

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire  
Abdelhafid boussof Mila



المركز الجامعي  
عبد الحفيظ بوضوف - ميلّة

*Institut des sciences et de la technologie  
Département sciences et techniques*

معهد العلوم والتكنولوجيا  
قسم علوم و تقنيات

# Cours de Méthodes Numériques Conforme au programme de la 2<sup>ème</sup> année ST.

Présenté par :  
Dr. BAZIZ Leila

Année Universitaire : 2019/2020

## Programme de Méthodes numériques

### Chapitre 1 : Résolution des équations non linéaires $f(x)=0$

1.1 Les erreurs numériques.....	1
1.2 Résolution des équations non linéaires $f(x)=0$ .....	4
1.2.1 Introduction.....	4
1.2.2 Méthode point fixe.....	5
1.2.3 Méthode de Newton-Raphson.....	8
1.2.4 Méthode de bisection.....	12

### Chapitre 2 : Interpolation polynomiale

2.1 Introduction générale.....	14
2.2 Unicité du polynôme d'interpolation.....	15
2.3 Interpolation de Lagrange.....	15
2.4 Interpolation de Newton.....	18

### Chapitre 3 : Intégration numérique

3.1 Introduction générale.....	21
3.2 Formules de Newton cotes.....	22
3.3 Méthode du trapèze généralisée.....	25
3.3 Méthode de Simpson généralisée.....	26

### Chapitre 4 : Résolution des équations différentielles ordinaires (problème de la condition initiale ou de Cauchy).

4.1 Définitions.....	29
4.2 Problème de Cauchy.....	30
4.3 Méthode d'Euler.....	31
4.4 Méthode d'Euler améliorée.....	33
4.5 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.....	35

### Chapitre 5 : Méthode de résolution directe des systèmes d'équations linéaires

5.1 Introduction.....	38
5.2 Généralités sur les matrices.....	38
5.3 Systèmes d'équations.....	39
5.4 Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes directes.....	40
5.4.1 Méthode de Gauss.....	40
5.4.2 Méthode de factorisation de Choleski $LL^t$ .....	44
5.4.3 Méthode de factorisation LU.....	48

### Chapitre 6 : Méthode de résolution approximative des systèmes d'équations linéaires

6.1 Introduction.....	52
6.2 Principe des méthodes itératives. ....	52
6.3 Méthode de Jacobi.....	53
6.4 Méthode de Gauss-Seidel.....	55

## **Avant propos**

Ce polycopie regroupe les notes d'un cours enseigné en deuxième année de licence de sciences et techniques (spécialités : Electromécanique, génie mécanique, hydraulique et génie civil). Cet enseignement se compose à la fois de cours et de séances de travaux dirigés.

Ce document est un cours détaillé avec des exemples. Il comprend six chapitres cités ci-dessous :

- Chapitre 1 : Résolution des équations non linéaires
- Chapitre 2 : interpolation polynomiale
- Chapitre 3 : Intégration numériques
- Chapitre 4 : Résolution des équations différentielles ordinaires.
- Chapitre 5 : Résolution des systèmes d'équations linéaires par des méthodes directes
- Chapitre 6 : Résolution des systèmes linéaires par des méthodes indirectes.

Son but est de présenter plusieurs méthodes numériques de base utilisées pour la résolution des équations non linéaires ou encore pour l'approximation des fonctions par interpolation polynomiale, ainsi que d'introduire aux étudiants les techniques d'analyse (théorique) de ces dernières, en abordant notamment les notions de convergence et de précision.

# Chapitre 1 Résolution des équations non linéaires $f(x)=0$ .

## 1.1 Les erreurs numériques:

Le résultat numérique est un résultat approximatif du résultat exact. Chaque résultat numérique est donné avec une estimation, d'une autre manière, chaque résultat numérique doit être accompagné d'une erreur. L'erreur peut être due à l'imprécision des mesures physiques ou au fait que les données elles-mêmes proviennent de calculs approximatifs.

### 1.1.1 Définition 1 :L'erreur absolue

On appelle erreur absolue de la valeur approchée  $x^*$  sur la valeur exacte  $x$ , la quantité :

$$E = |x - x^*|$$

L'erreur absolue sert à déterminer la précision de la valeur approchée  $x^*$  relativement à la valeur exacte  $x$ . Plus l'erreur absolue de la valeur approchée  $x^*$  est petite, plus  $x^*$  est précise.

### 1.1.2 Définition 2:L'erreur relative

On appelle erreur relative la quantité  $Er$  donné par :

$$Er = \frac{|x - x^*|}{|x^*|} = \frac{E}{|x^*|}$$

L'erreur relative est utilisée pour comparer la précision de la valeur approchée  $x^*$  à la valeur exacte  $x$ , elle est souvent exprimée en pourcentage.

Elle est généralement utilisée pour comparer la précision de différentes valeurs approchées  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$ , ... relativement à différentes valeurs exactes respectives  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ....

Dans le cas où il y'a plusieurs valeurs approchées pour une valeur exacte connue, il est possible de déterminer ses erreurs absolues et relatives. Mais dans le cas contraire, les erreurs absolue et relative deviennent impossibles à calculer. On introduit alors les notions d'incertitude absolue et d'incertitude relative.

### 1.1.3 Définition3 : Les incertitudes

On appelle incertitude absolue d'une valeur approchée  $x^*$ , tout nombre réel positif, noté  $\Delta x$ , vérifiant:  $E = |x - x^*| \leq \Delta x$

ou de manière équivalente :  $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ .

- Une incertitude absolue est un majorant de l'erreur absolue.
- Plus  $\Delta x$  est petite, plus la valeur approchée  $x^*$  est précise.

D'où, en pratique, on prend le plus petit  $\Delta x$  possible.

- On écrit :  $x = x^* \pm \Delta x$
- Souvent au lieu d'écrire  $x = x^* \pm \Delta x$ , on écrit  $x = x^* \pm \delta x \cdot 100\%$  où la quantité  $\delta x$  est définie par  $\delta x = \frac{\Delta x}{|x^*|}$
- Cette quantité est appelée incertitude relative à  $x^*$ .

### 1.1.4 Représentation décimale d'un nombre approché :

Tout nombre réel positif  $x$  peut être représenté sous la forme d'un nombre décimal de développement limité ou illimité :

$$x = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_{m-n} 10^{m-n} + \dots$$

où les  $a_i$  sont les chiffres significatifs du nombre réel  $x$  ( $a_i = 0, 1, 2, \dots, 9$ ), avec  $a_m \neq 0$  où  $m$  est un entier naturel appelé rang supérieur du nombre réel  $x$ .

Exemple de développement limité :

$$7413.268 = 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}.$$

Exemple de développement illimité :

$$\pi = 3.14159265358 \dots$$

$$= 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + \dots + 5 \cdot 10^{-10} + 8 \cdot 10^{-11} + \dots$$

Dans le cas où le nombre réel  $x$  est négatif, il suffit de considérer la représentation décimale du nombre  $y = -x$ .

### 1.1.5 Chiffres significatifs exacte d'un nombre approché :

Soient  $x$  un nombre réel et  $x^*$  une valeur approchée de  $x$ .

Un chiffre significatif de  $x^*$  est dit exact (c.s.e) si l'erreur absolue de ce nombre ne dépasse pas une demi-unité de rang du chiffre significatif, c'est-à-dire que :

$$E = |x - x^*| \leq 0.5 \times \text{l'unité de rang de ce c.s.}$$

Ainsi :

- Le  $n$ -ième c.s après la virgule est exact si :  $\Delta x \leq 0.5 \cdot 10^{-n}$ .
- Le  $n$ -ième c.s avant la virgule est exact si :  $\Delta x \leq 0.5 \cdot 10^{n-1}$ .

### 1.1.6 Troncature et arrondissement d'un nombre:

La méthode habituelle pour tronquer un nombre pour ne garder qu'un nombre fini de chiffres significatifs est l'arrondissement.

#### 1.1.6.1 Règles d'arrondissement:

- Si le 1<sup>er</sup> chiffre à rejeter est  $< 5$ , le nombre est retenu.

- Si le 1<sup>er</sup> chiffre à rejeter est  $\geq 5$ , on ajoute une unité au dernier chiffre significatif retenu.

### 1.1.6.2 L'erreur d'arrondissement:

Si on applique la règle d'arrondissement ci-dessus, l'erreur d'arrondissement ne dépasse pas une demi-unité de rang du dernier c.s. retenu, c'est-à-dire qu'on a :

$$E = |x - x^*| \leq 0.5 \times \text{l'unité de rang du dernier c.s. retenu.}$$

#### Exemple1 :

1- Soient  $x^* = 255$  et  $y^* = 250$  avec  $\delta x = \delta y = 0.1\%$ . Calculer  $x^* - y^*$  et

$$\delta(x - y).$$

2- Calculer, pour  $x^* = 56202$  et  $y^* = 56198$  avec  $\delta x = \delta y = 0.01\%$ , les valeurs de  $x^* - y^*$ ,  $\delta(x - y)$  et  $\Delta(x - y)$ .

#### Solution:

$$1. \text{ Nous avons : } \Delta x = x^* \cdot \delta x = 255 \cdot 10^{-3} = 0.255$$

$$\text{Et : } \Delta y = y^* \cdot \delta y = 250 \cdot 10^{-3} = 0.250$$

et puis :  $x^* - y^* = 255 - 250 = 5$ , avec une incertitude relative :

$$\delta(x - y) = \frac{\Delta(x - y)}{x^* - y^*} = 10.1 \cdot 10^{-2} = 10.1\%.$$

#### Exemple2:

Arrondissement du nombre au dixième près :

$$35,64 \approx 35.6$$

## 1.2 Résolution de l'équation non linéaire $f(x)=0$

### 1.2.1 Introduction :

Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière sur l'intervalle  $[a, b]$  domaine des racines.

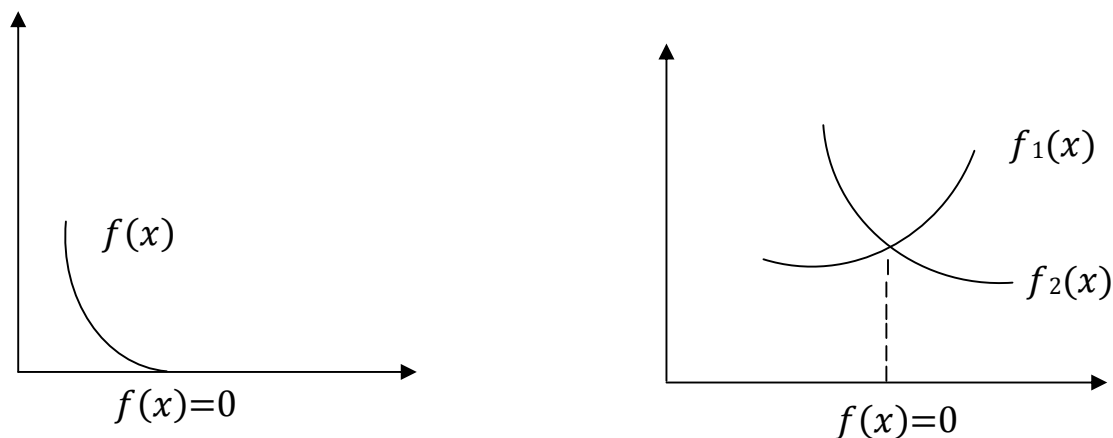
Pour trouver les racines de l'équation  $f(x) = 0$ .



On commence toujours par localiser et ensuite séparer les racines c.à.d. déterminer les intervalles  $[a_i, b_i]$  à l'intérieur des quels la fonction  $f$  admet une racine et une seule.

La séparation des racines s'effectue en générale à partir des considérations suivantes :

- en examinant le graphe  $y=f(x)$ .
- en examinant les graphes  $y_1=f_1(x)$  et  $y_2=f_2(x)$  si on arrive à écrire  $f(x)$  sous la forme  $f_1(x)=f_2(x)$ .



**Fig 1.1** Séparation des racines graphiquement.

On peut également séparer les racines, en se basant sur le théorème du Rohlé (Valeurs intermédiaires) étant donnés  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a :

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$

- si  $f(a).f(b) < 0$  alors  $f$  a au moins une racine dans  $[a, b]$ , si de plus  $f'$  s'annule pas sur  $[a, b]$ , alors la racine est unique.

### 1.2.2 Méthode du point fixe:

Le principe de cette méthode consiste à transformer l'équation  $f(x) = 0$  en une équation équivalente  $\mathbf{g(x)=x}$  où  $g$  est une fonction bien choisie. Le point  $\alpha$  est alors un **point fixe** de  $g$ . Approcher les zéros de  $f$  revient à approcher les points fixes de  $g$ . Le choix de la fonction  $g$  est motivé par les exigences du théorème de point fixe. En effet, elle doit être contractante dans un voisinage  $I$  de  $\alpha$ , ce qui revient à vérifier que  $|\mathbf{g'(x)}| < 1$  sur ce voisinage. C'est-à-dire :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$$

Puis on construit à partir de l'équation, la suite :

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_0 \text{ choisi dans } [a, b] \end{cases}$$

### 1.2.2.1 Convergence de la méthode du point fixe :

$$\text{Soit } g : [a, b] \rightarrow [a, b] \begin{cases} g(x) = x \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

La suite  $x_n$  converge (si  $x_0$  est bien choisi).

Et les conditions de convergence sur  $g(x)$  (fonction réelle, définie et continue sur  $[a, b]$ ) sont :

- 1-  $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$  (si  $I = [a, b]$  alors  $g(I) \subset I$ )
- 2-  $\exists k \in \mathbb{R} : 0 < k < 1$  tel que :  $|g'(x)| \leq k < 1$ ,  
avec  $k = \max |g'(x)|$  sur  $[a, b]$

On dit que  $g(x)$  est strictement contracte.

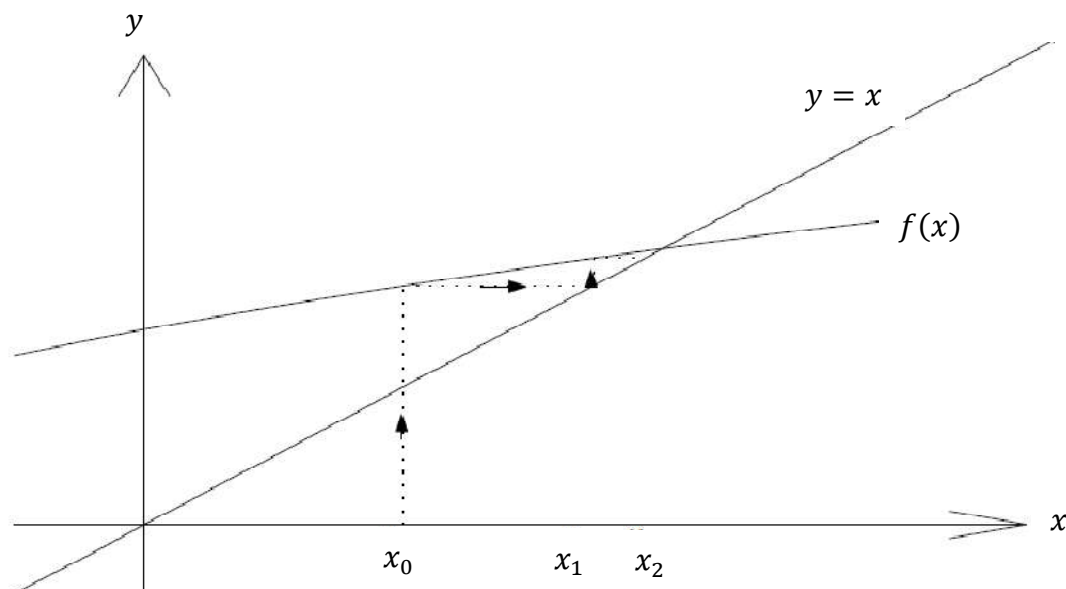
Alors  $g(x)$  admet un point fixe unique dans  $[a, b]$  et la suite

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases} \text{ Converge vers le point fixe } \alpha.$$

$$\text{Et : } |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

Le nombre minimum d'itérations pour que la solution est approchée avec une précision  $\varepsilon$  est :  $|x_n - \alpha| < \varepsilon$

$$\text{Donc : } n > \frac{\ln\left[\frac{(1-k)\varepsilon}{|x_1-x_0|}\right]}{\ln k} \quad \text{avec } k = \max_{[a,b]} |g'(x)|$$



**Fig 1.2** représentation graphique de la méthode du point fixe.

### Exemple1:

$f(x) = x^2 - 2$  admet une racine dans  $[1,2]$  et  $f'(x) = 2x > 0$

- choix de  $g$  : •  $g_1(x) = 2/x$   $g'_1(x) = -2/x^2$   $|g'_1(1)| = 2 > 1$
- $g_2(x) = 2x - 2/x$   $g'_2(x) = 2 + 2/x^2$   $|g'_2(1)| = 3$
- $g_3(x) = x/2 + 1/x$   $g'_3(x) = 1/2 - 1/x^2$   $|g'_3(1)| = 1/2$

Alors  $g_3(x) = x/2 + 1/x$  permet la convergence vers la racine.

### Exemple2:

Soit  $f(x) = \frac{1}{4}(e^{-x} - x^2)$

- 1- Montrer que  $g(x) = x + \frac{1}{4}(e^{-x} - x^2)$  converge vers la racine  $\alpha$  sur  $[0,1]$ .

2- Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour calculer une solution approchée avec une précision  $\varepsilon=10^{-10}$

**Solution :**

$$1- \begin{cases} g([a, b]) \subset [a, b] \text{ on a:} \\ 0 < g(0) = \frac{1}{4} < g(1) = 1 \text{ et } g'(x) > 0, \forall x \in [a, b] \text{ c.à.d } g([0,1]) \subset [0,1] \\ \forall x \in [a, b] : |g'(x)| \leq k < 1 \end{cases}$$

$$\text{comme: } g'(x) = 1 - \left( \frac{e^{-x} + 2x}{4} \right) > 0, \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in I} |g'(x)| = |g'(0)| = \frac{3}{4}$$

$$\text{D'où } k = \max_{x \in [a,b]} |g'(x)| = \frac{3}{4} < 1$$

Alors la méthode du point fixe converge vers la solution sur  $[0,1]$

2-Nombre d'itération pour  $\varepsilon = 10^{-10}$

$$|x_n - \alpha| \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1 - k} \quad \text{et} \quad k = \max |g'(x)| = \frac{3}{4} < 1$$

$$\text{Si on prend } x_0 = 0, \quad x_1 = g(x_0) = x_0 + \frac{1}{4}(\bar{e}^{x_0} - x_0^2) = 0 + \frac{1}{4}(\bar{e}^0 - 0) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_0) = \frac{1}{4}$$

Sachant que  $|x_n - \alpha| < \varepsilon$

$$\text{d'ou: } |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1 - k} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln \left( \frac{\varepsilon(1 - k)}{|x_1 - x_0|} \right)}{\ln k}$$

$$\text{alors } n \geq \left[ \frac{\ln 10^{-10} (1 - 3/4)}{\frac{1/4}{\ln 3/4}} \right] = 80,22$$

$n=81$  itérations

### 1.2.3 Méthode de Newton – Raphson:

Cette méthode se base sur le développement de Taylor au point  $x_0$

$$f(\alpha) = f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0) + \frac{(\alpha - x_0)^2}{2!}f''(x_0) \\ + \dots + \frac{(\alpha - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

Si on prend  $n=1$  on obtient :

$$f(\alpha) = f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0) + R(f) \\ \alpha = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + R(f) \quad R(f) \text{ le reste}$$

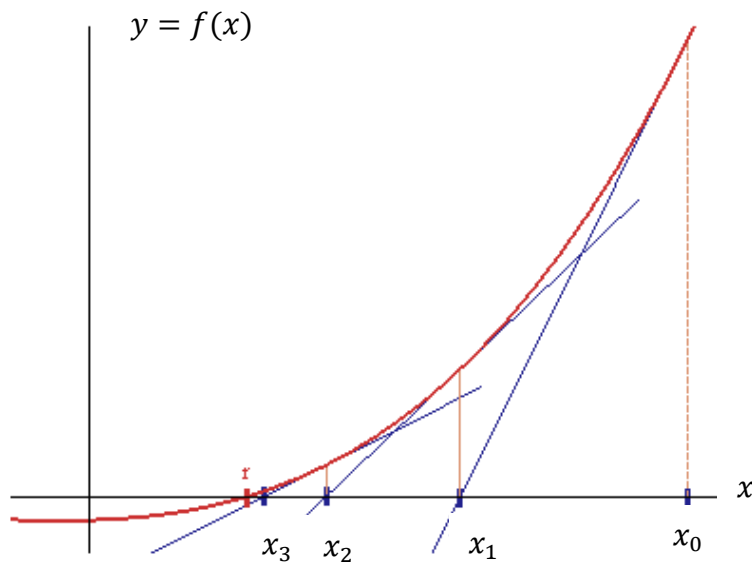
$$\text{Alors : } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{en négligeant le reste } R(f)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{array} \right.$$

#### 1.2.3.1 Interprétation de la méthode de Newton –Raphson

La méthode de Newton-Raphson est interprétée par la tangente en un point de la courbe d'une fonction  $f$ . Plus précisément, le choix d'une première valeur  $x_0$  approchée d'un zéro réel à localiser détermine un premier point  $(x_0, f(x_0))$  sur la courbe qui sera considéré comme un premier point de tangence. Ce nombre  $x_0$  est appelé **point de départ** du procédé itératif de Newton-Raphson. L'abscisse  $x_1$  du point d'intersection de la première tangente avec l'axe des  $x$  sera considérée comme une deuxième valeur approchée du zéro à localiser. En poursuivant ce procédé itérativement, on obtiendra une approximation de la racine.



**Fig 1.3** représentation graphique de la méthode de Newton-Raphson

### 1.2.3.2 Convergence de la méthode de Newton-Raphson :

Si  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  vérifie

1-  $f(a) \cdot f(b) < 0$

2-  $\forall x \in [a, b]: f'(x) \neq 0$

3-  $\forall x \in [a, b] f''(x) \neq 0$  et garde un signe constant sur  $[a, b]$

Alors en choisissant  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ .

Les itérations de Newton convergent vers l'unique solution de  $f(x) = 0$  dans  $[a, b]$ .

**Remarque:** si on cherche la racine  $\alpha$  à  $10^{-m}$  près; les itérations seront arrêtées lorsque  $x_i$  et  $x_{i+1}$  présentent les  $m$  décimales de la première à la  $m^{\text{ième}}$ .

**Exemple 1 :**

$$f(x) = x^6 - x - 1 = 0 \quad \text{Sur } [1,2]. \quad \varepsilon = 10^{-3} \text{ et } x_0 = 1,5$$

$$\begin{cases} x_0 \\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 1,5 \\ x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^6 - x_{n-1} - 1}{6x_{n-1}^5 - 1} \end{cases}$$

$i$	$x_i$
0	1.5000
1	1.30049
2	1.18148
3	1.13945
4	1.13478
5	1.13472

$$\alpha = 1.134 \pm 10^{-3}$$

**Remarque:**

L'estimation de l'erreur par la méthode de Newton est donnée par

$$(\alpha - x_n) \leq \frac{M}{2m} (x_n - x_{n-1})^2$$

$$M = \max |f''(x)|, x \in [a, b]$$

$$m = \min |f'(x)|, x \in [a, b]$$

**Exemple2 :**

$$\text{Soit } f(x) = x^3 + x - 1$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = -0.375 \\ f(1) = 1 \end{cases} \quad \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

et  $f'(x) > 0$  sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0 \text{ sur } \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$f''(x) = 6x > 0 \text{ sur } \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

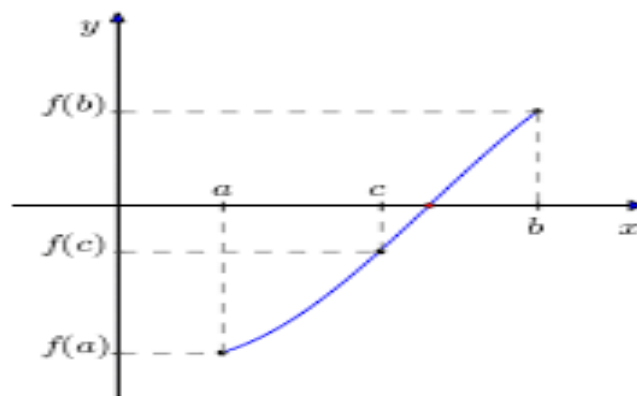
Le choix de  $x_0$  :

$$f''(x) > 0 \text{ et } f(1) > 0 \Rightarrow f''(1).f(1) > 0$$

Donc  $x_0 = 1$

#### 1.2.4 Méthode de bisection (ou de Dichotomie) :

On suppose que l'équation  $f(x)=0$  admet une unique solution  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$  dans l'intervalle  $[a, b]$  et que  $f$  continue dans  $[a, b]$ .



**Fig. 1.4** représentation graphique de la méthode de bisection.

Cette méthode s'appuie sur le théorème des valeurs intermédiaires  
 $f(a).f(b) < 0$ .



Elle consiste à construire une suite  $(x_n)$  qui converge vers la racine  $\alpha$  de la manière suivante :

- Initialisation : on prend pour  $x_0$  le milieu de  $[a, b]$ .

La racine se trouve alors dans l'un des deux intervalles  $]a, x_0[$  ou  $]x_0, b[$  ou bien elle est égale à  $x_0$ .

- si  $f(a) \cdot f(x_0) < 0$ , alors  $\alpha \in ]a, x_0[$ . On pose  $a_1 = a$ ,  $b_1 = x_0$ .
- si  $f(a) \cdot f(x_0) = 0$ , alors  $\alpha = x_0$ .
- si  $f(a) \cdot f(x_0) > 0$ , alors  $\alpha \in ]x_0, b[$ . On pose  $a_1 = x_0$ ,  $b_1 = b$ . On prend alors pour  $x_1$  le milieu de  $[a_1, b_1]$ . On construit ainsi une suite

$$x_0 = (a+b)/2, x_1 = (a_1 + b_1)/2, \dots, x_n = (a_n + b_n)/2 \text{ telle que}$$

$$|\alpha - x_n| \leq (b - a)/2^{n+1}$$

### Exemple :

Trouver la racine de l'équation  $x^6 - x - 1 = 0$  dans l'intervalle  $[1,2]$

Avec une précision  $\varepsilon = 10^{-3}$

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 6 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0, \exists \alpha \in [1,2]: f(\alpha) = 0$$

$$f'(x) = 6x^5 - 1. \quad \forall x \in [1,2]: f'(x) > 0 \Rightarrow \text{La racine est unique}$$

$n$	$a$	$b$	$\alpha = \frac{a+b}{2}$	$b-\alpha$	$f(\alpha)$
1	1.0000	2.0000	1.5000	0.5000	8.8990
2	1.0000	1.5000	1.12500	0.2500	1.5647
3	1.0000	1.2500	1.1250	0.1250	-0.0177
4	1.12500	1.2500	1.1875	0.0625	0.6167
5	1.1250	1.1875	1.1562	0.0312	0.2333
6	1.1250	1.1562	1.1406	0.0156	0.0616
7	1.1250	1.1406	1.1328	0.0078	-0.0196
8	1.1328	1.1406	1.1367	0.0039	0.0206
9	1.1328	1.1367	1.1348	0.00195	0.0004
10	1.1360	1.1348	1.1338	0.00098	0.00096

La racine :  $\alpha \approx 1.1338$  avec une erreur  $\leq 0.00098$ .

# Chapitre2

## Interpolation polynomiale.

### 2.1 Introduction:

L'interpolation consiste à connecter des points de données discrets (figure 2.1a) de manière à obtenir des estimations raisonnables entre les points donnés (figure 2.1b et 2.1c), ou de remplacer une fonction par une autre plus simple mais qui coïncide avec la première en un nombre fini de points donnés au départ (figure 2.1d).

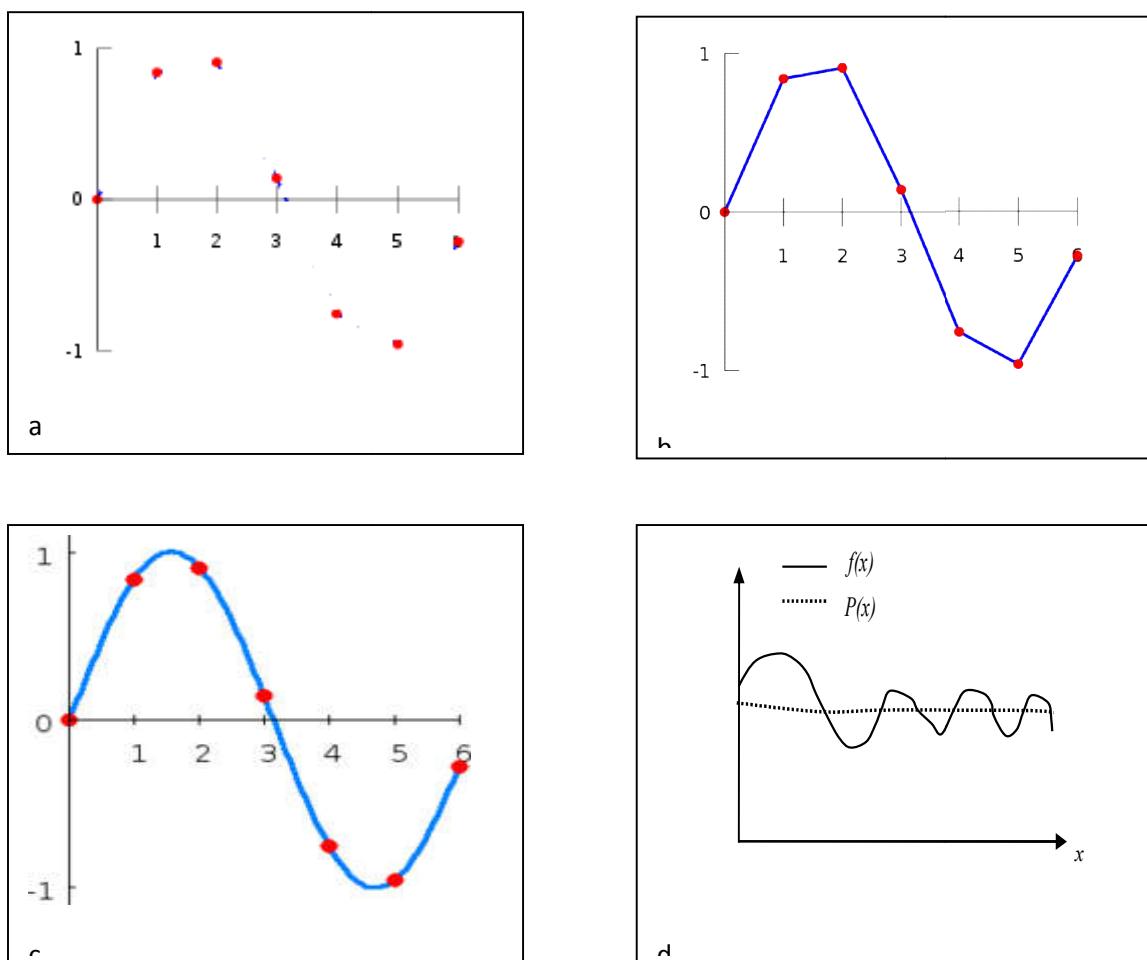


Figure 2.1 Représentation graphique de l'interpolation : a) point discrets, b) interpolation linéaire, c) interpolation polynomiale d) interpolation d'une fonction par un polynôme

Les points discrets peuvent être reliés par une ligne simple (figure 2.1b), donc l'interpolation est dite linéaire. Les points séparés peuvent également être reliés par un polynôme (figure 2.1c), dans ce cas, l'interpolation est appelée interpolation polynomiale. D'une autre manière, le but d'interpolation est de construire une fonction qui sert à donner la relation entre les points où on connaît ses valeurs. Dans le présent chapitre on s'intéresse seulement à l'interpolation polynomiale.....

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dont on connaît  $(n + 1)$  points  $(x_i, f(x_i))$  pour  $i = 0, \dots, n$ . Le but d'interpolation est de déterminer une fonction  $P$  simple à calculer, telle que :  $P(x_i) = f(x_i)$ , avec  $i = 0, \dots, n$ . ( $f(x_i)$  représente la température, pression, débit, ...) pour connaître la valeur de la fonction mesurée en d'autres points dans le domaine, on peut alors représenter la fonction  $f$  par un polynôme.

Les points  $(x_i, f(x_i))$  sont appelés point d'interpolation.

## 2.2 Unicité du polynôme d'interpolation :

### Théorème 1:

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un polynôme d'interpolation  $P_n$  unique est que les points d'interpolation  $x_i$  soient tous distincts.

## 2.3 Interpolation de Lagrange :

### 2.3.1 Polynôme de Lagrange

On appelle polynôme de Lagrange de degré  $n$  basé sur les points d'interpolations  $(x_i, f(x_i))$ , le polynôme unique d'ordre  $n$  qui passe exactement par ses  $(n+1)$  points ( $i=0, \dots, n$ ). Le polynôme unique  $P_n$  est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k).$$

Où :

$L_k(x)$  est le polynôme élémentaire de Lagrange donné par :

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad i = 0, \dots, n$$

Avec  $L_k(x_i)$  a une propriété intéressante

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Il existe un seul polynôme  $P_n$  vérifiant :

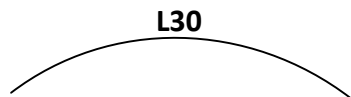
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k).$$

**Exemple:** soit le tableau suivant:

$x_i$	0	1	2	3
$y_i$	1	4	8	14

Trouver le polynôme de Lagrange déterminé par les points  $(x_i, y_i)$ .

$$P_3(x) = L_{30} \cdot f(x_0) + L_{31} \cdot f(x_1) + L_{32} \cdot f(x_2) + L_{33} \cdot f(x_3)$$



$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1)$$

**L32**

**L33**



$$\begin{aligned} & \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_1)} f(x_3) \\ &= \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{(0 - 1)(0 - 2)(0 - 3)} 1 + \frac{x(x - 2)(x - 3)}{(1 - 0)(1 - 2)(1 - 3)} 4 \\ &+ \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 3)8}{(2 - 0)(2 - 1)(2 - 3)} + \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(3 - 0)(3 - 1)(3 - 2)} 14 \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{17}{6} + 1 \end{aligned}$$

### 2.3.2 L'erreur d'interpolation

**Théorème 2:** Erreur d'interpolation de Lagrange

Soit  $f \in C^{n+1}[a, b]$  et  $P_n(x)$  le polynôme d'interpolation de  $f$  sur les points  $(x_i, f(x_i))$  pour  $i = 0, \dots, n$ .

L'erreur d'interpolation  $|E(x)| = |f(x) - P_n(x)|$  est donné par :

$$|E(x)| \leq \frac{M \prod_{i=0}^n |x - x_i|}{(n+1)!} \quad \text{avec : } M = \max\{|f^{n+1}(\xi)|\} \quad \xi \in [a, b]$$

**Exemple3 :**

Soit la fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$

-Trouver le polynôme de Lagrange basé sur les points :

$x_i$	2	2.5	4
$y_i$	0.5	0.4	0.25

- Trouver l'erreur d'interpolation au point  $x = 3$  et l'erreur estimée.

$$P_2(x) = \frac{1}{20}x^2 - \frac{51}{120}x + \frac{23}{20}$$

$$P_2(3) = \frac{1}{20}3^2 - \frac{51}{120}3 + \frac{23}{20} = 0.325$$

$$P(3) = \frac{1}{3} = 0.333$$

$$E = |f(3) - P_2(3)| = 0.006$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$M = 2$$

$$E_n(x) = 0.015$$

## 2.4 Interpolation de Newton:

Le polynôme d'interpolation par la méthode de Newton est donné par

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

On utilise la méthode des différences divisées pour calculer les  $a_k$ .

### 2.4.1. Définition:

Soit  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$  ( $n+1$ ) points d'interpolation de  $[a, b]$

$$\text{et } f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

on pose:  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) on appelle différences divisées d'ordre 1, les relations données par:

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

De même façon, la différence divisée d'ordre 2:

$$\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{x_{i+2} - x_i}$$

$$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$$

2.4.2 Détermination des coefficients de P(x) dans la base de Newton

Les coefficients  $a_k$  sont donnés par le tableau suivant:

x	y	Différences divisées				
		$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
$x_0$	$y_0$					
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_0$				
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_0$			
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_3$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$	
$x_5$	$y_5$	$\Delta y_4$	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_0$

Alors le polynôme d'interpolation est donné par:

$$p_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \Delta^n y_0$$

Exemple 1:

Les différences divisées de la fonction définie par le tableau suivant :

x		Différences divisées			
		Ordre1	Ordre2	Ordre3	Ordre4
0	132.651	81.13			
0.2	148.877	84.87	15.8	1	
0.3	157.464	89.79	16.2	1	0
0.4	1.66.375	95.79	16.7	1	0
0.7	195.112	104.44	17.3		
0.9	216.000				

**Exemple2** : trouver le polynôme de Newton déterminé par

n=2 (0.1), (2.5) et (4.17)

0	$f(x_0) = 1$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$
2	$f(x_1) = 5$	$\frac{1 - 5}{0 - 2} = 2$	$\frac{2 - 6}{0 - 4} = 1$
4	$f(x_1) = 17$	$\frac{5 - 17}{2 - 4} = 6$	

$$p_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = 1 + 2x + x(x - 2) = 1 + x^2$$

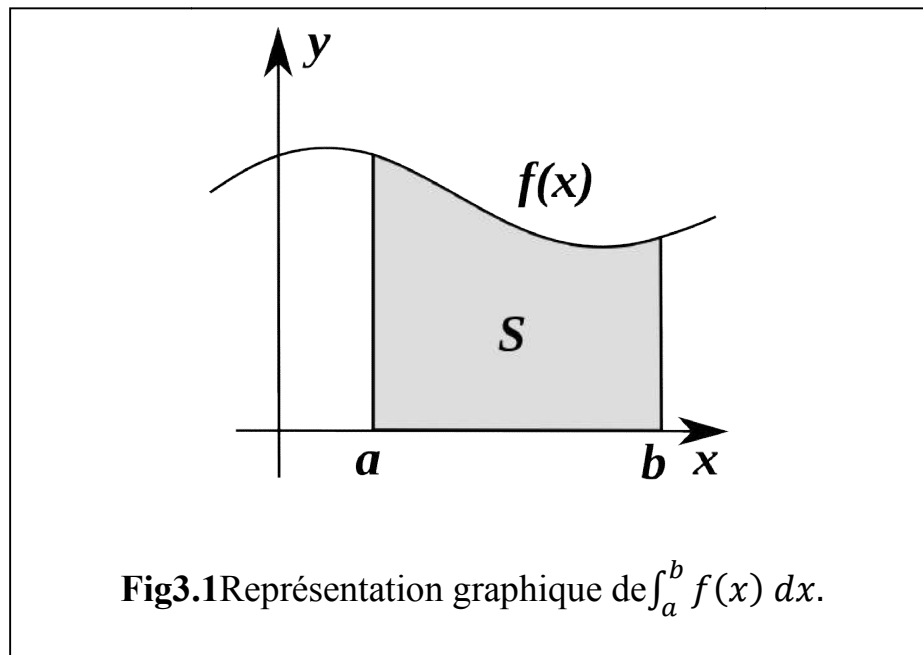


# Chapitre 3

## Intégration numérique.

### 3.1 Introduction :

L'intégration limitée d'une fonction  $f(x)$  sur un domaine délimité par des bornes  $a$  et  $b$  est de faire calculer l'aire  $S$  comprise sous la courbe de  $a$  jusque  $b$  (fig3.1).



Dans certains cas très limités, une telle intégrale peut être calculée analytiquement. Cependant, ce n'est que très rarement possible, et le plus souvent un des cas suivants se présente :

- Le calcul analytique est long et compliqué.
- Le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée qui fait appel à d'autres fonctions elles-mêmes longues à évaluer.
- L'intégrale n'a pas d'expression analytique.

Dans tous ces cas, on préférera calculer numériquement la valeur de l'intégrale.

Aussi lorsque la fonction  $f$  n'est connue que par points, par exemple si elle résulte de mesures physique, on peut l'approcher alors par interpolation, Puis on intègre numériquement l'interpolé.

**3.2 Formules de Newton Cotes :**

On suppose que  $f$  est connue en  $(n + 1)$  points  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  équidistances, tels que :

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad \dots, \quad x_i = x_{i-1} + h = a + (i - 1) h$$

$$\text{et } x_{n+1} = x_n + h = a + nh = b$$

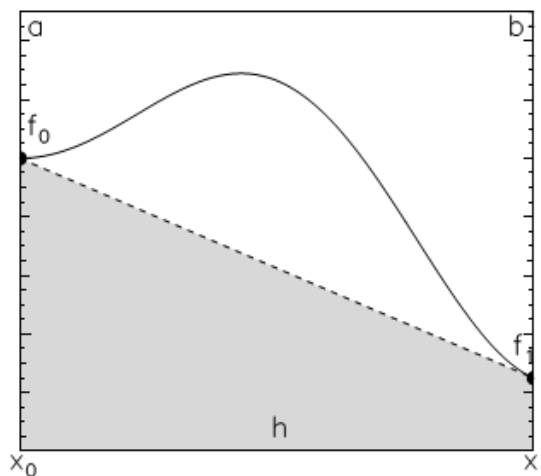
$$\text{On pose : } \int_{x_1 - h}^{x_{n+1} + h} f(x) dx = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) + h \dots \dots \dots (3.1)$$

**Remarque :**

- Si  $h = 1$ , on dit que la formule (3.1) est de type ouvert.
- Si  $h = 0$ , on dit que la formule (3.1) est de type fermé.

**3.2.1 Formule de type fermé:**

**3.2.1.1 Formule du trapèze :**



**Fig 3.2** Représentation de la méthode du trapèze.

Pour approximer la fonction  $f(x)$ , cette méthode utilise le polynôme d'ordre 1 (la droite) qui passe par  $f_0=f(x_0)$  et  $f_1=f(x_1)$

$$P_1(x) = \frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 - f_0}{b - a} \left(x - \frac{a + b}{2}\right)$$

L'intégrale approchée  $I_1 = \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx$  se calcule alors mathématiquement ou géométriquement et donne :

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx = \frac{b - a}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \quad ,$$

Il s'agit de l'aire du trapèze. Cette méthode nécessite deux évaluations de la fonction  $f$  (en  $a$  et en  $b$ ).

L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, on trouve alors pour  $h = b - a$ :

$$E_1 = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi) \quad , \xi \in [x_0, x_1]$$

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx = \frac{(b - a)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$$

### 3.2.1.2 Formule de Simpson :

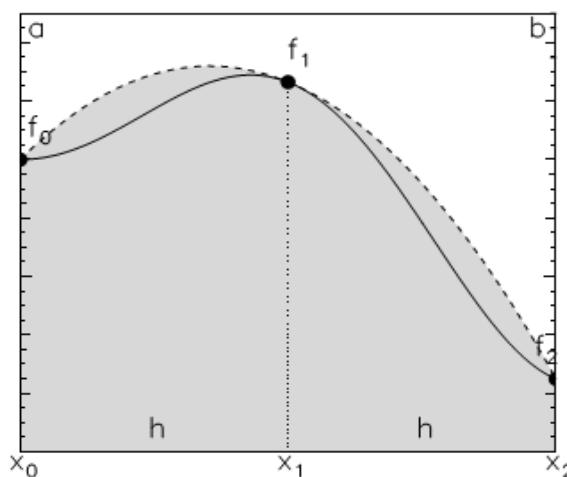


Fig3.3 Représentation de la méthode de Simpson

Pour approximer la fonction  $f$ , cette méthode utilise le polynôme de degré 2 (la parabole) qui passe par les trois points  $f_0=f(x_0) = f(a)$  ,  $f_1=f(x_1 = \frac{a+b}{2})$  et  $f_2=f(x_2) = f(b)$

$$P_2(x) = 2 \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(x_2 - x_0)^2} (x - x_1)^2 + \frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} (x - x_1) + f_1$$

L'intégrale approchée  $I_2 = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx$  se calcule alors simplement et donne :

$$I_2 = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Cette méthode nécessite trois évaluations de la fonction  $f(x)$  en  $x_0 = a$  ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  et  $x_2 = b$

L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor, on trouve alors pour  $h = \frac{b-a}{2}$

$$E_2 = -\frac{h^3}{90} f^{(4)}(\xi) \text{ avec } \xi \in [x_0, x_2]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_1) + 4 f(x_2) + f(x_3)] - \frac{h^3}{90} f^{(4)}(\xi)$$

### 3.2.1.3 Formule de Newton:

$$\int_{x_1}^{x_4} f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_1) + 3 f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}[\xi],$$

$\xi \in [x_1, x_4]$

### 3.2.2 Formule de type ouvert:

#### 3.2.2.1.-Formule des Poncelet:

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = 2h f(x_2) + \frac{h^3}{3} f''(\xi), \quad \xi \in [x_1, x_3]$$

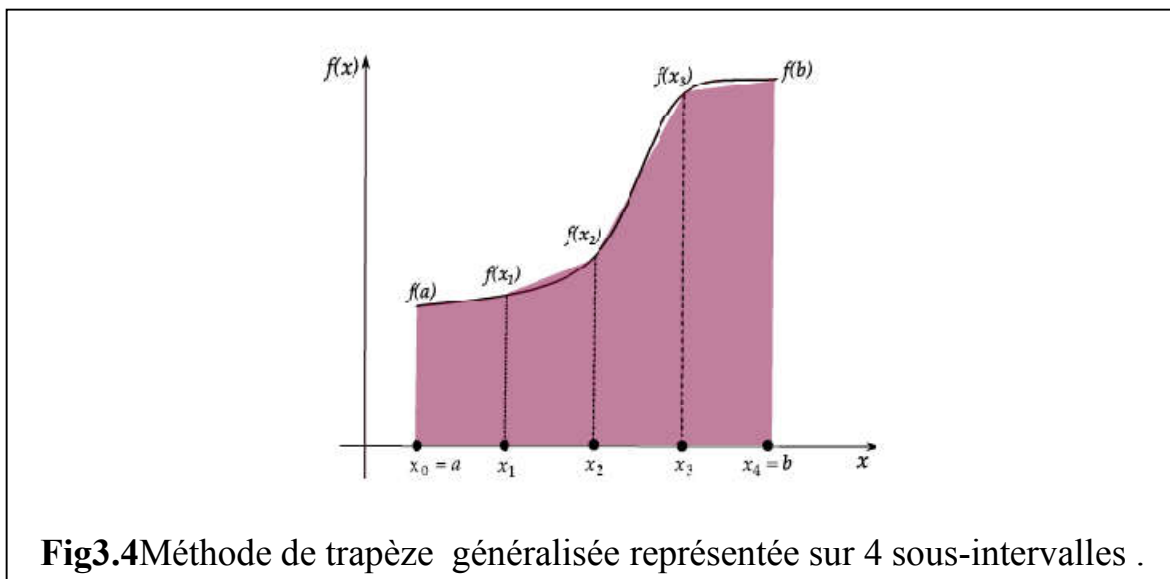
$$\int_{x_1}^{x_4} f(x) dx = \frac{3h}{2} [f(x_2) + f(x_3)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi), \quad \xi \in [x_1, x_4]$$

$$\int_{x_1}^{x_5} f(x) dx = \frac{4h}{3} \left[ 2f(x_2) - f(x_3) + 2f(x_4) \right] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x_1, x_5]$$

### Remarque

Les méthodes de Newton-Cotes simples ne permettent pas d'atteindre des précisions suffisantes sur des intervalles  $[a, b]$  finis et ne sont donc jamais utilisées dans ce cas. Sauf lorsque  $|b - a| \rightarrow 0$ , et elles constituent alors la base élémentaire des méthodes généralisées présentées dans la section suivante.

### 3.3 Méthode de trapèze généralisée:



**Fig3.4** Méthode de trapèze généralisée représentée sur 4 sous-intervalles .

On considère une subdivision de  $[a, b]$  en sous intervalles égaux  $[x_i, x_{i+1}]$

De bornes  $x_i = a + ih, (i = 0, \dots, n), a = x_0, b = x_n$  et  $h = \frac{b-a}{n}$

On suppose connues les valeurs  $f(x_i)$  pour  $i = 0, \dots, n$ .

Sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  on remplace la fonction  $f(x)$  par la droite

$$y = f(x_i) + (x - x_i) \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

L'aire exacte est donc remplacée par l'aire  $T_i$  du trapèze par conséquent en sommant les aires des  $n$  trapèzes de base  $[x_i, x_{i+1}]$ , ( $i = 0, \dots, n$ )

On obtient une approximation  $T_h$  de l'intégrale  $I$  comme  $T_i = \frac{h}{2} [f(x_{i+1}) + f(x_i)]$

$$\text{Alors } I = \int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] = T_h$$

### L'erreur commise par la méthode de trapèze généralisée

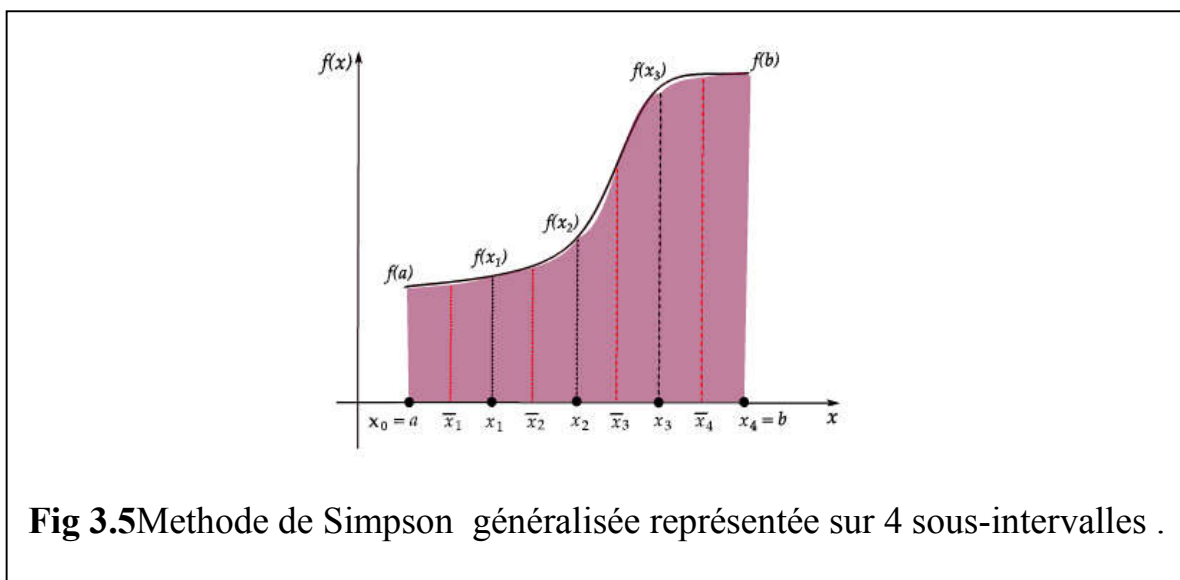
L'erreur  $E_h = I - T_h$  commise par application de cette méthode est donnée par:

$$E_h = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

Donc si  $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(t)|$ .

$$\text{Alors: } |E_h| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

### 3.4 Méthode de Simpson généralisée:



Dans cette méthode on suppose que  $n$  est paire (soit  $n = 2s$ ). Puis on subdivise  $[a, b]$  en  $s$  sous intervalles égaux  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  ( $i = 1, \dots, s-1$ ) de

longueur  $h$ , puis on remplace  $f(x)$  sur chaque intervalle  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  non pas par une droite comme dans les trapèzes, mais par une parabole ayant aux abscisses  $x_{i-1}, x_i$  et  $x_{i+1}$  les mêmes valeurs que  $f$ .

D'autre part la surface  $S_i$ , délimitée par cette parabole, les droites  $x = x_{i-1}, x = x_{i+1}$  et l'axe des abscisses est :

$$S_i = \frac{h}{3} (f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Ceci donne l'approximation de Simpson  $S_h$  de  $I$ , en sommant les aires  $S_i$  pour  $i = 1$  à  $n - 1$ , finalement on obtient :

$$S_h = \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_{2s}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2s-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2s-2}))]$$
 c'est à dire

$$S_h = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + f(x_{2s}) + 4 \sum_{k=1}^{2s-1} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=2}^{2s-2} f(x_{2k}) \right]$$

**L'erreur commise par la méthode de Simpson généralisée**

L'erreur  $E_h = I - S_h$  commise par application de Simpson généralisée est donnée par:

$$E_h = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \quad , \xi \in [a, b]$$

Donc si  $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(t)|$

$$\text{alors } |E_h| \leq \frac{(b-a)5}{180n^4} M_4$$

**Remarque2 :**

En général la méthode de Simpson donne une meilleure approximation que celle des trapèzes car l'erreur commise dans la méthode des trapèzes est

proportionnelle à  $h^2$ , alors que pour Simpson elle est proportionnelle à  $h^4$ , et comme par transformation de la variable d'intégration on peut toujours se ramener de  $[a, b]$  à  $[0, 1]$  et qu'alors  $h \in [0, 1]$  où a donc  $h^4 < h^2$

$$\text{Trapèzes} \rightarrow E \simeq \frac{b-a}{12} M_2 h^2$$

$$\text{Simpson} \rightarrow E \simeq \frac{b-a}{180} M_4 h^4$$

**Exemple :**

Déterminer par la méthode des trapèzes l'intégrale  $I = \int_0^{\pi/2} f(x) dx$

$x$	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

1- Soit T l'approximation de I par la méthode des trapèzes, le pas h est donné

$$\text{par : } h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{\pi/2}{4} = \pi/8$$

$$T = \frac{h}{2} [y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3)]$$

$$= \frac{\pi}{16} [0 + 1 + 2(0.382683 + 0.707107 + 0.92388)] = 0.987116$$

2- Méthode de Simpson:

Soit S l'approximation de I par la méthode de Simpson celle-ci s'écrit :

$$s = \frac{h}{3} [y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2]$$

$$= \frac{\pi}{8} [0 + 1 + 4(0.382683 + 0.92388) + 2 \cdot 0.707107] = 1.000135$$

-Les points d'appui donnés dans cet exemple correspondent à la fonction  $\sin x$  et

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1, \text{ on constate donc que la différence entre S et I est :}$$

$$|s - I| = 0.000135 < |T - I| = 0.012884$$



# Chapitre4

## Résolution des équations différentielle ordinaire

### 4.1 Introduction :

Les équations différentielles sont utilisées dans la modélisation mathématique des phénomènes physiques. Une équation différentielle ordinaire (ODE, *Ordinary Differential Equation*) est une équation reliant une fonction d'une variable réelle et ses dérivées, c'est à dire de la forme suivante :

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

où  $y$  est la fonction inconnue,  $y'$  sa dérivée et  $t$  la variable réelle.

Il existe deux types de problèmes différentiels :

- Conditions initiales (ou problème de **Cauchy**)

données pour une seule valeur  $t_0$  de  $t$ , par exemple  $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$

- Conditions **aux limites** (Problème **aux limites**)

données pour des valeurs distinctes de la variable indépendante  $t$  (par exemple les deux conditions sont alors partagées entre les deux extrémités de l'intervalle:  $y(0)=y_0$  et  $y(T) = y_T$ ). Ce deuxième type de problème correspond à des situations physiques complètement différentes et cela se traduit par des méthodes de résolution numériques complètement différentes.

## 4.2 Le problème de Cauchy :

Soit  $f$  une fonction définie de  $[t_0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Le problème de Cauchy consiste à trouver une fonction  $y : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  solution de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = f(t, y(t)), t \in [t_0, T] \text{ avec } y(t_0) = y_0$$

La condition  $y(t_0) = y_0$  est une condition initiale ou la condition de Cauchy. Si on suppose que la fonction  $f$  est continue par rapport aux deux variables  $t, y$  et que  $f$  est uniformément Lipschitzienne par rapport à  $y$  c'est à dire que

$$\exists L > 0, \forall t \in [t_0, T], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Alors le problème de Cauchy admet une solution unique  $y \in C^1([t_0, T])$

Le problème de Cauchy est un problème d'évolution, c'est à dire à partir de la condition initiale, on peut calculer la solution à l'instant  $t$ .

### Schéma à un pas (méthode à un pas)

Si  $y_{n+1}$  est une fonction de  $t_n$  et  $y_n$  uniquement. Le schéma d'Euler est un schéma à un pas.

Un **Schéma à deux pas** si  $y_{n+1}$  est une fonction de  $(t_n, y_n)$  et de  $(t_{n-1}, y_{n-1})$  uniquement.

Un **Schéma à k pas** si  $y_{n+1}$  est une fonction de  $(t_n, y_n), (t_{n-1}, y_{n-1}), \dots, (t_{n-(k-1)}, y_{n-(k-1)})$ .

Dans les méthodes à un pas, le calcul de  $y_{n+1}$  fait intervenir  $t_n, y_n, h$  que l'on peut écrire sous la forme:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(y_n, t_n, h) \quad (4.1)$$

$$\Phi(y_n, t_n, h) = \sum_{i=1}^q \gamma_i k_i$$

tel que

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(t_n + ah, y_n + bk_1)$$

$$k_3 = hf(t_n + bh, y_n + ck_2)$$

.

.

$$y_{n+1} = y_n + R_1 k_1 + R_2 k_2 + \dots \dots \dots$$

La méthode la plus célèbre est celle d'Euler.

### 4.3 Méthode d'Euler :

Dans cette méthode la fonction  $\Phi(y_n, t_n, h)$  dans la relation (4.1) est en fonction de  $t$  et  $y$  ( $\Phi(y_n, t_n, h) = f(t, y)$ ).

On donne une subdivision de  $I = [t_0, T]$  en  $n$  intervalles de pas  $h$ .

Tel que  $h = t_{n+1} - t_n$ . On notera par  $y_n$  une approximation de  $y(t_n)$ :

Dans le problème de Cauchy, pour  $t = t_n$  on a

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

On approche la dérivée  $y'(t_n)$  en utilisant des schémas de dérivation numérique.

#### 4.3.1 Schéma d'Euler:

La méthode d'Euler consiste à approcher  $y'(t_n)$  par la formule de Taylor comme suit :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + E(h^2)$$

Soit  $y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} + E(h^2) = f(t_n, y(t_n))$

avec  $E(h^2)$  est le reste (considéré négligeable)

et  $y_n$  une approximation de  $y(t_n)$  ( $y_n \approx y(t_n)$ ), le schéma d'Euler s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad \text{avec} \quad y(t_0) = y_0.$$

**Exemple**

Soit l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte (la solution analytique) de cette équation est donnée par

$$y_{\text{exacte}} = e^t$$

$t$	$y$ pour $h=0.2$	$y$ pour $h=0.1$	$y_{\text{exacte}}$
1	2.4883	2.59374	2.71828
2	6.19174	6.7275	7.38905
3	15.407	17.4494	20.0555
4	38.3376	45.2593	54.598

**4.3.2 Interprétation géométrique :**

Le point  $(t_{n+1}, y_{n+1})$  est sur la droite contenant  $(t_n, y_n)$  et de pente

$f(t_n, y_n)$ , ou  $f(t_n, y_n)$  est la pente de la tangente à la courbe. Alors le sens géométrique de la relation d'Euler est donc d'approximer la courbe de  $y(t)$  par sa tangente en  $(t_n, y_n)$ .

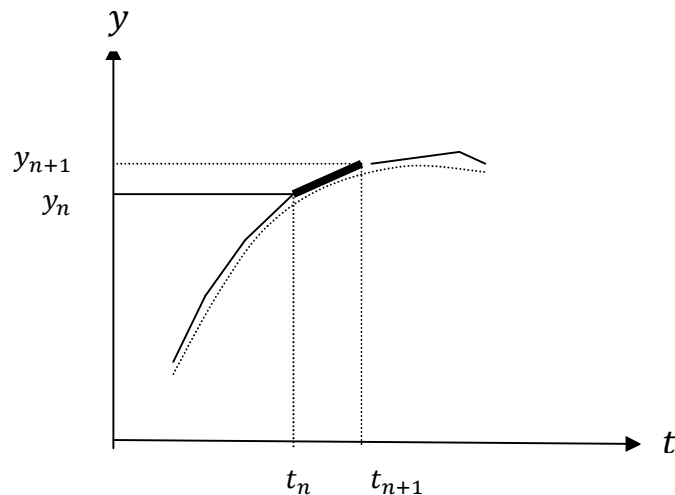


Fig 4.1 Représentation graphique de la méthode d'Euler.

#### Remarque :

La méthode d'Euler converge très lentement, l'erreur est mal contrôlée. On cherche donc des algorithmes plus efficaces.

**4.4 Méthode d'Euler améliorée** (méthode de Heun) ou encore méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 est une autre méthode d'ordre 2. Où on peut améliorer les résultats obtenus avec la méthode d'Euler par la formule suivante :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+1}^*\right)$$

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)$$

Géométriquement, la méthode consiste à remplacer dans la méthode d'Euler la pente de la tangente en  $(t_n, y_n)$  par la valeur corrigée au milieu de l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ .

**Exemple :**

Résoudre le problème de Cauchy précédant par la méthode d'Euler améliorée en prenant un pas d'intégration  $h=0.2$ .

On a :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+1}^*\right)$$

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)$$

Par remplacement dans la formule

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right)$$

Avec :  $f(t, y) = y' = y$  et  $y(0) = 1$

on obtient :

$$y_1 = y(t = 0.2) = 1.22$$

$$y_2 = y(t = 0.4) = 1.4884$$

$$y_3 = y(t = 0.6) = 1.8115$$

$$y_4 = y(t = 0.8) = 2.7022$$

**4.5 Méthodes de Runge- Kutta**

Pour calculer une approximation de la solution à l'instant  $t_{n+1}$  en fonction de

celle de  $t_n$ , la méthode de Runge-Kutta utilise  $q$  solutions intermédiaires en fonction de  $y_n$ . La méthode de Runge-Kutta de rang  $q$  sous sa forme générale s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(y_n, t_n, h)$$

où  $\Phi$  prend la forme particulière suivante

$$\Phi(y_n, t_n, h) = \sum_{i=1}^q \gamma_i k_i$$

On utilise le développement de Taylor .

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + \dots$$

Et par comparaison avec la formule (4.1) on trouve les formules de Runge-Kutta (d'ordre 2 ( $K_1$  et  $K_2$ ), d'ordre 3 ( $K_1, K_2$  et  $K_3$ ),.....)

#### 4.5.1 Runge-Kutta d'ordre 4

Par le développement de Taylor au 4<sup>ème</sup> degré on arrive à la formule de

Runge-Kutta d'ordre 4 suivante :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$$

#### Exemple

Résoudre le problème de Cauchy précédent par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 en prenant un pas d'intégration  $h=0.2$ .

On a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec

$$k_1 = hf(t_n, y_n) = 0.2$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) = 0.22$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) = 0.222$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) = 0.2444$$

$$\mathbf{y_1 = y(t = 0.2) = 1.2214}$$

$$k_1 = 0.2442$$

$$k_2 = 0.2687$$

$$k_3 = 0.2711$$

$$k_4 = 0.2985$$

$$\mathbf{y_2 = y(t = 0.4) = 1.4918}$$

$$k_1 = 0.2983$$

$$k_2 = 0.3281$$

$$k_3 = 0.3311$$

$$k_4 = 0.3645$$

$$\mathbf{y_3 = y(t = 0.6) = 1.8220}$$

$$k_1 = 0.3764$$

$$k_2 = 0.4020$$

$$k_3 = 0.4046$$

$$k_4 = 0.4453$$

$$\mathbf{y_4 = y(t = 0.8) = 2.2278}$$

$$k_1 = 0.4455$$

$$k_2 = 0.4901$$

$$k_3 = 0.4945$$



$$k_4 = 0.5444$$

$$y_5 = y(t = 1) = 2.72099$$

**Remarque :**

On observe que la solution obtenue par Runge- Kutta d'ordre 4 est plus proche à la solution exacte que les autres méthodes.

## Chapitre 5

# Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes directes

### 5.1 Introduction :

La résolution des systèmes d'équations linéaires modélisent la majorité des phénomènes physiques tels que :

- Tension dans une structure
- Flot dans un réseau hydraulique
- Mélange de produits chimiques
- Vibration d'un système mécanique
- Élasticité
- Potentiel dans un circuit électrique
- Transfert de chaleur
- Réduction d'équations différentielles.

### 5.2 Généralités sur les matrices :

#### 5.2.1 Définition:

Une matrice d'éléments de  $\mathbb{R}$  est un tableau à deux dimensions composé de  $m$  lignes et  $n$  colonnes. L'ensemble des matrices de  $\mathbb{R}$  de dimension  $m, n$  est noté  $M_{m,n}$  et forme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

#### 5.2.2 Propriétés :

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices :

- $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m,n}$   $1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$
- $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m,n}$
- On appelle transposé de  $A$  la matrice  $A^t$  telle que :

$$[A^t]_{ij} = a_{ji} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

- Soient  $A \in M_{m,n}$  et  $B \in M_{n,p}$  alors le produit  $C \in M_{m,p}$  est donné par la formule suivante.  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$   $1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$
- $AB \neq BA$
- $A(BC) = (AB)C = ABC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- On dit qu'une matrice  $A \in M_{n,n}$  est inversible si et seulement si  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- Une matrice  $A$  est dite symétrique si  $A^t = A$  (autrement dit si  $a_{ij} = a_{ji}$ ) et antisymétrique si  $A^t = -A$
- On dit que  $A$  est orthogonale si :  $A^{-1} = A^t$
- Une matrice  $A$  est dite triangulaire inférieure si  $a_{ij} = 0$  pour  $j > i$
- Une matrice  $B$  est dite triangulaire supérieure si  $b_{ij} = 0$  pour  $i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

**5.3 Systèmes d'équations:**

On appelle système de  $m$  équations à  $n$  inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la famille d'équations.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Que l'on peut mettre sous la forme  $Ax = b$

Où:  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  est une matrice donnée par ses éléments  $(a_{ij})$

$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  et  $x$  le vecteur inconnu de composantes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$



**5.4.1.1 Résolution d'un système triangulaire supérieur :**

Si le système  $Ax = b$  est triangulaire supérieure, il a la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

**5.4.1.2 Théorème (unicité de la solution):**

Soit le système triangulaire supérieur  $Ax = b$  où  $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$  est une matrice carrée et  $b \in \mathbb{R}^n$ , si  $a_{kk} \neq 0 \forall k \in [1, n]$ .

Alors le système  $Ax = b$  admet une solution unique  $x$  donnée par

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right] \quad i = \overline{n, 1}$$

Si la matrice  $A$  est triangulaire inférieure le système  $Ax = b$  s'écrit comme suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i a_{ij}x_j &= b_i & i &= \overline{1, n} \\ a_{ij} &= 0 & \text{si } j &> i \end{aligned}$$

Alors :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \right] \quad i = \overline{1, n}$$

**5.4.1.3 Etapes de la méthode de Gauss**

**Principe :** transformation de la matrice  $A$  en une matrice triangulaire supérieure.

Dans le système (5.1) on regroupe  $A$  et  $b$  dans une seule matrice  $[A: b]$ .

et  $[A: b] \xrightarrow{\text{transformation}} [A^{(n)}: b^{(n)}]$  Ou  $A^{(n)}$  est une matrice triangulaire supérieure équivalente à  $A$ .

où  $A^{(1)}x = b^{(1)} \dots \dots \dots (2)$

Avec :  $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = A$  ,  $b^{(1)} = b_j^{(1)} = b$

$$\text{cest - à - dire: } [A: b] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \cdot b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \cdot b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & \dots & a_{nn}^{(1)} \cdot b_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \dots \\ \dots \\ L_n^{(1)} \end{matrix}$$

Après l'élimination de Gauss on obtient la matrice

$$[A^{(n)}: b^{(n)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(n)} \cdot b_1^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(n)} \cdot b_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(1)} \cdot b_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1^{(n)} \\ L_2^{(n)} \\ \dots \\ \dots \\ L_n^{(n)} \end{matrix}$$

Avec  $L_i^{(j)}$  représente la ligne  $i$  à l'étape  $j$ .

Enfin on résout le système  $A^{(n)}x = b^{(n)}$  dont  $x$  est la solution exacte du système  $Ax = b$ .

On procède de la manière suivante :

**Etape1 :** On pose  $A = A^{(1)}$  et  $b = b^{(1)}$

Si  $a_{11}^{(1)} \neq 0$  on fait les opérations suivantes :

$$L_1 \text{ est maintenue} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$[A^{(2)} : b^{(2)}] = \left[ \begin{array}{cccccc} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(2)} \cdot b_1^{(2)} & L_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(2)} \cdot b_2^{(2)} & L_2^{(2)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & \dots & a_{nn}^{(2)} \cdot b_n^{(2)} & L_n^{(2)} \end{array} \right]$$

Et ainsi de suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_k^{(k+1)} = L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \end{array} \right.$$

**Résolution de  $A^{(n)}x = b^{(n)}$**

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{(n)}x = b^{(n)} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}^{(n)}x_1 + a_{12}^{(n)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(n)}x_n = b_1^n \\ \dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^n \end{cases}$$

On commence par déterminer  $x_n$  puis  $x_{n-1} \dots$  (résolution par retour en arrière).

**Exemple :**

Trouver la solution du système suivant par la méthode de gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -3 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

**L'étape 1 : élimination de  $x_1$**

$$L_2^{(2)} \rightarrow L_2^{(1)} - 2L_1^{(1)}$$

$$L_3^{(2)} \rightarrow L_3^{(1)} - 3L_1^{(1)}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & +3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -3 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

L'étape 2 : élimination de  $x_2$  :

$$L_3^{(3)} \rightarrow L_3^{(2)} - \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} L_2^{(2)}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & +3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \vdots & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

On remplace inversement on obtient

$$\frac{15}{2} x_3 = \frac{15}{2} \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-4 x_2 - 6x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 5.4.2 Méthode de Cholesky :

Pour résoudre un système d'équation linéaire  $A x = b$  il faut que la matrice  $A$  soit symétrique définie positive.

#### 5.3.1. Définition :

Une matrice est dite définie positive si et seulement si pour tout

$$x \in \mathbb{R}^n \neq 0 : x^t A x > 0$$

Condition suffisante pour que  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ & & \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$



A est définie positive si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs

( $\det A_{(k)}_{1 \leq k \leq n} > 0$ ) c'est à dire :

$$a_{11} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

.

.

.

$$\det A > 0$$

### 5.3.2 Décomposition de la matrice A :

Une matrice A symétrique, définie positive si et seulement s'il existe une matrice L triangulaire inférieure inversible telle que  $A = L L^t$

### 5.3.3 Algorithme :

Soit A une matrice symétrique, définie positive pour résoudre le système  $Ax = b$  il faut résoudre :

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

Construire la matrice  $L = (l_{ij})$  triangulaire inférieure telle que

$$A = L L^t \text{ où } A = (a_{ij}) \text{ et } a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{jk} \quad j \leq i$$

$$\text{Donc : } a_{11} = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$\text{et } a_{i1} = l_{i1} l_{11} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}} \quad i = 2, n$$

La construction de la matrice L se fait colonne par colonne

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$\text{Et : } a_{ih} = \sum_{j=1}^h l_{ij} l_{hj} = l_{ih} l_{hh} + \sum_{j=1}^{h-1} l_{ij} l_{hj}$$

$$\text{Donc : } l_{ih} = (a_{ih} - \sum_{j=1}^{h-1} l_{ij} l_{hj}) / l_{hh}$$

**Exemple 1:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$x^t A x = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 8x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad x = 0$$

Alors A est définie positive.

**Exemple 2 :**

$$\text{Soit la matrice } A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 15 & 7 & 42 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et le vecteur } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Condition de convergence (méthode de Colesky)  $\Rightarrow$  A symétrique définie positive.

- A est symétrique

- Est-ce- que A est définie positive

$$\Delta_1 = 9 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 9 = 36 > 0$$

$\Delta_3$ 

$$\begin{aligned}
= \det A &= 9 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 42 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 15 & 42 \end{vmatrix} + 15 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 7 \end{vmatrix} = 9(161) - 3(21) + 15(54) \\
&= 1449 - 63 - 810 = 576 > 0
\end{aligned}$$

Alors A est symétrique définie positive.

Décomposition de A :

$$\begin{aligned}
A = L L^t &= \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \ell_{11}^2 & \ell_{11}\ell_{21} & \ell_{11}\ell_{31} \\ \ell_{21}\ell_{11} & \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 & \ell_{21}\ell_{31} + \ell_{22}\ell_{32} \\ \ell_{31}\ell_{11} & \ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} & \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**La 1<sup>ère</sup> colonne :**

$$\ell_{11}^2 = 9 \Rightarrow \ell_{11} = 3$$

$$\ell_{21}\ell_{11} = 3 \Rightarrow \ell_{21} = 1$$

$$\ell_{31}\ell_{11} = 15 \Rightarrow \ell_{31} = 5$$

**La 2<sup>ème</sup> colonne :**

$$\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = 5 \Rightarrow \ell_{22} = 2$$

$$\ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} = 7 \Rightarrow \ell_{32} = 1$$

**La 3<sup>ème</sup> colonne :**

$$\ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = 42 \quad \ell_{33} = 4$$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

$$L^t x = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Enfin  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

**Remarque :**

On a  $A_{\ell} = L_{\ell} L_{\ell}^t$  où  $L_{\ell}$  sont les matrices composées des  $\ell$  premières lignes et  $\ell$  premières colonnes de A et de L

$\det A_{\ell} = (l_{11} \cdot l_{22} \cdot l_{33} \dots \dots \dots l_{\ell\ell})^2 = l_{11}^2 \cdot l_{22}^2 \cdot l_{33}^2 \dots \dots \dots l_{\ell\ell}^2 > 0$  est symétrique définie positive).

- La méthode de Colesky permet de calculer  $\det A$  par :  $\det A = \prod_{i=1}^n \ell_{ii}^2$ .

**5.4.3 Méthode de Crout-Dolittle ou LU**

Cette méthode consiste à factoriser la matrice A pleine en deux matrices triangulaires L et U, tel que L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont égaux à l'unité ( $u_{ii} = 1$ ).

On a donc  $A x = b$  et  $A=LU$  donc  $LU x = b$ , on pose  $U x = y$  (y vecteur inconnu), cela donne :

$$\begin{cases} Ly = B \\ Ux = y \end{cases}$$

Le système  $Ax=b$  est décomposé en deux systèmes triangulaires faciles à résoudre. Le système à matrice triangulaire supérieure est résolu par substitution directe, celui à matrice triangulaire inférieure par substitution inverse.

**5.4.3.1 Détermination des matrices L et U**

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments de chaque matrice sont donnés par :

$$l_{ki} = a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj} u_{ji}$$

Avec :  $i=2,3,\dots,n$  et  $k=i,i+1,\dots,n$

$$u_{ik} = \frac{(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk})}{l_{ii}}$$

**Exemple :**

Soit  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$  et  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

On applique l'algorithme de Crout et Doolittle pour résoudre le système  $AX=b$ .

On cherche  $L = \begin{bmatrix} l_{12} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$  et  $U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  tel que  $A=LU$

-On identifie la première colonne de A et la première colonne de LU, cela permet d'obtenir la première colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ -2 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- On compare la première ligne de A avec la première ligne de LU, cela permet d'obtenir la première ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ -2 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- On compare la deuxième colonne de A avec la deuxième colonne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- On compare la deuxième ligne de A avec la deuxième ligne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- On compare la troisième colonne de A avec la troisième colonne de LU, cela permet d'obtenir la troisième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Puis on remplace dans

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = Y \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Chapitre 6

# Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes indirectes.

### 6.1 Introduction:

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les méthodes directes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires sont efficaces pour obtenir une solution exacte. Par contre, si le système est d'ordre plus élevé, l'obtention de la solution par ces méthodes nécessite un grand nombre d'opérations.

Les méthodes indirectes (méthodes itératives) sont très faciles pour résoudre les systèmes d'équations d'ordre plus élevé. Ce chapitre donne le principe de ces méthodes et illustre l'utilisation de quelques méthodes itératives pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

### 6.2 Principe des méthodes itératives :

Le principe des méthodes itératives est de construire une suite de vecteur

$(x)^{(h)}_{h=1, \dots, n}$  qui tend vers un vecteur  $\bar{x}$  solution exacte de  $Ax = b$

souvent, on part d'une approximation  $x^{(0)}$  de  $x$ .

$$x^{(0)} = (x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, \dots, x_4^{(0)})^t$$

#### 6.2.1 Procédure

Au départ, le système que l'on cherche à résoudre est donné par ;

$$Ax = b \dots \dots \dots (6.1)$$

on décompose la matrice  $A$  en deux matrices comme suivant :

$$A = M - N$$

Par remplacement le système s'écrit

$$Mx = Nx + b \dots \dots \dots (6.2)$$



à partir du vecteur initial  $x^{(0)}$ .

Où obtient la solution :

$$x^{(1)} = M^{-1}N x^{(0)} + M^{-1}b \dots \dots \dots (6.3)$$

Cette étape est dite la première itération.

On utilise le vecteur  $x^{(1)}$  comme une solution initiale pour trouver

$$x^{(2)} = M^{-1}N x^{(1)} + M^{-1}b \dots \dots \dots (6.4),$$

Donc, c'est la deuxième itération.

Et ainsi de suite jusqu'à l'étape  $h$  où la solution approximative est donnée par :

$$x^{(h+1)} = M^{-1}N x^{(h)} + M^{-1}b \dots \dots \dots (6.5)$$

**6.2.2 Décomposition de la matrice A :**

$d_{ii} = -a_{ii} \quad i = \overline{1, n}$       D diagonal de la matrice

$l_{ij} = -a_{ij} \quad i > j$       L matrice triangulaire supérieure

$l_{ij} = 0 \quad i \leq j$

$u_{ij} = -a_{ij} \quad U$  matrice triangulaire inférieure

$u_{ij} = 0 \quad j \leq i$

**6.3 Méthode de Jaccobi :**

**6.3.1 Principe de la méthode de Jaccobi**

Considérons le système

$$Ax=B$$

Suivons les étapes mentionnées dans le paragraphe précédent,

$$A=M-N$$

Dans ce cas

$$M=D \quad \text{et} \quad N=L+U$$

$$x^{(h+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(h)} + D^{-1}b$$

Alors la relation itérative de Jacobi est la suivante

$$\begin{cases} x_1^{(h+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(h)} - a_{13}x_3^{(h)} - \dots - a_{1n} x_n^{(h)}) / a_{11} \\ x_2^{(h+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(h)} - a_{23}x_3^{(h)} - \dots - a_{2n} x_n^{(h)}) / a_{22} \\ x_n^{(h+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(h)} - a_{n2}x_2^{(h)} - \dots - a_{nn-1} x_{n-1}^{(h)}) / a_{nn} \end{cases}$$

Avec  $a_{ii} \neq 0$

### 6.2.2 Condition de la convergence

La condition suffisante pour la convergence de cette méthode est

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{diagonale dominante})$$

Ou arrive à la solution lorsqu'on obtient :

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}| \leq \varepsilon. \quad (\text{Erreur absolue})$$

Ou bien lorsque :

$$\frac{|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}|}{|x_i^{(n)}|} \leq \varepsilon. \quad (\text{Erreur relative précision})$$

#### Exemple :

Résoudre le système suivant par la méthode de Jaccobi

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k)} = \frac{x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{2} \\ x_2^{(k)} = \frac{-x_1^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)}}{3} \\ x_3^{(k)} = \frac{-3x_1^{(k-1)^3} - 2x_2^{(k-1)} - 4}{5} \end{array} \right.$$

On propose la solution initiale

$$x^{(0)} = (0.0.0)^t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} = 0.5 \\ x_2^{(1)} = 0 \\ x_3^{(1)} = 0.8 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^{(2)} = 0.9 \\ x_2^{(2)} = 1.9 \\ x_3^{(2)} = 1.1 \end{array} \right.$$

### 6.4 Méthode de Gauss-Seidel :

Dans ce cas

$$M=D-L$$

$$x^{(h+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(h)} + (D - L)^{-1}b$$

$$(D-L) x^{(h+1)} = Ux^{(h)} + b$$

$$(D-L) x^{(h+1)} = Ux^{(h)} + b$$

$$x^{h+1} = D^{-1}Lx^{(h+1)} + d^{-1}Ux^{(h)} + D^{-1}b$$

Alors la relation itérative de Gauss-Seidel est la suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(h+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(h)} - a_{13}x_3^{(h)} - \dots - a_{1n} x_n^{(h)})/a_{11} \\ x_2^{(h+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(h+1)} - a_{23}x_3^{(h)} - \dots - a_{2n} x_n^{(h)})/a_{22} \\ x_n^{(h+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(h+1)} - a_{n2}x_2^{(h+1)} - \dots - a_{nn-1} x_{n-1}^{(h+1)})/a_{nn} \end{array} \right.$$

Avec  $a_{ii} \neq 0$

**Remarque :**

Cette méthode a la même condition de convergence que la méthode de Jacobi.

**Exemple**

La solution du système précédent par la méthode de Gauss-séidel est:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)} - 1}{2} \\ x_2^{(k)} = \frac{-x_1^{(k)} - 3x_3^{(k-1)}}{3} \\ x_3^{(k)} = \frac{-3x_1^{(k)3} - 2x_2^{(k)} - 4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -1/2 \\ x_2^{(1)} = 1/6 \\ x_3^{(1)} = 1/6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(2)} = -1/2 \\ x_2^{(2)} = 0 \\ x_3^{(2)} = -1/2 \end{cases}$$

## Bibliographies

- 1-Franck Jedrzejewski, Introduction aux méthodes numériques Deuxième édition, Springer, 2005.
- 2- M.A. Aziz Alaoui et C. Bertelle, Méthodes numériques appliquées, France 2002.
- 3- Raphaèle Herbin, Cours d'Analyse numérique, Université Aix Marseille 1, 2005.
- 4- Mazen SAAD, Analyse numérique, Ecole Centrale de Nantes, 2011.
- 5- A.Boutayeb et M.Lamilili, Cours Analyse numérique.
- 6- J-L.Maltret, Aide-mémoire Analyse Numérique ,Octobre 2001.
- 7- D.Pastre, Méthodes numériques ,Université René Descartes, 2003.
- 8- Takéo Takahashi ,Analyse Numérique, Ecole des mines de Nancy, 2013.
- 9- Gloria Faccanoni, Analyse numérique, 2009.
- 10-Brian Stout, Méthodes de résolutions des EDO, Université de Provence, Marseille,France,2007.

