

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre universitaire Abdelhafid Boussouf –Mila
Institut Sciences et technologie
Département de Génie Civil et Hydraulique

Spécialité : Génie Civil

Polycopié de :

Dynamique des structures 1

Cours et exercices corrigés

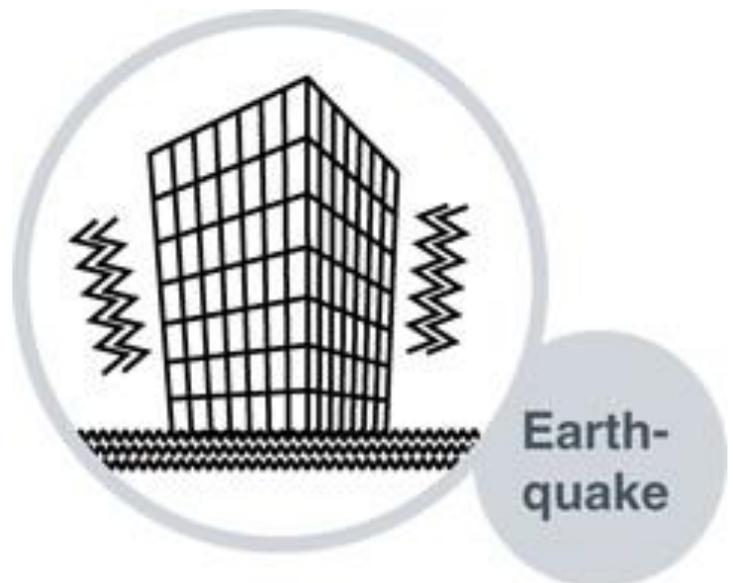
**Présenté au
Centre universitaire Abdelhafid Boussouf –Mila**

Par

Abdelheq Guettiche

**Maître de conférences A
Filière Génie Civil**

**Destiné aux étudiants
Master en Génie Civil**



Année universitaire 2021/2022

TABLE DES MATIERES

Introduction générale	2
-----------------------	---

CHAPITRE 1 : Introduction et généralistes

I.1. Caractère fondamental de la DDS	5
I.2. Actions dynamiques dans le domaine du génie civil	7
I.3. Etapes de résolution d'un problème dynamique	7
I.4. Types des actions (chargement)	8
I.5. Degré de liberté dynamique	10
I.6. Modélisation en dynamique des structures	10
I.7 Théorie des vibrations (aspect cinématique)	11
I.8 Rigidité de la structure	12
I.9. Serie d'exercices	15

CHAPITRE 2 : Systèmes à un seul degré de liberté

II.1. Introduction	20
II.2. Loi de comportement de l'oscillateur	20
II.3. Formulation de l'équation du mouvement	21
II.4. Vibrations libres d'un Système à un Seul Degré de Liberté	23
II.4.1. Vibration libre non-amortie ($C=0$)	23
II.4.2. Vibration libre amortie ($C\neq 0$)	26
II.5. Vibrations forcée d'un SSDDL excitation harmonique	30
II.5.1. Vibration non amortis sous charge harmonique	30
II.5.2. Vibration amortis sous charge harmonique	32
II.5.3. Résonance	35
II.5.4. Réponse du mouvement d'un support	37
II.6. Instruments sismiques.	38
II.7. Isolation vibratoire	39
II.8. Excitations périodiques (spéciales et générales)	43
II.8.1 Principe de superposition	43
II.8.2. Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique	43
II.8.3. Réponse d'un SSDDL à une superposition (charge impulsive)	44
II.8.4. Réponse d'un SSDDL à une excitation dynamique quelconque	48
II.8.5. Spectre de réponse	49

CHAPITRE 3 : Systèmes à plusieurs degrés de liberté

III.1. Définition	55
III.2. Modélisation	55
III.3. Vibrations libres non amorties	55
III.3.1. Méthode de la matrice de rigidité (Méthode des raideurs)	56
III.3.2. Méthode de la matrice de flexibilité (Méthode de flexibilités)	59
Références bibliographiques	62

Avant-Propos

C'est avec un grand plaisir que nous présentons ce document qui comporte les notions fondamentales de la dynamique des structures dans le domaine de Génie Civil.

Le présent polycopié intitulé « Dynamique des structures 1 », s'adresse aux étudiants de Master en génie civil système « LMD », option : « Structures ». Il est rédigé de manière simplifiée et des exemples sont introduits après avoir donné des notions afin que l'étudiant puisse assimiler le contenu du cours et ait une vision claire de son application dans la vie courante. Des exercices sont accompagnés de leurs solutions à la fin pour que l'étudiant s'y entraîne. Le polycopié est organisé en trois chapitres :

Dans **le premier chapitre** on retrouve une revue des connaissances préliminaires sur les problèmes dynamiques : chargement dynamique, structure ou système dynamique, degré de liberté d'un système, Coordonnées généralisées.

Le chapitre 2 développe les bases de la dynamique des structures en examinant en détail les systèmes à un degré de liberté, ou oscillateurs simples. Selon une approche traditionnelle, la résolution analytique de l'équation du mouvement est traitée progressivement, en commençant par les oscillations libres non amorties, puis amorties, les oscillations forcées et le mouvement de la fondation. La notion essentielle de facteur d'amplification dynamique est particulièrement explicitée. L'intégrale de convolution, ou de Duhamel, est ensuite introduite pour généraliser la détermination de la réponse dynamique des oscillateurs soumis à des forces quelconques. Elle permet de traiter les cas de forces appliquées brusquement et de forces de type impulsionnel (chocs et explosions). Le chapitre se termine par une description des méthodes principales de résolution numériques et de leurs propriétés.

Le chapitre 3 est consacré aux systèmes à plusieurs degrés de liberté, ou oscillateurs multiples. De manière analogue au chapitre 2, l'analyse est traitée progressivement, en commençant par la formulation des équations de mouvement, puis l'évaluation des matrices de masse $[M]$, de rigidité $[K]$, d'amortissement $[C]$ et vecteur de force $\{P\}$. Une des difficultés réside dans le fait que la présence de plusieurs degrés de liberté implique une formulation matricielle de l'équation du mouvement. Les modes propres, leur détermination et leur signification physique, font l'objet d'une attention particulière, car cette notion est fondamentale pour la compréhension du comportement dynamique des structures.

Introduction générale :

Les vibrations font partie intégrante de notre vie. Le moindre mouvement entraîne des vibrations d'amplitude et de durée variables, depuis l'oscillation lente d'un pont suspendu excité par le vent jusqu'au choc engendré à l'atterrissage par un avion, en passant par le bruit des moteurs de trafic routier. On s'intéresse aux vibrations des structures pour les principales raisons suivantes :

- Problèmes de dysfonctionnements et de destruction des structures soumises à des vibrations surtout en basses fréquences.
- Maintenance vibratoire : À partir de la mesure des vibrations régulièrement recueillies sur une machine tournante, l'analyse vibratoire consiste à détecter d'éventuels dysfonctionnements et à suivre leur évolution dans le but de planifier ou reporter une intervention mécanique.
- Rayonnement acoustique : L'étude du bruit produit par une machine tournante nécessite la connaissance assez précise de leur comportement vibratoire. À partir du mesure du bruit rayonné par une machine tournante, on peut diagnostiquer leurs pannes.

Le but de ce cours est de présenter les différentes méthodes qui permettent d'étudier une structure sollicitée par un chargement dynamique qui varie en fonction du temps. La réponse de la structure c.à.d. les déplacements, les forces internes, les contraintes et les déformations dépendent également du temps.

Il existe deux approches différentes d'analyse de la réponse d'une structure à un chargement dynamique :

♣ **Déterministe** : la variation de la charge en fonction du temps est complètement connue (Définie par une équation) c.à.d. l'amplitude, la direction, et le point d'application sont connus à tout instant que le chargement soit périodique ou non périodique.

♣ **Stochastique** : la loi de variation de la charge en fonction du temps n'est pas connue : chargement aléatoire, ce chargement peut être décrit de façon statistique (moyenne, écart type, contenu fréquentiel,... etc.)

Exemple : Trafic routier, vent, séisme futur ...etc.

Un des mouvements les plus importants observés dans la nature est le mouvement oscillatoire, en particulier le mouvement harmonique : oscillations d'un pendule,

d'une masse attachée à un ressort, d'un gratte-ciel, etc.

Dans le cas des oscillations de systèmes mécaniques conservatifs isolés, on parle d'oscillations libres ; en présence de frottement, l'amplitude des oscillations décroît et on observe des oscillations amorties. Si les oscillations sont entretenues par une action extérieure, on parle d'oscillations forcées. Dans ce dernier cas, on verra apparaître de nouveaux phénomènes tels que la résonance, qui peut avoir des conséquences catastrophiques. Cependant, la plupart des problèmes observés (mis à part les tremblements de terre) sont liés à des critères d'aptitude au service. Ceux-ci demandent une connaissance précise du comportement linéaire des structures.

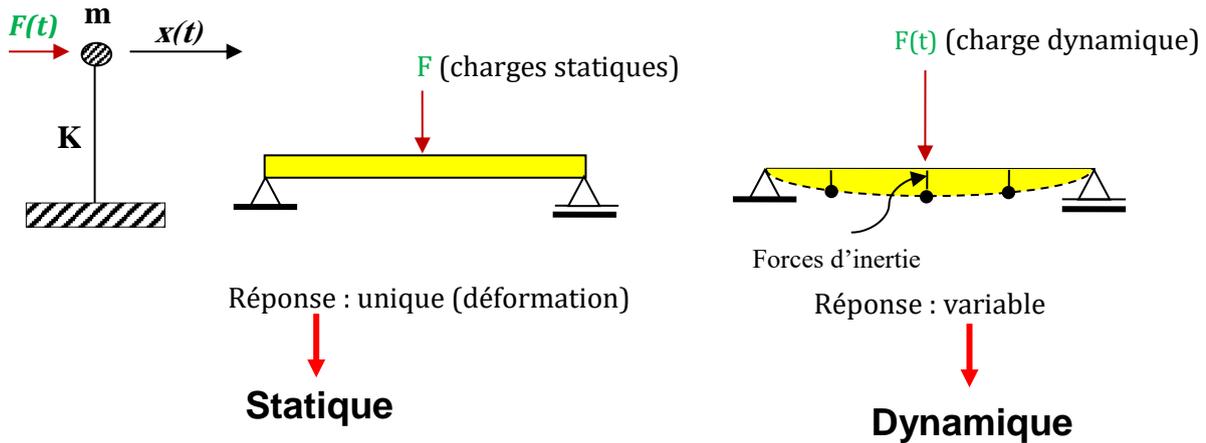
CHAPITRE I

Introduction et généralistes

I.1. Caractère fondamental de la DDS :

Deux points distinguent les problèmes dynamiques de ceux de la statique :

- ♣ En Dynamique la solution varie avec le temps alors qu'en statique elle est unique.
- ♣ Dès qu'il y a mouvement, des forces d'inertie prennent naissance qui s'opposent aux. c'est le principe d'Alembert



Structures soumises à des Efforts constants :

- ♣ Pas d'évolution temporelle des efforts appliqués
- ♣ Evolution très lente : Fatigue

Structures soumises à des Efforts dynamiques :

- ♣ **Evolution temporelle rapide des efforts appliqués** :
 - Harmoniques, périodiques, qcq
 - Caractérisés par leur **spectre**

Objet des cours de :

- ♣ **Stat. des milieux continus (MMC)**
- ♣ **Résistance des matériaux (RDM)**

Objet des cours de :

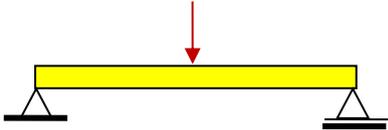
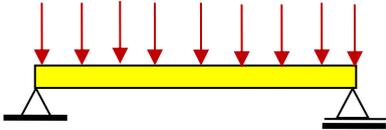
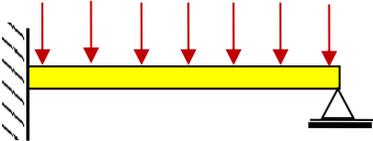
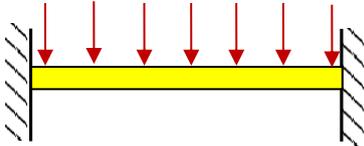
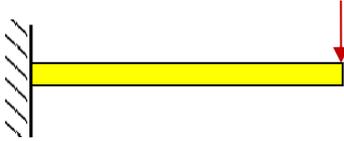
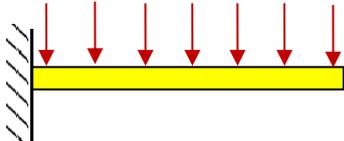
- ♣ **Vibrations ou dynamique des structures**

Figure 1.2. Distinction fondamentale entre une charge statique et une charge dynamique

Le but premier de la dynamique des structures consiste à déterminer les variations dans le temps des contraintes et des déplacements engendrés par chargement dynamique.

Exemple :

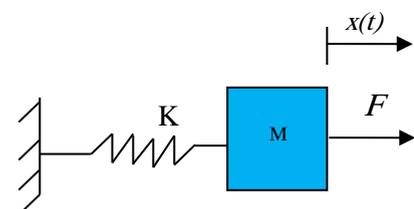
Le tableau ci-dessous illustre les cas échantillons des déplacements statiques des poutres :

Type de Poutre	Moment Max (Mmax)	Flèche Max (Xmax)
	$M = \frac{P \times L}{4}$	$X = \frac{P \times L^3}{48 \times EI}$
	$M = \frac{P \times L^2}{8}$	$X = \frac{5 \times P \times L^4}{384 \times EI}$
	$M = -\frac{P \times L^2}{8}$	$X = \frac{P \times L^4}{185 \times EI}$
	$M = \frac{P \times L^2}{12}$	$X = \frac{P \times L^4}{384 \times EI}$
	$M = -PL$	$X = \frac{P \times L^3}{3 \times EI}$
	$M = -\frac{P \times L^2}{2}$	$X = \frac{P \times L^4}{8 \times EI}$

Exercice 01(Problème statique) :

Soit une masse M attachée à un ressort élastique qui s'allongerait de $x = 1$ cm sous l'action d'une force $F=10$ N.

- Déterminer la raideur K du ressort.



Solution:

En équilibre : $\sum F = 0 \Leftrightarrow F_1 - F = 0$; avec : $F_1 = K \cdot x$

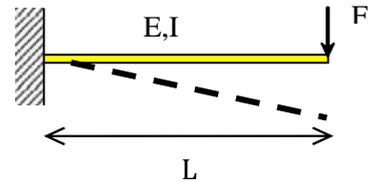
$$\Leftrightarrow K \cdot x - F = 0 \rightarrow K = \frac{F}{x} = \frac{10}{10^{-2}} = 10^3 \text{ N/m}$$

Exercice 02 (Problème statique) :

Soit une console de longueur $L = 1\text{m}$ donnée par la figure ci -contre

a) Déterminer la charge F qu'il faut appliquer à l'extrémité de cette console pour faire déplacer verticalement d'un déplacement de x

b) Que représente le coefficient K qui donne la relation : $F=K \cdot x$



Donnée : $E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $I= 1000\text{cm}^4$

Solution :

a) $F = \frac{3EI}{L^3} x \Rightarrow K = \frac{3EI}{L^3}$; sachant que : $K = \frac{F}{x}$

b) La rigidité ou la raideur de la console est la force qu'il faut appliquer pour avoir un déplacement unitaire à l'extrémité libre de la console

$$K = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \times 2.1 \times 10^5 \times 1000 \times 10^4}{1000^3} = 6.3 \text{ N/m}$$

I.2. Actions dynamiques dans le domaine du génie civil :

- ♣ Vibrations provoquées par le trafic (trains, camions) charges mobiles d'intensité constante ou non (hypothèse à faire) ;
- ♣ Vibrations provoquées par l'homme : marche, sauts, danse...
- ♣ Vibrations provoquées par les machines (machines tournantes...)
- ♣ Explosions et impacts.
- ♣ Vent : composante moyenne statique + composante turbulente dynamique
- ♣ Séismes : sollicitation par accélération imposée des fondations des structures (composantes verticale et horizontale)
- ♣ Houle : cas des structures côtières et off-shore + navires

I.3. Etapes de résolution d'un problème dynamique :

- ♣ Caractérisation des actions s'exerçant sur le système
- ♣ Modélisation du système
- ♣ Mise en équation
- ♣ Résolution des équations

I.4. Types des actions (chargement) :

De point de vue analytique, il est commode de subdiviser ou de classer le chargement de déterministe en deux grandes catégories principales :

- ♣ Chargement de type périodique
- ♣ Chargement de type non périodique

I.4.1. Chargement Périodique : Harmonique, anharmonique.

Les chargements périodiques présentent la particularité d'être caractérisé par une variation temporelle similaire qui conserve la même dans un grand nombre de cycle. Les chargements périodique les plus simple peut se forme sinusoïdales qu'on appelle harmonique simple (Fig1.2.)

a) Harmonique (fonction sinusoïdale) :

Décrit un mouvement oscillatoire au voisinage d'une position d'équilibre stable Définie par : Amplitude (A) et pulsation (ω) (machine tournante, système masse-ressort).

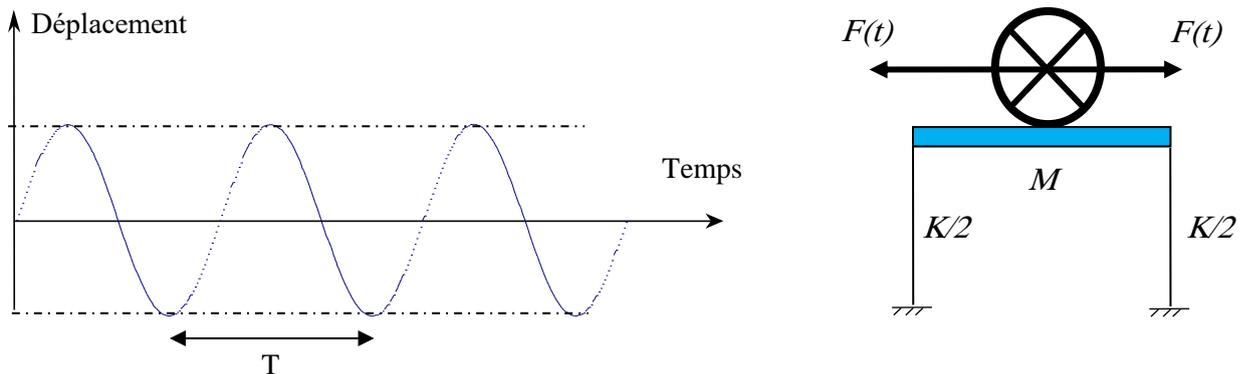


Figure 1.2. Charge harmonique

b) Anharmonique (régime périodique) : décrit le même mouvement de manière périodique. Ce type de chargement définie par : Amplitude (A) et pulsation (ω) et on utilise la transformation de Fourier pour résolu leur équation de mouvement.

Exemple : un piéton sur une passerelle

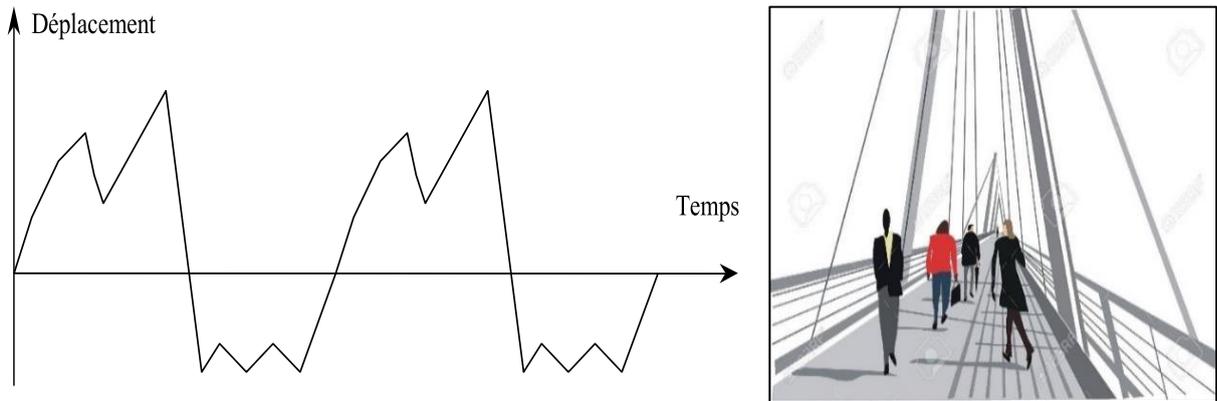


Figure 1.3. Chargement périodique anharmonique

I.4.2. Chargement non Périodique (Transitoire) :

Variation de façon arbitraire dans le temps sans périodicité on distingue deux types :

a) Impulsion : charge de courte durée par rapport à la période de la structure ($t_0 < T$). Fig.1.4

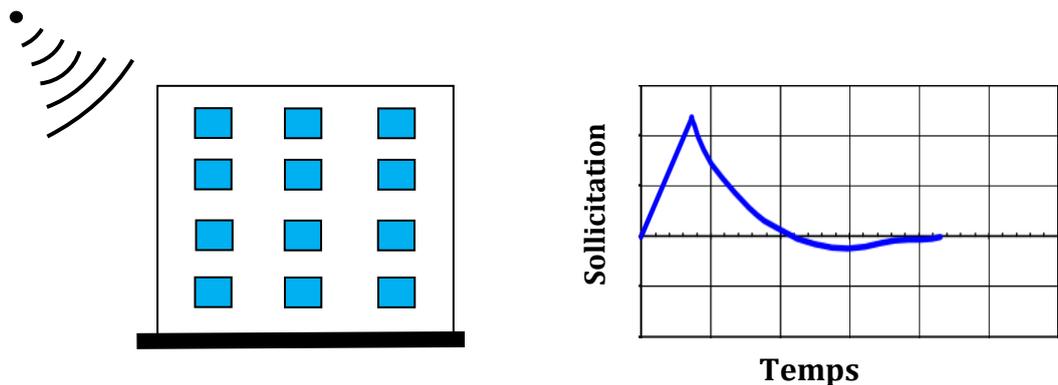


Figure 1.4. Chargement impulsive (souffle d'une explosion sur une construction)

b) Chargement transitoire : résulte d'une succession d'impulsion. La durée d'application est longue par rapport à la période de la structure ($t_0 > T$). Fig.1.5

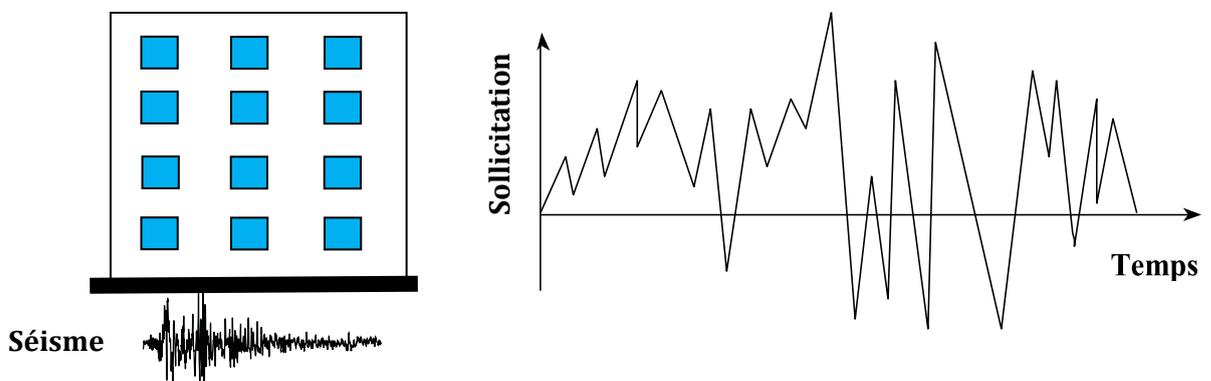


Figure 1.5. Chargement non périodique (transitoire)

I.5. Degré de liberté dynamique :

En dynamique, pour faire l'étude d'une structure elle sera remplacée par un modèle mathématique appelé schéma de calcul, dont l'une des caractéristiques essentielle est le nombre de degré de liberté. Le DDL est le nombre de coordonnées nécessaires pour définir la position de toutes les particules de masse d'un système. Souvent plusieurs DDL sont négligés pour simplifier l'étude d'un système complexe :

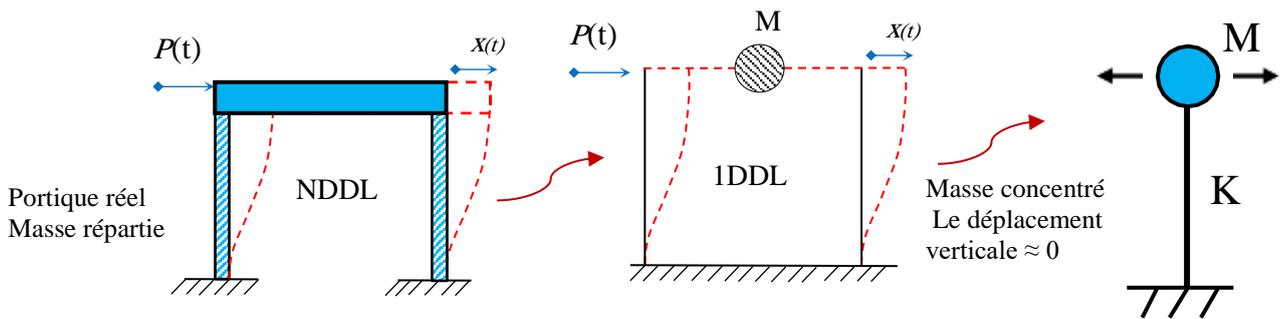


Figure 1.6. Simplification d'un portique à PDDL à un portique d'un DDL

Comme pour l'analyse statique, l'analyse dynamique des structures peut être effectuée dans le plan ou en trois dimensions. Ce cours se limitera à l'analyse des mouvements dans le plan.

♣ **Mouvement dans le plan** $\Rightarrow 3$ DDL :

- translations selon x et y
- rotation autour de z (dans le plan xy)

♣ **Mouvement dans trois dimensions** $\Rightarrow 6$ DDL :

- translations selon x , y et z
- rotations autour de x , y

I.6. Modélisation en dynamique des structures :

L'analyse d'un problème dynamique est complexe si la masse est répartie, les déplacements et les accélérations doivent être calculé en tout point du système ; l'équilibre dynamique est réagi par un système d'équations aux dérivées partielles. La modélisation d'une structure permet des simplifications importantes représentant une approximation suffisante en pratique de la solution exacte du problème. Pour faire un schéma de calcul deux hypothèses sont utilisés :

- L'approche par concentration des masses.
- L'approche des déplacements généralisés.

♣ **Modélisation en masse concentrées :**

Consiste à concentrer la masse de la structure en un certain nombre de points et de considérer le reste de la structure sans masse.

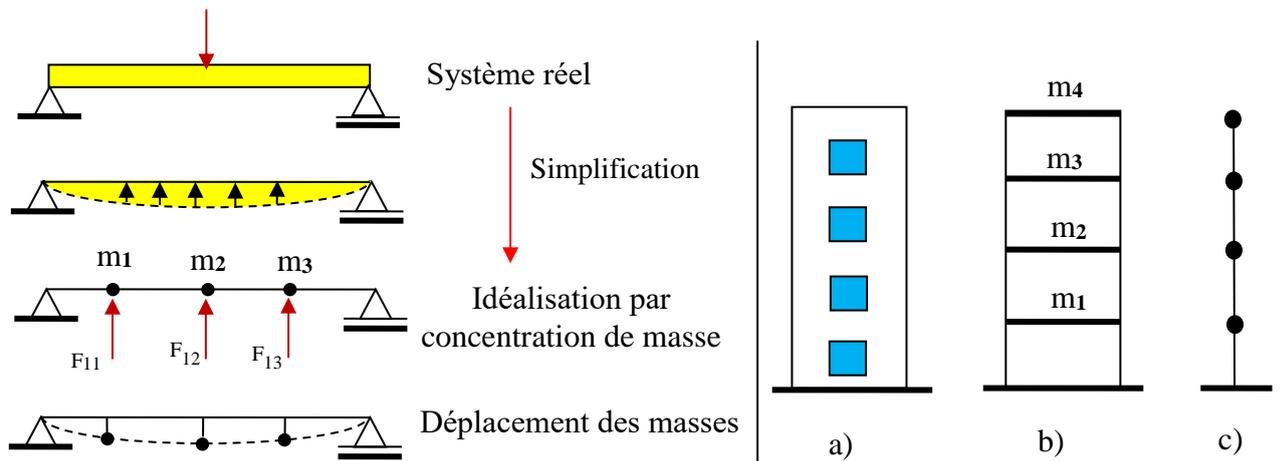


Figure 1.7. Idéalisation des structures par concentration de la masse.

- ♣ **Déplacements généralisés :** la déformée de la structure peut être représenté en série trigonométrique (série de Fourier) représentant chacune une déformée possible du système. $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ (I.1)

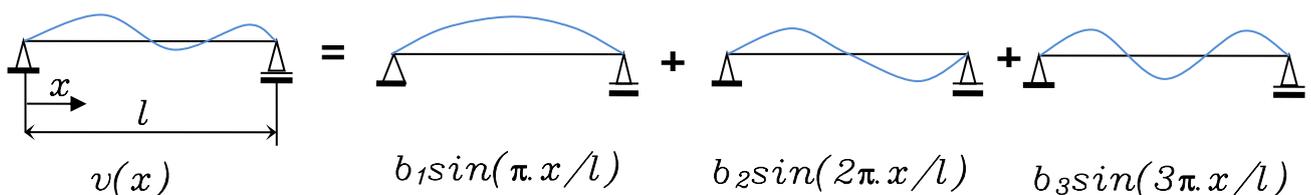


Figure 1.8. Représentation de la déformée d'une poutre en série de Fourier

1.7. Théorie des vibrations (aspect cinématique)

Le déplacement d'un système oscillatoire simple quelconque s'exprime par la fonction trigonométrique suivante :

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (I.2)$$

$x(t)$: Elongation (déplacement mesuré à partir de la position initiale)

x_0 : Amplitude (valeur maximale de $x(t)$)

ω : Pulsation (rad/s)

φ : Déphasage (angle de la phase initiale ($t=0$))

- Le temps T minimal d'exécution d'un cycle complet s'appelle période de la vibration.

Un cycle complet correspond à la valeur :

$$\omega \cdot t = 360$$

$$\text{Dans ce cas } T = t \implies \omega \cdot T = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (I.3)$$

- Le nombre d'oscillation complète se produisant pendant une seconde caractérise la fréquence f de la vibration.

f représente donc le nombre de cycles par seconde en Hertz (Hz)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (I.4)$$

T : Période propre

ω : Pulsation propre

Ou : $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

k : rigidité de l'élément [N/m]

m : masse de l'élément [kg]

Connaissant l'équation (I.1), on peut déduire :

La vitesse : $v(t) = \frac{d(x(t))}{dt} = \dot{x}(t) = x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (I.5)$

L'accélération : $a(t) = \frac{d^2(x(t))}{dt^2} = \ddot{x}(t) = -x_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (I.6)$

Remarque :

Ces trois grandeurs (pulsation ω , période T et fréquence f) portent la dénomination « **propre** » car il s'agit de propriétés qui sont propres à l'oscillateur, dépendant uniquement de la masse et de la rigidité de celui-ci.

I.8. Rigidité de la structure :

- **Rigidité axiale**

La rigidité axiale d'un élément de structure est donné par :

$$k = \frac{EA}{L} \left(\frac{N}{m} \right)$$

Avec : A : aire de la section droite de l'élément (m²) ;

E : module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (N/m²) ;

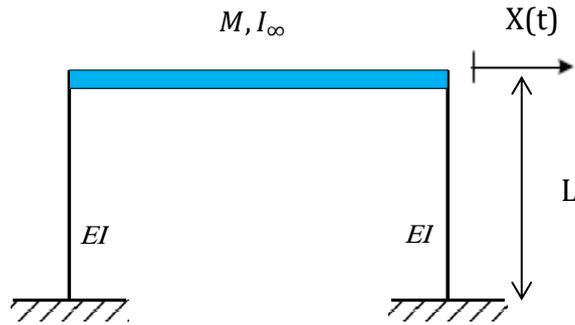
L : longueur de l'élément (m).

- **Rigidité flexionnelle**

La rigidité flexionnelle d'un élément de structure dépend des conditions de liaison à ses deux extrémités. On peut distinguer les deux cas suivants :

- **Elément bi-encasté :**

Par exemple, une colonne d'un cadre avec des liaisons rigides aux deux extrémités.



La rigidité de chaque colonne dans ce cas de figure vaut :

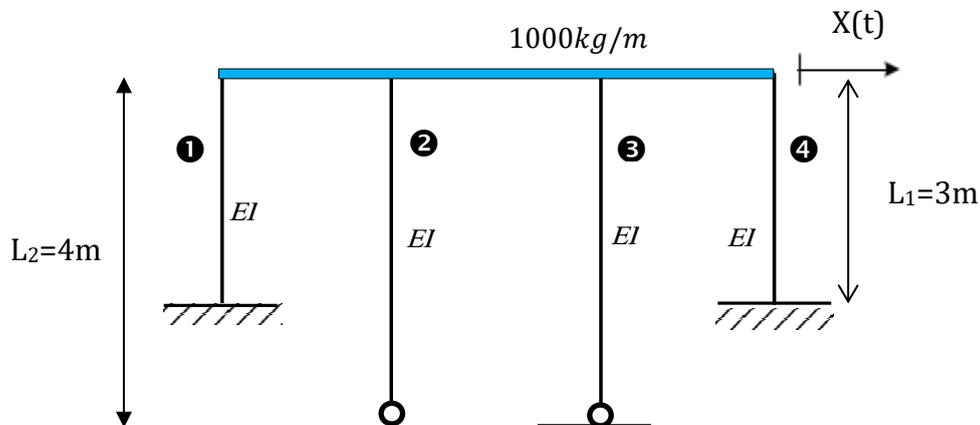
$$k = \frac{12EI}{L^3} \text{ (N/m)}$$

Avec : I : moment d'inertie de la section droite de l'élément (m^4) ;

E : module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (N/m^2) ; L : longueur de l'élément (m).

Exercice 03 : Concours d'accès au Doctorat LMD.2014 :

Déterminer la période de vibration de la structure suivante. La poutre est supposée infiniment rigide.



La rigidité de chaque colonne dans ce cas de figure vaut :

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ (N/m}^2\text{)}$$

$$I = 2.7 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

Avec : I : moment d'inertie de la section droite de l'élément (m^4) ;

E : module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (N/m^2) ;

L : longueur de l'élément (m).

Solution :

Déterminer la période de vibration de la structure:

La rigidité des poteaux articulées : $K_1 = K_4 = \frac{3EI}{L_1^3}$

La rigidité des poteaux encastrées : $K_2 = K_3 = \frac{12EI}{L_2^3}$

$$K_1 = K_4 = \frac{12 \times 2 \times 10^{11} \times 2.7 \times 10^{-5}}{3^3} = 24 \times 10^5 \text{N/m}$$

$$K_2 = K_3 = \frac{3 \times 2 \times 10^{11} \times 2.7 \times 10^{-5}}{4^3} = 2.53 \times 10^5 \text{N/m}$$

La rigidité équivalente :

les ressorts en parralleles donc :

$$K_{eq} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 53.0610^5 \text{N/m}$$

La masse :

$$m = 1000 \times 27 = 27000 \text{Kg}$$

La pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{53.06 \times 10^5}{27000}} = 14.018 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6.28}{2.62} = 2.4 \text{ s}$$

I.9. Série d'exercice 01:

Exercice N° 01:

Si la fréquence de la vibration d'un ressort suspendu de rigidité $K = 500 \text{ N/m}$ et une masse M est de 1.59 Hz

a) Calculer la valeur de M ?

Exercice N° 02:

Calculer la masse (M) et la rigidité (K) propre du système suivant



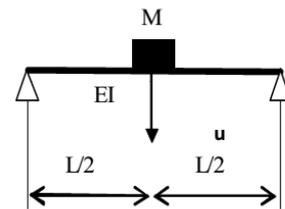
Exercice N° 03:

Pour la poutre simplement appuyée ci-contre

Déterminer :

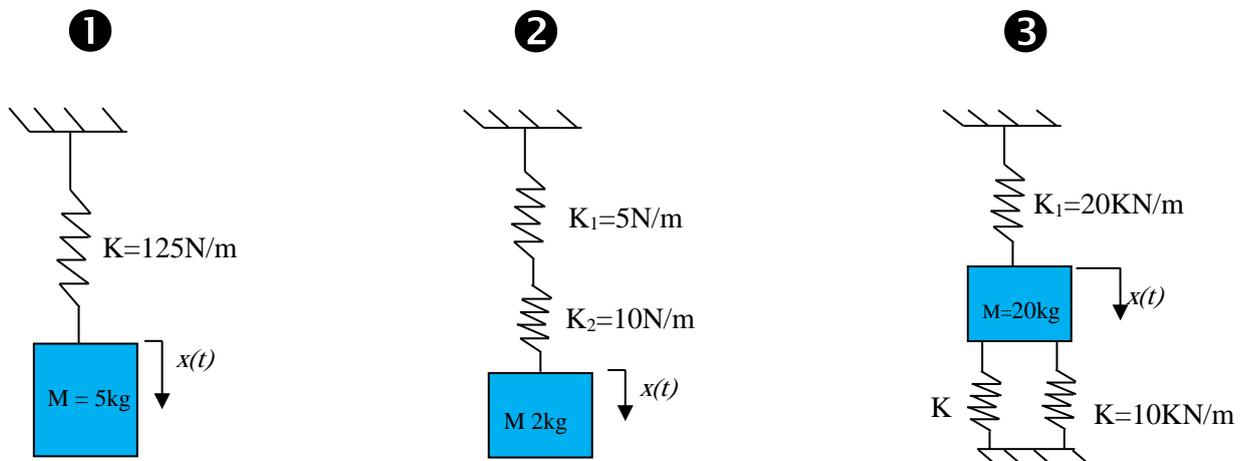
- a) La fréquence angulaire ω ?
- b) La fréquence naturelle f ?
- c) La période naturelle T ?

$EI = \text{cte}$



Exercice N° 04:

Calculer ω , T et f pour les systèmes suivants



Solution Série 01

Exercice 01:

En équilibre : $\sum F = 0 \Leftrightarrow F_e - P = 0 \Leftrightarrow Kx - mg = 0$

$$x = \frac{mg}{K}; \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \times 1.59 = 9.98 \text{ rad/s}$$

$$m = \frac{K}{\omega^2} = \frac{500}{9.98^2} = 5.02 \text{ Kg}$$

Exercice 02 :

La masse M :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} = 0.15 \text{ S} ; \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M+m}{K}} = 0.25 \text{ S}$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \frac{M+m}{M} = \left(\frac{0.25}{0.15}\right)^2 \rightarrow \frac{M+5000}{M} = 2.77 \rightarrow M = 2824.85 \text{ Kg} = 2.82 \text{ t}$$

La rigidité K :

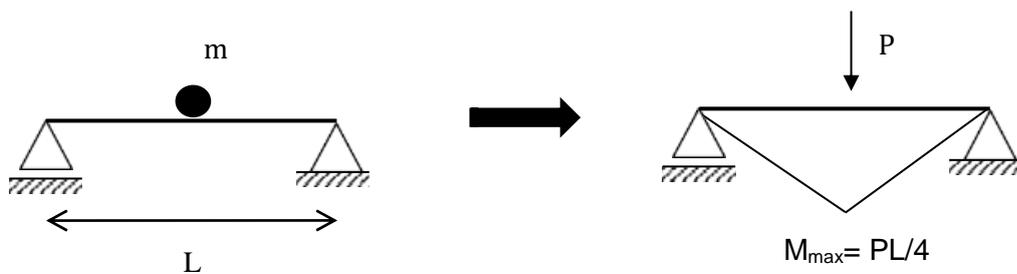
$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} = 0.15 \text{ S} \rightarrow k = \frac{(2\pi)^2 \times M}{(0.15)^2} = \frac{(2\pi)^2 \times 2824.85}{(0.15)^2} = 4951.44 \text{ KN/m}$$

Exercice 03 :

a) La fréquence angulaire :

En équilibre : $\sum F = 0 \Leftrightarrow F_e - P = 0 \Leftrightarrow Kx - mg = 0$

$$\text{On a : } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{g}{x} \rightarrow \sqrt{\frac{g}{x}}$$



Le déplacement statique d'une poutre sous une charge concentré égale à :

$$x_{st} = \frac{PL^3}{48EI}$$

$$\text{Donc : } \omega = \sqrt{\frac{g}{PL^3/48EI}} = \sqrt{\frac{48EIg}{PL^3}}$$

$$\text{On sait que : } P = Kx = mg \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{48EI}{mL^3}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{48EI}{mL^3}}$$

b) La fréquence f :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{48EI}{mL^3}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48EI}{mL^3}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{48EI}{mL^3}}}$$

$$\text{Donc : } K = \frac{P}{x} = \frac{p}{\frac{p}{48EI}} = \frac{48EI}{L^3}$$

Exercice 04 :

①

$$\text{On a : } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{125}{5}} = 5 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} = \frac{2\pi}{5} = 1.25 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.25} = 0.8 \text{ HZ}$$

② Les ressorts en série donc :

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \rightarrow K_{eq} = \frac{K_1 \times K_2}{K_1 + K_2} = \frac{5 \times 10}{5 + 10} = 3.33 \text{ N/m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3.33}{2}} = 1.29 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} = \frac{2\pi}{1.29} = 4.86 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4.86} = 0.2 \text{ HZ}$$

③ Les 3 ressorts sont en parallèles :

$$K_{eq} = \sum K_i = 10 + 10 + 20 = 40 \text{KN/m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{40 \times 10^3}{20}} = 44.72 \text{rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} = \frac{2\pi}{1.29} = 0.14 \text{s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.14} = 7.12 \text{HZ}$$

CHAPITRE II

Systemes à un seul degré de liberté

II.1. Introduction :

Le choix d'un modèle le plus simple possible amène souvent à l'étude d'un système à un degré de liberté. Une structure est dite « à un degré de liberté » si sa configuration à un instant t quelconque, peut être déterminée au moyen d'un seul paramètre scalaire $q(t)$, nommé paramètre de configuration.

Donc un modèle avec une seule possibilité de mouvement ou bien une seule déformée (Déplacement ou rotation). Les structures filaires rencontrées dans le domaine du génie civil : un portique à un étage, un tablier de pont, un hauban- sont parfois modélisées à l'aide de systèmes un degré de liberté, ce qui permet de représenter leur comportement dynamique fondamental.

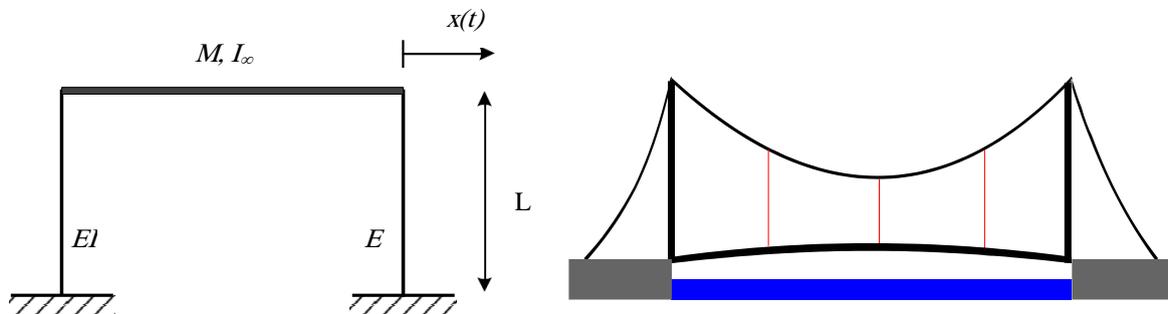


Figure II.1. Exemples de système à un degré de liberté

II.2. Loi de comportement de l'oscillateur :

Cette loi dépend dans le cas le plus général du déplacement $x(t)$ de la masse et de sa vitesse $\dot{x}(t)$ par rapport au support

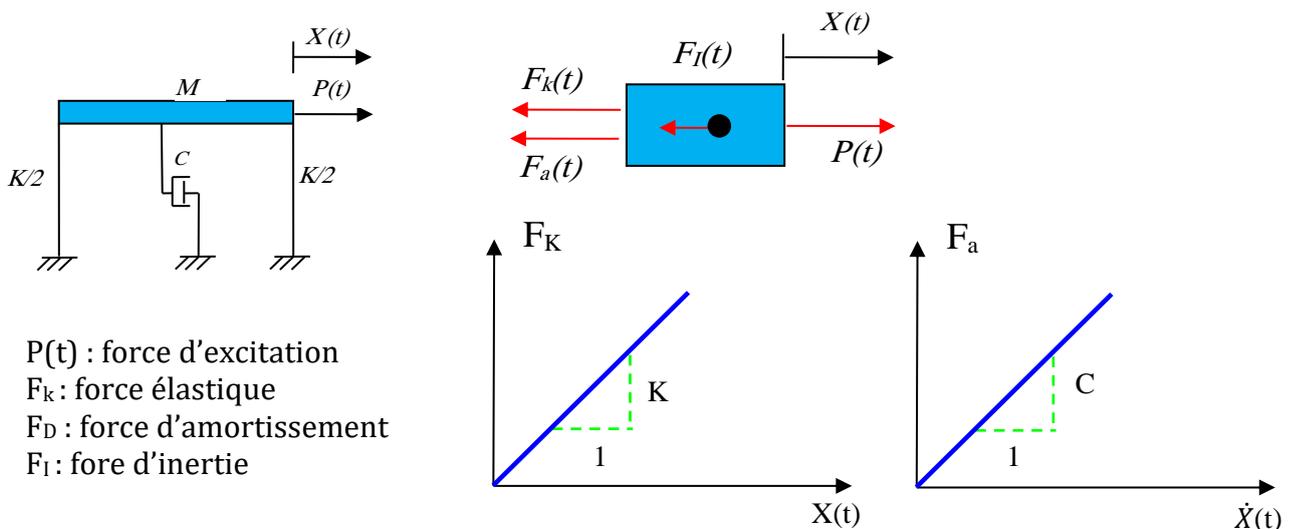
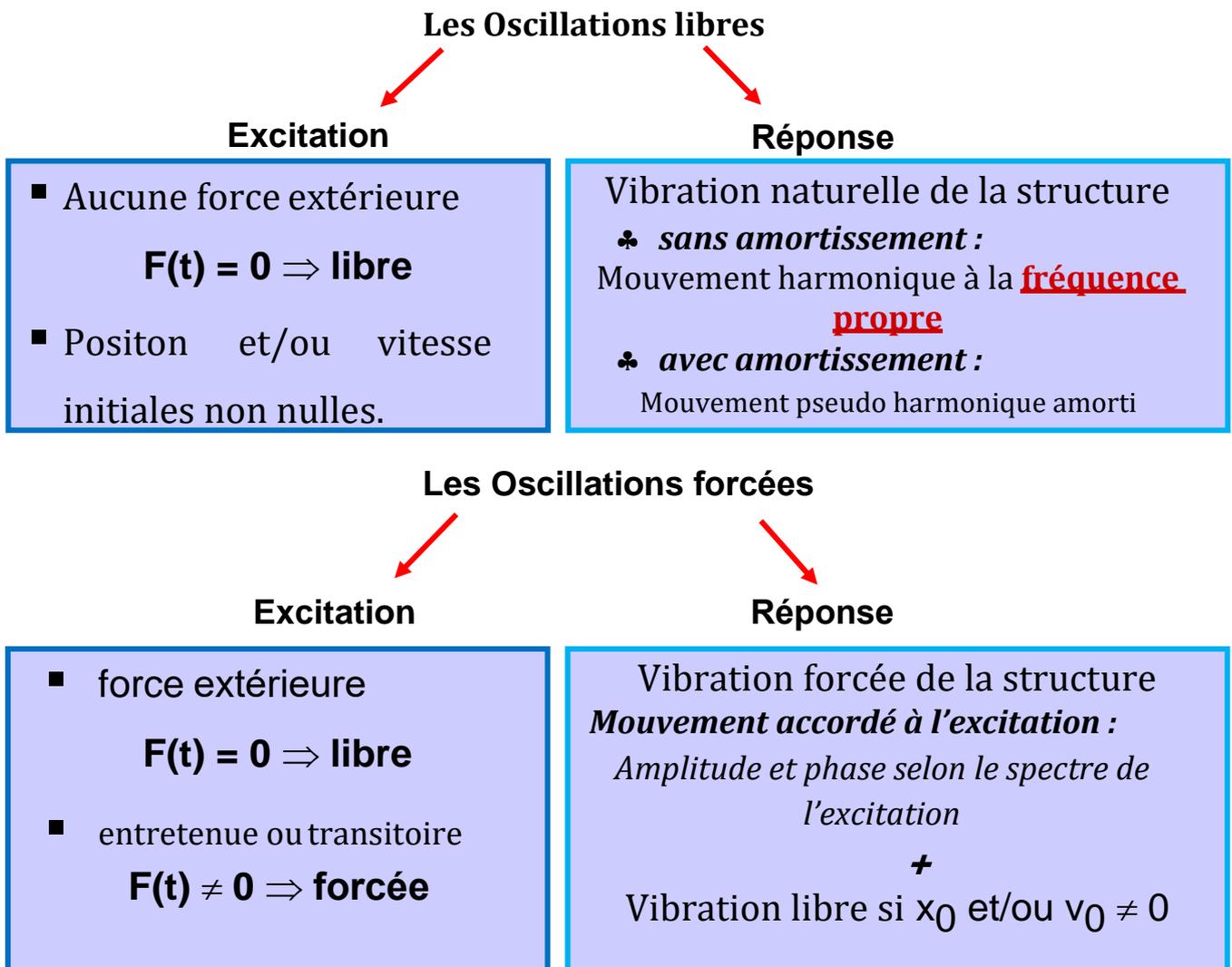


Figure II.2. Relation force interne -déformation et force d'amortissement -vitesse relative

Dans un système linéaire la relation développée entre la force et le déplacement s'écrit simplement : $F = K \times x$

La dépendance de la force sur le déplacement peut cependant être non linéaire, initialement il y a une proportionnalité entre la force et le déplacement, puis au-delà d'un certain seuil de déplacement la relation cesse d'être linéaire. Dans le présent cours, on se restreindra au cas de l'oscillateur linéaire caractérisé par une loi de comportement donnée par la figure 2.2. On générale on trouve deux types de vibrations linéaires des structures :



II.3 Formulation de l'équation du mouvement :

En dynamique des structures, on cite les méthodes nécessaires pour formuler l'équation du mouvement d'un seul degré de liberté (SSDDL) :

- ♣ Le principe de d'Alembert
- ♣ Le principe de Hamilton
- ♣ Le principe des déplacements virtuels

Dans ce cours en présente à titre d'exemple le principe de d'Alembert :

a/ cas d'une excitation extérieure :

La seconde loi de Newton traduit : que la quantité de mouvement d'une masse m quelconque s'accroît proportionnellement au vecteur force extérieure f qui lui appliquée.

$$\frac{d}{dt} \left(m \cdot \frac{dx}{dt} \right) = F(t)$$

En dynamique la masse n'est pas fonction du temps.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot \ddot{x} = F(t)$$

$$F(t) - m \cdot \ddot{x} = 0$$

Où le terme $F_I(t) = -m \cdot \ddot{x}$, appelé force d'inertie s'oppose à l'accélération de m.

Ainsi exprimée l'équation du mouvement prend la forme d'un équilibre dynamique connu sous le nom de principe de d'Alembert.

$$F(t) + F_I(t) = 0$$

$$\sum F = 0$$

Donc l'équilibre dynamique s'écrit :

$$F_I(t) + F_a(t) + F_k(t) = P(t)$$

Ou :

$$F_I(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot \ddot{x}$$

$$F_a(t) = \frac{dx}{dt} = C \dot{x}$$

$$F_k(t) = Kx$$

L'équation de mouvement sera :

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = P(t) \tag{II.1}$$

L'équation du mouvement est une équation différentielle non homogène du second ordre linéaire à coefficients constantans.

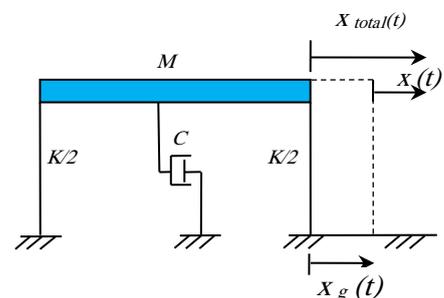
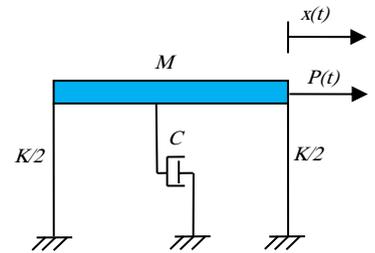
b/ Cas du mouvement du sol dû à un séisme (déplacement de la base) :

Il n'y a pas de force externe appliquée sur la structure. Dans ce cas l'excitation provient d'un séisme qui donne naissance à un déplacement $x_g(t)$ à la base de la structure relatif à l'axe de référence :

$$x_t = x(t) + x_g$$

L'équilibre des forces sur la masse isolée donne :

$$F_I(t) + F_a(t) + F_k(t) = 0$$



La force d'inertie est liée à l'accélération totale égale à :

$$F_I = m \cdot \ddot{x}_t = m \cdot (\ddot{x}_g + \ddot{x})$$

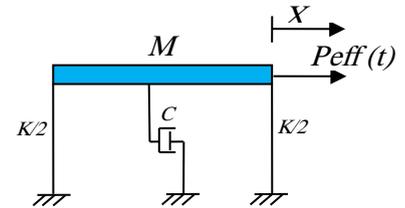
$$m \cdot (\ddot{x}_g + \ddot{x}) + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = -m \cdot \ddot{x}_g = P_{eff}(t) \quad (II.2)$$

donc $P_{eff}(t)$ est une force sismique effective équivalente à l'effet du séisme sur la structure la structure répond à l'accélération su sol \ddot{x}_g

exactement comme elle répondait à un chargement extérieur :

$$P_{eff} = -m \cdot \ddot{x}_g(t)$$



II.4 Vibrations libres d'un Système à un Seul Degré de Liberté (SSDDL) :

Le SSDDL est simplement représenté par le modèle ci-dessus :

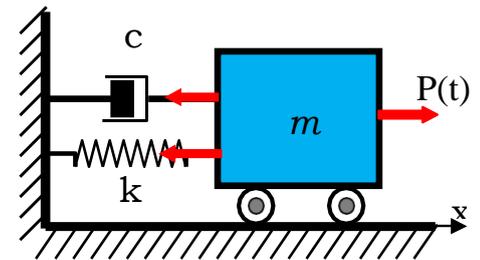
Un tel système est caractérisé par un seul degré de liberté (déplacement suivant x), c'est pourquoi il est appelé 1 SSDDL.

En l'absence de la force extérieure, la masse oscille librement.

Donc on a :

$$M \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + K \cdot x = P(t) = 0 \quad (II.3)$$

La solution prend une forme différente selon que l'oscillateur est amorti ou non.



Système masse ressort

II.4.1. Vibration libre non-amortie (C=0) :

Pour un système conservatif, on peut écrire :

$$M \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0 \quad (II.4)$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{M} \cdot x = 0 \quad (II.5)$$

On pose : $\omega^2 = \frac{K}{M}$

La solution générale est de la forme (équation d'Euler):

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \quad (II.6)$$

L'amplitude maximale est de la valeur :

$$x_{max} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Si l'on se donne par exemple les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = x_0 \\ B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{cases}$$

Donc la solution devient :

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \quad (II.7)$$

Et on écrit x_{max} comme : $x_{max} = \rho = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$ (II.8)

La solution peut encore s'écrire :

$$x(t) = \rho \cdot \cos(\omega t - \alpha)$$

$$x(t) = \rho \cdot \sin(\omega t - \beta)$$

Avec : $tg(\alpha) = \frac{\dot{x}_0}{\omega \cdot x_0}$ (II.9)

et $tg(\beta) = \frac{\omega \cdot x_0}{\dot{x}_0}$ (II.10)

Paramètre	Symbole	Formule	Eq
fréquence naturelle	ω	$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$	(II.11)
Période	T	$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{M}{K}}$	(II.12)
fréquence propre du système	f	$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, $f = \frac{1}{T}$	(II.13)

Le mouvement est donc une vibration harmonique de période $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$

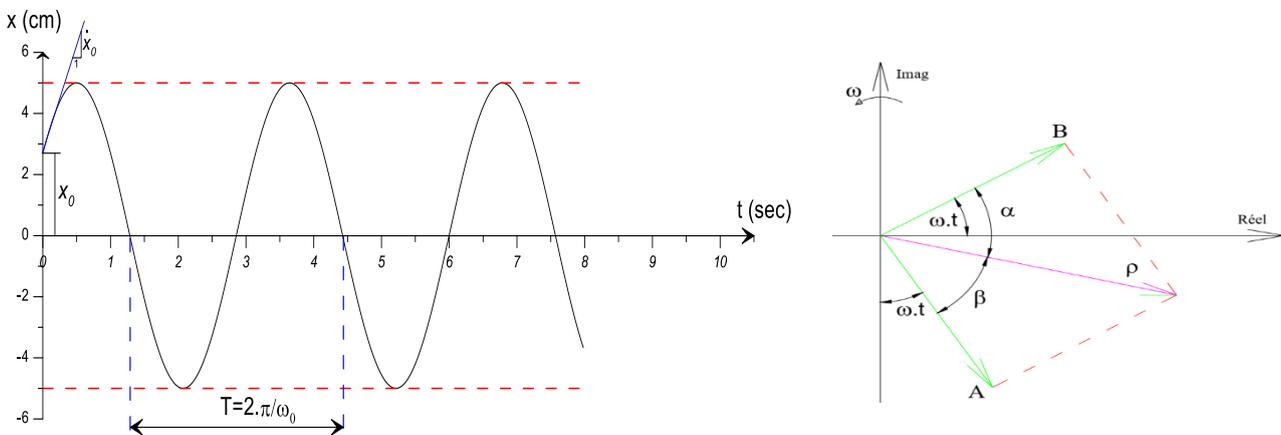
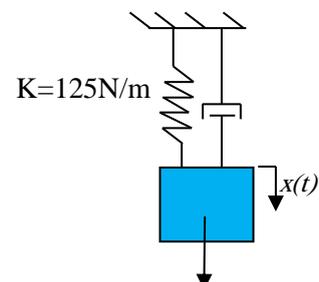


Figure II.3. Représentation d'un système non-amorti

Remarque :

En statique : $P = F_e \Leftrightarrow mg = Kx_{st}$

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{x_{st}} \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{x_{st}} \text{ donc : } \omega = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}}$$



Application 01 : (Exercice 2 , série 2)

En considérant un système de vibrations non amorties ($C = 0$),

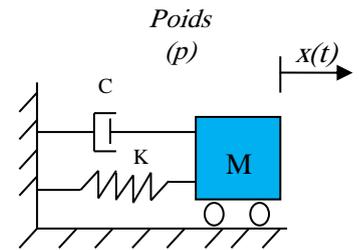
Avec:

$M = 3,5 \cdot 10^5 \text{ kg}$, $K = 7 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ et les conditions initiales :

$X(t=0) = 1.75 \text{ cm}$, $\dot{X}(t=0) = 14 \text{ cm/s}$

Déterminer :

- Le déplacement à l'instant $t = 1 \text{ sec}$?
- La vitesse à l'instant $t = 1 \text{ sec}$?



Solution :

L'équation de mouvement pour un système libre non amortie :

$$M \cdot \ddot{x} + K \cdot x = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$$

a) Le déplacement à l'instant $t = 1 \text{ sec}$

La solution de cette équation sera :

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$$

$$\text{Avec : } \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^6}{3.5 \cdot 10^5}} = 4.47 \text{ rad/s}$$

$$\text{Et : } A = x_0 = 1.75 \text{ cm} ; B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} = \frac{14 \cdot 10^{-2}}{4.47} = 3.13 \text{ cm/s}$$

$$x(t) = 1.75 \cdot \cos(4.47t) + 3.13 \cdot \sin(4.47t)$$

$$x(1s) = 1.75 \cdot \cos(4.47 \times 1) + 3.13 \cdot \sin(4.47 \times 1) = -3.458 \text{ cm}$$

b) La vitesse à l'instant $t = 1 \text{ sec}$?

$$\dot{x}(t) = -A \cdot \omega \sin(\omega t) + B \cdot \omega \cos(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = -1.75 \times 4.47 \sin(4.47t) + 3.13 \times 4.47 \cos(4.47t)$$

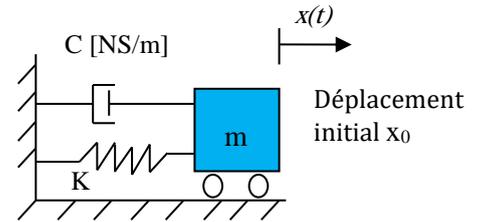
$$\dot{x}(1) = -1.75 \times 4.47 \sin(4.47 \times 1) + 3.13 \times 4.47 \cos(4.47 \times 1)$$

$$\dot{x}(1) = 4.24 \text{ cm/s}$$

II.4.2. Vibration libre amortie (C≠0) :

On parle d'oscillations amorties quand l'amortissement n'est pas nul, c'est-à-dire quand $c \neq 0$.

La figure ci-contre illustre un modèle d'un système amorti, modélisé à sa position d'équilibre.



L'équation de mouvement s'écrit : $m \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + K \cdot x = 0$

on peut écrire aussi cette équation sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$$

La forme de la solution dépend de la valeur du coefficient d'amortissement C.

L'équation caractéristique est :

$$m \cdot q^2 + C \cdot q + K = 0 \rightarrow q^2 + \frac{C}{m} \cdot q + \omega^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{C}{m}\right)^2 - 4\omega^2 \rightarrow \text{suivant la valeur de } C, 3 \text{ cas sont possible :}$$

1^{er} cas : Amortissement critique : ($\Delta = 0$)

Dans ce cas : $\xi = 1 \rightarrow C = C_{cr} = 2m\omega$

$$\left(\frac{C_{cr}}{M}\right)^2 = 4\omega^2 \rightarrow C_{cr} = 2m\omega = 2\sqrt{k \cdot m} \text{ donc la racine double}$$

$$q = -\frac{C_{cr}}{2m} = -\omega$$

La solution sera : $x(t) = (A + B \cdot t)e^{-\omega \cdot t}$ (II.14)

Compte tenu des conditions initiales :

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \text{on trouve :}$$

$$x(t) = [x_0(1 + \omega \cdot t) + \dot{x}_0 \cdot t] \cdot e^{-\omega \cdot t} \quad \text{(II.15)}$$

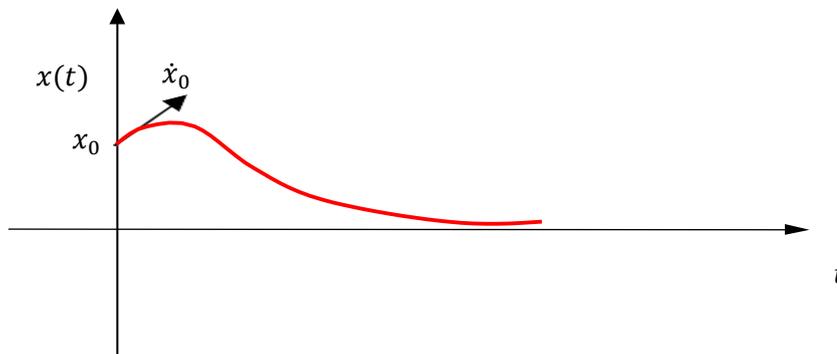


Figure II.4. Réponse en oscillation libre à amortissement critique

Remarque :

On remarque que la réponse d'un système en oscillation libre ne comporte dans ce cas (amortissement critique) aucune oscillation autour de sa position initiale (aucune vibration). Par contre le système revient à la position zero en raison du terme décroissant exponentielle, c.a.d la réponse revient asymptotiquement au repos sans effectuer d'oscillation (amortissement trop important).

2^{eme} cas : Amortissement sur critique

La réponse d'un système sur amorti est similaire au mouvement du système à amortissement critique, mais le retour vers la position neutre se fait plus lentement puisque l'amortissement est agrandis ($C > C_{cr}$ où $\xi > 1$).

Dans ce cas toute l'énergie potentielle communiquée au système est absorbée par l'amortissement et par conséquent il n'y a pas de mouvement vibratoire.

On pose le facteur d'amortissement : $\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{C}{2m\omega}$ (II.16)

$$q_{1,2} = -\xi \cdot \omega \pm \omega \sqrt{(\xi)^2 - 1}$$

Et on appellera : $\omega_D = \omega \sqrt{(\xi)^2 - 1}$: La pseudo-pulsation (II.17)

$$q_{1,2} = -\xi \cdot \omega \pm \omega_D$$
 (II.18)

La solution générale est :

$$x(t) = D_1 e^{q_1 \cdot t} + D_2 e^{q_2 \cdot t}$$
 (II.19)

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [D_1 e^{\omega_D \cdot t} + D_2 e^{-\omega_D \cdot t}]$$
 (II.20)

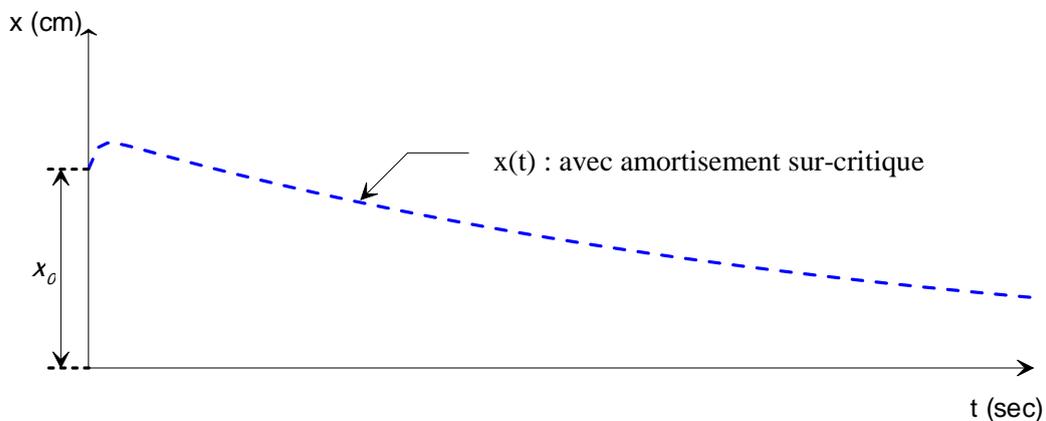


Figure II.5. Réponse en oscillation libre à amortissement sur critique

Remarque : On constate qu'aucune vibration n'est possible. ce système n'existe pas en génie civil , sauf dans certains systèmes d'isolation ou d'amortissement.

2^{eme} cas : Amortissement sous amortie (Régime oscillatoire)

Pour ($\xi < 1$) ou ($C < C_{cr}$), c'est le cas intéressant pour le calcul dynamique des structures.

L'éq : $q_{1,2} = -\xi \cdot \omega \pm \omega_0 \sqrt{(\xi)^2 - 1}$ devient $q_{1,2} = -\xi \cdot \omega \pm i \cdot \omega \sqrt{1 - (\xi)^2}$

La solution de l'équation du mouvement s'écrit :

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot [D_1 e^{i \cdot \omega_D \cdot t} + D_2 e^{-i \cdot \omega_D \cdot t}] \quad (II.21)$$

On exploite la relation d'Euler : $\begin{cases} e^{i \cdot x} = \cos(x) + i \cdot \sin(x) \\ e^{-i \cdot x} = \cos(x) - i \cdot \sin(x) \end{cases}$

Donc la solution sera :

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) + x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \right] \quad (II.22)$$

L'équation précédente peut s'écrire de la forme :

$$x(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \rho \cdot \cos(\omega_D \cdot t - \alpha) \quad (II.23)$$

Avec :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D}\right)^2} \\ \text{tg}(\alpha) = \frac{\dot{x}_0 + \xi \cdot \omega \cdot x_0}{\omega_D \cdot x_0} \end{cases}$$

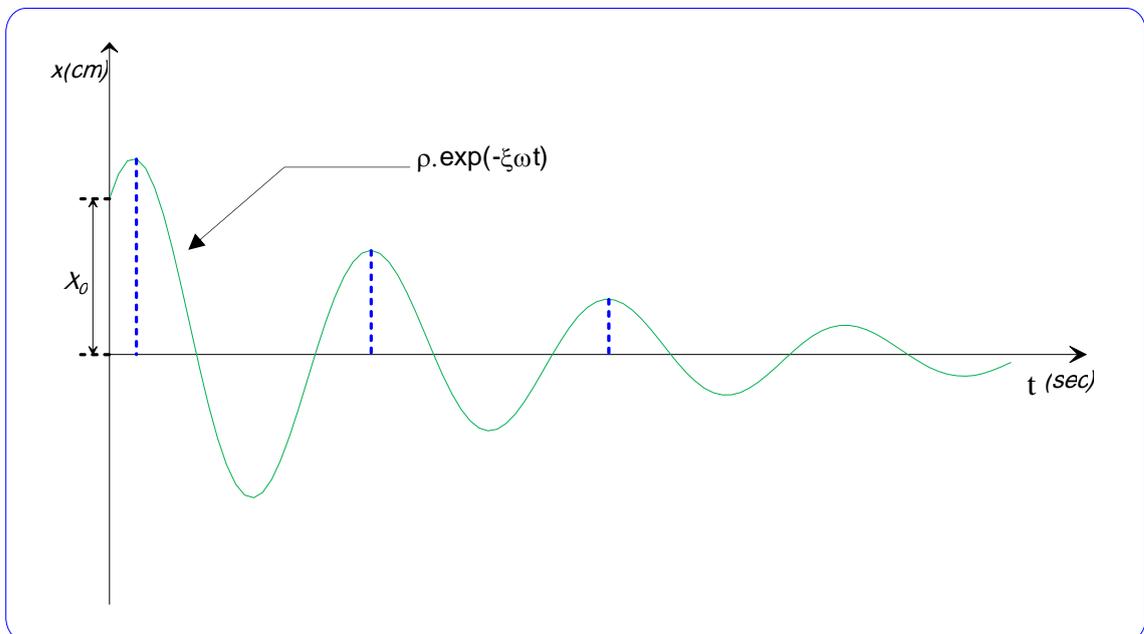


Figure II.6. Réponse en oscillation libre à amortissement sous critique

Trois cas d'amortissements du système peuvent alors se présenter :

un amortissement faible, un amortissement critique ou un amortissement fort. La figure (II.7) illustre ces trois niveaux d'amortissement.

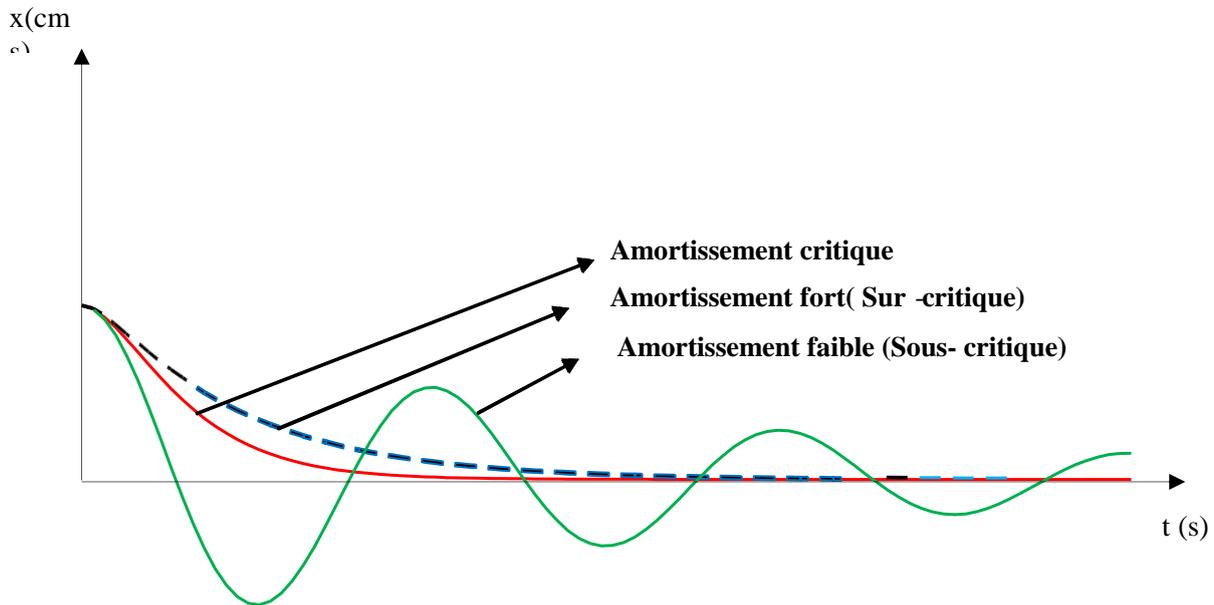


Figure II.7. Niveaux d'amortissement

Remarque : on peut remarquer que le mouvement est oscillatoire mais non harmonique, c'est à dire l'amplitude de vibration n'est pas constante durant le mouvement. ce système est un cas habituel en génie civil

Décrément logarithmique :

Une méthode pratique pour la détermination expérimentale du facteur d'amortissement ξ est la mesure du taux décroissance de l'amplitude d'un système amorti en oscillation libre. Considérant deux pics successives de la réponse x_n et x_{n+1} et appliquant l'éq. [(II.22)] :

$$x_n(T_n) = x_n(n.T_D) = e^{-\xi.\omega_0.T_n} \cdot \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi.\omega_0.x_0}{\omega_D} \cdot \sin(\omega_D.nT_D) + x_0 \cdot \cos(\omega_D.nT_D) \right]$$

$$x_{n+1}(T_{n+1}) = x_n((n+1).T_D)$$

$$x = e^{-\xi.\omega_0.T_{n+1}} \cdot \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi.\omega_0.x_0}{\omega_D} \cdot \sin(\omega_D.(n+1)T_D) + x_0 \cdot \cos(\omega_D.(n+1)T_D) \right]$$

Mais on a :

$$\omega_D.nT_D = 2.\pi.n \implies \sin(\omega_D.nT_D) = 0 \text{ et } \cos(\omega_D.nT_D) = 1$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{e^{-\xi.\omega_0.T_n}}{e^{-\xi.\omega_0.T_{n+1}}} = e^{\xi\omega_0T_D}$$

$$\text{Le décrément logarithmique sera égal à : } \delta = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = 2.\pi.\xi \frac{\omega_0}{\omega_D} = \frac{2.\pi.\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{II.24}$$

$$\text{Remarque : pour des valeurs faibles de } \xi \ll 1 \implies \delta = 2.\pi.\xi \tag{II.25}$$

Pour n pics, on a : $\delta = 2.\pi.\xi.n$

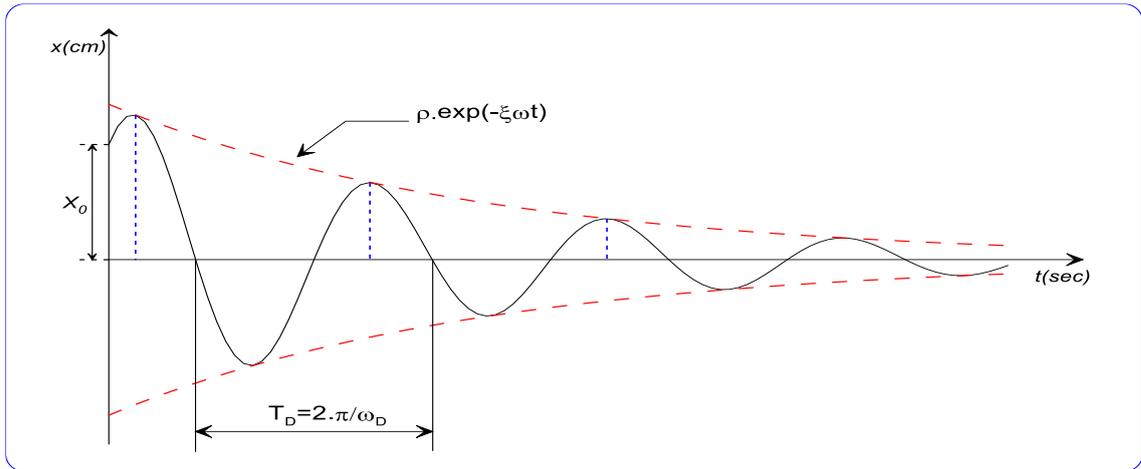


Figure II.8. Représentation d'un système sous-amorti

II.5 Vibrations forcée d'un SSDDL excitation harmonique:

Dans cette section, on s'intéressera au cas où les vibrations de l'oscillateur simple sont engendrées par une sollicitation $P(t)$ directement appliquée à la masse M . On se restreindra dans la suite au cas d'un système à amortissement sous-critique, seul cas d'intérêt dans la pratique. Dans ce cas, le SSDDL soumis à des forces dont l'intensité peut être représentée par des fonctions sinusoïdale en fonction du temps.

II.5.1. Vibration non amortis sous charge harmonique :

L'équation du mouvement donnée par :

$$M \cdot \ddot{x} + K \cdot x = P_0 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) \quad (\text{II.26})$$

La solution générale est :

$$x(t) = x(t)_{\text{homogène}} + x(t)_{\text{particulière}} \quad (\text{II.27})$$

Avec :

$$x(t)_{\text{homogène}} = A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (\text{II.28})$$

$$x(t)_{\text{particulière}} = D \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) \quad (\text{II.29})$$

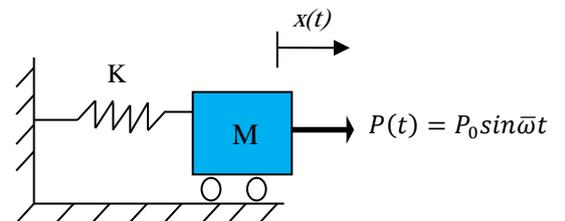
On place éq.(II.29) dans éq.(II.26) :

$$-m \cdot D \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) + k \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) = P_0 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

Et pour : $\sin(\bar{\omega} \cdot t) \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad & -\frac{m \cdot D \cdot \bar{\omega}^2}{k} + \frac{k \cdot D}{k} = \frac{P_0}{k} & \implies & -D \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_0^2} + D = \frac{P_0}{k} \\ & D \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_0^2}\right) = \frac{P_0}{k} & \implies & D = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

$$\text{Avec : } \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} \quad (\text{II.31})$$



β : le rapport de la fréquence du chargement sur la fréquence naturelle du système.

La solution générale sera :

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t) + \left(\frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2}\right) \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) \quad (II.32)$$

Composante transitoire dépendant
Des conditions initiales ($p(t)=0$)

Composante stationnaire dépendant
du chargement appliquée

A et B seront donnés par les conditions initiales.

Si on a :

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{P_0 \beta}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \end{cases}, \text{ la réponse donnée par l'éq.(3.8) devient :}$$

$$x(t) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \cdot (\sin(\bar{\omega} \cdot t) - \beta \cdot \sin(\omega_0 t)) \quad (II.33)$$

Où :

$\frac{P_0}{k}$: Le déplacement statique, c'est le déplacement qui serait produit par la force P_0 appliquée statiquement.

$\frac{1}{1-\beta^2}$: Facteur d'amplification dynamique (D) ; représentant l'effet d'amplification dynamique de la charge harmonique.

$$D = \frac{|X_{max}|}{|X_{stat_{max}}|} = \frac{\left| \frac{P_0}{K} \frac{1}{1-\beta^2} \right|}{\frac{P_0}{K}} = \left| \frac{1}{1-\beta^2} \right|$$

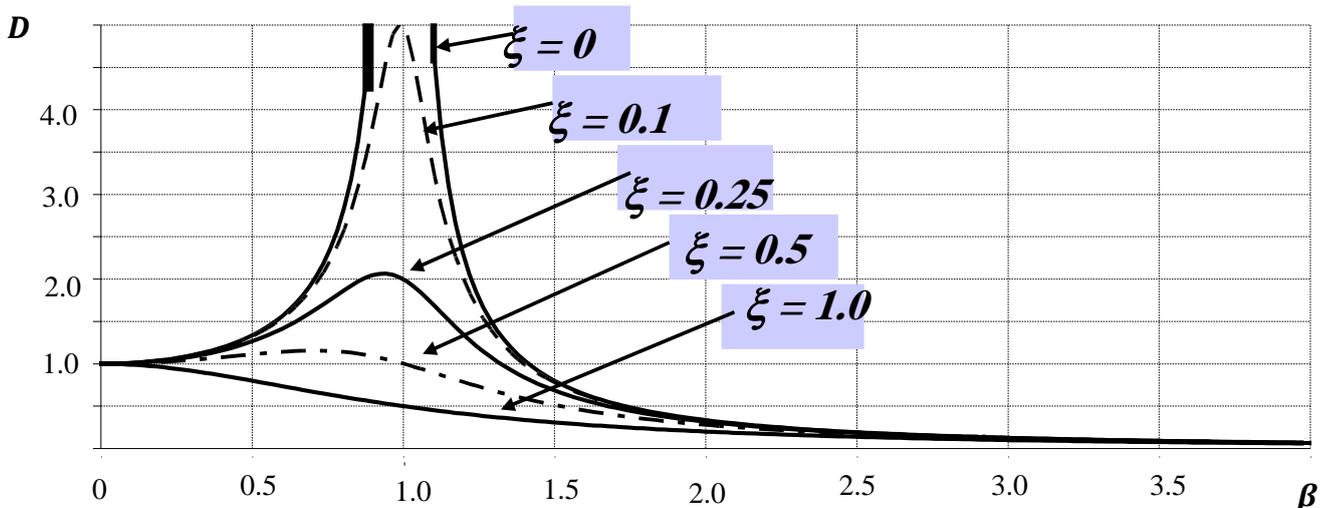


Figure II.8. Variation du facteur d'amplification en fonction de la fréquence relative β pour différents coefficients d'amortissement.

II.5 .2.Vibration amortis sous charge harmonique :

L'équation du mouvement est s'écrie comme :

$$M. \ddot{x} + C. \dot{x} + K. x = P_0. \sin(\bar{\omega}. t) \quad (\text{II.34})$$

La solution est de la forme :

$$x(t) = x(t)_{\text{homogène}} + x(t)_{\text{particulière}} \quad (\text{II.35})$$

Et comme on a : $C_{cr} = 2. \sqrt{k. m} = 2. m. \omega_0$ et $\xi = \frac{C}{C_{cr}} \implies C = 2. m. \omega_0. \xi$

On divise éq.(II.34) par m :

$$\ddot{x} + 2. \omega_0. \xi. \dot{x} + \omega_0^2. x = \frac{P_0}{m}. \sin(\bar{\omega}. t) \quad (\text{II.36})$$

$$\begin{cases} x_h(t) = e^{-\xi. \omega_0. t}. [A. \cos(\omega_D. t) + B. \sin(\omega_D. t)] & (\text{II.37}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_p(t) = C_1. \sin(\bar{\omega}. t) + C_2. \cos(\bar{\omega}. t) & (\text{II.38}) \end{cases}$$

On remplace éq.(II.38) dans l'éq.(II.37), on aura :

$$\left(-C_1. \bar{\omega}^2. \sin(\bar{\omega}. t) - C_2. \bar{\omega}^2. \cos(\bar{\omega}. t) \right) + 2. \omega_0. \xi \left(C_1. \bar{\omega}. \cos(\bar{\omega}. t) - C_2. \bar{\omega}. \sin(\bar{\omega}. t) \right) +$$

$$C_1. \omega_0^2. \sin(\bar{\omega}. t) - C_2. \omega_0^2. \cos(\bar{\omega}. t) = \frac{P_0}{m}. \sin(\bar{\omega}. t)$$

$$\sin(\bar{\omega}. t) \left[-C_1 \bar{\omega}^2 - 2\omega_0 \xi C_2 \bar{\omega} + C_1. \omega_0^2 - \frac{P_0}{m} \right] + \cos(\bar{\omega}. t) \left[-C_2 \bar{\omega}^2 + 2\omega_0 \xi C_1 \bar{\omega} + C_2 \omega_0^2 \right] = 0$$

Cette équation est nul si :

$$\begin{cases} -C_1 \bar{\omega}^2 - 2\omega_0 \xi C_2 \bar{\omega} + C_1. \omega_0^2 = \frac{P_0}{m} \\ -C_2 \bar{\omega}^2 + 2\omega_0 \xi C_1 \bar{\omega} + C_2 \omega_0^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) - 2\xi \omega_0 \bar{\omega} C_2 = \frac{P_0}{m} \\ 2\xi \omega_0 \bar{\omega} C_1 + C_2(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

$$\begin{cases} C_1(1 - \beta^2) - 2\xi \beta C_2 = \frac{P_0}{m \omega_0^2} = \frac{P_0}{k} \\ 2\xi \beta C_1 + C_2(1 - \beta^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi \beta)^2} \\ C_2 = -\frac{P_0}{k} \frac{2\xi \beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi \beta)^2} \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Donc la solution devient :

$$x(t) = e^{-\xi. \omega_0. t}. [A. \cos(\omega_D. t) + B. \sin(\omega_D. t)]$$

$$+ \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi \beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin(\bar{\omega}. t) - 2\xi \beta \cos(\bar{\omega}. t)] \quad (\text{II.41})$$

Remarque :

- Le premier parti représente le mouvement transitoire est un mouvement amorti (présence de ω_D va donc disparaître rapidement avec le temps.
- Le mouvement permanent s'effectue avec la même pulsation $\bar{\omega}$ que la force excitatrice mais avec un angle de déphasage.

L'équation (II.41) s'écrit de la façon suivante :

$$x(t) = \frac{e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot [A \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_D \cdot t)]}{m^{vt} \text{ transitoire}} + \frac{\rho \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)}{m^{vt} \text{ permanent}} \quad (\text{II.42})$$

$$\rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \cdot \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$\rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (\text{II.43})$$

$$tg(\theta) = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \quad (\text{on a un retard de } -2\xi\beta) \quad (\text{II.44})$$

L'équation (II.42) :

$$\rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad \text{et } tg(\theta) = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$\text{On pose : } \lambda = \frac{\rho}{\frac{P_0}{k}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (\text{II.44})$$

• Le rapport de l'amplitude de la réponse en mouvement permanent et du déplacement statique qui serait produit par la force P_0 s'appelle facteur d'amplification dynamique. Comme on peut le voir de l'éq.(II.42) la courbe du mouvement total peut être obtenue en faisant la somme produit par la courbe du mouvement transitoire avec la courbe du mouvement permanent.

• Pour un amortissement $\xi < 20\%$ qui représente la borne supérieure pour la majorité des structures de génie civil, donc la fréquence naturelle n'est pas essentiellement modifiée par l'amortissement.

La valeur du taux d'amortissement critique dépend principalement du type de structure et des matériaux utilisés. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de taux de l'amortissement critique :

Type de constructions		ξ
Construction en béton armé		0.02-0.14
Construction à mur porteur en maçonnerie		0.06-0.18
Halle industrielle avec structure métallique		0.02-0.06
Ponts en	Béton armé	0.03-0.16
	Acier (métalliques)	0.02-0.08
	Bois	0.02 -0.1
Sol de fondation		

Le tableau 4.1 du RPA99V2003 (page 26) donne les valeurs de ξ (%) en fonction du matériau constitutif, du type de structure et de l'importance des remplissages.

Remplissage	Portique		Voile ou murs
	Béton Armé	Acier	Béton Armé / Maçonnerie
Léger	6	4	10
Dense	7	5	

Application 01 :

La pulsation d'un château d'eau montré en figure est $\omega=25\text{rad/s}$ après des essais sur un petit modèle ayant les mêmes caractéristiques de réservoir, l'application d'une force de 0.45KN provoque une vitesse de vibration proportionnelle à cette force $V=0.0025\text{m/s}$

On considère que le réservoir s'appuie sur 4 poteaux et que la rigidité de chaque poteau $K_p=1300\text{KN/m}$

- ♣ Déterminer le pourcentage d'amortissement ξ ?
- ♣ La période de vibration amortie T_D ?
- ♣ Le décrement Logarithmique δ ?
- ♣ Le rapport entre deux amplitudes successives?



Solution:

Comme on a 4 poteaux donc : $K_{eq} = 4 \times K_p = 4 \times 1300 \times 10^3 = 5200 \times 10^3 N.m$

Amortissement critique:

La force d'amortissement est donnée par:

$$F_a = C \times \dot{x} \rightarrow C = \frac{F_a}{\dot{x}} = \frac{450}{0.0025} = 18 \times 10^4 N.S/m$$

L'amortissement critique est donnée par :

$$C_{cr} = 2m\omega = \frac{2k}{\omega} = \frac{2 \times 5.2 \times 10^6}{25} = 416 \times 10^3 N.S/m$$

Pourcentage d'amortissement:

$$\xi = \frac{c}{2.m.\omega_0} = \frac{C}{C_{cr}} = \frac{18 \times 10^4}{416 \times 10^3} = 0.43$$

Période de vibration amortie : $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$

$$\omega_D = \sqrt{1 - \xi^2} = 25\sqrt{1 - 0.43^2}$$

$$\omega_D = \frac{22.5 \text{ rad}}{s} \rightarrow T_D = \frac{2\pi}{22.5} = 0.279 \text{ sec}$$

Le décrétement logarithmique:

Le décrétement logarithmique sera égal à :

$$\delta = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = 2.\pi.\xi \frac{\omega_0}{\omega_D} = \frac{2.\pi.\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2.\pi.0.433}{\sqrt{1 - 0.433^2}} = 3.017$$

Le rapport entre deux amplitudes successives:

$$\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = e^\delta = e^{3.018} = 20.45$$

II.5.3.Résonance :

D'après la formule (II.44) : $\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \Rightarrow \lambda = f(\xi, \beta)$

L'effet de la résonance produit dans le cas : $\frac{\bar{\omega}}{\omega} = 1 \Rightarrow \beta = 1$

Donc on a : $\lambda = \frac{1}{2\xi}$ On cherche $\lambda_{\max} : \frac{d\lambda}{d\beta} = \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\right)' = 0 \Rightarrow$

$$\frac{d\lambda}{d\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\right)^{-3/2} \cdot [2(1-\beta^2)(-2\beta) + 2(2\xi\beta)2\xi] = 0$$

$$\Rightarrow -4\beta(1-\beta^2) + 8(\xi)^2\beta = 0 \Rightarrow 4\beta[2\xi^2 - (1-\beta^2)] = 0$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ 2\xi^2 = 1 - \beta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = \sqrt{1 - 2\xi^2} \end{cases}$$

β est définie si : $1 - 2\xi^2 > 0 \Rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

Remarque : Pour de faible amortissement il y a très peu de différence entre λ_{\max} et $\lambda_{\text{Résonance}}$ ($\beta=1$).

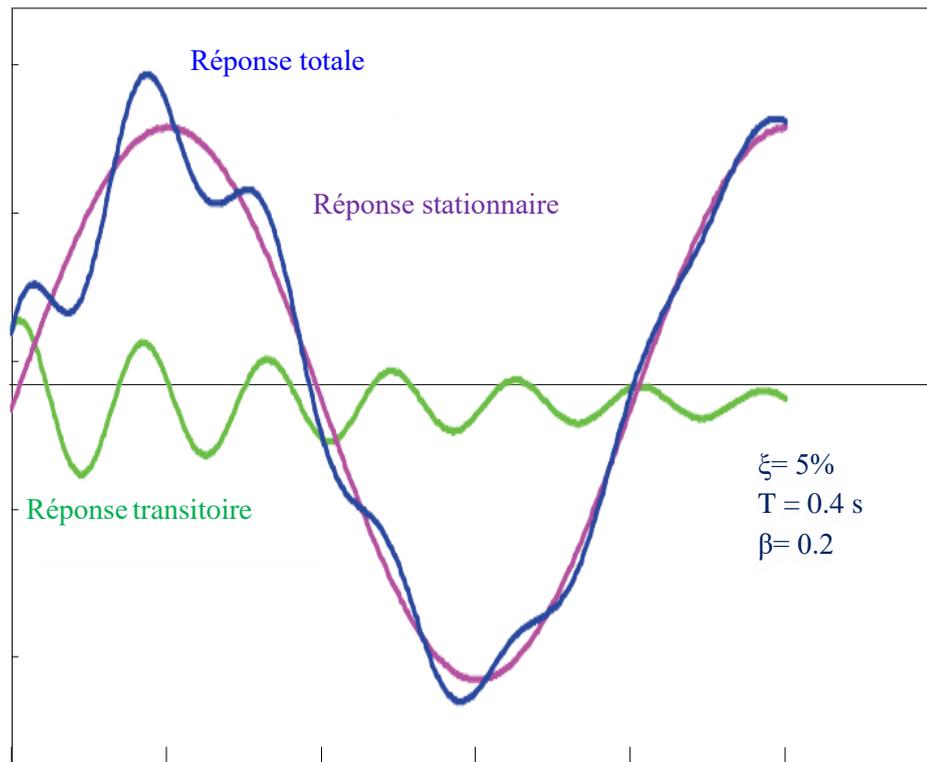


Figure II.9. Réponse de l'oscillateur soumis à une sollicitation harmonique

Application 01 :(Rattrapage2020)

On considère la structure représentée par la figure ci- dessous : $M= 1000\text{kg}$ et $E= 2 \times 10^4 \text{ MPA}$

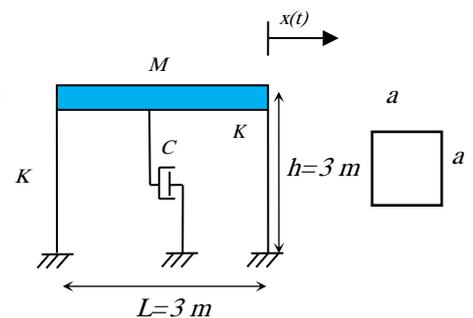
La rigidité d'un poteau est $K= \frac{3EI}{h^3}$

a) En enregistrant la réponse en vibration libre de cette structure on constate que le rapport entre deux pics successifs est de 1.37.

- Déterminer le facteur d'amortissement ξ de cette structure ?

b) Pour le reste de l'exercice on considère que la base de cette structure est soumise à un séisme qui peut être assimilé à une excitation harmonique de la forme $u_g(t) = 5\sin 30t(\text{cm})$?

- Déterminer la dimension a de la section du poteau nécessaire pour introduire la résonance dans la structure?



Solution:

$$\text{a) } \delta = 2\pi\xi \rightarrow \xi = \frac{\delta}{2\pi}$$

δ est le rapport de deux pic successif. Avec :

$$\delta = \ln \frac{X_n}{X_{n-1}} = \ln 1.37$$

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{\ln 1.37}{2\pi} = 0.05 = 5\%$$

b) Résonance :

$$\bar{\omega} = \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \rightarrow \omega^2 = \frac{K}{M}$$

$$K = 2 \times \frac{3EI}{h^3} = \frac{6EI}{h^3} = \frac{Ea^4}{2h^3} \rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{2Kh^3}{E}}$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{2M\bar{\omega}^2 h^3}{E}} = \sqrt[4]{\frac{2 \times 1000(30)^2 3^3}{2 \times 10^{10}}} = 0.222\text{m} = 22.2\text{cm}$$

II.5.4. Réponse du mouvement d'un support :

x_g : déplacement du support

x : déplacement relatif de la structure.

x_t : déplacement total de la structure.

a/ équation du mouvement en fonction du déplacement total :

Principe de d'Alembert :

$$m \cdot \ddot{x}_t + c \cdot (\dot{x}_t - \dot{x}_g) + k \cdot (x_t - x_g) = 0 \quad (\text{II.44})$$

$$m \cdot \ddot{x}_t + c \cdot \dot{x}_t + k \cdot x_t = c \cdot \dot{x}_g + k \cdot x_g \quad (\text{II.45})$$

Donc on assimile l'excitation du support à une force extérieure oscillatoire.

$$x_g(t) = x_{g0} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

On aura :

$$m \cdot \ddot{x}_t + c \cdot \dot{x}_t + k \cdot x_t = k \cdot x_{g0} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) + c\bar{\omega}x_{g0} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) \quad (\text{II.46})$$

Et comme : $\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b)$

Donc :

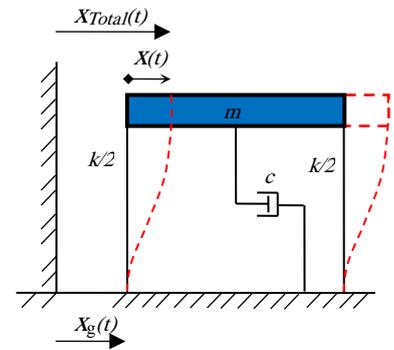
$$m \cdot \ddot{x}_t + c \cdot \dot{x}_t + k \cdot x_t = P_0 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t + \gamma) \quad (\text{II.47})$$

$$tg(\gamma) = \frac{c\bar{\omega}x_{g0}}{k \cdot x_{g0}} = \frac{c\bar{\omega}}{k} = (2m\omega_0\xi) \frac{\bar{\omega}}{k} = 2\omega_0\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega_0^2} \quad \Rightarrow tg(\gamma) = 2\xi\beta$$

$$P_0 = \sqrt{(k \cdot x_{g0})^2 + (c\bar{\omega}x_{g0})^2} = x_{g0} \sqrt{(k)^2 + (c\bar{\omega})^2} \quad \Rightarrow P_0 = x_{g0} \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

$$x_t(t) = (\text{Réponse transitoire} \approx 0) + (\text{Réponse permanente})$$

La réponse permanente du système est donnée par (II.42)



$$x_{t,p}(t) = \rho \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t + \gamma - \theta)$$

$$x_{t,p}(t) = \frac{P_0}{k \cdot \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t + \gamma - \theta)$$

Donc :

$$x_{t,p}(t) = \frac{x_{g0} \sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{k \cdot \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t + \gamma - \theta) \quad (II.48)$$

b/ équation du mouvement en fonction du déplacement relatif :

$$m \cdot \ddot{x}_t + c \cdot (\dot{x}_t - \dot{x}_g) + k \cdot (x_t - x_g) = 0$$

$$m \cdot (\ddot{x} + \ddot{x}_g) + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

$$m \cdot (\ddot{x} + \ddot{x}_g) + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = -m \cdot \ddot{x}_g \quad (II.49)$$

Supposant :

$$x_g(t) = x_{g0} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

Donc l'éq. (II.49) devient :

$$m \cdot (\ddot{x} + \ddot{x}_g) + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = m \cdot \bar{\omega}^2 x_{g0} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

La réponse permanente est donnée par :

$$x_{t,p}(t) = \rho \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

Avec :

$$\rho = \frac{P_0}{k \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\frac{P_0}{k} = \frac{m \cdot \bar{\omega}^2 x_{g0}}{k} = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_0^2} x_{g0} \implies \frac{P_0}{k} = \beta^2 x_{g0} \quad (II.50)$$

Donc :

$$x_{t,p}(t) = \frac{\beta^2 x_{g0}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta) \quad (II.51)$$

$$x_{t,p}(t) = \lambda \beta^2 x_{g0} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta) \quad (II.52)$$

II.6. Instruments sismiques.

La figure ci-dessous montre les éléments de base d'un appareil de mesure sismique. L'appareil consiste en une masse m supportée par un ressort de rigidité K et un amortisseur visqueux "C". Le boîtier protégeant l'appareil est fixé à la partie mobile dont le mouvement vibratoire u_g doit être mesuré. Le mouvement u_g est déduit du mouvement relatif u entre la masse et le boîtier.

a/ Sismographe :

Le déplacement relatif entre la masse et le support est enregistré par un instrument appelé sismographe ; cet instrument très sensible est destiné à enregistrer l'allure, la durée et l'amplitude des tremblements de terre.

Déplacement relatif :

$$\rho = \frac{\beta^2 x_{g0}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \implies \frac{\rho}{x_{g0}} = f(\beta)$$

Réponse d'un sismographe à un déplacement à la base.

Remarque :

$$\text{Pour : } \begin{cases} \beta > 1 \\ \xi = 0.5 \end{cases} \implies \frac{\rho}{x_{g0}} = 1$$

De la figure ci-dessus on constate que l'amplitude de la réponse (ρ/x_{g0}) est constant pour des rapports de fréquences $\beta > 1$ et de coefficient d'amortissement $\xi = 0.5$, par conséquent la réponse de ce type d'instrument convenablement amortis est proportionnelle à l'amplitude du sol pour des fréquences élevés au mouvement du support.

Le domaine d'application de cet instrument peut-être élargi en réduisant la fréquence ω_0 (soit $k \downarrow$ ou $m \uparrow$ avec : $\omega_0^2 = k/m$)

b/ Accéléromètre :

$$\text{Sol} \implies \ddot{x}_g = \ddot{x}_{g0} \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\text{Equation du mouvement } m \cdot (\ddot{x} + \ddot{x}_g) + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = -m \cdot \ddot{x}_{g0} \sin(\bar{\omega}t):$$

Amplitude (la réponse permanente) :

$$\rho = \frac{p/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{m \cdot \ddot{x}_{g0} / k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{\rho}{(m \cdot \ddot{x}_{g0} / k)}$$

D'après la courbe : $f(\beta) = \lambda$

$$\begin{cases} \beta < 0.6 \\ \xi = 0.7 \end{cases} \implies \lambda = \frac{\rho}{\frac{m}{k} \ddot{x}_{g0}} = 1$$

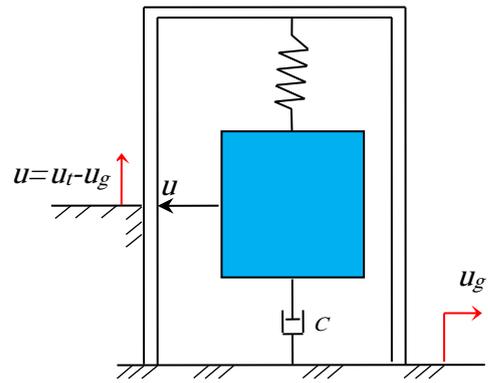
D'après cette équation , il est claire que la réponse indiquée par l'instrument serra proportionnelle à l'amplitude de l'accélération du sol pour des fréquences allant jusqu'à environ 60% de la fréquence naturelle de l'instrument.

II.7 Isolation vibratoire :

On distingue deux types d'isolation :

1/ Une machine vibrante transmette à la structure qui la supporte des vibrations indésirable susceptibles à sa rupture, c'est le cas d'un moteur mal équilibré.

2/ Instruments fragiles sont portés par une structure qui vibre de manière.



a/ Machine vibrante (tournante) :

Prenant la cas d'une machine tournante male équilibrée sur un support à un seul degré de liberté de type ressort-amortisseur.

Cette machine produit une force verticale alternative : $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$

Son déplacement en régime permanent est donné par :

$$x(t) = \frac{P_0}{k} \lambda \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

Avec :
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$F_k = k \cdot x(t) = P_0 \lambda \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

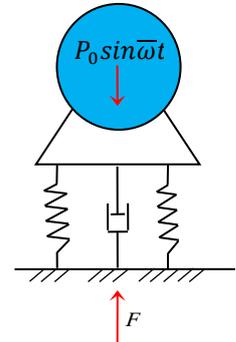
$$F_a = c \cdot \dot{x}(t) = c \frac{P_0}{k} \lambda \bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \theta)$$

$$F_a = 2\xi\beta P_0 \lambda \cos(\bar{\omega}t - \theta) \text{ avec : } 2\xi\beta = c \frac{\bar{\omega}}{k}$$

$$F_{max} = \sqrt{(F_k)^2 + (F_a)^2} = \sqrt{(P_0 \lambda)^2 + (2\xi\beta P_0 \lambda)^2}$$

Donc

$$F_{max} = P_0 \lambda \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$



Le rapport de la force maximale à la base et de l'amplitude de la force appliquée P_0 , que nous appelons la transmissibilité du support est donnée par :

$$T_R = \frac{F_{max}}{P_0} = \lambda \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

T_R : est une fonction de β et de ξ .

Remarque :

On remarque qu'il y a une différence avec la courbe de $\lambda = f(\beta)$, qui est bien sur due à la force d'amortissement. Il est donc évident que ξ tend à réduire l'efficacité d'un système d'isolation en vibration pour toute fréquence supérieure au rapport critique : $(\beta = \sqrt{2})$

Application 02 : Examen 2020 ☺ :

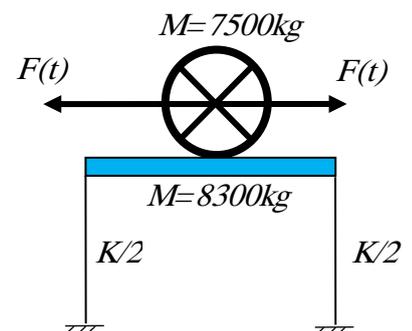
Une machine tournante, supportée par une structure montrée à la figure ci _dessous, génère une force harmonique horizontale dont l'amplitude est de 550 N à une fréquence de 835 HZ dans le plan de la structure. La masse de la machine $m = 7500$ Kg est ajoutée à la masse de la structure $M = 8300$ kg

Question :

- Déterminer l'amplitude en régime permanent si ξ est égale à 5%
- Déterminer l'amplitude du régime permanent si la fréquence

de la force extérieure est égale à la fréquence de la structure.

Avec : $K = 6,5 \cdot 10^6$ N/m



Solution:

$$F_0 = 550\text{N} ; \xi = 5\% ; K = 6,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

$$M_t = M_{\text{machine}} + M_{\text{structure}} = 7500 + 8300 = 15800 \text{ Kg}$$

1/ l'amplitude en régime permanent si ξ est égale à 5% :

$$\rho = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} ; f = \frac{\bar{\omega}}{2\pi} \longrightarrow \bar{\omega} = f \times 2\pi = 5243 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{6,5 \times 10^6}{15800}} = 20,288 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \frac{5243}{20,288} = 258,53 \longrightarrow \rho = 1,26 \times 10^{-6} \text{ mm}$$

2/ l'amplitude en régime permanent en cas de résonance :

Pour un régime permanent la solution de l'équation sera : $x(t) = \rho \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$

$$\text{Avec : } \rho = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

L'effet de la résonance produit dans le cas : $\frac{\bar{\omega}}{\omega} = 1 \implies \beta = 1$ donc

$$\rho = \frac{F_0}{k} \times \frac{1}{2\xi} = \frac{550}{6,5 \cdot 10^6 \times 2 \times 0,05} = 8,46 \times 10^{-4} \text{ m}$$

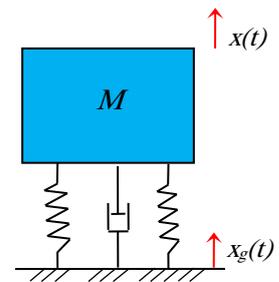
b/ Support vibrant :

C'est le cas de la figure suivante :

La masse m à isoler est portée par un système (K-C) sur une dalle soumise à des mouvements harmoniques verticaux, le déplacement de m par rapport à la base est donné par :

$$x(t) = x_{g0} \beta^2 \lambda \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta), \text{ en ajoutant le déplacement à la base :}$$

$$x_{\text{total}}(t) = x_{g0} \cdot \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \cdot \lambda \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$



Définition :

On définit la transmissibilité comme le rapport de l'amplitude du mouvement de la masse et de l'amplitude du mouvement de la base : $T_R = \frac{F_{\text{max}}}{P_0} = \lambda \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$

Remarque :

Lorsqu' on calcule un système d'isolation en vibration, il est commode d'exprimer son comportement en fonction de son efficacité est définie comme : $1 - T_R$

Le système d'isolation ne fonctionne bien que pour : $(\beta > \sqrt{2})$.

Application : Examen 2020 ☹ :

Une machine alternative de masse $M=10000\text{kg}$ (10t) produit des forces harmoniques verticales d'une amplitude de 2500N à la vitesse de fonctionnement de 40HZ.

Afin de limiter les vibrations induites dans le bâtiment où cette machine doit être installée, on prévoit de la poser sur quatre ressorts : en chaque coin de sa base rectangulaire.

Déterminer la rigidité des ressorts nécessaire pour limiter à 400N la force harmonique totale transmise au bâtiment

Solution :

$$M=10000\text{kg}$$

$$P_0= 2500\text{N}$$

$$f= 40\text{HZ}$$

$$F_{\max}= 400\text{N}$$

$$K= ?$$

Le rapport de la force maximale à la base et de l'amplitude de la force appliquée P_0 , que nous appelons la transmissibilité du support est donnée par :

$$T_R = \frac{F_{\max}}{P_0} = \lambda \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\xi = 0 \rightarrow \frac{F_{\max}}{P_0} = \frac{1}{1 - \beta^2} \rightarrow 1 - \beta^2 = \frac{P_0}{F_{\max}} = \frac{2500}{400} = 6.25$$

$$\beta^2 - 1 = 6.25 \rightarrow \beta^2 = 7.25 \rightarrow \beta = 2.69$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0}$$

$$\bar{\omega} = 2\pi f = 2\pi \cdot 40 = 251.2 \text{rd/s}$$

$$\omega_0 = \frac{\bar{\omega}}{\beta} = \frac{251.2}{2.69} = 93.38 \text{rd/s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \rightarrow K = \omega_0^2 \times M = 8720.36 \times 10000 = 8.72 \times 10^7 \text{N/m}$$

$$\text{Pour chaque ressort : } K_i = \frac{K}{4} = 2.18 \times 10^7 \text{N/m}$$

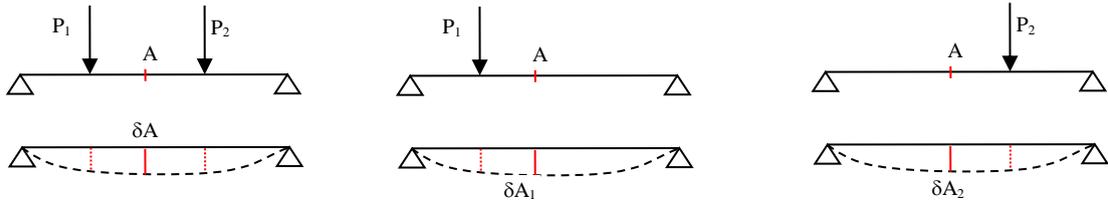
II.8. Excitations périodiques (spéciales et générales) :

II.8.1. Principe de superposition :

On ne peut appliquer le principe de superposition que si la structure varie d'une façon linéaire par rapport à la quantité étudié (déplacement, rotation...).

Le déplacement total dû à un nombre de forces agissantes simultanément sur une structure est égal à la somme des déplacements dû à chaque force agissante séparément.

Exemple :



$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$$

$$\begin{cases} D_i = \sum D_{ij} \\ D_i = \sum f_{ij} \cdot F \end{cases}$$

$$P = K \cdot x \implies K = \frac{P}{x} \quad \text{rigidité}$$

$$x = f \cdot P \implies f = \frac{x}{P} \quad \text{flexibilité}$$

D_i : Déplacement total dans la direction i .

D_{ij} : Déplacement dans la direction i dû à une force F_j .

f_{ij} : Déplacement suivant i dû à une force unitaire F_j .

II.8.2. Réponse d'un SSDDL à une excitation périodique :

Série de Fourier :

$$P(t) = \sum (\sin(\bar{\omega}t) + \cos(\bar{\omega}t))$$

Fourier à démontrer qu'une fonction périodique peut-être exprimer en une somme d'un nombre infinis de forme en sin et en cos.

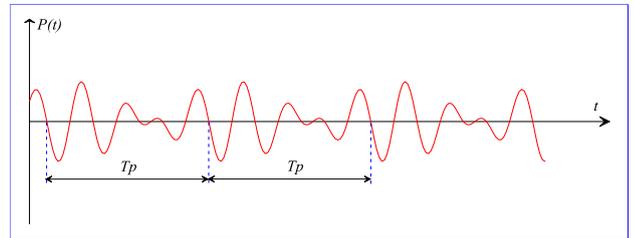
$$P(t) = a_0 + a_1 \cos(\bar{\omega}t) + a_2 \cos(2\bar{\omega}t) + \dots + a_n \cos(n\bar{\omega}t) + b_1 \sin(\bar{\omega}t) + b_2 \sin(2\bar{\omega}t) + \dots + b_n \sin(n\bar{\omega}t)$$

Avec : $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T_p}$

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\bar{\omega}t) + b_n \sin(n\bar{\omega}t)]$$

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T_p} t\right) \right] \quad \text{(II.53)}$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \cos(n\bar{\omega}t) dt \\ b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \sin(n\bar{\omega}t) dt \end{cases} \quad \text{(II.54)}$$



a/ Réponse d'un système non-amorti à une excitation périodique (c=0) :

$$x(t) = A. \sin(\omega t) + B. \cos(\omega t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin(\bar{\omega} t)$$

$$\text{Terme en sinus : } P(t) = b_n \sin(n\bar{\omega} t) \implies x(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{1-\beta_n^2} \sin(n\bar{\omega} t) \quad (\text{II.55})$$

$$\text{Terme en cosinus : } P(t) = a_n \cos(n\bar{\omega} t) \implies x(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{1-\beta_n^2} \cos(n\bar{\omega} t) \quad (\text{II.56})$$

$$\text{Terme constant : } P(t) = a_0 \implies x(t) = \frac{a_0}{k} \quad (\text{II.57})$$

$$\text{On pose : } \beta_n = n \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = n\beta_1$$

La réponse permanente d'un système à une excitation périodique est donnée par :

$$x(t) = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\beta_n^2} [a_n \cos(n\bar{\omega} t) + b_n \sin(n\bar{\omega} t)] \right] \quad (\text{II.58})$$

b/ Réponse d'un système amorti à une excitation périodique (c≠0) :

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\bar{\omega} t) + b_n \sin(n\bar{\omega} t)]$$

La réponse permanente total serra donnée par la superposition exprimé par :

$$\text{En sinus : } x_{n,s}(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} [(1-\beta_n^2) \sin(n\bar{\omega} t) - 2\xi\beta_n \cos(n\bar{\omega} t)] \quad (\text{II.59})$$

$$\text{En cosinus : } x_{n,c}(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} [(1-\beta_n^2) \cos(n\bar{\omega} t) + 2\xi\beta_n \sin(n\bar{\omega} t)] \quad (\text{II.60})$$

$$x(t) = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \{ [a_n 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)] \sin(n\bar{\omega} t) + [a_n(1-\beta_n^2) + b_n 2\xi\beta_n] \cos(n\bar{\omega} t) \} \right] \quad (\text{II.61})$$

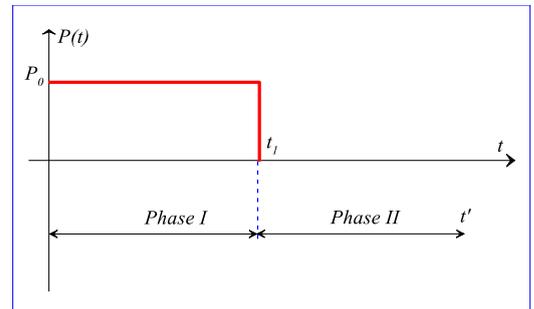
II.8.3. Réponse d'un SSDDL à une superposition (charge impulsive) :

Une charge impulsive est généralement une charge de courte durée, la réponse maximale à une charge impulsive serra atteindre dans une période de temps très courte avant que les forces d'amortissement puissante absorber une énergie conséquente. Pour cela on ne considère que la réponse non-amortie.

1/ Impulsion rectangulaire :

Phase I : chargement

Phase II : vibration libre



Phase I :

$0 \leq t \leq t_1$ (chargement)

$$M\ddot{x} + Kx = P_0 \implies x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$\begin{cases} x_c(t) = A. \cos(\omega_0 t) + B. \sin(\omega_0 t) \\ x_p(t) = \frac{P_0}{K} \end{cases}$$

$$x(t) = A. \cos(\omega_0 t) + B. \sin(\omega_0 t) + \frac{P_0}{K} \quad (\text{II.62})$$

Conditions initiales :

$$x(t = 0) = 0 ; \dot{x}(t = 0) = 0$$

En remplaçant dans 4-10, on obtient :

$$x(t) = \frac{P_0}{K} (1 - \cos(\omega_0 t)) \quad (\text{II.63})$$

Phase II :

Le système est en vibration libre ; $t_1 \leq t$; on pose : $t' = t - t_1$

$$x(t') = A \cdot \cos(\omega_0 t') + B \cdot \sin(\omega_0 t')$$

$$\text{Eq. (2.9)} \implies x(t) = x(t_1) \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (\text{II.64})$$

Conditions initiales :

$$x(t = t_1) = x_0 ; \dot{x}(t = t_1) = \dot{x}_0$$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t') + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t') \quad (\text{II.65})$$

La réponse maximale se produira dans la phase I voir éq.(II.64).

- Si le temps ($t_1 \geq T/2$), dans ce cas le facteur d'amplification dynamique sera égal à :

$$D = \frac{x_{max}}{\frac{P_0}{K}} \quad \text{avec : } \left(\frac{P_0}{K} = x_{statique} \right)$$

$$x_{max} = x \left(t = \frac{T}{2} \right) = 2 \frac{P_0}{K} \implies D = 2 \frac{\frac{P_0}{K}}{\frac{P_0}{K}} \implies D = 2$$

- Si le temps ($t_1 < T/2$), $\implies x_{max}$ (phase II) :

$$D = \frac{x_{max}}{x_{statique}} \quad \text{avec (éq.(4.12)) : } x_{max} = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_0} \right)^2 + (x(t_1))^2}$$

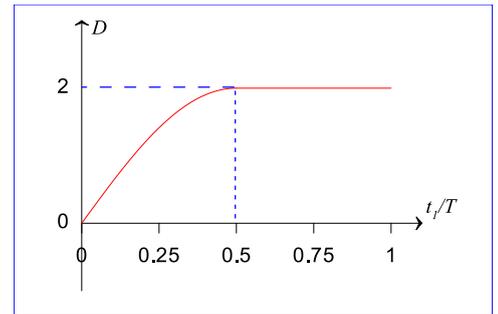
$$x(t_1) = \frac{P_0}{K} (1 - \cos(\omega_0 t_1)) ; \dot{x}(t_1) = \frac{P_0}{K} \omega_0 \sin(\omega_0 t_1)$$

$$x_{max} = \frac{P_0}{K} \sqrt{\sin^2(\omega_0 t_1) + 1 - 2\cos(\omega_0 t_1) + \cos^2(\omega_0 t_1)}$$

$$x_{max} = \frac{P_0}{K} \sqrt{2(1 - \cos(\omega_0 t_1))}$$

$$\text{Avec : } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \implies 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$x_{max} = \frac{P_0}{K} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\omega_0}{2} t_1} = \frac{P_0}{K} 2 \cdot \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t_1\right)$$



$$D = \frac{x_{max}}{x_{statique}} = 2 \cdot \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t_1\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T} t_1\right) \quad (\text{II.66})$$

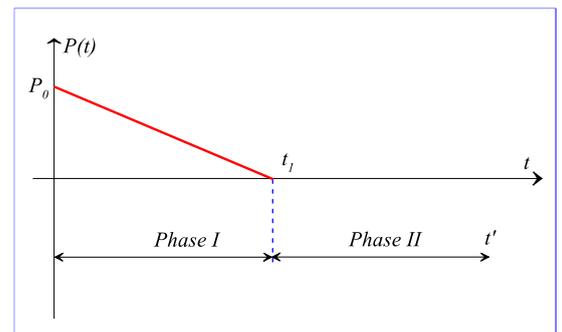
2/Impulsion Triangulaire :

$$P(t) = P_0 \left(1 - t/t_1\right)$$

Phase I :

$$0 \leq t \leq t_1 \quad (\text{chargement})$$

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$



$$x_p(t) = \frac{P_0}{K} \left(1 - t/t_1\right)$$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{P_0}{K} \left(1 - t/t_1\right)$$

Conditions initiales, le système initialement au repos :

$$x(t = 0) = 0 ; \dot{x}(t = 0) = 0$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$x(t) = \frac{P_0}{K} \left(\frac{1}{\omega_0 t_1} \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) - t/t_1 + 1 \right) \quad (II.67)$$

Phase II :

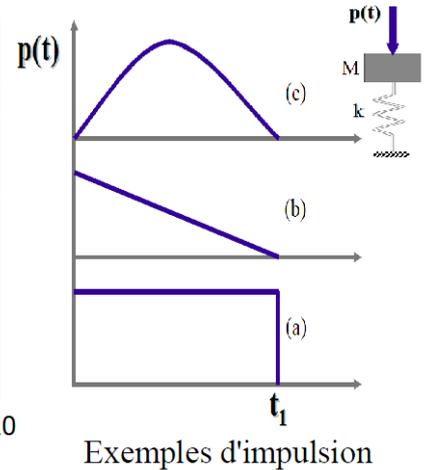
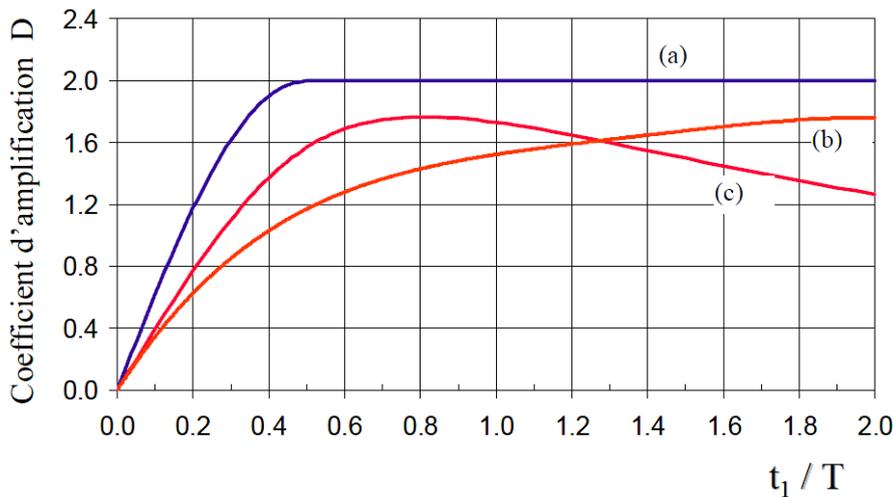
$$x(t) = x(t_1) \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Avec : $x(t_1)$ et $\dot{x}(t_1)$ suivant éq. (II.67)

$$x(t_1) = \frac{P_0}{K} \left(\frac{1}{\omega_0 t_1} \sin(\omega_0 t_1) - \cos(\omega_0 t_1) \right) ;$$

$$\dot{x}(t_1) = \frac{P_0 \omega_0}{K} \left(\frac{1}{\omega_0 t_1} \cos(\omega_0 t_1) + \sin(\omega_0 t_1) - \frac{1}{\omega_0 t_1} \right)$$

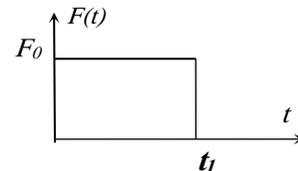
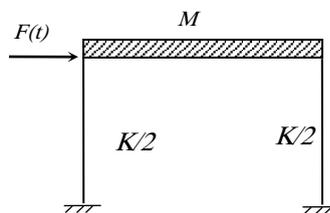
- Si : $\frac{t_1}{T} < 0.4$ réponse maximum se trouve dans la phase II.
- Si : $\frac{t_1}{T} \geq 0.4 \implies D = \frac{x_{max}}{x_{statique}} = \frac{x_{max}}{P_0/K}$



Exercice 02 : Examen 2020 ☺ :

Soit une structure à un seul degré de liberté de période $T = 0.1s$ excité par un chargement $F(t)$.

Donnée : $K = 10KN/m$ et $F_0 = 100 N$



Déterminer :

- La durée de l'excitation T_d pour que le déplacement X_{max} soit égale au déplacement statique $X_{stat} = \frac{F_0}{K}$

Pour la durée calculée en question précédente, tracer la réponse $x(t)$ et la droite $X_{stat} = \frac{F_0}{K}$ et interpréter les résultats.

Solution :

Dans ce problème d'impulsion rectangulaire on a deux phases :

Phase I : chargement et Phase II : vibration libre

Pour que le déplacement max soit égal au déplacement statique: $X_{stat} = \frac{F_0}{k}$,

il faut que $t_1 < T/2$, c.a.d. le mouvement doit être dans la phase II, durant la phase libre

L'équation du mouvement est : $x(t) = x(t_1) \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$

$$\text{Donc : } x_{max} = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_0}\right)^2 + (x(t_1))^2}$$

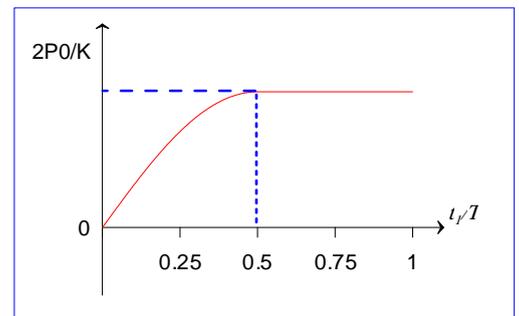
$$x(t_1) = \frac{F_0}{K} (1 - \cos(\omega_0 t_1)) \quad ; \quad \dot{x}(t_1) = \frac{F_0}{K} \omega_0 \sin(\omega_0 t_1)$$

$$x_{max} = \frac{F_0}{K} \sqrt{\sin^2(\omega_0 t_1) + 1 - 2\cos(\omega_0 t_1) + \cos^2(\omega_0 t_1)}$$

$$x_{max} = \frac{F_0}{K} \sqrt{2(1 - \cos(\omega_0 t_1))} = x_{stat} = \frac{F_0}{K}$$

$$1 - \cos(\omega_0 t_1) = \frac{1}{2} \implies \cos(\omega_0 t_1) = \frac{1}{2}$$

$$\implies \omega_0 t_1 = \frac{\pi}{3} \implies t_1 = \frac{\pi}{3\omega_0} \implies t_1 = \frac{T}{6}$$



Donc pour que le déplacement max soit égale au déplacement statique il faut que la durée de l'excitation t_1 soit égale à 1/6 de la période du système :

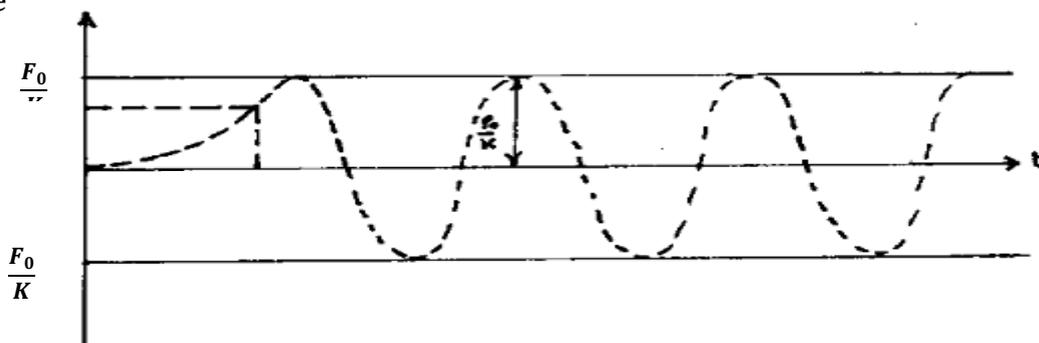
$$t_1 = \frac{0,1}{6} = 0,016S$$

2 / pour $t_1 = 0,016S$

$$\text{Phase I : } x(t) = \frac{F_0}{K} (1 - \cos(\omega_0 t)) \quad t_1 \leq 0,016S$$

$$\text{Phase II : } x(t) = 2 \frac{F_0}{K} \cdot \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t_1\right) \sin\left(t - \frac{t_1}{2}\right)$$

Interprétation : pour $t_1 \leq \frac{T}{6}$ la droite du déplacement statique X_{stat} est toujours supérieure ou égale à la réponse dynamique, donc l'effet dynamique peut être remplacé par un calcul statique



II.8.4. Réponse d'un SSDDL à une excitation dynamique quelconque :

a/ système non-amorti :

$$\text{Impulsion} = \text{force} \cdot \text{temps} = P(\tau) \cdot d(\tau) \quad (\text{II.68})$$

Prenons le cas de :

Loi de Newton :

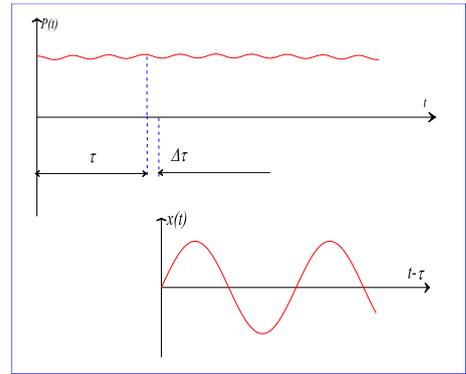
$$F = m \cdot \gamma$$

$$P(\tau) = m \frac{d\dot{x}}{d\tau} \implies d\dot{x} = \frac{P(\tau)d\tau}{m} \quad (\text{II.69})$$

Système linéaire non-amorti :

Nous pouvons supposer que l'intensité de la force impulsionnelle est très grande par rapport aux autres forces en présence, donc on peut négliger les forces élastiques et d'amortissements.

Il n'y a pas de chargement notable du déplacement durant le temps d'application de la charge t_1 mais seulement un changement de vitesse $\Delta\dot{x}$.



$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t \quad \text{avec } x_0 \approx 0$$

Conditions initiales :

$$x(t = \tau) = 0 ; \dot{x}(t = \tau) = d\dot{x} = \frac{P(\tau)d\tau}{m}$$

$$dx(t) = \frac{P(\tau)}{m\omega_0} \sin \omega_0(t - \tau) d\tau \quad (\text{II.70})$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_0} \sin \omega_0(t - \tau) d\tau$$

L'impulsion due à la force $P(\tau)$ à l'instant τ pendant un intervalle de temps $d\tau$ est représenté et égal à $P(\tau)d\tau$.

- Si on applique cette impulsion de très courte durée ($d\tau \ll T$).

Sur un corps de masse m , elle produira un changement du niveau de la vitesse qui peut-être déterminer :

$$m \frac{d\dot{x}}{d\tau} = P(\tau) \implies d\dot{x} = \frac{P(\tau)d\tau}{m}$$

$d\dot{x}$ est considéré comme une vitesse initiale de m à l'instant τ .

La réponse de notre système à cette impulsion sera donnée par éq.(2.9) :

Avec : $x_0 = 0 ; \dot{x}_0 = d\dot{x}$ on a :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau \quad (\text{II.71})$$

Cette expression est généralement connue sous le nom de l'intégrale de DUHAMEL pour les systèmes non-amortis. Pour les systèmes qui ne sont pas initialement au repos c'est-à-dire $x_0 \neq 0$ et $\dot{x}_0 \neq 0$ la solution générale est donnée par :

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{m \cdot \omega_0} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau$$

b/ Système amorti :

$$\text{éq. (II.23)} \Rightarrow x(t) = e^{-\xi \omega_0 t} \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega_0 x_0}{\omega_D} \sin \omega_D t + x_0 \cos \omega_D t \right]$$

$$x(t) = e^{-\xi \omega_0 t} \left[\frac{P(\tau) d\tau}{m \cdot \omega_D} \sin \omega_D (t - \tau) \right] \quad (\text{II.72})$$

Conditions initiales :

$$x(t=0) = 0 ; \dot{x}(t=0) = dx = \frac{P(\tau) d\tau}{m}$$

$$x(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \sin \omega_D (t - \tau) d\tau \quad (\text{II.73})$$

Si le système n'est pas initialement au repos, la solution générale sera donnée par l'éq.(4.20) +(4.21) :

$$x(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \sin \omega_D (t - \tau) d\tau + e^{-\xi \omega_0 t} \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega_0 x_0}{\omega_D} \sin \omega_D t + x_0 \cos \omega_D t \right] \quad (\text{II.74})$$

II.8.5. Spectre de réponse :

Dans ce qui a précédé nous avons supposé le système dans le temps comme étant défini c'est-à-dire : C, K et M étaient supposés connus et en déterminant la réponse du système à un chargement donné.

Pour les études préliminaires (prédimensionnement des éléments résistants d'une construction).

Le problème qui va se poser à l'ingénieur est celui de déterminer un ou plusieurs paramètres (K, M ou C) d'un système à fin de limiter une certaine réponse (limite un déplacement, une contrainte,...), le spectre de réponse est utilisé pour résoudre ce problème.

Le spectre de réponse est un tracer des réponses (déplacement, vitesse, accélération) à une excitation spécifique pour tous systèmes à un seul degré de liberté possible. Comme abscisse on a la fréquence (ou la période) et comme ordonnée la réponse max.

Equation du mouvement du support (déplacement relatif) (éq.II.2)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g = P_{\text{effectif}}$$

Conditions initiales :

$$x(t=0) = 0 ; \dot{x}(t=0) = 0$$

On a l'intégral de Duhamel :

$$x(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \sin \omega_D (t - \tau) d\tau \quad \text{et } P(\tau) = -m\ddot{x}_g(\tau)$$

Donc :

$$x(t) = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \sin \omega_D (t - \tau) d\tau \quad (\text{II.75})$$

Pour un dimensionnement on s'intéresse généralement à la valeur maximale de la valeur due à un séisme.

Les réponses maximales seront définies par :

$$\text{Déplacement relatif max : } SD = |x(t)_{max}| \quad (\text{II.76.a})$$

$$\text{Vitesse relative max : } SV = |\dot{x}(t)_{max}| \quad (\text{II.76.b})$$

$$\text{Accélération relative max : } SA = |\ddot{x}(t)_{max}| \quad (\text{II.76.c})$$

$$SD = \left| \frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau) d\tau \right|_{max} \quad (\text{II.77})$$

$$SV = \left| - \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \left[\cos\omega_D(t-\tau) - \frac{\xi\omega_0}{\omega_D} \sin\omega_D(t-\tau) \right] d\tau \right|_{max} \quad (\text{II.78})$$

$$SA = \left| \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \left[\frac{\omega_0(1-2\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega_D(t-\tau) + 2\xi\omega_0 \cos\omega_D(t-\tau) \right] d\tau \right|_{max} \quad (\text{II.79})$$

Pour les constructions courantes ($\xi < 20\%$) ; Des simplifications considérables peuvent être faites en notant que : ($\omega_0 \approx \omega_D$).

Dans les constructions courantes ($\xi \ll 20\%$), et on suppose que les termes en (ξ et $\xi^2 \ll 1$).

On obtient donc des résultats :

$$PSD = \left| \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin\omega_0(t-\tau) d\tau \right|_{max} \quad (\text{II.80})$$

$$PSV = \left| - \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} [\sin\omega_0(t-\tau)] d\tau \right|_{max} \quad (\text{II.81.a})$$

$$PSA = \left| \omega_0 \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} [\sin\omega_0(t-\tau)] d\tau \right|_{max} \quad (\text{II.81.b})$$

$$PSA = \omega^2 \cdot PSD = \omega \cdot PSV$$

Représentation du spectre dans un graphe tripartite, on considère la variation du $\log_{10}PSV$ en fonction du $\log_{10}T$ pour des valeurs constantes de PSA ou PSD.

a) Si $PSA = \text{constante} = C_1$

$$PSA = C_1 = \omega^2 PSD = \omega(\omega PSD) = \frac{2\pi}{T} PSV$$

En prenant le \log_{10} de cette équation on obtient :

$$\log_{10}C_1 = \log_{10}2\pi - \log_{10}T + \log_{10}PSV$$

$$\text{Ou bien } \log_{10}PSV = \log_{10}T + [\log_{10}C_1 - \log_{10}2\pi]$$

$$\text{Alors : } \frac{d(\log_{10}PSV)}{d(\log_{10}T)} = +1$$

Ce résultat indique qu'une droite à $+45^\circ$ sur un graphe tripartite représente une accélération spectrale, PSA, constante.

b) Si $PSD = \text{constante} = C_2$

$$PSD = C_2 = \frac{PSV}{\omega} = \frac{T}{2\pi} PSV$$

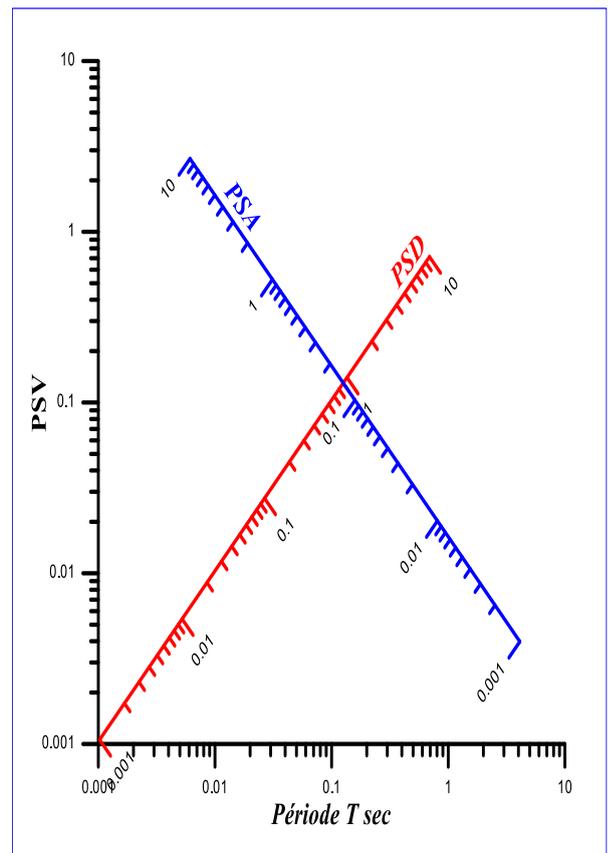
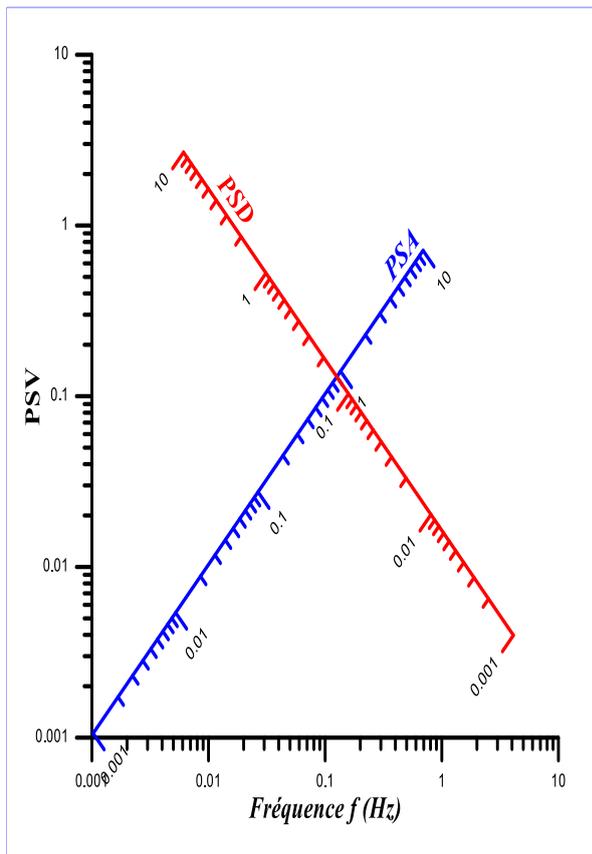
En prenant le \log_{10} de cette équation on obtient :

$$\log_{10}C_2 = +\log_{10}T - \log_{10}2\pi + \log_{10}PSV$$

Ou bien $\log_{10}PSV = -\log_{10}T + [\log_{10}C_2 + \log_{10}2\pi]$

Alors : $\frac{d(\log_{10}PSV)}{d(\log_{10}T)} = -1$

Ce résultat indique qu'une droite à -45° sur un graphe tripartite représente un spectre de déplacement relatif, PSD, constant.



Application :

Calculer le déplacement relatif maximum du bâtiment et la force élastique maximum et moment de renversement correspondant pour la structure ci-contre.

La structure en béton armé : $E = 3.10^5 \text{ MPa}$

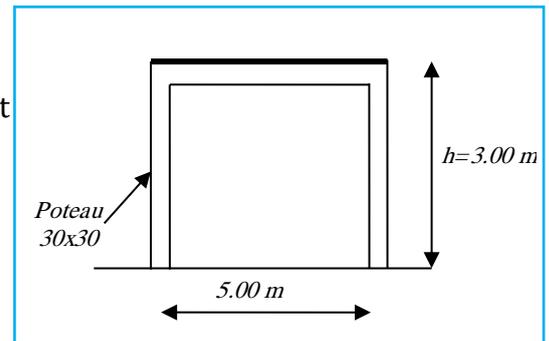
Poteaux : 30x30 cm

Poutre : 30x30 cm

Dalle d'épaisseur de : 15 cm

La masse totale du plancher : $m = 18.10^3 \text{ kg}$

Utiliser le spectre du séisme d'El Centro 18.05.1940 pour $\xi = 5 \%$



Solution :

La rigidité : $k_{pot} = \frac{12EI}{h^3}$

$$k_{\acute{e}q} = 2 k_{pot} = 2 \frac{12EI}{h^3} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 30000 \cdot 10^6 \cdot 0,675 \cdot 10^{-3}}{3^3} = 180 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

La fréquence naturelle de vibration est :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{180 \cdot 10^6}{18 \cdot 10^3}} = 100 \text{ rad/sec}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100} = 0,062 \text{ sec} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = 15,92 \text{ Hz}$$

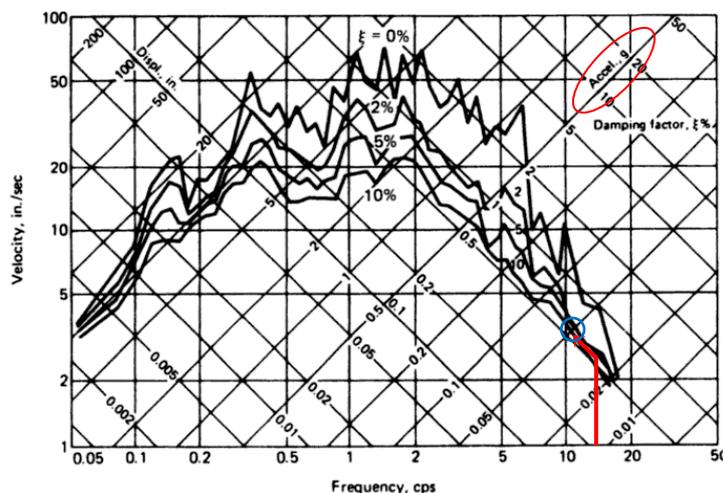
La valeur de l'accélération spectrale PSA, pour un taux d'amortissement $\xi = 5 \%$ est : (PSA=0.70g)

La force sismique à la base V_{0max} est donnée par :

$$V_{0max} = \frac{PSA}{g} W = 0,60 \cdot 18000 \cdot 9,81 = 105,94 \cdot \text{KN}$$

Le moment de renversement maximum à la base :

$$M_{0max} = f_k max \cdot h = 105,94 \cdot 3 = 317,82 \text{ kN.m}$$



Système à un degré de liberté

Système libre ($F(t) = 0$)

Système libre non amorti

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$x(t) = \rho \sin(\omega t + \varphi)$$

Avec $\rho = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$

et $\varphi = \text{artg}\left(\frac{x_0 \omega}{\dot{x}_0}\right)$

Système libre amorti

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)]$$

$$x(t) = \rho e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_D t + \varphi)$$

Avec $\rho = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D}\right)^2}$

et $\varphi = \text{Artg}\left(\frac{x_0 \omega_D}{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}\right)$

Système forcé

Force harmonique

$$F(t) = F_0 \sin(\alpha t)$$

Force quelconque

Force harmonique (non amorti)

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{(1-r^2)} (\sin(\alpha t) - r \sin(\omega t))$$

Avec $r = \frac{\alpha}{\omega}$

Force harmonique (amorti)

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\alpha t - \theta)$$

avec $\theta = \text{arctg}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$

Non amorti

$$x(t) = \frac{1}{m \omega} \int_0^t F(\tau) \sin(\omega(t-\tau)) d\tau$$

Amorti

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_D} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau$$

Recapitulatif d'un système à un DDL

CHAPITRE III

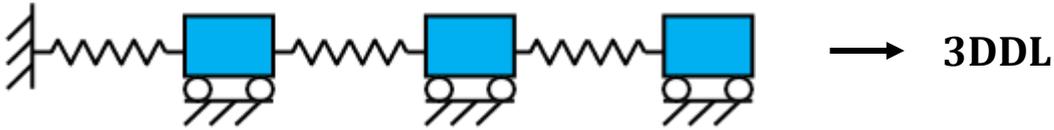
Systemes à plusieurs degrés de liberté

III.1. Définition :

c'est un système qui a N possibilité de déplacement c'est-à-dire "N inconnus »

III.2. Modélisation :

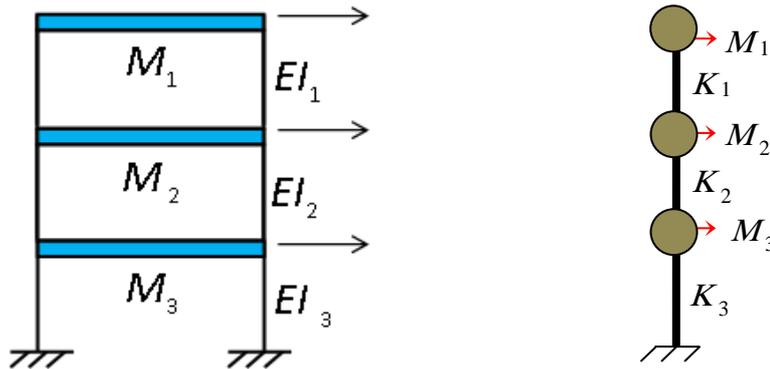
III.2.1. Vrais systemes



III.2.2. Systemes simplifiés

Ce modele simplifié est basé sur les hypotheses suivantes :

- Les poteaux ont des masses negligeeable par rapport à la masse totale du batiment . supposee concentrée au niveau des planchers.
- Les planchers et les poutres sont régident longitudinalement et en flexion « Diaphragme rigide »



L'équation du mouvement pour ce cas s'écrira :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{P\}$$

Avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix}; \{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{Bmatrix}; \{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{Bmatrix}; \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

III.3. Vibrations libres non amorties :

L'analyse d'un système (structures) à plusieurs degrés de liberté (SPDDL) en vibration libre non amortie, nous donne propriétés dynamiques les plus importants de ce système

à savoir les fréquences propres, et les modes propres.

Dans chaque mode propre de vibration, chaque point de la structure exécute un mouvement harmonique autour de sa position d'équilibre.

Tous les points passent simultanément par une position d'équilibre et par leur amplitude max.

III.3.1. Méthode de la matrice de rigidité (Méthode des raideurs) :

L'équation du mouvement du système libre non amorti s'écrit sous la forme :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad \text{(III.1)}$$

Pour un mouvement sinusoïdal pour chaque point de la structure.

$$x_1 = \Phi_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x_2 = \Phi_2 \sin(\omega t + \varphi)$$

.

$$x_n = \Phi_n \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\{x\} = \{\Phi\} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{(III.3)}$$

$$\{\ddot{x}\} = -\{\Phi\} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{(III.4)}$$

En reportant ces deux dernières dans l'équation du mouvement :

$$-\omega^2 [M] \{\Phi\} \sin(\omega t + \varphi) + [K] \{\Phi\} \sin(\omega t + \varphi) = \{0\} \quad \text{(III.5)}$$

$$\forall t : ([K] - \omega^2 [M]) \{\Phi\} \sin(\omega t + \varphi) = \{0\} \quad \text{(III.6)}$$

Eq (6.5) = 0 $\forall t \Rightarrow$ pour toute valeur de la fonction sin ;

On a :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Phi\} = 0 \quad \text{(III.7)}$$

$$\text{Det} ([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

Les solutions de cette équation représentent les pulsations propres ω_i du système. A

chaque pulsation propre correspond un vecteur propre $\{\phi_i\}$ en écrivant :

$$\left. \begin{array}{l} \omega^2 = ? \\ \phi_1 = ? \\ \phi_2 = ? \\ \vdots \\ \phi_n = ? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{donc on a un système de (n) équations à (n+1) inconnus}$$

Le couple $(\omega_i ; \{\phi_i\})$ représente le mode de vibration i du système

$$\begin{cases} (k_{11} - \omega^2 m_1) \phi_1 + k_{12} \phi_2 + \dots + k_{1n} \phi_n = 0 \\ k_{21} \phi_1 + (k_{22} - \omega^2 m_2) \phi_2 + \dots + k_{2n} \phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{n1} \phi_1 + k_{n2} \phi_2 + \dots + (k_{nn} - \omega^2 m_n) \phi_n = 0 \end{cases} \quad \text{(III.8)}$$

Avec :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot \\ k_{n1} & \cdot & k_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & \cdot \\ 0 & \cdot & m_n \end{bmatrix}$$

Le système d'équation homogène (6.6) ne peut admettre de solution non nulle que si le déterminant de la matrice carrée est nul.

$$\text{éq caractéristique} \quad \Delta_\omega = |([K] - \omega^2[M])| = 0 \quad \text{(III.9)}$$

$$\Delta_\omega = f[(\omega^2)^n + (\omega^2)^{n-1} + \dots + (\omega^2)^1 + cst]$$

Si on développe l'éq caractéristique on abouti à une éq polynomiale de degré 'n' en ω^2 .

Les n solutions en (ω^2) sont les carrés des fréquences propres des n modes de vibration possible.

Donc pour chaque fréquence propre, on calcule le mode propre correspondant :

$$\omega = \omega_1 \implies \{\Phi_1\}$$

$$\omega = \omega_2 \implies \{\Phi\}$$

...

$$\omega = \omega_n \implies \{\Phi_n\}$$

$$\text{Pour } \omega = \omega_i \implies \begin{cases} (k_{11} - m_1\omega_i^2)\Phi_1 + k_{12}\Phi_2 + \dots + k_{1n}\Phi_n = 0 \\ k_{21}\Phi_1 + (k_{22} - m_2\omega_i^2)\Phi_2 + \dots + k_{2n}\Phi_n = 0 \\ \vdots \\ k_{n1}\Phi_1 + k_{n2}\Phi_2 + \dots + (k_{nn} - m_n\omega_i^2)\Phi_n = 0 \end{cases}$$

(III.10)

Eq(6.9) \implies n inconnus en Φ_i ; n éq \implies (n-1) éq indépendantes (car $\Delta_{\omega_i} = 0$)

$\Delta_{\omega_i} = 0$ (car ω_i est une racine propre de Δ_ω)

Le mode propre $\{\Phi_j\}^i$ ne peut être déterminé que sa forme de rapport de déplacement non nuls.

Les modes propres sont habituellement normalisés par rapport à la plus grande composante, si $\Phi_1^{(i)}$ est cette dernière.

$$\phi_{k,i} = \frac{\Phi_k^{(i)}}{\Phi_1^{(i)}} \quad \text{(III.11)} \quad \implies \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_n \end{Bmatrix} \implies \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{n-1} \end{Bmatrix} = \{\phi\}^i$$

$\{\phi\}^i$: nous donne l'allure ou bien la forme de la vibration propre correspondante à ω_i .

Matrice spectrale : $[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & . \\ 0 & . & \omega_n^2 \end{bmatrix}$

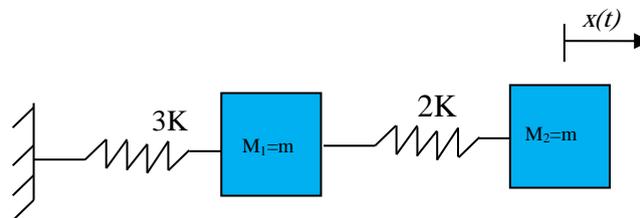
Matrice modale : $[\phi] = [\{\phi\}^1 \{\phi\}^2 \dots \{\phi\}^n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & . \\ \phi_{n1} & . & \phi_{nn} \end{bmatrix}$

Remarque:

- Le 1^{er} mode de vibration correspond à ω_1 , et le premier période (T1) il est appelé **mode fondamental**. On cherche les valeurs positifs, et on les classes de plus petit vers plus grand c'est-à-dire l'ordre croissant : $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$ (pulsation propre) $\rightarrow : T_1 > T_2 > T_3 > \dots > T_n$
- Période grande \rightarrow le temps de retour à la position initiale est grand \rightarrow la vitesse est faible \rightarrow structure souple.
- Période petite \rightarrow le temps de retour à la position initiale est petit \rightarrow la vitesse est grande \rightarrow structure rigide.

Application 1:

Calculer les vecteurs propres (Φ_1, Φ_2) et les valeurs propres (ω_1, ω_2) de la structure ci-dessous ? :



Solution :

$$[[K] - \omega_i^2[M]]\{\Phi_i\} = \{0\}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 5K & -2K \\ -2K & 2K \end{bmatrix}; [M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 5K & -2K \\ -2K & 2K \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\left[K \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \omega_i^2 m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \text{ avec : } \lambda_i = \frac{\omega_i^2 m}{K}$$

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda_i & -2 \\ -2 & 2 - \lambda_i \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (5 - \lambda_i)(2 - \lambda_i) - 4 = 0$$

$$\lambda_i^2 - 7\lambda_i + 6 = 0 \rightarrow \Delta = 25$$

La solution de cette équation est :

$$\lambda_1 = 1 ; \lambda_2 = 6 \rightarrow \omega_i^2 = \frac{K}{m} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\lambda_2 = 6 \rightarrow \omega_i^2 = \frac{6K}{m} \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{6K}{m}}$$

1^{ere} mode :

$$\lambda_1 = 1$$

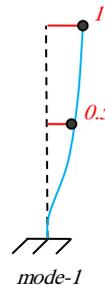
$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 - 1 & -2 \\ -2 & 2 - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 4\Phi_{11} - 2\Phi_{21} = 0 \\ -2\Phi_{11} + \Phi_{21} = 0 \end{cases}$$

Si on pose : $\Phi_{21} = 1$ on trouve $\Phi_{11} = 1/2$

$$\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



2^{eme} mode :

$$\lambda_2 = 6$$

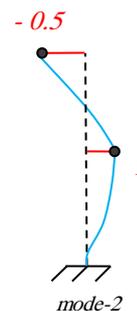
$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 - 6 & -2 \\ -2 & 2 - 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -\Phi_{12} - 2\Phi_{22} = 0 \\ -2\Phi_{12} - 4\Phi_{22} = 0 \end{cases}$$

Si on pose : $\Phi_{12} = 1$; on trouve $\Phi_{22} = -1/2$

$$\{\Phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$$



III.3.2. Méthode de la matrice de flexibilité (Méthode de flexibilités) :

A partir de l'équation d'équilibre du système libre non amorti l'équation suivante est déduite :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = 0$$

Cette équation est multipliée par la matrice de flexibilité $[F]$:

$$\Rightarrow [f][M]\{\ddot{X}\} + [f][K]\{X\} = \{0\}$$

$$\{X\} + [f][M]\{\ddot{X}\} = \{0\} \quad (\text{III.12})$$

$[f]$ et $[K]$ sont des matrices symétrique $\Rightarrow [f]^* [K] = I$

Pour un mouvement sinusoïdal pour chaque point de la structure.

$$x_1 = \Phi_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x_2 = \Phi_2 \sin(\omega t + \varphi)$$

.

$$x_n = \Phi_n \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\{x\} = \{\Phi\} \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{III.13})$$

$$(1 - \omega^2 [f][M]) \{\Phi\} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = \{0\} \quad (\text{III.14})$$

Eq (6.13) = 0 $\forall t \Rightarrow$ pour toute valeur de la fonction sin ;

On a :

$$\left(\frac{1}{\omega^2} [I] - [f][M] \right) \{\Phi\} = \{0\} \quad (\text{III.15})$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\omega^2} - f_{11} m_1 \right) & -f_{12} m_2 & \cdot & -f_{1n} m_n \\ -f_{21} m_1 & \left(\frac{1}{\omega^2} - f_{22} m_2 \right) & \cdot & -f_{2n} m_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -f_{n1} m_1 & \cdot & \cdot & \left(\frac{1}{\omega^2} - f_{nn} m_n \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdot \\ \Phi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

De même on a n éqs à (n+1) inconnus ; $\{\Phi\}$ et $(1/\omega^2)$.

Loi de Cramer :

$$\Delta = \left| \frac{1}{\omega^2} [I] - [f][M] \right| = 0 \quad (\text{III.17})$$

Le calcul des racines de l'éq (6.16) s'effectue comme pour l'éq(6.8).

Les solutions sont les carrées des inverses des fréquences propres $(1/\omega_i^2)$.

La détermination des modes propres se fera de la même manière que précédemment (matrice de rigidité).

Remarque :

De l'équation (6.6) on a :

$$\begin{aligned} [K]^{-1} * ([K] - \omega^2 [M]) \{\Phi\} &= \{0\} \\ ([1] - \omega^2 [K]^{-1} [M]) \{\Phi\} &= \{0\} \\ ([1] - \omega^2 [f][M]) \{\Phi\} &= \{0\} \quad \text{avec } [K]^{-1} = [f] \end{aligned}$$

Donc c'est la relation qui existe entre la matrice de rigidité et la matrice de flexibilité.

Application 2:

Soit le portique ci-dessous déterminer :

Les valeurs et les vecteurs propres de ce système.

Solution :

$$[K] - \omega_i^2 [M] \{\Phi_i\} = \{0\}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; [M] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \text{ avec : } \lambda_i = \omega_i^2$$

$$\begin{vmatrix} 6 - 3\lambda_i & -2 \\ -2 & 2 - \lambda_i \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (6 - 3\lambda_i)(2 - \lambda_i) - 4 = 0$$

$$3\lambda_i^2 - 12\lambda_i + 8 = 0 \rightarrow \Delta = 12$$

La solution de cette équation est :

$$\lambda_1 = 0.84 ; \lambda_2 = 3.15 \rightarrow \omega_1 = 0.91$$

$$\lambda_2 = 3.15 \rightarrow \omega_2 = 1.77$$

1^{ere} mode :

$$\lambda_1 = 0.84$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - 0.84 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 - 3 * 0.84 & -2 \\ -2 & 2 - 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3.462\Phi_{11} - 2\Phi_{21} = 0 \\ -2\Phi_{11} + 1.154\Phi_{21} = 0 \end{cases}$$

Si on pose : $\Phi_{21} = 1$ on trouve $\Phi_{11} = 0.577$

$$\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} 0.577 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2^{eme} mode :

$$\lambda_2 = 3.15$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - 3.15 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 - 9.45 & -2 \\ -2 & 2 - 3.15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -3.45\Phi_{12} - 2\Phi_{22} = 0 \\ -2\Phi_{12} - 1.15\Phi_{22} = 0 \end{cases}$$

Si on pose : $\Phi_{12} = 1$; on trouve $\Phi_{22} = -1.725$

$$\{\Phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.725 \end{Bmatrix}$$

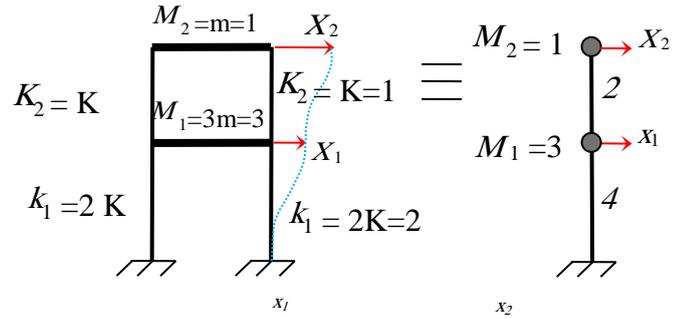
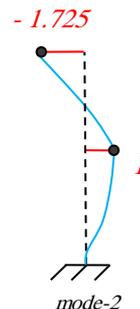
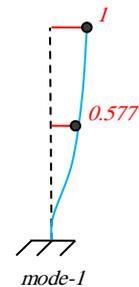


Fig. Bâtiment à $R+1 = 2$ étages



Références

- [1] Capra A., Davidovici V., Calcul Dynamique des structures en zone sismique edition Eyrolles.1982
- [2] Chanti A., Calculm dynamique des structures, interprétation des logiciels de calculs., office de publication universitaires OPU .2000.
- [3] Chopra A. K., Dynamics of structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., Fourth Edition.2011.
- [4] Clough R. W., PENZIEN J., Dynamics of Structures, MH, MH:adr, 2nd edition. 1993.
- [5] DTR BC2.48 Règles Parasismiques Algériennes R.P.A.99 ver 2003, Ministère de l'Habitat & Urb.2003
- [6] Nacer N., "Recueil de problèmes de la dynamique des structures avec leurs solutions", OPU Alger.
- [7] Paultre P., "Dynamique des structures application aux ouvrages de génie civil", ed. Hermes. 2004.
- [8] Smith I., Lestuzzi P., Dynamique des structures ., Laboratoire d'Informatique et de Mécanique Appliquées à la Construction, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. 2013.

L'objet de ce polycopié de cours et d'exercices est de servir de guide aux étudiants de génie civil de centre universitaire Abdelhafid Bousoif - Mila et aux personnes souhaitant avoir une vue d'ensemble sur la dynamique des structures et ses applications dans le domaine de génie civil

Des références bibliographiques sont données ci-après pour permettre au lecteur d'approfondir chaque sujet abordé.

À la fin, je serais ouverte à toutes propositions pour améliorer la qualité de ce cours.

Mr Abdelheq Guettiche Maître de conférence au centre universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila, titulaire d'un doctorat en Science en Génie civil obtenu à l'université de Constantine.

Il est auteur de plusieurs travaux scientifiques.

