 1[\right)$ est un espace de Hilbert de dimension finie.

On a vu dans le chapitre précedent que l'existence et l'unicité de la solution se déduit du théorème de Lax-Milgram.

Etape 2 : discrétisation de la formulation variationnelle

Cette étape consiste à remplacer le problème de dimension infinie (4.3.2) par la version en dimension finie suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \mathbb{V}_h, \text{ tel que} \\ \\ \int\limits_0^1 u'(x)\ v'(x)\ dx = \int\limits_0^1 f(x)\ v(x)\ dx, \text{ pour tout } v \in \mathbb{V}_h. \end{cases} \tag{4.3.3}$$

où $\mathbb{V}_h$ est un sous-espace de dimension finie de $H_0^1\left(]0,\ 1[\right)$.

De la définition du problème (4.3.1) , nous remarquons que l'espace de dimension infinie que nous cherchons à approcher est

$$\mathbb{V} = \left\{ u \text{ continue et } C^1 \text{ par morceaux sur } [0,\ 1]\,,\ u(0) = u(1) = 0 \right\} \tag{4.3.4}$$

et on veut construire un espace d'approximation $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V} = H_0^1(]0,\ 1[)$ de dimension finie.

La définition de l'espace $\mathbb{V}_h$ va nous permettre d'introduire une base éléments finis pour la résolution numérique du problème aux limites (4.3.1), ce choix pouvant être étendu à des situations plus générales. On commence par construire un maillage de l'intervalle $[0,\ 1]$. On divise donc l'intervalle $[0,\ 1]$ en $(N+1)$ sous-intervalles $[x_j,\ x_{j+1}]$, $j = 0, ..., N$. Les sous-intervalles $[x_j,\ x_{j+1}]$ sont appelés les cellules ou les mailles ou encore les éléments du maillage.

On notera

$$h_j = x_{j+1} - x_j \tag{4.3.5}$$

la taille de la maille j et on définit

$$h = \max_{0 \leq J \leq N} (x_{j+1} - x_j) \tag{4.3.6}$$

le pas du maillage.

Dans la suite, et pour des raisons de simplicité, nous serons souvent amenés à considérer des maillages **uniforme,** c'est-à-dire un maillage où les points x_j sont régulièrement espacés si bien que

$$x_j = jh,\ j = 1, ..., N \tag{4.3.7}$$

avec

$$h = \frac{1-0}{N+1} = \frac{1}{N+1} \tag{4.3.8}$$

et

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \\ x_{N+1} = 1. \end{cases} \tag{4.3.9}$$

Les points x_j sont appelés les sommets (ou noeuds) du maillage.

Nous définissons aussi $\mathbb{P}_k$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j\ x^j,\ a_j \in \mathbb{R} \right\} \tag{4.3.10}$$

C'est un espace vectoriel de dimension $k+1$.

L'espace d'approximation $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$ sera noté

$$\mathbb{V}_h^k = \left\{ v \in C^0(\Omega) \text{ tel que } v_{|_K} \in \mathbb{P}_k(K) \right\}. \tag{4.3.11}$$

Nous définissons l'espace fonctionnel de dimension finie composé des fonctions continues sur $[0,\ 1]$, **afines** sur chaque maille $[x_j,\ x_{j+1}]$ du maillage et nulles en 0 et en 1 :

$$\mathbb{V}_h^1 = \mathbb{V}_h = \left\{ v \in C^0([0,\ 1]) \text{ tel que } v_{|[x_j,\ x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1,\ 0 \le j \le N,\ v(0) = v(1) = 0 \right\}. \tag{4.3.12}$$

Remarquons que

$$\dim(\mathbb{V}_h) = N.$$

Pour terminer la discrétisation, nous devons sélectionner une base de $\mathbb{V}_h$. Pour chaque point x_i, $i = 1, ..., N$ nous choisirons la fonction linéaire par morceaux $\varphi_j(x)$

dans $\mathbb{V}_h$ satisfaisant de plus

$$\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ \\ 0, & si\ i \neq j. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker.

Lemme 4.3.1 *Les* $(\varphi_j)_{1\leq j\leq N}$ *constituent une base de* $\mathbb{V}_h$.

Démonstration. Puisque $(\varphi_j)_{1\leq j\leq N}$ est de dimension finie, alors pour que cette famille soit une base de $\mathbb{V}_h$, il suffit de montrer seulement qu'elle est libre.

On considère les scalaires réels λ_j, avec $j = 1, ..., N$. On suppose que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \ \varphi_j(x_i) = 0, \qquad i = 1, ..., N. \tag{4.3.14}$$

Pour $i = 1$, on a

$$\lambda_1 \ \varphi_1(x_1) + \lambda_2 \ \varphi_2(x_1) + ... + \lambda_N \ \varphi_N(x_1) = 0.$$

Compt tenu de (4.3.13), il vient que

$$\lambda_1 \ \varphi_1(x_1) = 0$$

ce qui implique

$$\lambda_1 = 0.$$

Pour $i = 2$, on a

$$\lambda_1 \ \varphi_1(x_2) + \lambda_2 \ \varphi_2(x_2) + ... + \lambda_N \ \varphi_N(x_2) = 0.$$

Compt tenu de (4.3.13), il vient que

$$\lambda_2 \ \varphi_2(x_2) = 0$$

ce qui implique

$$\lambda_2 = 0.$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

Pour $i = N,$ on a

$$\lambda_1\ \varphi_1\left(x_N\right) + \lambda_2\ \varphi_2\left(x_N\right) + ... + \lambda_N\ \varphi_N\left(x_N\right) = 0.$$

Compt tenu de $(4.3.13)\,,$ il vient que

$$\lambda_N\ \varphi_N\left(x_N\right) = 0$$

ce qui implique

$$\lambda_N = 0.$$

Par conséquent, $\left(\varphi_j\right)_{1\leq j\leq N}$ *est* famille libre. ■

- **Détermination** $\varphi_j\left(x\right)$

Puisque les $\varphi_j\left(x\right)$ sont **afines** sur chaque maille, alors on a

$$\varphi_j\left(x\right) = a\ x + b \tag{4.3.15}$$

telle que

$$\varphi_j\left(x_i\right) = \delta_{ij.}$$

- **Sur la maille** $\left[x_{j-1},\ x_j\right]$

Compt tenu de $(4.3.13)\,,$ on a :

en x_j

$$\varphi_j(x_j) = 1$$

ce qui implique

$$a\ x_j + b = 1, \tag{4.3.16}$$

en x_{j-1}

$$\varphi_j(x_{j-1}) = 0$$

ce qui implique

$$a\ x_{j-1} + b = 0. \tag{4.3.17}$$

La soustraction (4.3.16)-(4.3.17), montre que

$$a\ (x_j - x_{j-1}) = 1$$

d'où

$$a = \frac{1}{x_j - x_{j-1}}, \tag{4.3.18}$$

La substitution de (4.3.18) dans (4.3.17), donne

$$b = -\frac{x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}. \tag{4.3.19}$$

En combinant (4.3.19) et (4.3.18) avec (4.3.15), on obtient

$$\varphi_j(x) = \frac{x}{x_j - x_{j-1}} - \frac{x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} = \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$$

compt tenu de (4.3.8), on écrit

$$\varphi_j(x) = \frac{x - x_{j-1}}{h}, \qquad x \in [x_{j-1},\ x_j]. \tag{4.3.20}$$

<u>**Sur la maille** $[x_j,\ x_{j+1}]$</u>

Compt tenu de (4.3.13), on a :

en x_j

$$\varphi_j(x_j) = 1$$

ce qui implique

$$a\ x_j + b = 1, \tag{4.3.21}$$

en x_{j+1}

$$\varphi_j(x_{j+1}) = 0$$

ce qui implique

$$a\ x_{j+1} + b = 0. \tag{4.3.22}$$

La soustraction (4.3.22)-(4.3.21), montre que

$$a\ \left(x_{j+1} - x_j\right) = -1$$

d'où

$$a = -\frac{1}{x_{j+1} - x_j}, \tag{4.3.23}$$

La substitution de (4.3.23) dans (4.3.22), donne

$$b = \frac{x_{j+1}}{x_{j+1} - x_j}. \tag{4.3.24}$$

En combinant (4.3.24) et (4.3.23) avec (4.3.15), on obtient

$$\varphi_j(x) = -\frac{x}{x_{j+1} - x_j} + \frac{x_{j+1}}{x_{j+1} - x_j} = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}$$

compt tenu de (4.3.8), on écrit

$$\varphi_j(x) = \frac{x_{j+1} - x}{h}, \qquad x \in [x_j,\ x_{j+1}]. \tag{4.3.25}$$

Par conséquent, de (4.3.20) et (4.3.25) , on a

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{h}, & \text{si } x \in [x_{j-1},\ x_j], \\ \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h}, & \text{si } x \in [x_j,\ x_{j+1}], \\ 0, \quad \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.3.26}$$

Remarque 4.3.1 *Il est évident que*

- *supp* $\varphi_0 = [x_0,\ x_1]$.

- *supp* $\varphi_j = [x_{j-1},\ x_j] \cup [x_j,\ x_{j+1}],\ 1 \leq j \leq N.$

- *supp* $\varphi_{N+1} = [x_N,\ x_{N+1}]$.

Remarque 4.3.2 *Les fonction de base* $\varphi_j(x)$ *sont appelées dans la littérature* ***les fonctions chapeaux.***

FIGURE 4.5: Exemple de fonction de base linéaire par morceaux

FIGURE 4.5: Exemple de fonction de base associée à 3 points successifs

- **Le problème approché**

La formulation variationnelle (4.3.3) dans le sous-epace $\mathbb{V}_h$ s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in \mathbb{V}_h \text{ tel que} \\ \\ a(u_h,\ v_h) = L(v_h),\ \text{pour tout } v_h \in \mathbb{V}_h \end{cases} \tag{4.3.27}$$

avec

$$a(u_h,\ v_h) = \int_0^1 u_h^{'} v_h^{'}\ dx$$

$$L(v_h) = \int_0^1 f\ v_h\ dx$$

et

$$\mathbb{V}_h = \left\{ \begin{array}{c} v_h \in H_0^1([0,\ 1]) \cap C^0([0,\ 1]),\ v_h\,|[x_j,\ x_{j+1}] \in \mathbb{P}_1, \\ \\ v_h(0) = v_h(1) = 0 \end{array} \right\}.$$

La solution u_h du problème (4.3.27) s'écrit dans $\mathbb{V}_h$

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j^h\ \varphi_j(x) \tag{4.3.28}$$

où $u_j = u_h(x_j)$ est la valeur de la solution approchée au point x_j et $\varphi_j(x)$ est la base de $\mathbb{V}_h$ définie dans (4.3.26).

En remplaçant (4.3.28) dans (4.3.27), nous obtenons

$$a\left(\sum_{j=1}^{N} u_j^h\ \varphi_j(x),\ v_h\right) = L(v_h) \tag{4.3.29}$$

on prend $v_h = \varphi_i(x)$, on écrit

$$a\left(\sum_{j=1}^{N} u_j^h\ \varphi_j(x),\ \varphi_i(x)\right) = L(\varphi_i(x)), \qquad i = 1, ..., N$$

qui s'écrit encore

$$\sum_{j=1}^{N} a\left(u_j^h\ \varphi_j(x),\ \varphi_i(x)\right) = L(\varphi_i(x))$$

La bilinéairité de $a(.,\ .)$, donne

$$\sum_{j=1}^{N} u_j^h\ a\left(\varphi_j(x),\ \varphi_i(x)\right) = L(\varphi_i(x)) \tag{4.3.30}$$

avec

$$a(\varphi_i(x),\ \varphi_i(x)) = \int_0^1 \varphi_j^{'}(x)\ \ \varphi_i^{'}(x)\ \ dx \tag{4.3.31}$$

et

$$L\left(\varphi_i\left(x\right)\right) = \int_0^1 f\left(x\right)\ \varphi_i\left(x\right)\ dx. \tag{4.3.32}$$

L'équation (4.3.30) s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{l} a\left(\varphi_1\left(x\right),\ \varphi_1\left(x\right)\right)u_1^h\ + a\left(\varphi_2\left(x\right),\ \varphi_1\left(x\right)\right)u_2^h + ... + a\left(\varphi_N\left(x\right),\ \varphi_1\left(x\right)\right)u_N^h = L\left(\varphi_1\left(x\right)\right) \\ \\ a\left(\varphi_1\left(x\right),\ \varphi_2\left(x\right)\right)u_1^h\ + a\left(\varphi_2\left(x\right),\ \varphi_2\left(x\right)\right)u_2^h + ... + a\left(\varphi_N\left(x\right),\ \varphi_2\left(x\right)\right)u_N^h = L\left(\varphi_2\left(x\right)\right) \\ . \\ . \\ . \\ a\left(\varphi_1\left(x\right),\ \varphi_N\left(x\right)\right)u_1^h\ + a\left(\varphi_2\left(x\right),\ \varphi_N\left(x\right)\right)u_2^h + ... + a\left(\varphi_N\left(x\right),\ \varphi_N\left(x\right)\right)u_N^h = L\left(\varphi_N\left(x\right)\right) \end{array}\right. \tag{4.3.33}$$

Ainsi résoudre le problème approché (4.3.27) revient à résoudre dans $\mathbb{R}^N$ le système linéaire

$$\mathbb{A}_h\ u_h = b_h$$

où :

- $\mathbb{A}_h$ est une matrice définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_h &= \left[a\left(\varphi_j\left(x\right),\ \varphi_i\left(x\right)\right)\right]_{1\leq i,j\leq N} \\ &= \begin{pmatrix} a\left(\varphi_1,\ \varphi_1\right) & a\left(\varphi_2,\ \varphi_1\right) & . & . & . & a\left(\varphi_m,\ \varphi_1\right) \\ a\left(\varphi_1,\ \varphi_2\right) & a\left(\varphi_2,\ \varphi_2\right) & . & . & . & a\left(\varphi_m,\ \varphi_2\right) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a\left(\varphi_1,\ \varphi_m\right) & . & . & . & . & a\left(\varphi_m,\ \varphi_m\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  appelée aussi **matrice de rigidité.**

– b_h est un vecteur **connu** définie par

$$b_h = (L(\varphi_1(x)),\ ...,\ L(\varphi_N(x)))^T$$

appelé aussi **vecteur de charge.élémentaire.**

– u_h est un vecteur **inconnu** définie par

$$u_h = \left(u_1^h,\ u_2^h, ...,\ u_N^h\right)^T.$$

appelé aussi la solution du problème approché ou l'approximation de la solution continue u.

Remarque 4.3.3 *La matrice $\mathbb{A}_h$ est une matrice tridiagonale car les fonctions de base sont à support disjoints.*

- – **Calcul des coefficients de la matrice $\mathbb{A}_h$ et le vecteur b_h**

En utilisant les fonctions de base définies précédemment, on détermine la matrice $\mathbb{A}_h = [A_{i,j}]_{1 \leq i;j \leq N}$ et le vecteur b_h.

– * **Calcul des coefficients de la matrice de rigidité $\mathbb{A}_h$**

Pour trouver les coefficients de la matrice $\mathbb{A}_h$, il suffit de calculer $A_{j,j} = a(\varphi_j,\ \varphi_j)$, $A_{j,j+1} = a(\varphi_j,\ \varphi_{j+1})$ et $A_{j-1,j} = a(\varphi_{j-1},\ \varphi_j)$.

$A_{j,j} =?$

On a

$$
\begin{aligned}
A_{j,j} &= a\left(\varphi_j,\ \varphi_j\right) = \int\limits_{\text{supp}\varphi_j} \varphi_j'(x)\,\varphi_j'(x)\ dx \\
&= \int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left(\varphi_j'(x)\right)^2\ dx \\
&= \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\varphi_j'(x)\right)^2\ dx + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\varphi_j'(x)\right)^2\ dx \\
&= \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{1}{h}\right)^2\ dx + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \left(-\frac{1}{h}\right)^2\ dx \\
&= \frac{2}{h}.
\end{aligned}
$$

$\underline{A_{j,j+1} =?}$

On a

$$
\begin{aligned}
A_{j,j+1} &= a\left(\varphi_j,\ \varphi_{j+1}\right) = \int\limits_{\text{supp}\varphi_j \cap \text{sup}\varphi_{j+1}} \varphi_j'(x)\,\varphi_{j+1}'(x)\ dx \\
&= \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j'(x)\,\varphi_{j+1}'(x)\ dx \\
&= \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \left(-\frac{1}{h}\right)\ \left(\frac{1}{h}\right) dx \\
&= -\frac{1}{h}.
\end{aligned}
$$

$\underline{A_{j-1,j} =?}$

On a

$$\begin{aligned}
A_{j-1,j} &= a\left(\varphi_j,\ \varphi_{j-1}\right) = \int\limits_{\mathrm{supp}\varphi_{j-1}\cap\mathrm{sup}\varphi_j} \varphi'_{j-1}(x)\,\varphi'_j(x)\ dx \\
&= \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'_{j-1}(x)\,\varphi'_j(x)\ dx \\
&= \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left(-\frac{1}{h}\right)\ \left(\frac{1}{h}\right) dx \\
&= -\frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

Donc

$$A_{i,j} = \begin{cases} -\dfrac{1}{h}, & \text{si } i = j-1 \text{ ou } i = j+1, \\ \dfrac{2}{h}, & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \notin \{j-1,\ j+1\}\,. \end{cases}$$

Par conséquent, on a la matrice **tridiagonale et creuse** suivante **:**

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & .... & .... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & .... & .... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 \\ 0 & .... & .... & -1 & .... & 2 \end{pmatrix}$$

c'est la matrice de rigidité.

Calcul des corrdonées du vecteur charge b_h

La détermination du vecteur charge b_h revient au calcul de l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} b_i &= L\left(\varphi_i(x)\right) \qquad (4.3.34) \\ &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\ \varphi_i(x)\ dx \\ &= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ \varphi_i(x)\ dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ \varphi_i(x)\ dx, \qquad i = 1, ..., N. \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule d'intégration numérique du trapèze par exemple, donne

$$\begin{aligned} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ \varphi_i(x)\ dx &= \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\ \left[\ f(x_i)\,\varphi_i(x_i) + \ f(x_{i-1})\,\varphi_i(x_{i-1})\right] \\ &= \frac{h}{2}\ f(x_i)\,. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ \varphi_i(x)\ dx &= \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\ \left[\ f(x_{i+1})\,\varphi_i(x_{i+1}) + \ f(x_i)\,\varphi_i(x_i)\right] \\ &= \frac{h}{2}\ f(x_i)\,. \end{aligned}$$

En remplaçant dans $(4.3.33)$, nous obtenons

$$b_i = h\ \ f(x_i)\,.$$

Donc

$$b_h = \left[h\ \ f(x_i)\right]_{1 \leq i \leq N}.$$

Ainsi, le système à résoudre est

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & .... & .... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & .... & .... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 \\ 0 & .... & .... & -1 & .... & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ . \\ . \\ . \\ f(x_N) \end{bmatrix}$$

Corollaire 4.3.1 *Le système ci-dessus admet une unique solution car la matrice $\mathbb{A}_h$ est tridiagonale, symétrique et définie positive.*

Convergence et estimation d'erreur pour la méthode $\mathbb{P}_1$

Définition 4.3.1 (***opérateur d'interpolation***) *L'opérateur d'interpolation $\mathbb{P}_1$ est l'application r_h définie de $H^1(0,\ 1)$ dans $\mathbb{V}_h$ par :*

$$r_h v(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v(x_j)\ \ \varphi_j(x) \tag{4.3.35}$$

où les φ_j les fonction de base de l'espaces de dimension finie $\mathbb{V}_h$.

En particulier dans $H_0^1(0,\ 1)$, on a

$$r_h v(x) = \sum_{j=1}^{N} v(x_j)\ \ \varphi_j(x). \tag{4.3.36}$$

Lemme 4.3.2 (cf. [22]) *Pour tout $v \in H^2(0,\ 1)$, il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de h telle que*

$$\|v - r_h v\|_{H^1(0,\ 1)} \leq C_1\ h\ \left\|v"\right\|_{L^2(0,\ 1)}. \tag{4.3.37}$$

Lemme 4.3.3 (cf. [22]) *Pour tout $v \in H^1(0,\ 1)$, on a*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|v - r_h v\|_{H^1(0,\ 1)} = 0. \tag{4.3.38}$$

Théorème 4.3.1 (***théorème convergence de la méthode***) *Soient* $u \in H_0^1(0,\ 1)$ *la solution du problème* (4.3.2) *et* $u_h \in \mathbb{V}_h$ *est la solution du problème approché* (4.3.27) *. Alors on a*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,\ 1)} = 0.$$

De plus, si $u \in H^2(0,\ 1)$ *, il existe une constante* $C > 0$ *indépendante de* h *telle que*

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,\ 1)} \leq C\ h\ \left\|u^{"}\right\|_{L^2(0,\ 1)}. \tag{4.3.39}$$

Démonstration. La combinaison du théorème 4.2.1 avec les duex lemmes 4.2.3 et 4.2.4, donne

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,\ 1)} = 0.$$

C'est la convergence de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$.

Maintenant, si $u \in H^2(0,\ 1)$, d'après le lemme de Céa (lemme 4.2.2), on a

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(0,\ 1)} &\leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in \mathbb{V}_h} \|u - v_h\|_{H^1(0,\ 1)} \\ &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - r_h u\|_{H^1(0,\ 1)}. \end{aligned}$$

L'utilisation du lemme (4.2.2) implique

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(0,\ 1)} &\leq \frac{M}{\alpha} C_1\ h\ \left\|u^{"}\right\|_{L^2(0,\ 1)} \\ &\leq Ch\ \left\|u^{"}\right\|_{L^2(0,\ 1)} \end{aligned}$$

avec $C = \frac{M}{\alpha} C_1 > 0$ une constante indépendante de h. ∎

Exemple 4.3.2 (***conditions de Newmann homogènes***) *Soit* $\Omega =]0,\ 1[$. *On considère le problème de Newmann avec conditions aux limites homogènes :*

$$\begin{cases} -u^{''}(x) + u(x) = f(x), & dans\ ]0,\ 1[, \\ \\ u^{'}(0) = u^{'}(\mathbf{1}) = 0 \end{cases} \tag{4.3.40}$$

La formulation variationnelle du problème (4.3.40) est :

$$\begin{cases} trouver\ u \in H^1(]0,\ 1[),\ tel\ que \\ \\ \int\limits_0^1 u^{'}(x)\ v^{'}(x)\ dx + \int\limits_0^1 u(x)\ v(x)\ dx = \int\limits_0^1 f(x)\ v(x)\ dx,\ pour\ tout\ v \in H^1(]0,\ 1[). \end{cases} \tag{4.3.41}$$

Etape 2 : discrétisation de la formulation variationnelle

On commence par construire un maillage uniforme de l'intervalle $[0,\ 1]$. On divise donc l'intervalle $[0,\ 1]$ en $(N+1)$ sous-intervalles $[x_j,\ x_{j+1}],\ j = 0, ..., N$.

On notera

$$x_j = jh,\ j = 1, ..., N \tag{4.3.42}$$

avec

$$h = \frac{1-0}{N+1} = \frac{1}{N+1} \tag{4.3.43}$$

et

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \\ x_{N+1} = 1. \end{cases} \tag{4.3.44}$$

Nous définissons l'espace

$$\mathbb{V}_h = \left\{ v \in C^0([0,\ 1])\ \text{tel que}\ v_{|[x_j,\ x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1,\ 0 \le j \le N,\ v(0) = v(1) = 0 \right\}. \tag{4.3.45}$$

Pour terminer la discrétisation, on considère les fonctions de base suivantes de l'espace $\mathbb{V}_h$:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{h}, & \text{si } x \in [x_{j-1},\ x_j], \\ \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h}, & \text{si } x \in [x_j,\ x_{j+1}], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.3.46}$$

Remarquons que, dans (4.3.46) :

- si $j = 0$, alors

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h}, & \text{si } x \in [x_0,\ x_1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.3.47}$$

FIGURE 4.6: Exemple de fonction φ_0

- si $j = N + 1$, alors

$$\varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_N}{h}, & \text{si } x \in [x_N,\ x_{N+1}], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.3.48}$$

FIGURE 4.7: Exemple de fonction φ_{N+1}

- **Le problème approché**

La formulation variationnelle (4.3.41) dans le sous-epace $\mathbb{V}_h$ s'écrit comme suit

:

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in \mathbb{V}_h \text{ tel que} \\ \\ a\left(u_h,\ v_h\right) = L\left(v_h\right), \text{ pour tout } v_h \in \mathbb{V}_h \end{cases} \tag{4.3.49}$$

avec

$$a\left(u_h,\ v_h\right) = \int_0^1 u_h^{'}(x)\ v_h^{'}(x)\ dx + \int_0^1 u_h(x)\ v_h(x)\ dx$$

$$L\left(v_h\right) = \int_0^1 f\ v_h\ dx$$

et

$$\mathbb{V}_h = \left\{ \begin{array}{c} v_h \in H_0^1\left([0,\ 1]\right) \cap C^0\left([0,\ 1]\right),\ v_h\left|[x_j,\ x_{j+1}]\right. \in \mathbb{P}_1, \\ \\ v_h(0) = v_h(1) = 0 \end{array} \right\}.$$

La solution u_h du problème (4.3.49) s'écrit dans $\mathbb{V}_h$

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j^h\ \varphi_j(x) \tag{4.3.50}$$

En remplaçant (4.3.50) dans (4.3.49), nous obtenons

$$a\left(\sum_{j=1}^{N} u_j^h\ \varphi_j(x),\ v_h\right) = L\left(v_h\right) \tag{4.3.51}$$

on prend $v_h = \varphi_i(x)$, on écrit

$$a\left(\sum_{j=1}^{N} u_j^h\ \varphi_j(x),\ \varphi_i(x)\right) = L\left(\varphi_i(x)\right), \qquad i = 1, ..., N$$

qui s'écrit encore

$$\sum_{j=1}^{N} a\left(u_j^h\ \varphi_j(x),\ \varphi_i(x)\right) = L\left(\varphi_i(x)\right)$$

La bilinéairité de $a(.,\ .)$, donne

$$\sum_{j=1}^{N} u_j^h\ a\left(\varphi_j(x),\ \varphi_i(x)\right) = L\left(\varphi_i(x)\right) \tag{4.3.52}$$

avec

$$a(\varphi_i(x),\ \varphi_i(x)) = \int_0^1 \varphi_j'(x)\ \varphi_i'(x)\ dx + \int_0^1 \varphi_j(x)\ \varphi_i(x)\ dx \tag{4.3.53}$$

et

$$L(\varphi_i(x)) = \int_0^1 f(x)\ \varphi_i(x)\ dx.$$

L'équation (4.3.52) s'écrit alors

$$\begin{cases} a(\varphi_1(x),\ \varphi_1(x))\, u_1^h\ + a(\varphi_2(x),\ \varphi_1(x))\, u_2^h + ... + a(\varphi_N(x),\ \varphi_1(x))\, u_N^h = L(\varphi_1(x)) \\ \\ a(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x))\, u_1^h\ + a(\varphi_2(x),\ \varphi_2(x))\, u_2^h + ... + a(\varphi_N(x),\ \varphi_2(x))\, u_N^h = L(\varphi_2(x)) \\ . \\ . \\ . \\ a(\varphi_1(x),\ \varphi_N(x))\, u_1^h\ + a(\varphi_2(x),\ \varphi_N(x))\, u_2^h + ... + a(\varphi_N(x),\ \varphi_N(x))\, u_N^h = L(\varphi_N(x)). \end{cases} \tag{4.3.54}$$

Ainsi résoudre le problème approché (4.3.49) revient à résoudre dans $\mathbb{R}^N$ le système linéaire

$$\mathbb{M}_h\ u_h = b_h$$

où $\mathbb{M}_h$ est une matrice définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_h &= \left[a\left(\varphi_j(x),\ \varphi_i(x)\right)\right]_{1\le i,j\le N} \\ &= \begin{pmatrix} a(\varphi_1,\ \varphi_1) & a(\varphi_2,\ \varphi_1) & . & . & . & a(\varphi_m,\ \varphi_1) \\ a(\varphi_1,\ \varphi_2) & a(\varphi_2,\ \varphi_2) & . & . & . & a(\varphi_m,\ \varphi_2) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a(\varphi_1,\ \varphi_m) & . & . & . & . & a(\varphi_m,\ \varphi_m) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarquons que, d'après la fomule (4.3.53) , il est claire que

$$\mathbb{M}_h = \mathbb{A}_h + \mathbb{K}_h$$

où :

- $\mathbb{A}_h$ est une matrice qui sera appelée matrice de **rigidité** et $\mathbb{K}_h$ est une matrice qui sera appelée matrice de **masse.**
- b_h est un vecteur **connu** définie par

  $$b_h = \left(L\left(\varphi_1\left(x\right)\right),\ \ldots,\ L\left(\varphi_N\left(x\right)\right)\right)^T$$

  appelé aussi **vecteur de charge.élémentaire.**
- u_h est un vecteur **inconnu** définie par

  $$u_h = \left(u_1^h,\ \ldots,\ u_N^h\right)^T.$$

  appelé aussi la solution du problème approché ou l'approximation de la solution continue u.

Remarque 4.3.4 *La matrice $\mathbb{M}_h$ est une matrice tridiagonale car les fonctions de base sont à support disjoints.*

Détermination de la matrice $\mathbb{M}_h$ et le vecteur b_h

En utilisant les fonctions de base définies précédemment, on détermine la matrice $\mathbb{M}_h = \left[M_{i,j}\right]_{1\leq i;j\leq N}$ et le vecteur b_h.

- **Calcul des coefficients de la matrice de rigidité $\mathbb{A}_h$**

  On pose

  $$\mathbb{A}_h = \left[A_{ij}\right]_{1\leq i,j\leq N} = \left[\int_0^1 \varphi_j^{'}\left(x\right)\ \varphi_i^{'}\left(x\right)\ dx\right]_{1\leq i,j\leq N}$$

Pour trouver les coefficients de la matrice $\mathbb{M}_h$, il suffit de calculer $A_{j,j},\ A_{j,j+1}$et $A_{j-1,j}$.

* $\underline{A_{j,j} =?}$

  On a

$$\begin{aligned} A_{j,j} &= \int_0^1 \varphi_j'(x)\ \varphi_j'(x)\ dx = \int_{\operatorname{supp}\varphi_j} \varphi_j'(x)\,\varphi_j'(x)\ dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left(\varphi_j'(x)\right)^2\ dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\varphi_j'(x)\right)^2\ dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\varphi_j'(x)\right)^2\ dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{1}{h}\right)^2\ dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(-\frac{1}{h}\right)^2\ dx \end{aligned}$$

  L'utilisation de la formule d'intégration numérique du trapèze par exemple, donne

$$A_{j,j} = \frac{2}{h}$$

  $\underline{A_{j,j+1} =?}$

On a

$$\begin{aligned}
A_{j,j+1} &= a\left(\varphi_j,\ \varphi_{j+1}\right) = \int\limits_{\mathrm{supp}\varphi_j \cap \mathrm{sup}\varphi_{j+1}} c(x)\,\varphi_j^{'}(x)\,\varphi_{j+1}^{'}(x)\ dx \\
&= \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} c(x)\,\varphi_j^{'}(x)\,\varphi_{j+1}^{'}(x)\ dx \\
&= \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} c(x)\left(-\frac{1}{h}\right)\ \left(\frac{1}{h}\right)dx \\
&= -\frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

<u>$A_{j-1,j} =?$</u>

On a

$$\begin{aligned}
A_{j-1,j} &= a\left(\varphi_j,\ \varphi_{j-1}\right) = \int\limits_{\mathrm{supp}\varphi_{j-1} \cap \mathrm{sup}\varphi_j} \varphi_{j-1}^{'}(x)\,\varphi_j^{'}(x)\ dx \\
&= \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_{j-1}^{'}(x)\,\varphi_j^{'}(x)\ dx \\
&= \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left(-\frac{1}{h}\right)\ \left(\frac{1}{h}\right)dx \\
&= -\frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

Donc

$$A_{i,j} = \begin{cases} -\dfrac{1}{h}, & \text{si } i = j-1 \text{ ou } i = j+1, \\ \dfrac{2}{h}, & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \notin \{j-1,\ j+1\}. \end{cases}$$

Par conséquent, on a la matrice **tridiagonale et creuse** suivante **:**

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & .... & .... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & .... & .... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 \\ 0 & .... & .... & -1 & .... & 2 \end{pmatrix}$$

c'est la matrice de rigidité.

Calcul des coefficients de la matrice de masse $\mathbb{K}_h$

On pose

$$\mathbb{K}_h = [K_{ij}]_{1\leq i,j\leq N} = \left[\int_0^1 \varphi_j(x)\ \varphi_i(x)\ dx\right]_{1\leq i,j\leq N}.$$

Pour trouver les coefficients de la matrice $\mathbb{K}_h$, il suffit de calculer $K_{j,j},\ K_{j,j+1}$ et

$K_{j-1,j}$.

* $K_{j,j} =?$

On a

$$\begin{aligned} K_{j,j} &= \int_0^1 \varphi_j(x)\ \varphi_i(x)\ dx = \int_{\mathrm{supp}\varphi_j} \varphi_j^2(x)\ dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \varphi_j^2(x)\ dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j^2(x)\ dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j^2(x)\ dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{x-x_{j-1}}{h}\right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x_{j+1}-x}{h}\right)^2 dx \end{aligned}$$

L'utilisation d'une simple technique d'intégration, en particulier pour $\alpha(x) = 1$, donne

$$K_{j,j} = h.$$

<u>$K_{j,j+1} =?$</u>

On a

$$\begin{aligned}
K_{j,j+1} &= \int_0^1 \varphi_j(x)\ \varphi_{j+1}(x)\ dx = \int_{\mathrm{supp}\varphi_j \cap \mathrm{sup}\varphi_{j+1}} \varphi_j(x)\ \varphi_{j+1}(x)\ dx \\
&= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j(x)\ \varphi_{j+1}(x)\ dx \\
&= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x - x_j}{h}\right)\ \left(\frac{x_{j+1} - x}{h}\right) dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

<u>$K_{j-1,j} =?$</u>

On a

$$\begin{aligned}
K_{j-1,j} &= \int_0^1 \varphi_{j-1}(x)\ \varphi_j(x)\ dx = \int_{\mathrm{supp}\varphi_{j-1} \cap \mathrm{sup}\varphi_j} \varphi_{j-1}(x)\ \varphi_j(x)\ dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_{j-1}(x)\ \varphi_j(x)\ dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{x_i - x}{h}\right)\ \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right) dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$K_{i,j} = \begin{cases} h, & \text{si } i = j, \\ \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Par conséquent, on a la matrice **diagonale** suivante **:**

$$\mathbb{K}_h = h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .... & .... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .... & .... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & .... & .... & 0 & .... & 1 \end{pmatrix}$$

c'est la matrice de masse. D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_h &= \mathbb{A}_h + \mathbb{K}_h \\ &= \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & .... & .... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & .... & .... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 \\ 0 & .... & .... & .... & -1 & 2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .... & .... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .... & .... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & .... & .... & .... & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{h}+h & -\frac{1}{h} & 0 & .... & .... & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h}+h & -\frac{1}{h} & .... & .... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -\frac{1}{h} \\ 0 & .... & .... & .... & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h}+h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calcul des corrdonées du vecteur b_h

La détermination du second membre b_h, revient au calcul de l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
b_i &= L\left(\varphi_i\left(x\right)\right) \qquad (4.3.55)\\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\left(x\right)\ \varphi_i\left(x\right)\ dx\\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(x\right)\ \varphi_i\left(x\right)\ dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x\right)\ \varphi_i\left(x\right)\ dx, \qquad i = 1, ..., N.
\end{aligned}$$

L'utilisation de la formule d'intégration numérique du trapèze par exemple, donne

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(x\right)\ \varphi_i\left(x\right)\ dx &= \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\ \left[\ f\left(x_i\right)\varphi_i\left(x_i\right) +\ f\left(x_{i-1}\right)\varphi_i\left(x_{i-1}\right)\right]\\
&= \frac{h}{2}\ f\left(x_i\right).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x\right)\ \varphi_i\left(x\right)\ dx &= \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\ \left[\ f\left(x_{i+1}\right)\varphi_i\left(x_{i+1}\right) +\ f\left(x_i\right)\varphi_i\left(x_i\right)\right]\\
&= \frac{h}{2}\ f\left(x_i\right).
\end{aligned}$$

En remplaçant dans $(4.3.55)$, nous obtenons

$$b_i = h\ \ f\left(x_i\right).$$

Donc

$$b_h = \left[h\ \ f\left(x_i\right)\right]_{1 \leq i \leq N}.$$

Ainsi, le système à résoudre est

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h}+h & -\frac{1}{h} & 0 & .... & .... & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h}+h & -\frac{1}{h} & .... & .... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -\frac{1}{h} \\ 0 & .... & .... & .... & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h}+h \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\ f(x_1) \\ h\ f(x_2) \\ . \\ . \\ . \\ h\ f(x_N) \end{bmatrix}$$

Corollaire 4.3.2 *Le système ci-dessus admet une unique solution car la matrice $\mathbb{A}_h$ est tridiagonale, symétrique et définie positive.*

Conclusion : La matrice de rigidité $\mathbb{A}_h$ obtenue par les méthodes d'approximation variationnelle des problèmes de Dirichlet et de Neumann rest inchangée. La seule différence entre les deux méthodes réside dans le traitement des conditions aux limites.

Convergence et estimation d'erreur pour la méthode $\mathbb{P}_1$

Théorème 4.3.2 (***la convergence***) *Soient $u \in H^1(0,\ 1)$ la solution du problème* (4.3.41) *et $u_h \in \mathbb{V}_h$ est la solution du problème approché* (4.3.49)*. Alors on a*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,\ 1)} = 0.$$

De plus, si $u \in H^2(0,\ 1)$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,\ 1)} \leq C\ h\ \left\|u"\right\|_{L^2(0,\ 1)}.$$

Démonstration. Similaire à celle de l'exemple 1. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'application de la technique d'éléments finis pour la résolution numérique des problèmes aux limites. De façon générale, on part du problème original et on introduit sa formulation variationnelle. Ensuite, on utilise la théorie de Lax-Milgram pour montrer que la solution existe et unique. Puisque, on travaille dans des espaces de Hilbert, on peut donc construire des espaces d'approximations internes de dimensions finies à l'aide d'un maillage du domaine. Typiquement une base de ces espaces sera constituée de fonctions dont le support est localisé sur une ou quelques mailles. Enfin, on aboutira à la résolution d'un système d'équations linéaires dont la matrice sera creuse. Nous avons illustré l'application théorique de la méthode par résoudre deux problèmes 1D, le premier muni des conditions aux limites de type Dirichlet et le second muni des condistions aux limites de type Neumann.

Références

[1] R. A. Adams, J.J.F Fournier, Sobolev spaces. Academic Press, New York, 2003.

[2] G. Allaire, Analyse Numérique et Optimisation : Une Introduction à la Modélisation Mathématique et à la Simulation Numérique, École Polytechnique, France, 2005.

[3] G. Allaire, F. Alouges, Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles, Les éditions de l'école polytechnique, Palaiseau, Janvier 2016..

[4] K. J. Bathe, Finite Element Procedures, Cambridge, MA : Klaus-Jürgen Bathe, 2006.

[5] C. Bernardi, Y. Maday & F. Rapetti, Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques. Mathématiques et Applications, Springer Verlag, Paris, vol 45, 2004.

[6] J.M. Bony, Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier. Éditions de l'école Polytechnique, 2001.

[7] F. Boyer, Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles, Partie théorique, Master MAPI3, Première année, Université Paul Sabatier, Toulouse 3, 18 février 2016

[8] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, 1987.

[9] J. Chaskalovic, Finite Element Method for Engineering Sciences : Theoritical Approach and Problem Solving Techniques, Springer, 2008.

[10] J. Chaskalovic, Mathematical and Numerical Methods for Partial Differential Equations, Springer, 2013.

[11] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, Series Studies in Mathematic and its Applications, North-Holland, (1978), réimpression SIAM Classics in Applied Mathematics, 40, SIAM, 2002.

[12] P. Ciarlet & E. Lunéville, La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique. Tome 1, concepts généraux, Les Presses de l'ENSTA, 2009.

[13] R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bulletin of the American Mathematical Society, 49(1943), 1-23.

[14] C. Daveau, Méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles. Cours de Master 2 de l'université de Cergy-Pontoise. Polycopié disponible à l'adresse http://www.u-cergy.fr/daveau/M2-EDP-APPROX.pdf.

[15] A. Ern, Aide-Mémoire des Éléments Finis, Dunod, Paris, 2005.

[16] A. Fortin & A. Garon, Les éléments finis : de la théorie à la pratique. Polycopié disponible à l'adresse http://giref.ulaval.ca/afortin.html.

[17] R. Herbin, Analyse numérique des EDP. Cours de Master de mathématiques de l'université Aix Marseille 1. Polycopié disponible à l'adresse http://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/anedp.html.

[18] A. Hrenniko , Solution of problems of elasticity by the framework method, Journal of Applied Mechanics. 8 (4) (1941), 169-175.

[19] A. Lesfari, Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace (Cours et exercices), Editions Ellipses, Paris, 2012.

[20] A. Lesfari,Introduction aux équations aux dérivées partielles (EDP), Master Maths, Département de Mathématiques Faculté des Sciences Université Chouaïb Doukkali B.P. 2, El-Jadida, Maroc 2014-2017.

[21] G.R. Liu, S.S. Quek, The Finite Element Method : A practical course, Elsevier Science Ltd, 2003

[22] D. Manceau, Analyse numériques des équations aux dérivées partielles, Master 2MASC, Université LE HAVER. Polycopié disponible à l'adresse https://lmah.univ-lehavre.fr/~manceau/ANEDP.pdf.

[23] D.W. Pepper, J.C. Heinrich, The Finite Element Method : Basic Concepts and Applications with MATLAB, MAPLE, and COMSOL, CRC Press, Third Edition, U.S., 2017.

[24] P.A. Raviart, J.M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris, 1988.

[25] P. Stiperi, Introduction à la méthode des éléments finis, Techniques de l'Ingénieur, 2002.

Résumé

Dans ce mémoire, nous explorons la méthode des éléments finis .Notre but principal est de saisir les principes fondamentaux de cette technique et de maîtriser son utilisation pour résoudre certaines équation aux dérivées partielles linéaires du second ordre , couramment rencontrées dans la modélisation de nombreux phénomènes naturels . Nous commencerons par rappeler les outils mathématiques essentiels pour cette méthode, ensuite nous illustrerons son application à travers deux problèmes unidimensionnels .

Abstract

In this dissertation, we explore the finite element method, our main aim being to grasp the fundamental principles of this technique and to master its use in solving certain second-order linear partial differential equations, commonly encountered in the modeling of many natural phenomena. We'll start by reviewing the essential mathematical tools for this method in detail, then illustrate its application through two one-dimensional problems.

ملخص

نركز في هذه مذكرة التخرج على طريقة العناصر المحدودة هدفنا الرئيسي هو فهم المبادئ العامة التي تحكم هذه التقنية ومعرفة كيفية استخدام هذه الطريقة لحل بعض المعادلات التفاضلية الجزصية الخطية من الدرجة الثانية المستخدمة في نمذجة العديد من الظواهر الطبيعية بشكل عام نبدا بالتذكير بالادوات الرياضية المفيدة لهذه الطريقة بعد التعريف بالطريقة نوضح تطبيقها باستخدام مسالتي المعادلات.

Mots clés : Equations aux dérivées partielles, écriture variationnelles, théorème de Lax-Milgram, Méthode des éléménts finis P_1.