الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie | Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: **Mathématiques**
Spécialité **: Mathématiques Fondamentales**

La Mesure de Mahler et Log-sinus

Préparé par :
Amiour Amira
Boumezbeur Meroua

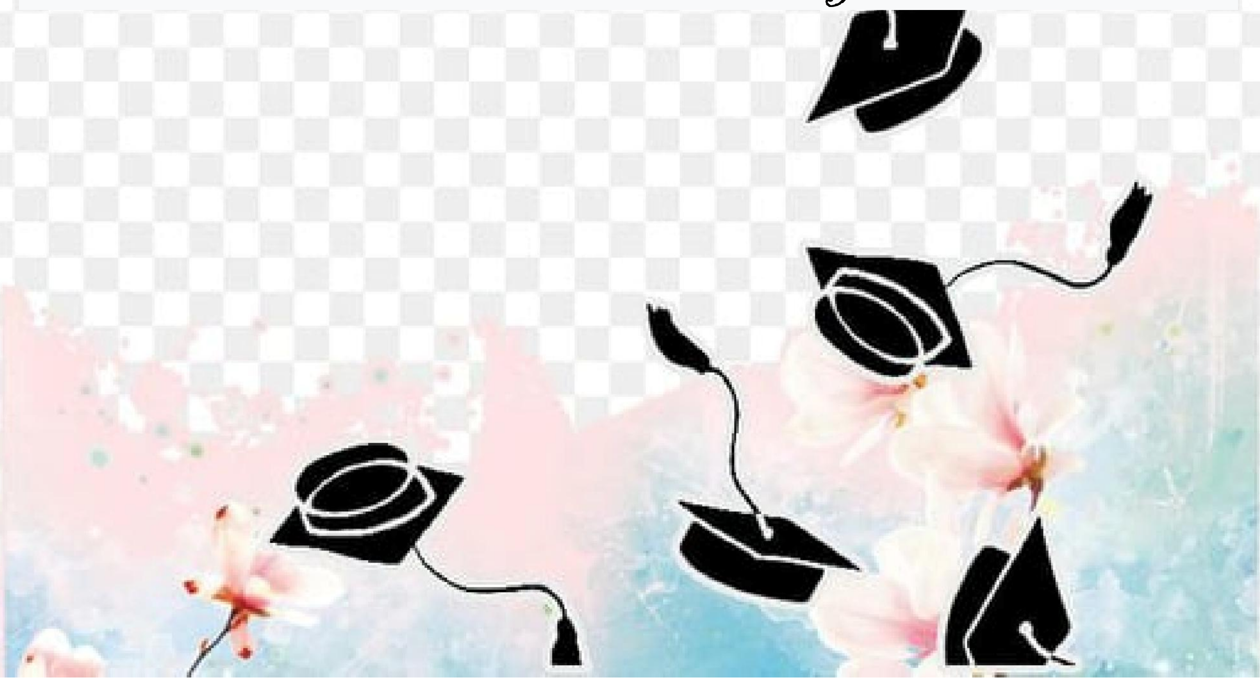
Devant le jury:

Mr. Akrour Youssouf	(M.A.A)	ENS, Constantine	Président
Mr. Khalfaoui Mouhamed	(M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Mr. Rihane Salah Eddine	(M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

Dédicace

Emue jusqu'aux larmes les mots me manquent pour exprimer.et traduire la gratitude qui m'anime et la reconnaissance que je voue à tout ma famille : mon papa, ma maman parfaite ; mes frère : lakhder ,Amdjed , yasser
Et ma sœur : Iman pour avoir contribuer pleinement a mon soutien moral et leur assistance dans les moments difficiles.
Je leur dédie dans ce travail .et n'omettrai pas de remercier amplement mes amies , mon encadreur et les membres du jury



DEDICACE

Je dédie ce travail :A ma chère mère, A mon chère père qui n'ont jamais cessé de formuler des prière a mon égard de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectif. A mes très chers Hamza Amour et Isslam

Et mes belles sœurs Meriem, Manel et Ikram pour ses soutiens morals et leurs conseils précieux tout au long de mes études .

A mon cher Zakaria, qui m'aidé et supporté dans les moments difficiles,

A ma chère binôme Meroua, pour son soutien moral ,sa patience et sa compréhension tout au long de se travail.

A mes chères ami(e)s et a toute ma famil[illegible]ur leurs indéfectible soutiens et leurs patiences infinies

Remerciement

Nous remercions Dieu tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté et la force pour mener ce travail à terme

Tout d'abord toute notre reconnaissance à notre encadreur de mémoire

Mrc :KHalfaoui. Mouhamed

qui a bien voulu diriger ce travail, Pour sa présence, son aide dans cette recherche, nous ne peux que vous exprimer notre gratitude et notre profond respect.

A vous les membres de jury

Pour avoir bien voulu examiner ce modeste travail.

Nous présentons notre vifs remerciements à ceux qui notre ont aidé de prêt ou de loin à l'élaboration de ce travail, notre remerciements les plus sincères à notre et tous le Corps professoral et administratif de l'institut des science et de la technologie.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans ce mémoire,nous serons concernés sur l'évaluation de mesure de Mahler logarithmique par des intégrales de Log-sinus. Ces évaluations sont utilisé par les physiciens [15] : par exemple dans des travaux récents sur ϵ-expansion de divers diagrammes de Feynman dans le calcul des termes supérieurs dans ϵ-expansion, [10] [16], [11],[13],[17]. Des résultats particulier sont les intégrales Log-sinus aux valeurs $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$. Aussi les intégrales Log-sinus apparaissent également dans de nombreux paramètres de théorie et d'analyse des nombres : classes d'inverse les sommes binomiaux peuvent être exprimées en termes des intégrales Log-sinus,[12],[3].La mesure de Mahler que l'on va étudier dans ce mémoire trouve son origine en théorie des nombres mais apparaît également dans de nombreux domaines en plein développement. L'étude des petites valeurs prises par les mesures de Mahler, c'est-à-dire des valeurs proches de 1, est essentielle pour de nombreuses questions mathématiques. Le point de départ de l'étude des petites mesures de Mahler est le théorème démontré par Kronecker : si α est un entier algébrique tel que tous ses conjugués de Galois sont de module inférieur à 1, alors c'est une racine de l'unité. La preuve á été publiée dans [19],et se trouve aussi dans [29].Dans l'optique de résoudre la conjecture de Lehmer suivant : Il existe un nombre positif η avec, si $\alpha \neq 0$ un nombre algébrique (non racine de l'unité), alors [23]

$$M(\alpha) \geqslant 1 + \eta,$$

les mathématiciens développant des liens entre la mesure de Mahler et plusieurs domaines des mathématiques que la théorie des nombres, et les courbes elliptiques. Dans ce mémoire, on va étudier la possibilité de trouver une formulation du mesure de Mahler logarithmique d'une famille de polynômes P_k, avec k dans $\mathbb{Z}$, par des intégrales Log-sinus pour des valeurs particulier de k.

CHAPITRE

1

GÉNÉRALITÉS SUE MESURE DE MAHLER

Dans ce chapitre ,Nous exprimons des généralités sur la mesure de Mahler logarithmique,un rappel sur les courbes elliptiques pour motionner les résultats important de [?] et sa célèbre conjecture.

1.1 Mesure de Mahler logarithmique

Définition 1.1. *[15]*

Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ un polynôme à n variables .Sa ***Mesure de Mahler logarithmique*** *est définie par :*

$$m(P) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log|P(x_1, \ldots, x_n)| \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n}; \tag{1.1}$$

où $\mathbb{T}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, |z_1| = \cdots = |z_n| = 1\}$ est le tore unité.

Remarque 1.2.

On peut définir la Mesure de Mahler logarithmique grâce à un changement de variable $x_k = e^{2\pi i\theta_k}$

$$m(P) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log|P(e^{2\pi i\theta_1}, \cdots, e^{2\pi i\theta_n})| \frac{2\pi i d\theta_1}{e^{2\pi i\theta_1}} \cdots \frac{2\pi i d\theta_n}{e^{2\pi i\theta_n}}.$$

Pour n=1 :

$$m(P) = \int_0^1 \log \left| P\left(e^{2\pi i\theta}\right) \right| d\theta. \tag{1.2}$$

Propriétés 1.3.

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$,alors la Mesure de Mahler logarithmique de produit de ces deux polynômes est égale a la somme des mesures de Mahler logarithmique de ces deux polynômes ; C'est-à-dire :

$$m(PQ) = m(P) + (Q).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} m(P) + m(Q) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log|P| \frac{dx_1}{x_1} \ldots \frac{dx_n}{x_n} + \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log|Q| \frac{dx_1}{x_1} \ldots \frac{dx_n}{x_n} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log|P| + \log|Q| \frac{dx_1}{x_1} \ldots \frac{dx_n}{x_n} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log|PQ| \frac{dx_1}{x_1} \ldots \frac{dx_n}{x_n} \\ &= m(PQ). \end{aligned}$$

□

Définition 1.4. *[3]*

*La Mesure de Mahler est définie par l'exponentielle de la mesure de Mahler logarithmique notée $M(P)$ c'est-ã-dire [**?**] :*

$$M(P) = \exp(m(P)). \tag{1.3}$$

Propriétés 1.5.

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$,alors la mesure de Mahler de produit de ces deux polynômes est égale à le produit des mesures de Mahler de ces deux polynômes. C'est-à-dire :

$$M(PQ) = M(P)M(Q).$$

Proposition 1.6. *(Formule de Jensen)[22]*

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque unité vérifiant $f(0) \neq 0$ si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ designe les zéros de $f(z)$ dans $z, |z| \leq 1$. comptés avec leurs multiplicités alors :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| d\theta = \log|f(0)| - \sum_{k=1}^{n} \log|\alpha_k|. \tag{1.4}$$

Remarque 1.7.

Si P un polynôme de degré d avec un seul variable s'écrit sous la forme suivante :

on a :$a_0 \neq 0$,

$$P(x) = a_0 \prod_{k=1}^{d} (x - \alpha_k), \tag{1.5}$$

alors :

$$m(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log |P(x)| \frac{dx}{x} = \log |a_0| + \sum_{k=1}^{d} \log(\max(|\alpha_k|, 1)). \tag{1.6}$$

Preuve.

Soit P un polynôme de degré d a coefficients dans $\mathbb{C}^*$ tel que :

$$P(x) = a_0 \prod_{k=1}^{d} (x - \alpha_k),$$

alors

$$\begin{aligned} m(P) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log |P(x)| \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log \left| a_0 \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k) \right| \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

alors D'après le changement de variable $x = e^{i\theta}$ alors :

$$\begin{aligned} m(P) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \log \left| P\left(e^{i\theta}\right) \right| \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| P\left(e^{i\theta}\right) \right| d\theta. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Jensen (1.4) on obtient :

$$\begin{aligned} m(P) = \log |P(0)| - \sum_{k=j+1}^{d} \log |\alpha_k| \\ &= \log \left| a_0 \prod_{k=1}^{d} (-\alpha_k) \right| - \sum_{k=j+1}^{d} \log \left| \alpha_k \right| \\ &= \log |a_0| + \sum_{k=1}^{d} \log |\alpha_k| - \left(\sum_{k=1}^{j} \log |\alpha_k| - \sum_{k=j+1}^{d} \log |\alpha_k| \right) \\ &= \log |a_0| + \sum_{k=j+1}^{d} \log |\alpha_k| \end{aligned} \tag{1.7}$$

avec $\begin{cases} |\alpha_k| \leq 1 \text{ si } k \leq j \\ |\alpha_k| \geq 1 \text{ si } k \geq j+1 \end{cases}$ □

Remarque 1.8.

Q un polynôme de deux variables à coefficients dans $\mathbb{C}$. On peut le considérer comme un polynôme d'un seul variable avec des coefficients polynomiaux en deuxième variable, c'est-à-

dire :

$$Q(x,y) = a_0(x)\prod_{k=1}^{n}(y - y_k(x)), \tag{1.8}$$

avec $y_k(x)$ sont des fonctions algébriques en x. En intégrant et en utilisant la formule de Jensen, nous obtenons :

$$m(Q) = m(a_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=1}\log\left(\max\left(1,|y_k(x)|\right)\right)\frac{dx}{x}. \tag{1.9}$$

Définition 1.9. *(le polynôme réciproque)[22]*

Soit $P \in \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ et dit réciproque si

$$\frac{P(x_1,\cdots,x_n)}{\frac{1}{x_1},\cdots,\frac{1}{x_n}}$$

est un monôme de la forme $x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$.

Définition 1.10. *(polynôme cyclotomique)*

Le polynôme cyclotomique est un polynôme unitaire dont leur racine sont à l'intérieure du cercle unité.

Théorème 1.11. *(Kronecker)[7]*

$P \in \mathbb{Z}[X]$ et $P(0) = 0$,alors $M(P) = 1$ si et seulement si P est un produit de polynômes cyclotomiques.

Exemple 1.12. *Soit $P(x) = \prod_{k=1}^{d}(x - a_k)$ un polynôme cyclotomique. En utilisant (1.4) on obtient :*

$$m(P) = \log 1 + \sum_{k=1}^{d}\log^{+} 1 = 0.$$

Définition 1.13. *(Caractère de Dirichlet)[22]*

On dit χ le caractère de Dirichlet de conducteur N qui défini par :

$$\chi(k) = \begin{cases} \chi(\bar{k}) & si : (k,N) = 1, \\ 0 & \quad sinon. \end{cases}$$

Définition 1.14. *[22]*

La fonction L de Dirichlet associée à un caractère de Dirichlet χ est définie par :

$$L(\chi,s) = \sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n^s}, (s \in \mathbb{C}).$$

$L(\chi, s)$ converge absolument pour $Re(s) > 1$ On rappelle la relation, déduite de l'équation fonctionnelle de la série L de Dirichlet,

$$L'(\chi_{-N_2} - 1) = \frac{N^{\frac{3}{2}}}{L(\chi_{-N}, 2)}$$

où $\chi_{-N}(n) = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$ désigne le caractère de Dirichlet réel impair de conducteur N.

La mesure de Mahler et formules explicites de la fonction L

La première formule explicite est donnée par [27] :

$$m(x + y + 1) = L'(\chi_{-3}, -1)$$

, avec

$$\chi_{-3}(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \mod[3], \\ 1 & n = 1 \mod[3], \\ -1 & n = 2 \mod[3]. \end{cases}$$

et $L'(\chi_{-3}, -1)$ l'équation fonctionnel de la série L de Dirichlet. En appliquant l'équation fonctionnel de la série L de Dirichlet :

$$\begin{aligned} L'(\chi_{-3}, -1) &= \frac{3^{3/2}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2) \\ &= \frac{3^{3/2}}{4\pi} \sum_{n} \frac{\chi_{-3}(n)}{n^2} \\ &= \frac{3^{3/2}}{4\pi} \left(\sum_{k=0} \frac{\chi_{-3}(3k+1)}{(3k+1)^2} + \sum_{k\geq 0} \frac{\chi_3(3k+2)}{(3k+2)^2} \right) \\ &= \frac{3^{3/2}}{4\pi} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(3k+1)^2} + \sum_{k=0} \frac{-1}{(3k+2)^2} \right) \\ &= \frac{3^{3/2}}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \cdots \right) \\ &= d_3 = 0,32... \end{aligned}$$

Exemple 1.15. *En 1981,[27] à montré que :*

$$m(x + y + 1) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2) \ \textit{ou} \ L(\chi_{-3}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{-3}(n)}{n^s}$$

$$\chi_{-3}(n) = \begin{cases} 1 & si & n \equiv 1 \mod[3], \\ -1 & si & n \equiv -1 \mod[3], \\ 0 & si & n \equiv 0 \mod[3]. \end{cases}$$

Exemple 1.16.

(exemple sur les relations entre la mesure de Mahler logarithmique et la série L de Dirichlet).

Soit le polynôme : $P(x, y) = 1 + x + y - xy$.

$P(x, y) = 0$ *définit une courbe elliptique de conducteur* $N = 4$

alors la mesure de Mahler logarithmique de P *est définie par :*

$$m(1 + x + y - xy) = \frac{2}{\pi} L(\chi_{-4}, 2),$$

avec

$$\chi_{-4}(n) = \begin{cases} 0 & si n \equiv 0 \mod[4], \\ 1 & si n \equiv 1 \mod[4], \\ -1 & si n \equiv 3 \mod[4]. \end{cases}$$

1.2 Mesure de Mahler d'un entier algébrique

[11]

Si $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$ on note P_α , son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ on ne supposera pas P.unitaire mais a coefficients entiers et de coefficient dominant positif et minimal,ainsi α est un entier algébrique si et seulement si,P est unitaire on définit la mesure d'un entier algébrique α par :

$$M(\alpha) = M(P).$$

Propriétés 1.17.

Si α *est un nombre algébrique, alors* $M(\alpha) \geqslant 1$.*De plus* $M(\alpha) = 1$ *si et seulement si* α *est une racine de l'unité.*

1.3 Mesure de Mahler d'ordre k

Définition 1.18.

Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ *un polynôme à* n *variable. La mesure de Mahler d'ordre* k *de* P *est définit par :*

$$m_k(P) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \log^k |P(x_1, \cdots, x_n)| \frac{dx_1}{x_1}, \cdots, \frac{dx_n}{x_n}. \tag{1.10}$$

Remarque 1.19.

La principale motivation pour étudier la mesure de Mahler supérieur est qu'elle fait intervenir différentes,il s'agit d'intégrales de fonction rationnelles dont le domaine dans $\mathbb{R}^n$ *est défini par des intégralités polynomiales avec coefficients dans* $\mathbb{Q}$,*elle jouent un rôle important dans* *l'étude du lien entre les valeurs spéciales des fonctions L, la conjecture de Beilinson ,les valeurs de régulateurs et la mesure de Mahler.*

Remarque 1.20.

En général ,$m_k(P) + m_k(Q) \neq m_k(PQ)$ *; lorsque* $k > 1$ *.De plus, si* P *est un polynôme cyclotomique, il n'est pas toujours vrais que* $m_k(P) = 0$*.*

1.4 Mesure de Mahler d'une courbe elliptique

1.4.1 Rappel sur les courbes elliptiques

Définition 1.21.

On dit une courbe elliptique la courbe définie par le couple (E, O)*, tel que* E *est une cubique irréductible non singulière et* $O \in E$*.*

L'équation de Weierstrass

L'équation de Weierstrass long[10]

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. L'équation de Weierstrass sur le corps $\mathbb{K}$ est une équation de la forme :

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6,$$

ou a_1, a_2, a_3, a_4 et a_6 sont des coefficients dans $\mathbb{K}$.

L'équation de Weierstrass court [10]

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différent de 2 et 3, alors l'équation de Weierstrass court sur le corps $\mathbb{K}$ est une équation de la forme :

$$y^2 = x^3 + Ax + B,$$

tel que : $4A^3 + 27B^2 \neq 0$, et $A, B \in \mathbb{K}$

Les points de torsion

Soit $E(\mathbb{K})$ et l'ensemble des points $\mathbb{K}$ -rationnels définit par :

$$E(\mathbb{K}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{K}/y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6\right\} \cup \{O\}.$$

Définition 1.22.

*Soit E une courbe elliptique définie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. L'ensemble des **points de torsion** est l'ensemble qui définit par :*

$$E(\mathbb{K})_{tor} = \{P \in E(K)/\exists m \in \mathbb{N}^* : mP = O\}.$$

Courbe lisse

On dit qu'une courbe définie par l'équation de Weierstrass est lisse si et seulement si les dérivées partielles de cette équation ne s'annulent pas au même temps.

Exemple 1.23.

Soit la courbe E définie par :

$$(E) : y^2 = x^3 + x^2.$$

Posons : $f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$, alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} -3x^2 - 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 0$ *ou* $x = \dfrac{-2}{3}$ *et* $y = 0$ *alors il existe 2 points singuliers, donc la courbe n'est pas lisse.*

Propriétés 1.24.

On dit une courbe est une courbe elliptique si et seulement si cette courbe est lisse.

Courbe elliptique réduite

Soient $\mathbb{F}_{||}$, un corps finis, une courbe définie par l'équation de Weierstrass. On dit qu'une courbe elliptique est réduite si la transformation des coefficients entières a_i de l'équation de Weierstrass par la méthode la convergence modulo un nombre premier P sur $\mathbb{F}_{|}$ défini une courbe elliptique.

La réduction d'une courbe elliptique

La réduction d'une courbe elliptique $E/\mathbb{K}$ est une application définie du l'ensemble des courbes elliptiques $E(\mathbb{K})$ dans l'ensemble des courbes elliptiques réduites $\tilde{E}\left(\mathbb{F}_p\right)$

$$\begin{aligned} & E(\mathbb{K}) \rightarrow \tilde{E}\left(\mathbb{F}_p\right) \\ & P \rightarrow \tilde{P}. \end{aligned}$$

Invariants des courbes elliptiques

Chaque courbe elliptique possède plusieurs invariants, et parmi ces invariants on a :le discriminant,l'invariant modulaire (le j-invariant),le conducteur,...

Le discriminant d'une courbe elliptique

$E/\mathbb{K}$ une courbe elliptique définie par l'équation de Weierstrass :

$$y^2+a_1 x y+a_3 y=x^3+a_2 x^2+a_4 x+a_6, a_i \in \mathbb{K}.$$

Soient

$$\begin{aligned} & b_2=a_1^2+4 a_2, \\ & b_4=a_1 a_3+2 a_4, \\ & b_6=a_3^2+4 a_6, \\ & b_8=\frac{1}{4}\left(b_2 b_6-b_4^2\right). \end{aligned}$$

D'après le changement de variable,l'équation de la courbe elliptique dans $\mathbb{K}$ est :

$$y^2=4 x^3+b_2 x^2+2 b_4 x+b_6,$$

donc le discriminant est :

$$\Delta(E)=-b_2^2 b_8-8 b_4^3-27 b_6^2+9 b_2 b_4 b_6.$$

Exemple 1.25.

Soit $E/\mathbb{F}_7$ une courbe elliptique définie par l'équation suivante :

$$y^2=x^3+3 x-1.$$

On a :

$$b_2 = 0,$$
$$b_4 = 6,$$
$$b_6 = -4,$$
$$b_8 - 9 = 2,$$

alors le discriminant est :$\Delta = 0$.

L'invariant modulaire (Le j-invariant) d'une courbe elliptique

Soit $\triangle$ le discriminant d'une courbe elliptique E. On définit le j-invariant de E par :

$$j(E) = \frac{(b_2^2 - 24b_4)^3}{\Delta} = \frac{c_4^3}{\Delta}.$$

Exemple 1.26.

Le j *-invariant de la courbe elliptique de l'exemple* (1.3.2) *est :*

$$j(E) = \frac{-760291}{3} - 995328 = 2.$$

Le conducteur d'une courbe elliptique.[10]

Le conducteur d'une courbe elliptique E est définit par le produit :

$$N(E) = \prod_p p^{f_p(E)},$$

p diviseur premier de $\Delta(E)$ et $f_p(E) = \begin{cases} 0 \quad \text{lorsque } E \text{ a une bonne réduction en } p \\ 1 \text{ lorsque } E \text{ a une réduction multiplicative en } p \\ 2 \text{ lorsque } E \text{ a une réduction additive en } p \end{cases}$

(pour $p = 2, 3$ si la réduction est additive, $f_p(E)$ peut être plus grande que 2,mais en tous cas en a toujours $f_3(E) \leqslant 3$ et $f_2(E) \leqslant 5$) .

L'isomorphisme des courbes elliptiques

Soit E la courbe définie par :

$$E(\mathbb{K}) : \left\{y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6\right\} \cup \{O\}$$

si on fait le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = u^2x' + r \\ y = u^3y' + u^2sx' + t \end{cases}$$

où $u, r, s, t \in \bar{\mathbb{K}}$, on obtient la courbe E' qui définie par :

$$y^2 + a_1'x'y' + a_3'y' = x^3 + a_2'x'^2 + a_4'x' + a_6'$$

$$\begin{aligned}
a_1' &= \tfrac{1}{u}(a_1 + 2s) \\
a_2' &= \tfrac{1}{u^2}(a_2 - sa_1 + 3r - s^2) \\
a_3' &= \tfrac{1}{u^3}(a_3 + ra_1 + 2t) \\
a_4' &= \tfrac{1}{u^4}(a_4 - sa_3 + 2ra_2 - (t + rs)a_1 + 3r^2 - 2st) \\
a_6' &= \tfrac{1}{u^6}(a_6 + ra_4 + r^2a_2 + r^3 - ta_3 - t^2 - rta_1)
\end{aligned}$$

d'où les courbes $E\mathbb{K}$ et $(E')(\mathbb{K})$ sont deux courbes isomorphes.

Remarque 1.27. *On a :*

$$\begin{aligned}
&\bullet \Delta' = \tfrac{1}{u^{12}}\Delta \\
&\bullet c_4' = \tfrac{1}{u^4}c_4 \\
&\bullet j' - \mathit{invariant} = j - \ \mathit{invariant}
\end{aligned}$$

La fonction L d'une courbe elliptique

Définition 1.28. *(la définition de la fonction L) [10]*

Soient p un nombre premier et s le nombre des points singuliers. La fonction $L(E, s)$ d'une courbe elliptique E est définie par :

$$L(E, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \prod_p L_p(E, s),$$

tel que :

$$L_p(E, s) = \begin{cases} (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1} & \textit{Si p ne divise pas } \Delta_E \\ (1 - P^{-1})^{-1} & \textit{Si E a réduction multiplicative déployge} \\ (1 + P^{-1})^{-1} & \textit{Si E a réduction multiplicative non déployée} \\ 1 & \textit{Si E a réduction additive} \end{cases}$$

Définition 1.29. *(L'équation fonctionnel de la série L de Dirichlet)* *l'équation fonctionnel de la série L de Dirichlet est une équation définie par relation :*

$$L'(\chi_{-N}, -1) = \frac{N^{3/2}}{4\pi} L(\chi_N, 2) = d_N \tag{1.11}$$

ou $\chi_N(n) = \begin{pmatrix} -N \\ n \end{pmatrix}$ *est le caractère de Dirichlet réel impair de conducteur* N*.[1]*

1.4.2 Conjecture de Boyd

Le résultat qui suit les calcules analogue s'applique généralement à des polynômes de la forme [7] :

$$P(x, y) = A(x)y^2 + B(x)y + C(x),$$

tel que $A(x)$ et $B(x)$ sont cyclotomiques et les solutions de $|A(x)| = |B(x)|$ sur $|x| = 1$ sont les racines d'unité. [3]

Pour un polynôme P, la mesure logarithmique de cet polynôme s'exprime par :

Type C :La forme logarithmique

La forme logarithmique est un forme noté par C et définie par la formule suivante :

$$m(P) = r \log |c|,$$

avec : r est un nombre rationnel et c est un entier algébrique.

Type D : **La forme de Dirichlet**

La forme de Dirichlet est notée par D et définie par la formule suivante :

$$m(P) = rL'(\chi_N, -1),$$

avec : r est un nombre rationnel, L est l'équation fonctionnelle de la fonction L, χ est le caractère de Dirichlet et N est le conducteur de la courbe elliptique E .

Type E : La forme elliptique

La forme elliptique notée par E et définie par la formule suivante :

$$m(P) = rL'(E, 0),$$

d'où :

$$L'(E, 0) = \frac{N}{(2\pi)^2} L(E, 2) = b_E,$$

avec r un nombre rationnel, $L'(E,0)$ est la dérivée de la série L et E est la courbe elliptique. Boyd a conjecturé une condition (A) nécessaire pour que la mesure d'un polynôme P vérifie une formule de type E ;cette condition s'exprime en terme de polygone de Newton associe à P
(A) Toutes les faces de P doivent être de mesure logarithmique nulle. Pour caractériser la mesure des polynômes qui ne s'annulent pas sur le tore et qui vérifient une formule de type C ; Boyd a introduit une condition géomagnétique :soit P un polynôme de deux variables ne s'annulant pas sur le tore et donne par :

$$P(x,y) = A(x)y^2 + B(x)y + C(x),$$

tel que $D(x) = B(x)^2 - 4A(x)C(x)$
soit de degré égale à 3 ou 4 On dit que P vérifie les conditions :
$(G)(i)$ Pour tout χ de module égal a un, P, admet exactement un zéro et $y_l(x)$ de module strictement supérieure à un.
$(G)(ii)$ le discriminant $D(x) = B(x)^2 - 4A(x)C(x)$ admet exactement deux zéros de modules strictements inférieurs à un.[3]

Remarque 1.30.

Si P un réciproque alors la condition (G) est toujours vérifier.

Propriétés 1.31. *[3]*

Soit $P(x,y) = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$ tel que le degré de $\Delta = B(x)^2 - 4A(x)C(x)$ est égal à 3 ou 4 et P ne s'annule pas sur le tore.
Si P ne satisfait pas la condition (G) alors m (Q) vérifie une formule du type C. Pour les autres polynômes Boyd généralise la condition (G) par la Condition (G) qui le suivant : (G) ma $(P(x,y))$ s'exprime comme un multiple rationnel d'une intégrale d'une de termination de $\omega = \frac{1}{2\pi}(\log|y| d\log|x| - \log|x| d\log|y|)$ à rectifié des deux bords d'une coupure effectuée entre deux points de ramification de $y(x)$, ou $y(x)$ est la fonction algébrique définie par $P(x,y) = 0$[3].

1.5 Le Polylogarithme

Définition 1.32. *(polylogarithme)*

Les polylogarithmes sont définis comme la série des puissances :

$$Li_k(x) = \sum_{n>0} \frac{x^n}{n^k}, |x| = 1, \tag{1.12}$$

et $k \geq 2$;de nombre k appelle le poids de la poly-logarithme. nous voyons que pour x=1 nous trouvons la fonctions Zêta Riemann $\left(\zeta(k) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k}\right)$ *dans k.*

1.5.1 Di-logarithme de Bloch-Wigner

Définition 1.33. *(Di-logarithme de Bloch-Wigner)[11]*

En commencent par l'habituel di-logarithme :

$$Li_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

; $|x| = 1$, $x \in \mathbb{C}$ on définit :

$$D(z) = Im(Li_2(z)) + \arg(1+z) \log|z|.$$

Remarque 1.34.

On a :

1. $D(\bar{z}) = -D(z)$
2. $D(e^{i\theta}) = -\int_0^\theta \log(1 - e^{it})dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}$.

En effet :

Pour $z = e^{i\theta}$; On a $|z = e^{\imath\theta}|= 1$, alors $D(e^{i\theta}) = Im\left(Li_2(e^{i\theta})\right)$.

Puisque

$$Li_2(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\theta n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}{n^2}\right),$$

alors $Im\left(Li_2(e^{i\theta})\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}$ D'où $D(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}$.

Définition 1.35. *[3]*

On définit l'intégrale de Clausen par la formule suivante :

$$Cl_2(\theta) = -\int_0^\theta \log|e^{it} - 1| = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

1.6 Mesure de Mahler et autre fonctions

Définition 1.36. *(La Fonction Zêta)[15]*

*Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \backslash \{0\}$ un polynôme à n variables.**Sa Mesure de Mahler Zêta** est* *définit par :*

$$Z(s,P) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \left|P\left(x_1,\cdots,x_n\right)\right|^s \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\cdots\frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}.$$

Remarque 1.37.

Il y a un lien important entre la mesure de Mahler Supérieure et la mesure de Mahler Zêta. En effet :

$$\begin{aligned}\tfrac{d^k Z(s,P)}{ds^k} &= \tfrac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbb{T}^k} \tfrac{d^k|P(x_1,\cdots,x_n)|^s}{ds^k}\tfrac{dx_1}{x_1}\cdots\tfrac{dx_n}{x_n} \\ &= \tfrac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbb{T}^n}\left|P\left(x_1,\cdots,x_n\right)\right|^s \log^k\left|P\left(x_{1s}\cdots,x_n\right)\right|\tfrac{dx_1}{x_1}\cdots\tfrac{dx_n}{x_n}.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{d^k Z(s,P)}{ds^k}\ |_{s=0} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\mathbb{T}} \log^k|P(x_1,\cdots,x_n)|\frac{dx_1}{x},\cdots,\frac{dx_n}{x_n} = m_k(P).$$

En d'autres mots,

$$Z(s,P) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k(P)s^k}{k!},$$

comme elle ne contient pas logarithme, la mesure de Mahler Zêta peut parfois être plus simple à calculer.

CHAPITRE

2

L'INTÉGRALE LOG-SINUS

Dans ce chapitre on va parler de l'intégrale de Log-sinus D'abord, On va définir l'intégrale de Log-sinus, l'intégrale de Log-sinus généralisé, présenter les intégrales de Log-sinus aux quelques valeurs, finalement, nous serons concernés par les évaluations des intégrales de Log-sinus $L_n^k(\sigma)$.

2.1 L'intégrale Log-sinus

Pour k fonctions (typiquement des polynômes de Laurent) à n variables, la mesure multiple de Mahler, introduite dans [20], est définie par :

$$m(P_1, P_2, ..., P_k) = \int_0^1 ... \int_0^1 \prod_{j=1}^{k} \log |P_j(e, ...e)| dx_1 dx_2, ...dx_k.$$

Lorsque $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = P$ cela revient à la mesure de Mahler supérieure $m_k(P)$ (introduit et examinée dans [20]). Lorsque $k = 1$ les deux se réduisent à la mesure de Mahler logarithmique standard [9].Pour $n = 1, 2, \ldots$,on considère les intégrales Log-sinus définies par

$$Ls_n(\sigma) = -\int_0^{\sigma} \log^{n-1} \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta. \tag{2.1}$$

et pour $k \geqslant 0$ donnés par :

$$Ls_n^{(k)}(\sigma) = -\int_0^\sigma \theta^{(k)} \log^{n-1-k}\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta. \tag{2.2}$$

C'est la notation utilisée par Lewin [24], [25], et les intégrales 2.2 et 2.1 sont généralement appelées intégrales Log-sinus généralisées. Notez que dans chaque cas, si σ dans $[0, 2\pi]$ on peut éliminer le module. Diverses évaluations des intégrales log-sinus peuvent être trouvées dans le livre de Lewin [25] §7.6 et §7.9. On observe que $Ls_1(\sigma) = -\sigma$ et que $Ls_n^{(0)}(\sigma) = Ls_n(\sigma)$, et en particulier,

$$Ls_2(\sigma) = Cl_2(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\sigma)}{n^2}, \tag{2.3}$$

la fonction de Clausen qui jouer un rôle de premier plan ci-dessous (Les fonctions de Clausen généralisées seront introduites en détaille dans [8].

Remarque 2.1.

Alf van der Poorten ait écrit l'avant-propos à Lewin [25], il mentionne avec enthousiasme l'évaluation

$$-Ls_4^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{17}{6480}\pi^4,$$

et sa relation avec les sommes binomiaux centraux (Exemple 2.11) .

Exemple 2.2. *(Deux mesures de Mahler classiques revisitées).*

Comme nous aurons recours aux méthodes utilisées dans cet exemple, pour évaluer $m(1 + x + y)$ nous utilisons la formule de Jensen pour obtenir

$$m(1 + x + y) = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} \log(2\sin(\pi y))dy = \frac{1}{\pi} Ls_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\pi} Cl_2\left(\frac{\pi}{3}\right), \tag{2.4}$$

qui est un résultat de Smyth en 1981. Pour évaluer $m(1 + x + y + z)$ nous suivons Boyd [9]. et *observons, en appliquant la formule de Jensen, en écrivant* $\omega = \frac{y}{z}$ *on a :*

$$\begin{aligned}
m(1+x+y+z) &= (1+x+z(1+\omega)) \\
&= m(\log|1+\omega|) \vee \log|1+x|) \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} \max\{\log(2\sin\frac{\theta}{2}), \log(2\sin\frac{t}{2})\}dt \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\theta} \log(2\sin\frac{\theta}{2})dt \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} \theta\log(2\sin\frac{\theta}{2})d\theta \\
&= -\frac{2}{\pi^2}Ls^1(\pi) \\
&= \frac{7\zeta(3)}{2\pi^2}.
\end{aligned}$$

Le résultat final est à nouveau du à l'origine à Smyth. Dans les développements suivants,

$$Li_{a_1,\ldots,a_k}(z) = \sum_{n_1>\cdots>n_k>0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{a_1}\ldots n_k^{a_k}}$$

désigne le polylogarithme généralisé [3]. Pour nos besoins, les $a_1 \ldots a_k$ *seront des entiers positifs. Par exemple,*

$$Li_{2,1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}.$$

En particulier , $Li_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^k}$ *polylogarithme d'ordre* k*, et*

$$Ti_k(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^k}$$

la fonction arc tangent d'ordre k*. Nous utilisons la même notation pour les suites analytiques de ces fonctions. On définit les valeurs multiples de zêta (MZVs) par le polylogarithm généralisé en* $z = 1$*, notées par*

$$\zeta(a_i \cdots a_k) := Li_{a_i \cdots a_k}(1).$$

De même, nous considérons les fonctions multiples de Clausen (Cl) et les fonctions de Glaisher multiples (Gl) de profondeur k *et de poids* $\omega = a_1 + \cdots + a_k$ *définies comme suite*

$$Cl_{a_1,\cdots,a_k}(\theta) = \left\{ \begin{array}{lll} Im(Lia_1,\cdots,a_k(e^{i\theta})) & si \quad \omega & pair \\ Re(Lia_1,\cdots,a_k(e^{i\theta})) & si \quad \omega & impair \end{array} \right\}, \tag{2.5}$$

$$Gl_{a_1,\cdots,a_k}(\theta) = \left\{ \begin{array}{lll} Re(Li_{a_1,\cdots,a_k}(e^{i\theta})) & si \quad \omega & pair \\ Im(Li_{a_1,\cdots,a_k}(e^{i\theta})) & si \quad \omega & impair \end{array} \right\}. \tag{2.6}$$

Comme illustré en 2.3 et plus tard dans (16) , les fonctions de Clausen et Glaisher alternent entre des séries cos et sin. Notez que 2.5 est d'accord avec la définition de Cl_2, donnée en 2.3. Pour la suite, il est nécessaire de définir le polylogarithme de Kummer-type suivant, [25] [3]qui a été exploité dans [6]

$$\lambda_n(x) := (n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} Li_{n-k}(x) \log^k |x| + \frac{(-1)^n}{n} \log^n |x|, \quad \forall n \geq 2 \tag{2.7}$$

et pour $n = 1$

$$\lambda_1(x) = -\log |x|,$$

de sorte que

$$\lambda_1(\tfrac{1}{2}) = \log 2 \quad , \lambda_2(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\zeta(2) \quad , \lambda_3(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{7}{8}\zeta(3).$$

et $\lambda_4(\frac{1}{2})$ est le premier à révéler la présence de $Li_n(\dfrac{1}{2})$.

2.2 Valeurs spéciales des intégrales Log-sinus généralisées

Nous démontrons comment les intégrales Log-sinus généralisées $Ls_n^{(k)}(\pi)$ peuvent être extraites d'une fonction génératrice donnée dans le théorème 2.6. Comme la démonstration de Lewin [25] §7.9, au moins pour les petites valeurs de n et k, ces intégrales Log-sinus en π ont des formes fermées par des valeurs de zêta et des constantes de Kummer-type comme $Li_4(\frac{1}{2})$. On commence par la fonction génératrice suivant :

$$-\sum_{n,k\geqslant 0} Ls_{n+k+1}^{(k)}(\pi) \frac{\lambda^n}{n!} \frac{(i\mu^k)}{k!} = \int_0^\pi \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^\lambda e^{im\theta} d\theta \tag{2.8}$$

$$= ie^{i\pi\frac{\lambda}{2}} \mathrm{B}\left(m - \frac{\lambda}{2}, 1+\lambda\right) - ie^{i\pi\mu} \mathrm{B}_{\frac{1}{2}}\left(\mu - \frac{\lambda}{2}, -\mu - \frac{\lambda}{2}\right) \tag{2.9}$$

voire [25]. Ici B est la fonction Bêta incomplète. Avec précaution - en raison des singularités à zéro - 2.8 peut être différencié selon les besoins comme suggéré par Lewin. Pour $a, b > 0$ et $0 < x < 1$, la fonction Bêta incomplète est définie par :

$$\mathrm{B}_x(a,b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} \, \mathrm{d}t,$$

trouvé par exemple dans [20, 88.17(*ii*)], la fonction génératrice 2.8 peut être réécrite comme

$$-\sum_{n,k\geqslant 0} Ls_{n+k+1}^{(k)}(\pi)\frac{\lambda^n}{n!}\frac{(i\mu^k)}{k!} = ie^{i\pi\frac{\lambda}{2}}\left(\mathrm{B}_1\left(\mu-\frac{\lambda}{2},1+\lambda\right)-\mathrm{B}_{-1}\left(\mu-\frac{\lambda}{2},1+\lambda\right)\right),$$

développant le côté droit, cela établit la forme informatique plus accessible suivante donnée en 8 :

Théorème 2.3 (Fonction génératrice pour $Ls_{n+k+1}^{(k)}(\pi)$)**.**

Pour $2|\mu| < \lambda < 1$ *nous ont :*

$$-\sum_{n,k\geqslant 0} Ls_{n+k+1}^{(k)}(\pi)\frac{\lambda^n}{n!}\frac{(i\mu^k)}{k!} = i\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\begin{pmatrix}\lambda\\ n\end{pmatrix}\frac{e^{i\pi\frac{\lambda}{2}}-(-1)^n e^{i\pi\mu}}{\mu-\frac{\lambda}{2}+n}. \tag{2.10}$$

Les intégrales Log-sinus $Ls_n^{(k)}(\pi)$ peuvent être assez confortablement extrait lorsque on différenciant de manière appropriée son côté droit. Pour cela, il est très utile d'observer que :

$$\frac{(-1)^q}{q!}\frac{d^q}{d\lambda^q}\begin{pmatrix}\lambda\\ n\end{pmatrix}\Bigg|_{\lambda=0} = \frac{(-1)^n}{n}\sum_{n>i_1>i_2>\cdots>i_{q-1}}\frac{1}{i_1,i_2,\cdots,i_{q-1}}. \tag{2.11}$$

Des détails théoriques et informatiques plus complets sont donnés dans [5]. Le processus général est maintenant illustré pour les cas $Ls_4^{(2)}(\pi)$ et $Ls_4^{(2)}(\pi)$.

Exemple 2.4 ($Ls_4^{(k)}(\pi)$ et $Ls_5^{(k)}(\pi)$)**.**

Afin de trouver $Ls_4^{(2)}(\pi)$, *nous différencions (2.10) une fois par rapport à* λ *et deux fois par rapport à* μ. *Pour simplifier encore le calcul, nous profitons le fait que le résultat sera réel ce qui permet de négliger les parties imaginaires :*

$$-Ls_4^{(2)}(\pi) = \frac{d^2}{d\mu^2}\frac{d}{d\lambda}i\sum_{n\geqslant 0}\begin{pmatrix}\lambda\\ n\end{pmatrix}\frac{(-1)^n e^{i\pi\frac{\lambda}{2}}-e^{i\pi\mu}}{\mu-\frac{\lambda}{2}+n}\Bigg|_{\lambda=\mu=0} = 2\pi\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3} = \frac{3}{2}\pi\zeta(3). \tag{2.12}$$

Dans la deuxième étape nous avons éliminer le terme correspondant à $n=0$, *car sa contribution* $\dfrac{-i\pi^4}{24}$ *est purement imaginaire.*

De même, soit la série $H_{n-1}^{(1,1)} = \sum_{n>n_1>n_2} \frac{1}{n_1 n_2}$. *On obtient* $Ls_5^{(1)}(\pi)$ *comme suit :*

$$\begin{aligned}
-Ls_5^{(1)}(\pi) &= \frac{3}{4}\sum_{n\geqslant 1} \frac{6(1-(-1)^n)}{n^5} - \frac{\pi^2}{n^3} + \frac{8(1-(-1)^n)}{n^4}\left(nH_{n-1}^{(1,1)} - H_{n-1}\right) \\
&= \frac{9}{2}(\zeta(5) - Li_5(-1)) - \frac{3}{4}\pi^2\zeta(3) + 6(Li_{3,1,1}(-1) - Li_{4,1}(1) + Li_{4,1}(-1)) \\
&= 2\lambda_5\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}\pi^2\zeta(3) - \frac{93}{32}\zeta(5),
\end{aligned}$$

ou H_n *est la série harmonique. Dans la suite autres évaluations de* $Ls_n^{(k)}(\pi)$ *:*

$$-Ls_4^{(1)}(\pi) = 2\lambda_4\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{19}{8}\zeta(4), \tag{2.13}$$

$$-Ls_5^{(2)}(\pi) = 2\pi\lambda_4\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{3}{40}\pi^5, \tag{2.14}$$

$$-Ls_5^{(3)}(\pi) = \frac{9}{4}\pi^2\zeta(3) - \frac{93}{8}\zeta(5). \tag{2.15}$$

$Ls_5^{(2)}(\pi)$ *également été évalué dans [25], Eq. (7.145), mais la formule exacte n'a pas été donnée correctement.*

Remarque 2.5.

À partir de la forme de (2.10) et (2.11), nous pouvons voir que les intégrales Log-sinus $Ls_n^{(k)}(\pi)$ *peut être exprimé en terme de* π *et des polylogarithmes* $Li_{n,1_m}(-1)$.

L'exemple suivant illustre la complexité croissante de ces intégrales, en particulier par rapport aux évaluations données dans l'exemple 2.4.

Exemple 2.6 ($Ls_6^{(k)}(\pi)$ et $Ls_7^{(3)}(\pi)$)**.**

En procédant comme dans l'exemple 2.4 et en écrivant :

$$Li_{a_1,\cdots,a_n}^{(\pm)} = Li_{a_1,\cdots,a_n}(1) - Li_{a_1,\cdots,a_n}(-1),$$

on trouve

$$\begin{aligned}
-Ls_6^{(1)}(\pi) &= -24Li_{3,1,1,1}^{\pm} + 24Li_{4,1,1}^{\pm} - 18Li_{5,1}^{\pm} + 12Li_6^{\pm} + 3\pi^2\zeta(3,1) - 3\pi^2\zeta(4) + \frac{\pi^6}{480} \\
&= \frac{43}{60}\log^6 2 - \frac{7}{12}\pi^2\log^4 2 + 9\zeta(3)\log^3(2) + \left(24Li_4(\frac{1}{2}) - \frac{1}{120}\pi^4\right)\log^2 2 \\
&+ (36Li_5(\frac{1}{2}) - \pi^2\zeta(3))\log 2 + 12Li_{5,1}(\frac{1}{2}) + 24Li_6(\frac{1}{2}) - \frac{247}{10080}\pi^6 \\
&= 2\lambda_6(\frac{1}{2}) - 6Li_{5,1}(-1) - 3\zeta(3)^2 - \frac{451}{10080}\pi^6.
\end{aligned}$$

Dans la première égalité, le terme $\dfrac{\pi^6}{480}$ *est celui correspondant à* $n = 0$ *dans 2.10. De même, on trouve*

$$\begin{aligned}
-Ls_6^{(2)}(\pi) &= 4\pi\lambda_5(\frac{1}{2}) - \pi^3\zeta(3) - \frac{189}{16}\pi(5), \\
-Ls_6^{(3)}(\pi) &= 6\pi^2\lambda_4(\frac{1}{2}) - 12Li_{5,1}(-1) - 6\zeta(3)^2 - \frac{187}{1680}\pi^6, \\
-Ls_6^{(4)}(\pi) &= -\frac{45}{2}\pi\zeta(5) + 3\pi^3\zeta(3),
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
-Ls_7^{(3)}(\pi) = &\frac{9}{35}\log^7 2 + \frac{4}{5}\pi^2\log^5 2 + 9\zeta(3)\log^4 2 - \frac{31}{30}\pi^4\log^3 2 \\
&- \left(72Li_5(\frac{1}{2}) - \frac{9}{5}\zeta(5) - \frac{51}{4}\pi^2\zeta(3)\right)\log^2 2 \\
&+ \left(72Li_{5,1}(\frac{1}{2}) - 216Li_6(\frac{1}{2}) + 36\pi^2 Li_4(\frac{1}{2})\right)\log 2 + 72Li_{6,1}(\frac{1}{2}) \\
&- 216Li_7(\frac{1}{2}) + 36\pi^2 Li_5(\frac{1}{2}) - \frac{1161}{32}\zeta(7) - \frac{375}{32}\pi^2\zeta(5) + \frac{1}{10}^4\zeta(3) \\
&= 6\pi^2\lambda_5(\frac{1}{2}) + 36Li_{5,1,1}(-1) - \pi^4\zeta(5) - \frac{45}{32}\zeta(7).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Notez que dans chaque cas, les monômes dans $Ls_n^{(k)}(\pi)$ *sont d'ordre total* n*, avec,* $\zeta(q)$ *d'ordre* q*, et* π^q *ordre* q*, pour* q *un entier positif.*

Remarque 2.7.

Une forme purement réelle du théorème (2.10) est la suivante :

$$\int_0^{\pi}\left(2\sin\tfrac{\theta}{2}\right)^x e^{\theta y}d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} \frac{\left(y\left((-1)^n e^{\pi y} - \cos\frac{\pi x}{2}\right) - (n - \frac{x}{2})\sin\frac{\pi x}{2}\right)}{(n-\frac{x}{2})^2 + y^2}. \tag{2.17}$$

On peut maintenant aussi déduire des fonctions génératrices à une variable à partir de (2.17). Par exemple,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Ls_{n+2}^{(1)}(\pi)\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi\lambda}{2} - 1}{(n-\frac{\lambda}{2})^2}. \tag{2.18}$$

2.3 Intégrales Log-Sinus à π

La mesure de Mahler multiple définit par :

$$m_k(1 + x + y_\bullet) = m(1 + x + y_1, 1 + z + y_2, \cdots, 1 + x + y_k). \tag{2.19}$$

a été étudié par Sasaki [26]. Il utilise la formule de Jensen pour observer que :

$$m_k = (1 + x + y_\bullet) = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} \log^k |1 - e^{2\pi it}| dt, \tag{2.20}$$

et fournit donc une évaluation de $m_2(1 + x + y_\bullet)$. Par contre, immédiatement à partir de 2.20 et de la définition des intégrales Log-sinus nous avons :

Théorème 2.8.

Pour les entiers positifs k,

$$m_k(1 + x + y_\bullet) = \frac{1}{\pi} Ls_{k+1}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{\pi} Ls_{k+1}(\pi). \tag{2.21}$$

Soit l'équation suivant ([24], Eq (8))

$$Ls_{n+2}(\pi) = (-1)^n n! \left(\pi\alpha(n+1) + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \alpha(n-k) Ls_{k+2}(\pi) \right), \tag{2.22}$$

où $\alpha(m) = (1 - 2^{1-m})\zeta(m)$. Notez que $\alpha(1) = 0$, et pour $m \geqslant 2$

$$\alpha(m) = -Li_m(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^m},$$

c'est une conséquence de la fonction suivante :

$$-\sum_{m=0}^{\infty} Ls_{m+1}(\pi) \frac{x^m}{m!} = \pi \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma^2(1+\frac{x}{2})} = \pi \binom{x}{x/2} \tag{2.23}$$

voir ([24], Eq 7.109).

Exemple 2.9. *Valeurs de $Ls_n(\pi)$. On a :*

$$
\begin{aligned}
Ls_2(\pi) &= 0, \\
-Ls_3(\pi) &= \frac{1}{12}\pi^3, \\
Ls_4(\pi) &= \frac{3}{2}\pi\zeta(3), \\
-Ls_5(\pi) &= \frac{19}{240}\pi^5, \\
Ls_6(\pi) &= \frac{45}{2}\pi\zeta(5) + \frac{5}{4}\pi^3\zeta(3), \\
-Ls_7(\pi) &= \frac{275}{1344}\pi^7 + \frac{45}{2}\pi\zeta^2(3), \\
Ls_8(\pi) &= \frac{2835}{4}\pi\zeta(7) + \frac{315}{8}\pi^3\zeta(5) + \frac{133}{32}\pi^5\zeta(3).
\end{aligned}
$$

*Ces valeurs peuvent être facilement obtenues à partir de (2.23) par une commande dans un système d'algèbre informatique, comme **Maple**, on exécute la commande suivante :*

```
for k to 7 do simplify(subs(x=0,diff(Pi*binomial(x,x/2),x$k))) od.
```

2.4 Intégrales Log-sinus à $\frac{\pi}{3}$

Maintenant, nous passons aux intégrales Log-sinus en a $\frac{\pi}{3}$. Il est montré dans [5] que les intégrales Log-sinus $Ls_n^{(k)}(\tau)$ peuvent être évaluées en termes de valeurs zêta et les fonctions multiples de Clausen et Glaisher en τ. L'essentielle de la technique provient de Fuchs ([25] §7.10). Dans le cas $\tau = \frac{\pi}{3}$, les résultats obtenue permettent des réductions considérables. C'est parce que la sixième racine de l'unité $\omega = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ satisfait $\overline{\omega} = \omega^2$.

Exemple 2.10 (Réductibilité [4])**.** .
Par le même processus dans [5], nous avons

$$
\begin{aligned}
Ls_n^{n-1}(\tau) &= -\frac{\tau^n}{n}, \\
Ls_2(\tau) &= Cl_2(\tau),
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
-Ls_3(\tau) &= 2Gl_{2,1}(\tau) + \frac{1}{12}\tau(3\pi^2 - 3\pi\tau + \tau^2), \\
Ls_3^{(1)}(\tau) &= Cl_3(\tau) + \tau Cl_2(\tau) - \zeta(3).
\end{aligned}
$$

On a aussi

$$\begin{aligned} -Ls_4(\tau) &= -6Cl_{2,1,1}(\tau) + \frac{3}{2}Cl_4(\tau) + \frac{3}{2}(\pi-\tau)Cl_3(\tau) - \frac{3}{4}(\pi-\tau)Cl_2(\tau) - \frac{3}{2}\pi\zeta(3), \\ Ls_4^{(1)}(\tau) &= \frac{1}{180}\pi^4 - \frac{1}{16}\tau^4 + \frac{1}{6}\pi\tau^3 - \frac{1}{8}\pi^2\tau^2 - 2Gl_{3,1}(\tau) - 2\tau Gl_{2,1}(\tau), \\ Ls_4^{(2)}(\tau) &= -2Cl_4(\tau) + 2\tau Cl_3(\tau) + \tau^2 Cl_2(\tau). \end{aligned}$$

Dans le même cas de $\tau = \frac{\pi}{3}$, il y a autres évaluations de $Ls_n^{(k)}(\tau)$ peuvent être encore réduites [5].

Exemple 2.11 (Somme binomiale centrale.).
Comme suggéré par ([5],Eq 30) comme suit

$$\begin{aligned} Gl_{4,1}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}{n^4} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \\ &= \frac{3341}{1632960}\pi^5 - \frac{1}{\pi}\zeta(3)^2 - \frac{3}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}n^6} \end{aligned} \tag{2.24}$$

le Log-sinus intégral $Ls_n^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ peut être évalue en termes de somme binomiale centrale suivante :

$$S_{\pm}(n) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^n},$$

et on obtient

$$-Ls_{n+2}^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = n!\left(-\frac{1}{2}\right)^n S_+(n+2). \tag{2.25}$$

Pour une démonstration voire ([3], Lemma 1)
Supposons $n = 2$, alors $S_+(4) = \frac{17}{36}\zeta(4)$, et également $Ls_4^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{17\pi}{6480}$.

Évaluation Hypergéométrique de $Ls_n\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Nous clôturons cette section par une approche alternative à l'évaluation de $Ls_n\left(\frac{\pi}{3}\right)$ complétant celle donnée dans la section 2.2 .

Théorème 2.12. *(Forme hypergéométrique de $Ls_n\left(\frac{\pi}{3}\right)$)*

Pour les entiers non positifs n,

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n!}Ls_{n+1}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{-4k}}{(2k+1)^{n+1}}\binom{2k}{k}. \tag{2.26}$$

Par conséquent,

$$-\sum_{n=0}^{\infty} Ls_{n+1}\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{s^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-4k}}{2k+1+s}\binom{2k}{k}.$$

Observez que la somme dans 2.26 converge très rapidement et est donc approprié pour le calcul par un système d'algèbre informatique.

2.5 Évaluations de mesure de Mahler multiple par Log-sinus

Nous avons d'abord que nous pouvons déterminer récursivement $m_k(1+x+y_\bullet)$ à partir de l'équation 2.21. En remplaçant les valeurs données dans l'exemple 2.9 dans l'équation (13), nous obtenons les évaluations multiples de Mahler suivantes :

Exemple 2.13. *//(Valeurs de $m_k(1+x+y_\bullet)$.*

Nous avons :

$$\begin{aligned}
m_1(1+x+y_\bullet) &= \frac{1}{\pi}Cl_2\left(\frac{\pi}{3}\right),\\
m_2(1+x+y_\bullet) &= \frac{\pi^2}{54},\\
m_3(1+x+y_\bullet) &= \frac{9}{2\pi}Cl_4\left(\frac{\pi}{3}\right) - \zeta(3),\\
m_4(1+x+y_\bullet) &= \frac{6}{\pi}Gl_{4,1}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi^4}{4860},\\
m_5(1+x+y_\bullet) &= \frac{135}{2\pi}Cl_6\left(\frac{\pi}{3}\right) - 15\zeta(5) - \frac{5}{18}\pi^2\zeta(3),\\
m_6(1+x+y_\bullet) &= \frac{135}{\pi}Gl_{6,1} + 15\zeta(3)^2 - \frac{943}{40824}\pi^6.
\end{aligned}$$

Le premier est encore une forme du résultat de Smyth (2.4).

Remarque 2.14.

Notez que nous pouvons réécrire la mesure multiple de Mahler u comme suit :

$$m_k(1+x+y_\bullet) = m(\underbrace{1+x,\cdots,1+x}_{k-1},1+x+y). \tag{2.27}$$

En utilisant la formule de Jensen, on trouve que le côté gauche de 2.27 devient

$$\begin{aligned} m_k(1+x+Y_\bullet) &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^{k} \left|1+e^{2\pi is}+e^{2\pi it_j}\right| ds dt_1 \cdots dt_k \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \log\left|1+e^{2\pi is+e^{2\pi it}}\right| dt\right]^k ds \\ &= \int_0^1 \log^k \max\left(|1+e^{2\pi is}|, 1\right) ds. \end{aligned}$$

CHAPITRE

3

ÉVALUATION DE MESURE DE MAHLER D'UNE FAMILLE DES POLYNÔMES PAR LOG-SINUS

Dans ce chapitre, on intéressent de trouver une formulation d'une mesure de Mahler d'une famille des polynômes à deux variable et de paramètre k (k entier), sous forme d'une Log-sinus. Soit la famille des polynômes suivante :

$$P_k(x, y) = (x^2 + (k+1)x + 1)y + x^2 + 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

alors

$$m(P_k) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} \log \mid P_k(x, y) \mid \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}.$$

Comme $P(x, 0) = x^2 + 1 \neq 0$ la formule de Jensen est applicable. on a :

$$P_k(x, y) = (x^2 + (k+1)x + 1)y + x^2 + 1 = (x^2(k+1)x + 1) \left(y - \frac{-x^2 - 1}{x^2 + (k+1)x + 1} \right).$$

Par Jensen :

$$m(P_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}(\log \mid x^2+(k+1)x+1 \mid +\log^+ \mid y(x) \mid)\frac{dx}{x}.$$

Supposons $x = e^{i\theta}, ou \quad \theta \in [-\pi,\pi]$ alors, $\dfrac{dx}{x} = id\theta$, donc

$$\begin{aligned} m(P_k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\log \mid 2\cos\theta+1+k \mid +\log^+\left|\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta+1+k}\right|\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log \mid 2\cos\theta+1+k \mid d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta+1+k}\right|d\theta.. \end{aligned}$$

puisque :$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$,$\forall\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} m(P_k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\log \mid 2\cos\theta+1+k \mid d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\log \mid 2\cos\theta+1+k \mid d\theta \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\log^+\left|\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta+1+k}\right|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\log^+\left|\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta+1+k}\right|d\theta. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $\theta = -\alpha$, on obtient

$$\begin{aligned} m(P_k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0}\log \mid 2\cos\alpha+1+k \mid (-d\alpha) + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\log \mid 2\cos\theta+1+k \mid d\theta \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0}\log^+\left|\frac{2\cos\alpha}{2\cos\alpha+1+k}\right|(-d\alpha) + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\log^+\left|\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta+1+k}\right|d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\log \mid 2\cos\theta+1+k \mid d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\log^+\left|\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta+1+k}\right|d\theta. \end{aligned}$$

Pour continue les calculs, il faut étudier la position de $\left|\dfrac{2\cos\theta}{2\cos\theta+1+k}\right|$ avec 1, pour continue les calculs, nous avons le besoin des lemme suivant.

Lemme 3.1.

Soit $k \in \mathbb{Z}$

1. *Si $k \in [-3,1]$, on a $y(x)$ est non définit ssi $\theta = O_k = \arccos\left(\dfrac{-k-1}{2}\right)$*
2. *Si $k \in [-5,3]$, l'équation $|y(x)| = 1$ admet une seul solution notée $\theta_k = \arccos\dfrac{-k-1}{4}$ et*
   (a) *Si $k < -5$ ou $k > 3$, on a $|y(x)| \leq 1$.*
   (b) *Si $k \in [-5,-1]$, $\quad |y(x)| \geq 1 \quad ssi \quad \theta \in [0,\theta_k]$.*
   (c) *Si $k \in [-1,3]$, $\quad |y(x)| \geq 1 \quad ssi \quad \theta \in [\theta_k,\pi]$.*

Démonstration.

1. $y(x)$ non définit ssi $2\cos\theta + k + 1 = 0$.
   On pose $2\cos\theta + k + 1 = 0$, alors $\cos\theta = \dfrac{-k-1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\dfrac{-k-1}{2}\right)$.
   alors $y(x)$ est bien définit ssi $\theta \neq \arccos\left(\dfrac{-k-1}{2}\right)$ tq $k \in \mathbb{Z}$.
2.

$$\left|\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta+1+k}\right| \geq 1 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\cos\theta}{2\cos\theta+1+k} \geq 1 \cdots (\star), \\ \dfrac{2\cos\theta}{2\cos\theta+1+k} \leq -1 \cdots (\star\star). \end{cases}$$

on a : $\theta \neq \arccos\left(\dfrac{-k-1}{2}\right)$.

$$(\star) \Longrightarrow \begin{cases} 2\cos\theta \geq 2\cos\theta + 1 + k \Rightarrow k \leq -1, \\ ou \\ 2\cos\theta \leq 2\cos\theta + 1 + k \Rightarrow k \geq -1, \end{cases}$$

$$(\star\star) \quad \Longrightarrow \begin{cases} 2\cos\theta \leq -2\cos\theta - 1 - k, \\ ou \\ 2\cos\theta \geq -2\cos\theta - 1 - k, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4\cos\theta \leq -k-1, \\ ou \\ 4\cos\theta \geq -k-1, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \cos\theta \geq \dfrac{-k-1}{4}, \\ ou \\ \cos\theta \geq \dfrac{-k-1}{4}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \theta \geq \arccos\dfrac{-k-1}{4}, \\ ou \\ \theta \leq \arccos\dfrac{-k-1}{4}. \end{cases}$$

Par conséquence, pour $\arccos\dfrac{-k-1}{4}$ à des valeurs réels, il faut que $-5 \leq k \leq 3$.

□

Lemme 3.2 ([18]).

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}, \quad \int_0^\alpha \log|2\cos(t)|dt = \mathrm{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \mathrm{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

.

Remarque 3.3.

Soient $O_k = \arccos\left(\frac{-k-1}{2}\right)$ *et* $\theta_k = \arccos\left(\frac{-k-1}{4}\right)$.

Pour $k \leq -5$:

$$m(P_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log|2\cos\theta + 1 + k| d\theta$$

Pour $k \in [-5, -3]$:

$$m(P_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \mid 2\cos\theta + 1 + k \mid d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_k} \log \mid \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta + 1 + k} \mid d\theta$$

. Pour $k \in [-3, -1]$:

$$m(P_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \mid 2\cos\theta + 1 + k \mid d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{0_k} \log \mid y(x) \mid d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_k} \log \mid y(x) \mid d\theta$$

. Pour $k \in [-1, 1]$:

$$m(P_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \mid 2\cos\theta + 1 + k \mid d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\theta_k}^{\pi} \log \mid y(x) \mid d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{0_k}^{\pi} \log \mid y(x) \mid d\theta$$

. Pour $k \in [1, 3]$:

$$m(P_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \mid 2\cos\theta + 1 + k \mid d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\theta_k}^{\pi} \log \mid y(x) \mid d\theta$$

. Pour $k \geq 3$

$$m(P_k) = \int_0^{\pi} \log \mid 2\cos\theta + 1 + k \mid d\theta$$

.

Proposition 3.4.

Soient $\theta_k = \arccos\left(\frac{-k-1}{4}\right)$

Si $k \in [-5, -3]$ *on a :*

$$m(P_k) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_k}^{\pi} \log|2\cos\theta + 1 + k| d\theta + \frac{1}{\pi} Ls_2(\frac{\pi}{2} - \theta_k) - \frac{1}{\pi} Ls_2(\frac{\pi}{2} - \theta_k).$$

Si $k = -3$ *on trouve :*

$$m(P_{-3}) = \frac{2}{3}\log(2) + \frac{2}{\pi} Ls_2(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{\pi} Ls_2(\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{\pi} Ls_2(\frac{5\pi}{6}).$$

Démonstration.

$$m(P_k) = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_k}^{\pi} \log|2\cos\theta + 1 + k|d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\theta_k} \log|2\cos\theta|d\theta.$$

par Lemme 3.2, on trouve :

$$m(P_k) = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_k}^{\pi} \log|2\cos\theta + 1 + k|d\theta + \frac{1}{\pi}CL_2(\frac{1}{\pi} - \theta_k) - \frac{1}{\pi}CL_2(\frac{\pi}{2} + \theta_k).$$

D'après 2.3 On a :

$$m(P_k) = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_k}^{\pi} \log|2\cos\theta + 1 + k|d\theta + \frac{1}{\pi}Ls_2(\frac{\pi}{2} - \theta_k) - \frac{1}{\pi}Ls_2(\frac{\pi}{2} + \theta_k).$$

Pour $k = -3$: $|2\cos\theta + 1 + k| = |2\cos\theta - 2| = |2(\cos\theta - 1)| = |2(2\sin^2\frac{\theta}{2})| = |4\sin^2\frac{\theta}{2}|$, et $\theta_{-3} = \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, alors

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi} \log|2\cos\theta + 1 + k|d\theta &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \log|4\sin^2\frac{\theta}{2}|d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(\log 2 + 2\log|2\sin\frac{\theta}{2}|\right)d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\log 2 + 2\int_{0}^{\pi}\log|2\sin\frac{\theta}{2}|d\theta - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\log|2\sin\frac{\theta}{2}|d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\log 2 - 2Ls_2(\pi) + 2Ls_2(\tfrac{\pi}{3}).
\end{aligned}$$

Par 2.3 on a $Ls_2(\pi) = 0$ alors :

$$m(P_{-3}) = \frac{2}{3}\log 2 + \frac{2}{\pi}Ls_2(\tfrac{\pi}{3}) + \frac{1}{\pi}Ls_2(\tfrac{\pi}{6}) - \frac{1}{\pi}Ls_2(\tfrac{5\pi}{6})$$

□

Résumé

La mesure de Mahler d'un polynôme peut être formuler par plusieurs méthodes par exemple :les série de Dirichlet ,la fonction zêta ,poly-logarithme et log-sinus…etc.

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux formulations par log-sinus.

Mots clés: *Mesure de Mahler, la fonction L de Dirichlet, Di-logarithme de Bloch-Wigner, intégrales log-sinus, poly -logarithmes multiples, valeurs zêta multiples, fonctions Clausen .*

Abstract

The Mahler measure of a polynomial can be formulated by several methods for example: the series of Dirichlet, zeta function, poly-logarithm and log-sinus...etc

In this thesis, we are interested in the formulation by log-sinus.

Key Words: *Mahler's measure, Dirichlet L function, Bloch-Wigner Di-logarithm, log-sine integrals, multiple poly-logarithms, multiple zeta values, Clausen functions.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Benferhat. variations sur la mesure de Mahler de polynômes de deux variables,thèse de doctorat. Université des sciences et de technologie Houari Boumediene,2010,pp$21-25$.

[2] D. Borwein, J. M. Borwein, A. Straub and J. Wan. Log-sine evaluations of Mahler measures, II. Integers, 12. doi=10.1515/integers-2012-0035.

[3] J. M. Borwein, D. J. Broadhurst, and J. Kamnitzer. Central binomial sums, multiple Clausen values, and zeta values. Experimental Mathematics, 10(1) :25–34, 2001. http://arxiv.org/abs/hep-th/0004153v1.

[4] J. M. Borwein and A. Straub. Log-sinus evaluations of Mahler measures. J. Aust Math. Soc., Mar 2011, Accepted. Available at http://carma.newcastle.edu.au/jon/logsin.pdf.

[5] J. M. Borwein and A. Straub. Special values of generalized log- sine integrals. Proceedings of ISSAC 2011 (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation), March 2011. Available from : http://carma.newcastle.edu.au/jon/logsin3.pdf.

[6] J. M. Borwein, I. J. Zucker, and J. Boersma. The evaluation of character Euler double sums. The Ramanujan Journal, 15(3) :377–405, 2008.

[7] S. Boughzala Hafsa. La mesure de Mahler de polynômes de deux variables. Thèse de doctorat, Université de Paris 6,pp 8.

[8] D. W. Boyd. Mahler's Measure and special values of L-Functions. Experimental Mathematics7, 1998, $37-82$.

[9] D. W. Boyd. Speculations concerning the range of Mahler's measure. Canad. Math. Bull., 24 :453–469, 1981.

[10] A. Davydychev and M. Kalmykov. Some remarks onthe ϵ-expansion of dimensionally regulated Feynman diagrams. Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, 89(1-3) :283–288, Oct. 2000. http://arxiv.org/abs/hep-th/0005287v1.

[11] A. Davydychev and M. Kalmykov. New results for the ϵ-expansion of certain one-, two- and three-loop Feynman diagrams. Nuclear Physics B, 605 :266–318, 2001.http://arxiv.org/abs/hep-th/0012189.

[12] A. Davydychev and M. Kalmyko. Massive Feynman diagrams and inverse binomial sums. Nuclear Physics B, 699(1-2) :3–64, 2004. http://arxiv.org/abs/hep-th/0303162v4.

[13] A. I. Davydychev. Explicit results for all orders of the ϵ-expansion of certain massive and massless diagrams. Phys. Rev. D, 61(8) :087701. Mar 2000. http://arxiv.org/abs/hep-ph/9910224v1.

[14] M. Dussaule. Mesures de Mahler. Rapport de stage de M1 au LAMA. Université de Savoie Mont blanc, Le Bourget-du-lac. $p6 - 12$.

[15] M. Kalmykov and A. Sheplyakov. lsjk - a C++ library for arbitrary-precision numeric evaluation of the generalized log-sine functions. Comput. Phys.Commun. 172(1) :45–59, 2005. http://arxiv.org/abs/hep-ph/0411100.

[16] M. Kalmykov and O. Veretin. Single scale diagrams and multiple binomial sums. Phys. Lett. B, 483(1-3) :315–323, 2000. http://arxiv.org/abs/hep-th/0004010v4.

[17] M. Kalmykov. About higher order ϵ-expansion of some massive two- and three-loop master-integrals. Nuclear Physics B, 718 :276–292, July 2005. http://arxiv.org/abs/hep-ph/0503070.

[18] M. Khalfaoui. Variations sur la mesure de Mahler de certaines familles de polynômes de deux variables. Mémoire de magister. Université de Jijel. 2013.

[19] L. Kronecker. Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten. J. reine und angewandte Mathematik 53 (1857).

[20] N. Kurokawa, M. Lalín, and H. Ochiai. Higher Mahler measures and zeta functions. Acta Arithmetica, 135(3) :269–297, 2008. http://arxiv.org/abs/0908.0171v1.

[21] M. Hindry. Cours : Courbes elliptiques. U.F.R. de mathématiques de l'université Denis Diderot Paris 7. http://webusers.imj.prg.fr/marc.hindry.

[22] S. Lechasseur. Mesure de Mahler superieure de certaines fonctions rationelles. Mémoire des études supérieures. Université de Montréal. Aout 2012.

[23] D . H . Lehmer. Factorization of certain cyclotomic functions. Ann. of Math. (2) 34 (1 933), 46 1-479.

[24] L. Lewin. On the evaluation of log-sine integrals. The Mathematical Gazette 42 :125–128, 1958.

[25] L. Lewin. Polylogarithms and associated functions. North Holland, 1981.

[26] Y. Sasaki. On multiple higher Mahler measures and multiple L values. Acta Arithmetica, 144(2) :159–165, 2010.

[27] C-J Smyth. On measures of polynomials in several variables. Bull. Austral. Math. Soc.23 : $49 - 63, 1981$.

[28] J. Silverman. The Arithmetic of Elliptic Curves. Second Edition-Springer. Heidelberg, New Yourk.pp $42 - 69$ et pp $256 - 257$. 2009.

[29] L. C. Washington. Introduction to cyclotomic fields. Springer (1982).