الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire

Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie *Département de Mathématiques et Informatique*

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: ***Mathématiques***

Spécialité : ***Mathématiques Fondamentales***

Groupes dont tous les sous-groupes de rang infini sont des T- groupes

Préparé par : Boudjemline Amina

Mezhoud Ahlam

Soutenue devant le jury:

Sekhan Chafika	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Président
Rakia Ahmed yahya	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examinatrice
Daoui Amina	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciement

Nous tenons à remercier avant tout Allah qui nous a donné la force, La volonté, Le courage, Et la patience de pouvoir réaliser ce modeste travail.

Mille merci à nos trop chères parents. Nous tenons à exprimer un remerciement particulier à notre encadreur madame ***Daoui Amina*** *qui a bien voulu diriger ce travail, Pour sa présence*

son aide et surtout pour ses précieux conseils.

et on la remercier du fond du cœur. Nous sincères à remerciements sont adressé tous les membres du jury qui ont

accepté de juger notre mémoire. Sans oublier bien-sur tous les personnes de département des mathématiques et informatiques sur tout les enseignants qui nous ont formé durant les années étude.

Et à tous ceux qui, Sans avoir été impliqués directement dans ce travail, Ont toujours été d'un grand support : Nos familles, Nos amis, Nos collègues.

chacun son nom

Dédicace

Je dédie ce présent travail,fruit de cinq ans des études à ceux que j 'aime et je respecte.

Mes chères parents.

Ma mère qui m'a toujours soutenu et encouragé tout au long de mes études ,à mon père pour ces encouragements.

Mon papa et ma maman,Ce travail est le fruit de vos sacrifices que vous avez consentés pour mon éducation et mon avenir.

je vais donc vous dédier ce travail comme un petit cadeau à ce que vous m'avez donné pendant 25 ans.

Ta gentillesse ,Ton soutien moral m'ont permis de réussir mes études.

A mes sœurs : ***Linda , Hanane***

A mon adorable : ***Soheib***

A mes frères : ***Fateh , Zaki***

A tous mes amies proches : ***Amina , Aicha , Ichrak , Asma***

A tous mes enseignants depuis le primaires jusqu 'á maintenant.
Enfin,Je dédie ce mémoire á ceux qui m 'aiment et surtout ceux qui j'aime

AHLAM

Dédicace

Je dédie ce présent travail,fruit de cinq ans des études à ceux que j 'aime et je respecte.

Mes chères parents.

Ma mère qui m'a toujours soutenu et encouragé tout au long de mes études ,à mon père pour ces encouragements.

Mon papa et ma maman,ce travail est le fruit de vos sacrifices que vous avez consentés pour mon éducation et mon avenir.

je vais donc vous dédier ce travail comme un petit cadeau à ce que vous m'avez donné pendant 25 ans.

Ta gentillesse ,Ton soutien moral m'ont permis de réussir mes études.

A mon cher mari : ***Mohamed Tahar***

A la plus belle soeur du monde : ***Randa***

A mes chers frères : ***Naser allah , Oussama***

A mes adorables : ***Sohayb , Elyne***

A mes meilleures amies : ***Ahlam , Nourchen , Nesrine , Rofayda***

Enfin je dédie chaleureusement ce travail a mon petit frère ***Abd el naser*** *Allah yarhmou*

AMINA

Table des matières

Notations

$[x, y]$	:	le commutateur de x et y
$\mid$ G $\mid$	:	l'ordre d'un groupe G
G'	:	le groupe dérivé d'ordre 1
$G^{(n)}$	:	la dérivée n-ème de G
$H \lhd G$	:	H sous-groupe normal dans G
a^G	:	le conjugue de a dans G
$< x >$	:	le sous groupe engendre par x
$\zeta(G)$	:	le centre de (G)
G/H	:	le groupe quotient
$\mathbb{Z}$	:	l'ensemble des entiers
$\mathbb{N}$	:	l'ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}$	:	l'ensemble des réels
x	:	la classe modulo de x
$H \leq G$	:	H sous-groupe de G
$H \sqsubset G$	:	H sous-groupe caractéristique de G
$\{e\} = \{1\}$	:	l'élément neutre d'un groupe
$Aut(G)$	:	l'ensemble des automorphismes de G dans G
$< A >$	:	l'opération de fermeture engendré par l'opération A

Introduction

La partie de l'algèbre générale qui étudie les structures algébriques appelées 'groupes' est la théorie des groupes,Elle est liée à la théorie des nombres,La géométrie algébrique et les représentations.
La théorie des groupes à un rôle capital en physique théorique,Chimie,Cryptographie,........
L'idée de groupe et d'origine l'étude des équations algébriques par Lagrange.
dans ce mémoire on à étudiée les groupes dont tous les sous groupes de rang infini sont des T groupes ,Un T-groupes est un groupes dont la normalité est une relation transitive ie ;
"Tous les sous groupes sous normaux sont normaux"
On sait que la relation de normalité n'est pas transitive,Un contre exemple est :
Dans le groupe de permutation $S4$ on a les sous groupes
$A = \{(1, 2)(3, 4)\}$
$B = \{(1, 2), (3, 4), (1, 3)(4, 2), (2, 3)(4, 1)\}$
on a A normal dans B et B est normal dans $S4$ mais A n'est pas normal dans $S4$
Cependant il existe des groupes dont la normalité est transitive exemples :

1. Les groupes simples non abéliens car les seuls sous groupes normaux sont le groupe même et l'identité.

2. Les groupes de dedekind (les groupes dont tous les sous-groupes sont normaux)sont des T groupes

- ⋆ Le premier chapitre : On a étudie quelques concepts fondamentaux de la théorie des groupes : Résolubilité,Nilpotence,Groupes abéliens ...

- ⋆ Le deuxième chapitre : On a étudie les conditions de finitude, Les opérations de fermeture et quelques classes de groupe ;groupes de Cernikove ,Groupes polycycliques ,...
.

- ⋆ Le troisième chapitre : Nous nous sommes concentrés sur les groupes dont tous les sous groupes de rang infini sont des T-groupes.

Chapitre 1

Concepts Fondamentaux

Notre objectif dans ce chapitre est de donner quelques notions de base concernant la théorie des groupes.
Nous commençons d'abord par définir les suites de composition,Les groupes résolubles et nilpotents,puis en passe aux groupes abéliens,Et on se termine par les classes des groupes.

1.1 Quelques notions de base

1.1.1 Suites de composition

Définition 1.1.1. *Une suite de composition est une chaine finie des sous-groupes G_i de G telle que*

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant G_2 \cdots \geqslant G_n = e$$

Dans le quelle $G_{i+1} \lhd G_i, \forall i = 0, n-1$.
Les groupes quotients Gi/G_{i+1} sont appelés les quotients(ou bien les facteurs)de la suite de composition et n est sa longueur (n est le nombre des quotients).
Si $G_{i+1} \neq G_i, \forall i = 0, n-1$,on dit que la suite de composition est strictement décroissante.

Définition 1.1.2. *Une suite de composition d'un groupe G*

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant G_2 \cdots \geqslant G_n = e$$

est appelée une suite normale si pour touts $i(0 \leq i \leqslant n)$ on a $G_i \lhd G$.

Remarque 1.1.1. 1. *Tout groupe à au moins une suite de composition trivial $1_G \lhd G$.*

2. *La suite de composition $\Sigma : G_0 = e \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ est dite abélienne si ses quotients sont des groupes abéliens.*

1.1.2 Groupes résolubles

Définition 1.1.3. *Soit $(G, *)$ un groupe,$(G, *)$ est abélien si la loi (*) est commutative, i.e :*

$$x * y = y * x, \forall x, y \in G$$

Définition 1.1.4. *A tout couple (x, y) d'un groupe G on associer l'élément : $x^{-1}y^{-1}xy$ et on le note $[x, y]$, Le commutateur des éléments x, y.C'est-à-dire :*

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

Remarque 1.1.2. *Si G est un groupe abélien alors,Tout commutateur est égale à l'élément neutre de G . Car :*

Soit G un groupe abélien $\Leftrightarrow \forall x,y \in G : xy = yx$

$\Leftrightarrow \forall x,y \in G : x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}y^{-1}yx$

$\Leftrightarrow \forall x,y \in G : x^{-1}y^{-1}xy = 1_G$

$\Leftrightarrow [x,y] = 1_G$

Définition 1.1.5. *On appel groupe dérivé de G , Le sous-groupe engendré par l'ensemble des commutateurs de G , On note G' ou $D(G)$.ie :*

$$D(G) = G' = [G,G] = \langle [x,y]; x,y \in G \rangle$$

Remarque 1.1.3. *Si le groupe G est commutatif , Alors $G' = 1_G$*

Notation 1.1.1. *Soit G un groupe :*

- $G' = G^{(1)} = [G,G]$
- $(G')' = (G^{(1)})^{(1)} = [[G,G],[G,G]]$

  .

  .

  .

- $G^{(n)} = [[G,G],[G,G],\cdots,[G,G]]$

Définition 1.1.6. *On dit qu'un groupe G est résoluble s'il existe un entier $n > 0$ tel que $G^{(1)} = 1_G$.*
Le plus petit entier $n > 0$ qui vérifier $G^{(n)} = 1_G$ est appelé le degré de résolubilité ou la longueur dérivé de G.

Remarque 1.1.4. *Tout groupe abélien G est résoluble,Car pour un tel groupe G on a $G' = G^1 = 1_G$.*

Proposition 1.1.1. *Si H est un sous groupe de G, Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a. *H est normal dans G et G/H est abélien.*

b. *$G' \leq H$.*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) Soit $x,y \in G, G/H$ est abélien $\forall \bar{x},\bar{y} \in G/H$ on a :
$[\bar{x},\bar{y}] = H, (H$ est le neutre de $G/H)$,alors :

$$\overline{[x,y]} = H$$

Donc

$$[x,y].H = H$$

Donc

$$[x,y] \in H$$

Alors

$$G' \leq H$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) On a $x, y \in G, [x,y] \in H, \forall x \in G$,

$$[x,y].H = H.$$

donc

$$\overline{[x,y]} = H$$

donc

$$[\bar{x}, \bar{y}] = H$$

donc G/H est abélien. □

Proposition 1.1.2. *Pour un groupe G,Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *G est résoluble.*
2. *Il existe une suite décroissante $(H_k)_{k=0,1,\cdots,n}$,De sous-groupes de G telle que :*

$$1 = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_{n-2} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G$$

Les quotients H_k/H_{k+1} étant abéliens (pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$).

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) Si G est résolubles de classe n, La suite de composition définie par $H_k = G^k$ avec $k = 0, 1, \cdots, n$.

2) $\Longrightarrow$ 1) Il suffit de montrer par récurrence que $G^k \leq H_k (k = 0, 1, \cdots, n)$

L'inclusion était trivial pour $k = 0$,Supposons que l'on ait $G^k \leq H_k (k = 0, 1, \cdots, n)$ on déduit que $G^{(k)'} = G^{k+1} \leq H'_K$. Or H_k/H_{k+1} est abélien,Donc D'après la proposition précédente on a H'_K/H_{k+1}.

Par transitivité de l'inclusion,On obtient $G^{k+1} \leq H_{k+1}$. $\square$

Définition 1.1.7. *On dit qu'un groupe G est metabélien s'il est résoluble et admet une suite de longueur dérivée égale a 2,C-à-dire : G admet une suite abélienne :*

$$\Sigma : e = G_2 \lhd G_1 \lhd G.$$

telle que G/G_1 et G_1/G_2 sont abéliens.

G un groupe metabélein s'il admet un sous-groupe propre non trivial H abélien telle que G/H est abélien.

Définition 1.1.8. *Un groupe G est dit localement résoluble si et seulement si tous ses sous-groupes de type finis sont résolubles.*

1.1.3 Groupes nilpotents

Définition 1.1.9. *(Suite centrale) Une suite de composition d'un groupe G*

$$G = G_0 > G_1 > G_2 > \cdots > G_{n-1} > G_n = e$$

est appelée suite centrale si $G_i/G_{i+1} \leq \zeta(G/G_{i+1})$ pour touts $i(0 \leq i \leq n)$ avec $\zeta(G) =< x \in G, \forall g \in G : xg = gx >$ pour tout $i = \overline{0, n-1}$.

Proposition 1.1.3. *Une suite normale est une suite centrale si et seulement si :*
$\forall i(0 \leq i \leq n-1), [G_i, G] \leq G_{i+1}$.

Démonstration. $\Longrightarrow$ soit Σ une suite normale avec $[G_i, G] \leqslant G_{i+1}$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$,Et soient $x \in G_i$,Et $g \in G$ notons $\bar{x}$ et $\bar{g}$ leur classe modulo G_{i+1},Alors

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x} \Leftrightarrow [x, y] \in G_{i+1}$$

d'où :$[G_i, G] \leqslant G_{i+1}$

$\Leftarrow$ réciproquement,supposons que Σ vérifie la condition $[G_i, G] \leqslant G_{i+1}$ montrons que G_{i+1} est normale dans G

Soit $x \in G_{i+1} etg \in G, G_{i+1} \leqslant G_i \Rightarrow x \in G_i$.

alors , d'après la condition précédente on a :
$[x, y] = x^{-1}(g^{-1}xg) \in G_{i+1}$, d'où $g^{-1} * x * g \in G_{i+1}$, de plus,$[x, g] \in G_{i+1} \Rightarrow \bar{x}\bar{g} = \bar{g}\bar{x}$ dans $\frac{G}{G_{i+1}}$.

$$\frac{G_i}{G_{i+1}} \leqslant \zeta(\frac{G}{G_{i+1}})$$

□

Définition 1.1.10. *Un groupe G est nilpotent s'il est admet une suite centrale.*

Définition 1.1.11. *H est un sous-groupe sous-normale de G,Si H est un sous groupe de G et admet une suite de composition de G vers H*

Définition 1.1.12. *(Suite centrale ascendante)*
étant donné un groupe G on note :

$$\zeta_{0(G)} = 1$$

$$\zeta_{0(G)} = \zeta(G)$$

$$\zeta_2(G) \ \textit{et telle que} \ \zeta(\frac{\zeta}{\zeta_1(G)}) = \zeta(\frac{\zeta}{\zeta_2(G)})$$

$$\zeta_1(G) \ \textit{et telle que} \ \zeta(\frac{\zeta}{\zeta_{i-1}(G)}) = \frac{\zeta_1(G)}{\zeta_{i-1}(G)}$$

On obtient donc une série ascendante , Dite la suite centrale ascendante de G

$$1 = \zeta_0(G) \trianglelefteq \zeta_1(G) \trianglelefteq .... \trianglelefteq \zeta_{i-1}(G) \trianglelefteq \zeta_i(G) \trianglelefteq$$

avec $\frac{\zeta_i(G)}{\zeta_{i-1}(G)} = \zeta(\frac{G}{\zeta_{i-1}(G)})$, Pour tout $i \in N$ avec le groupe G est nilpotent.

Remarque 1.1.5.
- *s'il existe $s \geq 0$ tel que $\zeta_s(G) = G$,On dit que G est nilpotent , Le plus petit entier s est appelé la classe de nilpotence de G.*
- *Si $s = 0$ on a $\zeta_0(G) = e = 1$ donc le groupe trivial est nilpotent de classe 0.*
- *Et $s = 1$ on a $\zeta_0(G) = \zeta(G) = G$ donc G est abélien alors , Les groupes nilpotents de classe 1 sont les groupes abéliens.*

Définition 1.1.13. *(Suite centrale descendante)*
étant donné un groupe G ,On note :

$$\gamma_1(G) = G$$

$$\gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G] = [G, G] = G'$$

$$\gamma_3(G) = [\gamma_2(G), G] = [G, G, G]$$

$$\vdots$$

$$\gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G] = [G, \cdots, G]$$

$$\vdots$$

On remarque que pour tout $i \in N(i \geq 2), \gamma_i(G_\gamma) = [\gamma_{i-1}(G), G] \leq \gamma_i(G)$ *d'où*

$$\frac{\gamma_{i-1}(G)}{\gamma_i\gamma(G)} \leq \zeta(\frac{G}{\gamma(G)}).$$

et on obtient,donc une série descendante,dite la suite centrale descendante de G

$$G = \gamma_1(G) \trianglerighteq \gamma_2(G) \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq \gamma_{i-1}(G) \trianglerighteq \gamma_i(G) \trianglerighteq \cdots$$

avec le groupe G *est nilpotent.*

Remarque 1.1.6. *Le plus petit élément* $n \geq 1$ *tel que* $\gamma_{n+1}(G) = 1$ *est la classe de nilpotence de* G

Théorème 1.1.1. *Un groupe* G *a une suite centrale descendante de longueur* r *si et seulement s'il a une suite centrale ascendante de longueur* r*.*

Démonstration. On considère $G = e$

$\Rightarrow$) On suppose que G a une suite centrale ascendante de longueur r, Et on considère la chaine croissante des sous-groupes ζ_i de G.

Démontrons que pour tout $i(0 \leq i \leq r)$, on a $\gamma_{r+1-i} \leq \zeta_i$.Pour $i = 0, \gamma_{r+1} = (e) = \zeta_0$,La relation est vérifiée.

Raisonnons par récurrence sur i ; Supposons $\gamma_{r+1-i} \leq \zeta_i$ pour $0 \leq i \leq r-1$ et montrons que $\gamma_{r-1} \leq \zeta_{i+i}.\gamma_{r+1-i} = [\gamma_{r-i}, G]$ donc équivaut à $[\gamma r - i, G] \leq \zeta_i$; or ζ_{i+1} est le plus grand sous-groupe de G contenant ζ_i tel que $[\zeta_{i+i}, G] \leq \zeta_i$ par suite on a $\gamma_{r-i} \leq \zeta_{i+1}$ pour $i = r$ on trouve $\gamma_1 = G \leq \zeta_r$, donc $\zeta_r = G$.

On conclut que G a une suite centrale ascendant de longueur $s \leq r$

$\leftarrow$) supposons maintenant que G a une suite centrale descendante de longueur s et considérons la chaine décroissante de sous-groupe γ_i de G.

montrons que pour tout $i(1 \leq i \leq s+1)$, on a $\gamma_i \leq \zeta_{s+1-i}$,cette relation est vraie pour $i = 1$,Car $\gamma_1 = G = \zeta_s$.

raisonnons par récurrence sur i ; La relation étant supposée vrai pour $i(1 \leq i \leq s)$,

montrons que $\gamma_i \leq \zeta_{s-i}$

$$\gamma_i \leq \zeta_{s+1-i} \Rightarrow [\gamma_i, G] \leq [\zeta_{s+1-i}, G].$$

□

Définition 1.1.14. *Un groupe G est dit localement nilpotent si est seulement si tous ses sous-groupes de type fini sont nilpotents .*

1.1.4 Groupe abélien

Définition 1.1.15. *(Sous groupe de torsion) Les éléments d'ordre fini dans un groupe constitue un sous groupe appelé le sous-groupe de torsion.*

Théorème 1.1.2. *(Théorème de décomposition) Dans un groupe abélien G,Le sous-groupe de torsion T est la somme directe de sous-groupe des composantes p-premiers .*

Définition 1.1.16. *Un groupe abélien G est divisible si tout élément est divisible par tout entier positive. c'est à dire : tout élément de G a une infinité de p-hauteur pour tout p-premier .*

Les groupes quasi cycliques

Le groupe additif des nombres rationnels est Q ; le quotient d'un groupe divisible est divisible ,Alors Q/Z est divisible,C'est un groupe de torsion si $n(m/n + Z) = 0_{Q/Z}$.
D'après le théorème de composition,Le groupe Q/Z est la somme directe du composante première
Le groupe P est réalisé comme P-composante de Q/Z et il a un P-groupe divisible abélien .
P appelé un P-groupe quasi cyclique.
On peut voir que tout groupe abélien divisible est une somme directe de groupes quasi cycliques et copies de Q.

1.1.5 Propriétés d'injection des groupes abéliens divisibles

Un groupe abélien est injectif si on a un monomorphisme $\mu : H \longrightarrow K$ et $\alpha : H \longrightarrow G$ un homomorphisme avec H et K deux groupes abéliens.Et un homomorphisme $\beta : K \longrightarrow G$ tel que $\alpha = \beta \circ \mu$.

Proposition 1.1.4. *Baer Un groupe abélien est injectif si et seulement si est divisible.*

Proposition 1.1.5. *(Baer) Si D est un sous-groupe divisible d'un groupe abélien G ,alors $G = D \oplus E$ pour E un sous-groupe.*

Proposition 1.1.6. *Un groupe abélien est dit réduit s'il n'a pas un sous groupe divisible non trivial.*

Proposition 1.1.7. *Si G un groupe abélien,il existe le plus grand sous-groupe divisible unique D de G.*
En outre, $G = D \oplus E$ ou E est un groupe réduit .

Démonstration. On définit D le sous-groupe engendré par tous les sous-groupes divisibles de G.Alors D est divisible,par la proposition (Bear) il est possible d'écrire $G = D \oplus E$ bien sur E est réduit. □

1.1.6 La structure des groupes abéliens divisibles

Théorème 1.1.3. *Un groupe abélien G est divisible si et seulement si est une somme directe des copies isomorphes de Q et des groupes quasi-cycliques.*

1.1.7 Sous-groupes des groupes divisibles

Proposition 1.1.8. *Tout groupe abélien est isomorphe avec un sous-groupe d'un groupe abélien divisible.*

Démonstration. Soit F un groupe abélien libre ;on a de précédent F est une somme directe d'une infinité des groupes cycliques,
par conséquent,F est isomorphe avec un sous-groupe d'une somme directe D des copies de Q.
Maintenant,tout groupe abélien est une image de quelque F et par conséquent,Est isomorphe avec un sous-groupe d"un groupe de quotient de D.
mais le quotient de D ;Comme D est divisible
d'où le résultat □

Somme directe des groupes cycliques et quasi-cycliques

Proposition 1.1.9. *Si G un groupe abélien,Deux sous-ensemble indépendantes qui contient des éléments avec un ordre des puissances p-premiers a le même cardinal. La même est vraie de sous-ensemble maximale qui consiste des éléments d'ordre infini , Donc* $r_0(G), r_p(G)$,*Et* $r(G)$ *ne dépend que de* G.

Proposition 1.1.10. *Supposons que G un groupe abélien ,Peut être exprimer comme une somme directe des groupes quasi-cycliques,Groupes cycliques d'ordre puissance d'un nombre premier et groupes cycliques infinis.*
Alors,L'ensemble des sommes directes de chaque isomorphismes dans les deux décompositions ont le même cardinal.

Groupes abéliens libres

Un groupe abélien libre est un groupe libre dans la variété des groupes abéliens,ces groupes sont juste des sommes directes des groupes cycliques infinis.
Tandis que tout groupe abélien est une image d'un groupe libre donc tout sous-groupes des groupes abéliens sont également libres abéliens.

Théorème 1.1.4. *Si F un groupe abélien dans un ensemble X et H un sous-groupe de F,Alors H est libre abélien dans un ensemble Y ou $|Y| \leqslant |X|$.*

Propriété de projection des groupes libre abéliens

Un groupe abélien G est projective si un épimorphisme $\varepsilon : K \to H$ et un homomorphisme $\alpha : G \to H$,Pour quelques groupes abéliens H et K,Il existe un homomorphisme $\beta : G \to K$ tel que $\epsilon \circ \beta = \alpha$,
On remarque que la projection est dérivée de l'injection en inversant toutes les flèches et remplaçant le monomorphisme par un épimorphisme .

Théorème 1.1.5. *(Mac-lane) Un groupe abélien G est projectif si et seulement si G est libre abélien.*

Théorème 1.1.6. *Si G est abélien et H un sous-groupe de G tel que G/H est abélien libre alors : $G = H \oplus K$,pour quelque sous-groupe K .*

.

Démonstration. Soit $F = G/H$ et on note l'homomorphisme canonique G à F par α , Ensuite, F est projectif, Avec β un homomorphisme ,Donc $\beta\alpha = l$,Si $g \in G$, On a $(g -$

$(g)\alpha\beta)\alpha = (g)\alpha - (g)\alpha = 0$ Alors $g \in ker\alpha + Im\beta$;par conséquent $G = ker\alpha \oplus Im\beta$,Alors $\beta\alpha = 1$ implique que $ker\alpha \cap Im\beta = 0$.
par conséquence $G = \ker\alpha \oplus Im\beta$
de plus $ker\alpha = H$. □

La structure des groupes abéliens finis

Lemme 1.1.1. *Soit G un P-groupe abélien dont tous les éléments ont des ordres bornés et soit g un élément d'ordre maximal dans G,Alors $< g >$ est une somme directe dans G.*

Théorème 1.1.7. *(Frobenius-stickelberger) Un groupe abélien G est fini si et seulement si$G$ est une somme directe de groupes cycliques finis avec un ordre des puissances des nombres premiers.*

Démonstration. Supposons que G est fini,D'après les résultats précédents on peut présumer que G est un P-groupe non trivial,Si g est un élément d'ordre maximal dans G,Ensuite $G = G_1 \oplus < g >$ par $4 - 2 - 7$
mais $|G_1| < |G|$,alors on peut appliquer l'induction dans l'ordre de groupe à G_1,on obtient le résultat .
L'inverse est évident. □

La structure des groupes abélien de type fini

Tout groupe commutatif ou non commutatif,Avec une condition maximale sur des sous-groupes est de type fini,Pour les groupes abéliens l'inverse est vraie.

Théorème 1.1.8. *Un groupe abélien G satisfait la condition maximale si et seulement si G est de type fini.*

Proposition 1.1.11. *Un groupe abélien G de type fini s'il est un groupe de torsion.*

Démonstration. Si $G =< g_1, \cdots, g_n >$ et $G_i =< g_i >$,Ensuite G est la somme des groupes finis $G_1, \cdots, G_n$.
Par conséquence G est fini. □

Proposition 1.1.12. *G un groupe abélien est de type fini si et seulement si est une somme directe un nombre fini de groupes cycliques d'ordres infinis ou puissance d'un nombre.*

Théorème 1.1.9. *(Kuros) Un groupe abélien G satisfait la condition minimale si et seulement si est une somme directe de groupes quasi-cycliques et groupes cycliques d'ordre puissance d'un nombre premier.*

Sous groupes pures et P-groupes

Proposition 1.1.13. *Soit $H \leq K \leq G$ est un groupe abélien, Si H est propre en G et $\dfrac{K}{H}$ est pure en $\dfrac{G}{H}$, Alors K est propre en G*

Démonstration. Soit $K \in nG$ et écrire $K = ng$ ou $g \in G$ ensuite $K + H = n(g + H)$ d'où par pureté de $\dfrac{K}{H}$,on a $K+H = n(K'+H)$ pour certain K' dans K,Donc $h = K-nK' \in H$ puisque $h = ng - nK' = n(g - k')$ la pureté de H dans G les rendements $h = nh'$ avec $h' \in H$,Donc $k = nh' + nk' = n(h' + k') \in nk$, Cela prouve le résultat. □

Proposition 1.1.14. *Soit G un p-groupe abélien, Si chaque élément, D'ordre p a une hauteur infinie,Alors G est divisible.*

Démonstration. Si G est non divisible il existe un élément de G d'ordre le plus petit qui n'est pas divisible par p ,Soit $\mid g \mid= p^m$ par hypothèse $m > 1$ maintenant $p^{m-1}g$ a l'ordre p et a donc une hauteur infinie, Nous pouvons donc certainement écrire $p^{m-1}g = (p^m)^{g_1}$ pour certain g_1 dans G, Il s'ensuit que $p^{m-1}(g - pg_1) = 0$ et $g_2 = pg_3$ pour certains g_3 dans G par conséquent $g = g_2 + pg_1 = p(g_3 + g_1)$ en contradiction avec notre choix de g. □

Proposition 1.1.15. *Soit G un P-groupe abélien non divisible ,Alors G a un sous-groupe cyclique pure non trivial.*

1.1.8 Sous groupes de base

Proposition 1.1.16. *Tout groupe torsion abélien G est sous-groupe de base.*

1.1.9 Structure des groupes abéliens bornés

Théorème 1.1.10. *(Prufer,bacr) Un groupe abélien G est borné si est seulement s 'il est une somme directe des groupes cycliques d'ordres finis bornés.*

Démonstration. Soit G borné et B un sous groupe de base , Alors $\frac{G}{B}$ est a la fois divisible et borné mais cela ne peut signifier que $G = B$ une somme directe de groupe cycliques l'inverse est clair. □

En général ; un groupe de torsion abélien a de nombreux sous-groupes de base mais c'est un fait remarquable qu'ils sont tous isomorphes.

Théorème 1.1.11. *(kulikov,fuchs) Si G est un groupe de torsion abélien tous les sous-groupes de base de G sont isomorphes.*

Proposition 1.1.17. *B est un sous-groupe de base de G .*

Démonstration. Naturellement B est une somme directe de groupe cyclique si $x \in p^m g \cap B$, ensuite $Y = P^m(x_1, x_2, \cdots) = (y_1, y_k, 0, 0, \cdots) pourcertains x_i, y_i, en G_i et K \geq 0$. par conséquent $Y_i = p^m x_i$ et $x = (p^m x_1, \cdots, p^m x_k, 0, 0, \cdots) = p^m(x_1, x_2, \cdots x_k, 0, 0, \cdots)$ $p^m B$ donc B est propre en G ,Laissez ensuite $x = (x_1, x_2, \cdots)$ en G avoir l'ordre p^m, Ensuite $p^m x_i = 0$ et si $i > m$ on a $x_i \in pG_i$ puisque $\mid G_i \mid = p^i$,Par conséquent $x \in B + PG$ et $\frac{G}{B} = P(\frac{G}{B})$ ce qui implique que $\frac{G}{B}$ est divisible. □

Sous groupes bornés pures

Proposition 1.1.18. *Un sous-groupe H borné pure d'un groupe abélien G est une somme directe.*

Proposition 1.1.19. *Soit T le sous groupe de torsion d'un groupe abélien G,Si T est la somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe borné alors T est une somme directe de G. Facilement de* 1.1.3 *et* 1.1.19 *aidons nous pour montrer que le sous-groupe de torsion n'est pas toujours une sommation directe.*

Proposition 1.1.20. *Si C est la somme cartésienne des groupes cycliques d'ordre $p, p^2, p^3, \cdots$ Le sous-groupe de torsion T n'est pas une somme directe de G .*

Proposition 1.1.21. *Si G un groupe abélien qui n'est pas de torsion ,Il a une somme directe non trivial qui est soit cyclique ou quasi- cyclique .*

Démonstration. Soit T le sous groupe de torsion de G ,si T est divisible c'est une sommation direct et G a une sommation direct quasi cyclique , Si T est non divisible il a un sous groupe cyclique pure non triviale de 1.1.15, En appliquent 1.1.19 nous conclurons qu'il s'agit d'une somme direct de G car il est clairement pure en G . □

Proposition 1.1.22. *Un groupe abélien indécomposable qui n'est pas de torsion est soit un p-groupe cyclique, Soit un groupe quasi- cyclique.*

Proposition 1.1.23. *Un p- groupe G abélien a un p-rang fini si et seulement si c'est une somme directe de plusieurs groupes cycliques et quasi- cycliques.*

Démonstration. Si $G \neq 0$ et $r_p(G) < \infty$ alors G a par (4.3.11) une décomposition $G = G_1 \oplus G_2$ ou G_1 est cyclique non trivial ou quasi-cyclique ,Puisque $r_p(G) = r_p(G_2) + 1$, On peut appliquer la récurrence ion sur le rang a G et obtenir le résultat souhaité. □

Sur la base de 1.1.23 et 1.1.11 , Nous conclurons que pour un p-groupe abélien avoir un rang fini équivalent à la condition minimale

critère de P-groupe cyclique de kulikov

Théorème 1.1.12. *(kulikov) Un P-groupe G abélien est une somme directe de groupe cyclique si et seulement s'il existe une chaine ascendante de sons groupes $G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n \leq \cdots$ dont l'union est G telle que la hauteur d'un élément non nul de G ne peut pas dépasser un entier positif $K(n)$.*

Proposition 1.1.24. *Un P-groupe G abélien dénombrable est une somme directe de groupe cyclique si et seulement s'il ne contient aucun élément non trivial de hauteur infinie.*

Théorème 1.1.13. *(kulikov) Si G est une somme directe de groupes cycliques chaque sous groupe de G est également une somme directe de groupes cycliques.*

Groupes sans torsion

Définition 1.1.17. *On dit qu'un groupe est sans torsion s'il n'a pas des éléments d'ordre fini.*

Proposition 1.1.25. *(Baer) Deux groupes abéliens sans torsion de rang ≤ 1 isomorphes si et seulement s'ils ont le même type de plus chaque type est le type d'un groupe abélien sans torsion de rang 0 ou 1.*

Par exemple $\mathbb{Z}$ a le type $(0, 0, \cdots, 0)$ Et $\mathbb{Q}$ a le type de $(\infty, \infty, \cdots)$ le groupe de tous les rationnels pyadique ,$m2^n(m, n \in (\mathbb{Z})$,A le type de $(\infty, 0, 0, \cdots)$ il est clair que l'ensemble des classes d'isomorphisme des groupes abéliens sans torsion de rang 1 a le cardinal 2_0^N

Proposition 1.1.26. *Il existe des groupes abéliens indécomposables sans torsion de rang 2 qui ont exactement deux automorphismes.*

Proposition 1.1.27. *(Pontryagin) Soit G un groupe abélien dénombrable sans torsion alors G est abélien libre si et seulement si chaque sous-groupe de rang fini est abélien libre.*

1.1.10 Sommes cartésiennes infini des groupes cycliques

Théorème 1.1.14. *(Specker) Soit G une somme cartésienne d'une infini des groupes cycliques infinis alors G n'est pas exprimable comme une somme directe des groupes indécomposables en particulier.G n'est pas abélien libre.*

Théorème 1.1.15. *(Specker) Soit G une somme cartésienne de groupes cycliques infinis, Alors chaque sous-ensemble de G est contenu dans une somme directe de type fini de G dont le complément direct est également une somme cartésienne de groupes cycliques infinis.*

Théorème 1.1.16. *(Specker) Si G est une somme cartésienne de groupes cycliques infinis chaque sous-groupe dénombrable de G est abélien libre.*

1.1.11 Les classes des groupes

Définition 1.1.18. *Puisque certaines classes naturelle des groupes se répètent fréquemment , il est commode d'avoir un alphabet fixe des classes :*

$\mathfrak{F}$ *pour les groupes finis.*

$\mathfrak{C}$ *pour les groupes cycliques.*

$\mathfrak{F}_\pi$ *pour les p-groupes finis.*

$\mathfrak{A}$ *pour les groupes abéliens.*

$\mathfrak{B}$ *pour les groupes périodiques.*

$\mathfrak{N}$ *pour les groupes nilpotents.*

$\mathfrak{S}$ *pour les groupes de type finis.*

$\mathfrak{G}$ *pour les groupes résolubles.*

Remarque 1.1.7.

1. *Les groupes qui appartiennent a une classe X sont appelés x-groupe.*

2. *les deux classes extrêmes des groupes sont :*

** la classe de tous les groupes* $\mathfrak{D}$.

** la classe des groupes triviaux* $\mathfrak{I}$.

1.1.12 groupe libre

Définition 1.1.19. *Soit F un groupe et $\sigma : X \to F$ une application d'un ensemble non vide X dans le groupe F.*
On dit que (F, σ) est libre sur X si pour tout groupe G et tout application $\sigma : X \to G$ il existe un unique homomorphisme $\beta : F \to G$ vérifiant $\beta\sigma = \alpha$. Donc, Le groupe F est libre, S'il existe un ensemble non vide X et une application $\sigma : X \to F$ tell que (F, σ) soit libre sur X

Remarque 1.1.8. *l'application σ dans la définition précédente est nécessairement injective.*

Chapitre 2

Conditions de finitude

Dans ce chapitre nous allons étudier deux parties essentiels dans la théorie des groupes, La première partie est dédiée aux conditions de finitude ; opérations de fermeture usuelles ; groupe finement présenté ; groupe de rang fini ; groupe périodique ; condition maximales et minimales.

2.1 Conditions de finitude

Définition 2.1.1. *(Opérations de fermeture) Une opération A est appelée opération de fermeture si elle est idempotente,C'est a dire si $A = A^2$.*

2.1.1 Opérations de fermeture usuelles

- L'opération de fermeture d'identité I par $I\chi = \chi$ pour tout χ
- L'opération du fermeture universelle U définie par $U\chi = D$ pour tous $\chi \neq \Im$,et $U\Im = \Im$
- Les opérations de fermeture universelles les plus connues :

a $\chi = S\chi$ si chaque sous-groupe d'un χ-groupe est un χ-groupe.Autrement dit la classe χ est S-fermée.

b $\chi = Sn\chi$ si tous sous-groupe normale d'un χ-groupe et un χ-groupe.Autrement dit la classe χ est Sn-fermée.

c $\chi = H\chi$ si chaque image homomorphe d'un χ-groupe est un χ-groupe.Autrement dit la classe χ est H-fermée.(Q est souvent utilisé a la place de H) .

d $\chi = p\chi$ si chaque extension d'un χ-groupe est un χ-groupe,ie :si $\chi = \chi^2$.Autrement dit la classe χ est p-fermée.

Définition 2.1.2. *(Conditions de finitude) Une condition de finitude est une propriété théorique de groupe qui est possédée par tous les groupes finis.Principalement les conditions de finitude qui sont proches de la propriété d'être fini.*

2.1.2 Groupes finement présentés

Définition 2.1.3. *Soit la chaine des groupes et des morphismes des groupes suivantes :*

$$\cdots \to G_{n-1} \to G_n \to G_{n+1} \to \cdots$$

Cette chaine est dite chaine exacte en G_n si $Im(f_{n-1}) = ker(f_n)$. On dit que la chaine est exacte si elle est exacte en chaque groupe de la suite .

Définition 2.1.4. *Une présentation du groupe G est une chaine exacte de groupes :*

$$1 \to R \to F \to G \to 1 \tag{2.1}$$

Ou F est un groupe libre. Si G est de type finie on peut supposer que F est de rang fini.Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ un ensemble des générateurs libres pour F,et soit $(x^\theta)_i = a_i$,de *sorte que* $G =< a_1, \cdots, a_m >$.

La chaine exacte (2.1) est une présentation finie de G *s'il existe un nombre fini d'éléments* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ *de* F *tels que*

$$\ker\theta = \alpha_1^F, \cdots, \alpha_n^F.$$

Lemme 2.1.1. *La classe des groupes finement présentés est* P*-fermée.*

Démonstration. Soit N un sous-groupe normal d'un groupe G et supposons que N soit engendrée par $a_1, \cdots, a_m$,Pour les relations $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ et que G/N soit engendrée par $b_1N, \cdots, b_rN$ pour les relations $\sigma_1 = \cdots = \sigma_s = 1$.

Évidemment,G peut être engendrée par les éléments.

$$a_1, \cdots, a_m, b_1 \cdots, b_r \tag{2.2}$$

Pour certain mot λ_j, μ_{ij} et υ_{ij} il y a des relations $\sigma_i(b) = \lambda_i(a), (a^{b_j})_i = \mu_{ij}(a)$ et $(a_i)^{b_{j-1} = \upsilon_{ij}(a)}$.

Donc,Les relations suivantes sont satisfaites par les générateurs de (2.2). $\square$

$$\begin{array}{rcl} \alpha_i(a) & = & 1, (i = 1, \cdots, n) \\ \sigma_j(b) & = & \lambda_j(a), (j = 1, \cdots, s) \\ (a_i)^{b_j} & = & \mu_{ij}(a) \text{ et } (a^{b_{j-1}})_i = \upsilon_{ij}(a)(i = 1, \cdots, m, j = 1,, r) \end{array}$$

Soit $\bar{G}$ est un groupe engendré par $\bar{a_1}$,$\cdots$,$\bar{a_m}$,$\bar{b_1}$,$\cdots$, ,Pour la relation (2.3) dans les $\bar{a}_i$ et $\bar{b_j}$.Ce sera suffisant pour prouver que $G \backsimeq \bar{G}$.L'application $\bar{a_i} \to a_i$,$\bar{b_j} \to b_j$ détermine un homomorphisme de $\bar{G}$ sur G.
Soit K le ker de cet homomorphisme.Clairement $\bar{a_i} \to a_i$ détermine un isomorphisme de $\bar{N} =< \bar{a_1}, \cdots, \bar{a_m} >$ avec N,donc $K \cap \bar{N} = 1$.
Maintenant,$\bar{N} \lhd \bar{G}$ par le troisième ensemble de relation 2.3 alors,$b_jN \to b_jN$ détermine un isomorphisme de $\bar{G}/N$. Donc $K \leq \bar{N}$ et $K = 1$.

Définition 2.1.5. *Une extension de groupe est une manière pour décrire un groupe en terme de 2 groupes <plus petit>.*

Une extension d'un groupe Q *par un groupe* N *est un groupe* G *qui s'insère dans une suite exacte courte .*

$$1 \to N \to G \to Q \to 1$$

G est une extension de Q par N si N est un sous-groupe normale de G et Q est le groupe quotient G/N.

2.1.3 Groupes de rang fini

Définition 2.1.6. *(Rang de Prûfer) On dit qu'un groupe est de rang fini r si tout sous-groupe de type fini peut être engendré par r éléments et si r est le plus petit entier positif avec cette propriété .*

2.1.4 Groupes périodiques

Définition 2.1.7. *Un groupe périodique est un groupe dont chacun des éléments a un ordre fini.*
Si G est un groupe périodique ,alors,l'exposant de G est le plus petit commun multiple des ordres des éléments de G ,si cela n'existe pas,G d'exposant infini.
La classe des groupes localement finis,dans lesquels chaque sous-groupe de type fini est fini ,est une sous-classe de la classe des groupes périodiques.

2.2 Conditions maximales et minimales

2.2.1 Conditions maximales sur les sous-groupes

Définition 2.2.1. *On dit qu'un groupe G vérifie la condition maximale(ou simplement Max) si tout ensemble non vide de sous-groupes de G possède un élément maximal.*

Définition 2.2.2. *On dit qu'un groupe G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes normaux(ou simplement Max-n) si tout ensemble non vide de sous-groupes normaux de G possède un élément maximal.*

Définition 2.2.3. *On dit qu'un groupe G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes sous-normaux(ou simplement Max-s) si tout ensemble non vide de sous-groupes sous-normaux de G possède un élément maximal.*

Définition 2.2.4. *On dit qu'un groupe G vérifie la condition maximale sur les sous-groupes abéliens(ou simplement Max-ab) si tout ensemble non vide de sous-groupes abéliens de G possède un élément maximal.*

Proposition 2.2.1. *Un groupe nilpotent vérifie la condition maximale si et seulement s'il est de type fini.*

Démonstration. Il est claire qu'il suffit d'établir qu'un groupe nilpotent de type fini vérifie la condition maximale,La réciproque étant immédiate. □

2.2.2 Conditions minimales sur les sous-groupes

Définition 2.2.5. *On dit qu'un groupe G vérifie la condition minimale(ou simplement Min) si tout ensemble non vide de sous-groupes de G possède un élément minimal.*

Définition 2.2.6. *On dit qu'un groupe G vérifie la condition minimale sur les sous-groupes normaux(ou simplement Min-n) si tout ensemble non vide de sous-groupes normaux de G possède un élément minimal.*

Définition 2.2.7. *On dit qu'un groupe G vérifie la condition minimale sur les sous-groupes sous-normaux(ou simplement Min-s) si tout ensemble non vide de sous-groupes sous-normaux de G possède un élément minimal.*

Définition 2.2.8. *On dit qu'un groupe G vérifie la condition minimale sur les sous-groupes abéliens(où simplement Min-ab) si tout ensemble non vide de sous-groupes abéliens de G possède un élément minimal.*

2.2.3 Groupes de Černikove

Définition 2.2.9. *On dit qu'un groupe G est de Cernikove ,S'il est une extension fini d'un groupe abélien vérifiant la condition minimale ,C'est à dire :s'il existe un sous-groupe $A \lhd G$ tel que A soit abélien vérifiant Min et G/A soit fini.*

2.2.4 Groupes polycycliques

Définition 2.2.10. *X un sous-ensemble d'un groupe G,L'intersection de tout les sous-groupes de G contenant X est un sous-groupe de G appelé le sous-groupe engendré par X,Et on le note $< X >$.*

$$< X > \text{ est le plus petit sous-groupe de } G \text{ contenant } X.$$

Définition 2.2.11. *Un groupe G est dit groupe de type fini s'il est engendré par un nombre fini des éléments.*

Définition 2.2.12. *Un groupe G est monogène s'il admet un unique générateur $a \in G$(ie :engendré par un seul élément),C'est à dire :*

$$G =< a >$$

Si G est monogène fini on dit que G est cyclique.

Définition 2.2.13. *On dit qu'un groupe G est polycyclique s'il admet une série cyclique. Une série cyclique est une série dont les quotients sont des groupes cycliques.*

Proposition 2.2.2. *G est un groupe polycyclique si et seulement s'il est résoluble et vérifie la condition maximale.*

Démonstration. $\Rightarrow$ Soit $1 = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G$ des sous-groupes de G,tels que H_K/H_{K+1} soit cyclique pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$.En particulier,Les quotients H_K/H_{K+1} sont résolubles et ils vérifient la condition maximale.Mais la résolubilité et la condition maximale sont des propriétés stable par extension donc G est résoluble et vérifie la condition maximale.

$\Leftarrow$ Le groupe G est résoluble donc il possède une série $1 = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G$ tels que H_k/H_{k+1} soit abélien pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$.De plus,G vérifiant la condition maximale,H_k/H_{k+1} est de type fini.Or,suivant un résultat bien connu,un groupe abélien de type fini est isomorphe à un produit direct d'un nombre fini des groupes cycliques.

Supposons que pour un entier k donné ($k \in 0, 1, 2, \cdots, n-1$),$H_k/H_{k+1}$ soit isomorphe au produit direct $A_1 \times A_2 \times \cdots A_t$,Les groupes A_t étant cycliques.

La série à quotient cyclique $1 \trianglelefteq A_1 \trianglelefteq A_1 \times \trianglelefteq A_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq A_1 \times \cdots \times A_t \cong H_k/H_{k+1}$ donc H_k/H_{k+1} est polycyclique car la polycyclicité étant stable par extension,G est polycyclique. □

Lemme 2.2.1. *Tout groupe abélien de type fini est polycyclique.*

Démonstration. Soit G un groupe abélien de type fini.Alors $G =< x_1, x_2, \cdots, x_n >$ pour certains $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de G.

Posons $G_0 = 1$ et $G_i =< x_1, x_2, \cdots, x_i >$ ou $1 \leq i \leq n$;donc $G_i =< x_i > G_i - 1$ car G est abélien,on trouve la série $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_{n-1} \triangleleft G_n = G$ dont les quotients :$G_i/G_{i-1} =< x_1 > G_{i-1}/G_{i-1} =< x_i G_{i-1} >$ sont cycliques.D'où G est polycyclique. □

2.2.5 Groupes résiduellement finis

Définition 2.2.14. *Soit G un groupe,On appelle résiduel fini de G et on note R,L'intersection de tous les sous-groupes normaux d'indice fini dans G, C'est à dire :*

$$R = \cap N \backslash N \lhd G et G/N \in F$$

Définition 2.2.15. *Soit G un groupe le sous-groupe de Frattini $\Phi(G)$ est l'intersection des sous-groupes maximaux de G.*

Chapitre 3

groupe dont tous les sous-groupes de rang infini ont une relation de normalité transitive

Dans ce chapitre nous allons étudier deux parties essentiels : groupe dont tous les sous-groupes de rang infini ont une relation de normalité transitive,Sous groupe de fitting.

Définition 3.0.16. *Un groupe G est dit T-groupe (ou d'avoir la propriété T)si la normalité dans G est transitive i.e si tout les sous groupes sous normaux de G sont normaux La structure des T-groupe résoluble à été décrite par W gasch dans le cas fini et par D.J.S,Robinson Pour des groupes arbitraires , En particulier les groupes résolubles ayant la propriété T sont métabéliens et hypercyclique,Bien que la classe de T-groupe ne soit pas un sous groupe fermé(car tout groupe simple a évidemment la propriété T)il est connu que les sous groupes de T-groupes résolubles finis ont également la propriété T , En étudiant les groupes dans lesquels tous les sous groupes appropriés de rang infini ont la propriétés T, Le résultat principal concerne les groupes localement résoluble avec une telle propriété.*

Théorème 3.0.1. *Soit G un groupe localement soluble dont les sous groupes propres de rang infini ont la propriété T,Soit G a un rang fini,Soit un T-groupe résoluble ,*
Le théorème ci dessus doit être comparé au résultat de Robinson déclarant que tout groupe localement résoluble dont les sous groupes propres ont la propriété T est fini ou un $\bar{T}$ *groupe ,De plus ,Il a été prouvé que si G est un groupe résoluble(généraliser) satisfaisant la condition minimale sur des sous-groupes qui n'ont pas la propriété T,Alors soit G est un* $\bar{T}$ *groupe ou il satisfait la condition minimale sur sous-groupes (et en particulier G a un rang fini dans ce dernier cas) .*

Démonstration. On sait que si G est un groupe localement résoluble de rang fini,Il existe un entier positif n tel que le n-iéme terme G^n de la série dérivée de G soit périodique et hypercentral, En particulier,Les groupes localement résolubles de rang fini sont hyperabéliens,Et ils sont même résolubles dans le cas sans torsion . □

Lemme 3.0.2. *Soit G un groupe localement résoluble de rang infini ,Si chaque sous-groupe propre de rang infini de G à la propriété T,Alors G est métabélien .*

Démonstration. Supposons pour une contradiction que le groupe G n'est pas métabélien ,De sorte qu'il contient un sous-groupe H propre de rang infini qui n'est pas métabélien ,Si K est un sous groupe normale de rang infini de H,le groupe $\frac{H}{K}$ est un $\bar{T}$-groupe localement résoluble ,et donc il est métabélien,il s'ensuit que H est contenu dans l'intersection M de tous les sous-groupes normaux de rang infini de H,As H est un T-groupe chaque sous-groupe sous-normal de M est normal dans H ,Et donc M n'a pas de sous-groupes normaux appropriés de rang infini,ainsi chaque sous-groupe normal de M est hyperabélien,et donc même métabélien ,cette contradiction preuve le lemme . □

Lemme 3.0.3. *Soit G un groupe résoluble dont les sous-groupes de rang infini ont la propriété T,et soit H un sous-groupe de G,Si X est un sous groupe sous normale de H et il existe des sous groupes normaux U et V de G de rang infini tels que*

$$U \cap V = U, V \cap X = \{1\}$$

Alors X est normale dans H.

Démonstration. Comme U est de rang infini ,Tous les sous-groupes du groupe G/U ont la propriété T ,En revanche les T- groupes minimaux non T résoluble sont finis,de sorte que le groupe infini G/U est un $\bar{T}$groupe et donc XU est normale dans HU,De même nous avons que HV .
Par conséquent H normalise les deux

$$X = XU \cap XV$$

Est normale dans H. □

Corollaire 3.0.1. *Soit G un groupe dont les sous-groupes de rang infini ont la propriété T,Si G contient un sous-groupe abélien normale A de rang infini,Alors G est un $\bar{T}$groupe .*

Démonstration. Soit H un sous-groupe de G de rang fini,Et soit X un sous-groupe sous-normale de H,Puisque A a un rang infini,il contient un sous-groupe B tel que

$$X \cap B = \{1\}$$

Et

$$B = B_1 \times B_2$$

.

Ou B_1 et B_2 de rang infini,clairement G est un T-groupe ,de sorte que B_1 et B_2 sont normaux dans G L'application du lemme 2.2 donne que X est normale dans H,Par conséquent G est un $\bar{T}$ groupe . □

Les deux résultats suivants montrent que le résultat principal est facile à prouver .

Lemme 3.0.4. *Soit G un groupe dont les sous-groupes propres de rang infini ont la propriété T,Si G/G' a un rang infini ,Alors tous les sous groupes sous normaux de rang fini de G sont normaux.*

Démonstration. Soit X un sous-groupe normal de rang fini de G,Et considérons tout élément g dans l'ensemble G/G',Clairement,Il existe un sous-groupe H de G contenant $\langle g, G' \rangle$ tel que les deux groupes H/G' et G/H ont un rang infini ,Alors XH est un sous-groupe propre de G de rang infini ,De sorte que XH est un T groupe et X est normale dans XH, Par conséquent g normalise X et donc X est un sous-groupe normal de $G = G/G'$. □

Corollaire 3.0.2. *Soit G un groupe dont les sous-groupes propres de rang infini ont la propriété T,Si G a un rang fini alors soit G a un rang fini,Soit c'est un sous T-groupe.*

Démonstration. Supposons que G a un rang fini ,Alors G/G' a un rang fini , Et donc tous les sous-groupes sous-normaux selon le lemme 2.4,Soit X un sous-groupe sous-normal de rang infini de G,Pour chaque élément x de X,Le sous groupe $\langle x, X \rangle$ est un sous-groupe sous-normal dans G,Il s'ensuit que

$$\langle \langle X = x' \rangle, X | x \in X \rangle$$

est un sous-groupe normal de G,Par conséquent tous les sous-groupes sous-normaux et G est un T-groupe. □

Lemme 3.0.5. *Soit G un groupe , Et soit A un sous-groupe abélien normal de G tel que chaque sous-groupe de A a un nombre fini de conjugués dans G,Si A est le produit direct d'une collection infinie de sous-groupes d'ordre d'élément non triviaux de A tel que*

$$\langle a_n \backslash n \in \mathbb{N} \rangle^G = Dr_{n \in \mathbb{N}} \langle a_n \rangle^G$$

.

Démonstration. Soit a_1 tout élément non trivial de A Et supposons par indication que les éléments $a_1, \cdots, a_n$ de A ont été choisis de telle manière que

$$\langle a_1, \cdots, a_n \rangle^G = \langle a_1 \rangle^G \times \cdots \times \langle a_n \rangle^G$$

.Clairement le sous-groupe $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle^G$ est fini et donc A contient un sous-groupe infini B tel que

$$A = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle^G \times B$$

puisque B a un nombre fini dont les conjugués dans G,B_G a un indice fini dans A et il est donc infini,Si $a_n + 1$ est un élément non trivial de B_G. Nous avons

$$\langle a_1, \cdots, a_n, a_{n+1} \rangle^G = \langle a_1 \rangle^G \times \cdots \times \langle a_n \rangle^G \times \langle a_{n+1} \rangle^G$$

Et le lemme est prouvé. □

Lemme 3.0.6. *Soit G un groupe résoluble de rang infini si tous les sous-groupes propres de rang infini de G ont la propriété T,Alors tous les sous-groupes de G' sont normaux en G.*

Démonstration. Le groupe G est métabélien par le lemme 2.1 de sorte qu'en particulier tous les sous-groupes de G' sont sous normaux en G, si $\frac{G}{G'}$ a un rang infini il résulte du lemme 2.4 que chaque sous-groupe cyclique,De G est normal dans G,De sorte que dans cas tous les sous-groupes de G sont normaux dans G. Supposons maintenant que $\frac{G}{G'}$ a un rang fini ,De sorte que G a un rang infini et supposons pour une contradiction que G contient un sous-groupe cyclique qui n'est pas normal dans G,Si H est un groupe propre normale dans H, Il s'ensuit que $\frac{G}{G'}$ ne peut pas être la union de ses sous-groupes cycliques d'ordre de puissance première,Soit g un élément de G tel que $G = \langle g, G' \rangle$,Soit N Le sous-groupe composé de tous les éléments d'ordre fini de G,Et supposons d'abord que N a un rang infini

si chaque composante primaire de N a un rang fini et Π est l'élément des diviseurs premiers de l'ordre de X(avec la convention que $\pi = \phi$ si $\langle X \rangle$ est fini),La composante π' de N peut être décomposée en produit direct de deux sous-groupes de rang infini,Contredisant le lemme 2.2 supposons maintenant que la p-composante de N a un rang infini pour un nombre p-premier, Et soit S le socle de P, puisque G est abélien et $G = \langle g, G' \rangle$ chaque sous-groupe de s a un nombre fini de conjugués dans G, Et donc d'application du lemme

2.6 les rendements qu'ils existent dans S une suite $(a_n), n \in \mathbb{N}$ d'éléments non triviaux tel que

$$\langle a_n, n \in \mathbb{N}\rangle^G = Dr_{n\in\mathbb{N}}\langle a_n\rangle^G$$

Ainsi dans ce cas également une contradiction peut être dérivée du lemme 2.2 supposons enfin que N a un rang fini ,De sorte que le groupe sans torsion $\frac{G}{G'}$ a un rang infini tel que $\frac{G}{K}$ est un groupe périodique non trivial.
Clairement$K$ a un nombre fini de conjugués dans G,Et donc aussi le groupe $\frac{G'}{K}$ est périodique, Il s'ensuit que le noyau K_G de k est un groupe abélien libre de rang infini , Ainsi le produit $\langle g\rangle K_G$ est un sous groupe propre de rang infini de G , Et donc c'est un T-groupe par conséquent tous les sous groupes de K_G sont invariant en g, Et donc même normaux dans G, Cela est impossible par le lemme 2.2 cette dernière contradiction montre que tout les sous-groupes de G' sont normaux en G.On peut maintenant prouver que si un groupe résoluble de rang infini n'a pas la propriété T ,Alors il doit avoir un sous groupe propre de rang infini qui se comporte de la même manière. □

Définition 3.0.17. *$F(G)$ est le plus grand(relativement à l'inclusion) des sous-groupes normaux nilpotents de G et que c'est un sous-groupe caractéristique de G.*
Si G est un groupe fini,On appelle sous groupe de fitting de G et on note $F(G)$ ou $Fit(G)$ le plus grand (relativement à l'inclusion)des sous-groupes normaux nilpotents de G.

Lemme 3.0.7. *Soit G un groupe résoluble de rang infini, Si tous les sous-groupes propres de rang infini de G ont la propriété T,Alors G est un T-groupe.*

Démonstration. D'après le corollaire 2.5 on peut supposer sans part de généralité que le sous-groupe G' de G a un rang infini.
Soit X un sous-groupe sous-normal de rang fini de G , Il existe alors dans les sous-groupes U et V de rang infini tel que

$$U \cap V = \langle U, V\rangle \cap X = \{1\}$$

.

Puisque tous les sous-groupes de G sont normaux en G , par le lemme 2.7,Il résulte du lemme 2.2 que X est normale en G ,Considérons maintenant un sous-groupe Y' a un rang fini, La première partie de la preuve indique que le sous-groupe sous-normal $\langle y, Y' \rangle$ est normal dans G pour chaque y en Y et donc

$$Y = \langle \langle y, Y' \rangle \backslash y \in Y \rangle$$

est également normale de G.

Supposons maintenant que Y' a un rang infini de sorte qu'il contient un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ de rang infini tel que $\frac{Y'}{\mathbb{Z}}$ a également un rang infini , Le sous-groupe $\mathbb{Z}$ est normal dans G par le lemme 2.7 et tous les sous-groupes propres de groupe infini de $\frac{G}{Z}$ ont la propriété T, Donc $\frac{G}{Z}$ est un T-groupe et Y est normal dans G.

Par conséquent tous les sous-groupes sont normaux de G sont normaux, C'est à dire que G est un T-groupe dans la classification de robinson des T-groupes résolubles les groupes non périodiques avec la propriété T sont divisés en trois classes :

1. Groupes abéliens non périodiques.

2. Groupes non abéliens dans lesquels le centralisateur du sous-groupe commutateur est non périodique(appelés T-groupe de type 1) :

3. Groupes non périodique dans lesquels le centralisateur du sous-groupe commutateur est périodique(appelés T-groupe de type 2)

En particulier il s'avère que le sous-groupe de fitting de tout T-groupe résoluble de type 1 a un indice 2(voir[13],théorème3.1.1) De plus si G est un T-groupe de type 2 est divisible et $[G, G] = G'$, □

Lemme 3.0.8. *Soit G un T-groupe T-résoluble dont le sous-groupe de fitting F est non périodique alors F a un indice fini dans G.*

Démonstration. Il est bien connu que F coïncide avec le centralisateur de G ,Supposons que G est abélien ou qu'il est de type 1, Et dans ce dernier cas F a l'indice 2 en G. □

Corollaire 3.0.3. *Soit G un groupe résoluble , Le sous groupe de rang infini ont la propriété T ,Si G de rang infini et que son sous groupe de fitting n'est pas périodique,Alors G est un $\bar{T}$-groupe.*

Démonstration. Comme G est un T-groupe soluble , Le sous groupe d'ajustement F de G est abélien, De plus F a un indice fini dans G par le lemme 2.9 et donc il a un rang infini par conséquent G est un $\bar{T}$-groupe selon le corollaire 3.1

Dans la preuve de notre résultat principal,Nous aurons également besoin de certaines propriétés de presque d'extension dont la classe de cohomologie a un ordre fini,Pour plus de détails sur ces méthodes.

□

preuve du théorème. Supposons pour une contradiction que l'énoncé est faux, De sorte que G a un rang infini et qu'il n'est pas un $\bar{T}$-groupe,Puisque G est un T-groupe résoluble par le lemme 2.1 et le lemme 2.8,Il contient un sous-groupe H de rang fini qui n'a pas la propriété T.

Soit X un sous-groupe non normal de H, Il résulte du corollaire 2.3 que le sous-groupe G' et son centralisateur $C_G(G')$ sont périodiques et ont un rang fini , Comme l'intersection $X \cap G'$ est un sous groupe normal de G,Et le groupe de facteurs $\frac{G}{X \cap G'}$,Est également un contre exemple, Nous pouvons supposer que $X \cap G' = \{1\}$,Pour chaque nombre premier P,Soit $G_{P'}$ La composant P premier de G',puisque :

$$\bigcap_{P} G_{P'} = \{1\}$$

$$\bigcap_{P} XG_{P'} = X$$

Et une autre existe un numéro P deprime tel que H ne normalise pas XG',En particulier $G/G_{P'}$,N'est pas un $\bar{T}$-groupe et c'est un contre exemple.

Remplaçant ainsi G par $G/G_{P'}$,On peut supposer que G est un P groupe (de rang fini),Le groupe de facteur $G/C_G(G')$ a un rang infini est isomorphe à un groupe d'automorphismes de G',De sorte qu'il ne peut pas être périodique,Partie 1, théorème 3.2.9,Par conséquent G est un T-groupe de type 2,De sorte que G est divisible et $[G', G] = G'$ Cela signifie que $H_0(G/G', G') = \{0\}$,Et donc que le deuxième groupe de cohomologie $H^2(G/G', G')$ a un exposant fini, En particulier la classe de cohomologie de l'extension

$$G' \rightarrowtail G \to \frac{G}{G'}$$

A un ordre fini, Et donc il existe un sous-groupe L de G tel que $G = LG'$ et $L \bigcap G'$ est fini (voir [23],théorème 5),Clairement L contient un élément à l'ordre infini et $[G', a] \neq \{1\}$ puisque $C_G(G')$ est périodique,Il s'ensuit qu'il existe un sous-groupe caractéristique fini E de G' contenant $L \bigcap G'$ et tel que $[E, a] \neq \{1\}$,Le sous groupe LE a un rang infini ,Et donc il a la propriété T,De plus le groupe de facteurs $\frac{LE}{E}$ est abélien,De sorte que le sous-groupe infini $\langle a, E\rangle$ est normale dans LE et donc c'est un T-groupe,Ce qui est impossible car $\langle$ a,E $\rangle$ est de type finie et non abélien.

Cette contradiction complète la preuve. $\square$

conclusion

Dans ce mémoire nous constatons que si G est un groupe localement résoluble dont tous les sous-groupes propres de rang infini sont des T-groupes alors ;soit G un $\overline{T}$-groupes,ou G est de rang fini .

Bibliographie

[1] A. L. Mal'cev, "On certain classes of infinite soluble groups", Mat. Sb. 28, 567–588 (1951) ; Amer. Math. Soc. Transl. 2, 1–21 (1956).

[2] B. Amberg, S. Franciosi and F. de Giovanni, Products of Groups, Clarendon Press, 1992.

[3] B. H. Neumann, "Groups with finite classes of conjugate subgroups", Math.Z. 63, 76–96 (1955).

[4] B. Hartley, "Uncountable artinian modules and uncountable soluble groups satisfying Min-n", Proc. London Math. Soc. 35, 55–75 (1977).

[5] D. J. S. Robinson, A Course in the Theory of Groups, 2nd edition, Springer, 1996.

[6] D. J. S. Robinson, Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups, Springer, 1972. Cambridge Philos. Soc. 68 (1964), 21–38.

[7] D. J. S. Robinson, Groups in which normality is a transitive relation, Proc. Cambridge Philos. Soc. 68 (1964), 21–38.

[8] D. J. S. Robinson, Groups which are minimal with respect to normality being intransitive, Pacific J. Math. 31 (1969), 777–785.

[9] D. J. S. Robinson, Splitting theorems for infinite groups, Symposia Mathematica 17 (1973), 441-470. Cambridge Philos. Soc. 68 (1964), 21–38.

[10] D. McDougall, "Soluble groups with the minimum condition for normal subgroups", Math. Z. 118, 157–167 (1970).

[11] D. J. S. Robinson, Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups, Springer, Berlin (1972).264

[12] G. M. Romalis ans N. F. Sesekin, "Metahamiltonian groups", Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. 5, 101–106 (1966).

[13] G. M. Romalis and N. F. Sesekin, "Metahamiltonian groups. II", Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. 6, 52–58 (1968).

[14] G. M. Romalis and N. F. Sesekin, "Metahamiltonian groups. III", Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. 7, 195–199 (1969/70).

[15] J. E. Roseblade, "On groups in which every subgroup is subnormal", J. Algebra, 2, 402–412 (1965).

[16] L. A. Kurdachenko and H. Smith, “Groups in which all subgroups of infinite rank are subnormal”, Glasgow Math. J. 46, 83–89 (2004).

[17] M. De Falco, F. de Giovanni, and C. Musella, “Groups whose finite homomorphic images are metahamiltonian”, Comm. Algebra, 37, 2468–2476 (2009).

[18] M. De Falco, F. de Giovanni, and C. Musella, “Groups whose proper subgroups of infinite rank have a transitive normality relation”, Mediterranean J. Math. 10, 1999- 2006 (2013).

[19] M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella, and Y. P. Sysak, “On metahamiltonian groups of infinite rank”, J. Algebra (to appear).

[20] M. De Falco and F. de Giovanni, Groups with many subgroups having a transitive normality relation, Bol. Soc. Brasil. Mat. 31 (2000), 73–80.

[21] M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella ans Y.P. Sysak, On metahamiltonian groups of infinite rank, To appear.

[22] M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella and Y. P. Sysak, Groups of infinite rank in which normality is a transitive relation, Glasgow Math. J., to appear.

[23] M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella and N. Trabelsi, Groups with restrictions on subgroups of infinite rank, Rev. Mat. Iberoamericana, to appear.

[24] M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella and N. Trabelsi, Groups whose proper subgroups of infinite rank have finite conjugacy classes, Bull. Austral. Math. Soc., to appear.

[25] M. J. Evans and Y. Kim, On groups in which every subgroup of infinite rank is subnormal of bounded defect, Comm. Algebra 32 (2004), 2547–2557.

[26] M. R. Dixon, M. J. Evans, and H. Smith, “Locally (soluble-by-finite) groups with all proper insoluble subgroups of finite rank”, Arch. Math. (Basel), 68, 100–109 (1997).

[27] M. R. Dixon and Y. Karatas, “Groups with all subgroups permutable or of finite rank”, Centr. Eur. J. Math. 10, 950–957 (2012).

[28] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Locally soluble-by-finite groups of finite rank, J. Algebra 182 (1996), 756–769.

[29] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Locally (soluble-by-finite) groups with all proper non-nilpotent subgroups of finite rank, J. Pure Appl. Algebra 135 (1999), 33-43.

[30] M. R. Dixon, M. J. Evans and H. Smith, Groups with all proper subgroups (finite rank)-by-nilpotent, Arch. Math. (Basel) 72 (1999), 321–327.

[31] M. R. Dixon and Z. Y. Karatas, Groups with all subgroups permutable or of finite rank, Centr. Eur. J. Math. 10 (2012), 950–957.

[32] N. S. C˘ ernikov, “A theorem on groups of finite special rank”, Ukrain. Math. J. 42, 855–861 (1990).

[33] N. N. Semko and S. N. Kuchmenko, “Groups with almost normal subgroups of infinite rank”, Ukrain. Math. J. 57, 621–639 (2005).

[34] R. Schmidt, Subgroup Lattices of Groups, de Gruyter, Berlin (1994).

[35] V. P. Šunkov, “On locally finite groups of finite rank”, Algebra Logic, 10, 127–142 (1971).

[36] W. Gasch¨utz, Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist, J. Reine. Math. 198 (1957), 87–92.

[37] W. MÖhres, “AuflÖsbarkeit, von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind”, Arch. Math. (Basel), 54, 232–235 (1990).

[38] Y. I. Merzljakov, “Locally soluble groups of finite rank” Algebra Logic, 8, 686–690 (1969).

Resumé

Dans ce travail on a présenté une étude sur quelques propriétés des T-groupes.

Dans le premier chapitre, on a donné les notions de bases nécessaires dans la théorie des groups, (suites de composition, groupes résolubles, groupes nilpotents, groupes abéliens, suites centrales...etc.), puis on a donne quelques exemples sur des groupes qui satisfait la structure des groupes abéliens divisibles et les groupes abéliens divisibles bornés.

Dans le deuxième chapitre, on a traité les conditions de finitudes, les conditions maximales et minimales.

Dans le dernier chapitre on a étudiée les groupes dont tous les sous-groupes de rang infini ont une relation de normalité transitive.

Abstract

In this work we presented a study on some properties of T-groups.

In the first chapter, we gave the basic notions necessary in the theory of groups, (composition sequences, solvable groups, nilpotent groups, abelian groups, central sequences ... etc.), then we gave some example on groups which satisfies the structure of divisible abelian groups and bounded divisible abelian groups.

In the second chapter, we dealt with the finitude conditions, the maximum and minimum conditions.

In the last chapter we studied the groups of which all the subgroups of infinite rank have a normality relation.

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة بعض خصائص المجموعات T

في الفصل الاول تطرقنا لبعض المفاهيم الاساسية في نظرية المجموعات مثل سلاسل التكوين ،المجموعات القابلة للحل ،المجموعات غير الواضحة ،المجموعات الابيلية والسلاسل الممركزة ... الخ ،ثم قدمنا بعض الامثلة على المجموعات الابيلية القابلة للقسمة و المجموعات الابيلية القابلة للقسمة المحدودة.

في الفصل الثاني عالجنا شروط النهايات ،كما اضفنا الشرط الاعظمي و الادنى .

في الفصل الثالث قمنا بدراسة المجموعات منها المجموعات الفرعية ذات الرتب اللانهائية التي لها علاقة تعدي طبيعية.