الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

Applications du calcul ombral à certains polynômes spéciaux

Préparé par :
Kermiche Soumia
Bousbaa Amina

Devant le jury:

-**Khalfaoui Mohamed** (MAA)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Président
-**Rihane Salah Eddine** (MAA)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
-**Akrour Youssouf** (MAA)	ENS ,Constantine	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

Dédicace

Je dédie ce travail

A toi maman, qui m'as appris à donner sans retour, et toi qui m'a fait protéger pendant toute ma vie.

A ce grand homme qui m'a appris la noble création, à Mon père qui a été toujours pour moi.

A mes frères Allaoua , Ammar ,wahiba et à la femme de mon frère Dounia mon soutien dans la vie .

A celui qui était en détresse pour m' aider ,et dans la prospérité était mon compagnons Loupi et Amira .

A ceux qui font la faveur sans attendre de réponse à mon oncle Mouhamed .

A tous les frères qui ont prouvé que la fraternité n'est pas seulement dans l'utérus

Zineb, Leila, Noor, Halima et Boutheina .

Soumia

Dédicace

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui m'ont soutenu durant toute la durée de mes études.

Mes frères Ilyes et Saufi . Mes Soeurs.

A tous les membres de ma famille, petits et grands.

A ma cher amie Amina qui m'a beaucoup aidé.

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

Amina

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout-puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Un remerciement particulier à notre encadreur **Rihane SalahEddine** pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils qui nous ont assistés pour l'accomplissement de notre projet.

Nous plus vifs remerciements s'adressent également aux membres de jury qui nous ont honorées en acceptant d'évaluer ce travail

Khalfaoui Mohamed et **Akrour Yousouf.**

Que soient remerciés nos parents pour nous avoir soutenues par leur amour et leur encouragements

Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude .

Nos remerciements vont également à nos frères et sœurs qui ont toujours cru en nous.

Nos plus sincères remerciements à tous nos amis et tous ceux qui nous ont aidées de prés ou de loin.

En dernier, nous offrons ce mémoire à toute notre famille, à tous les lecteurs de nos projets .

Résumé

Nous présentons dans ce mémoire quelques identités des polynômes de Bernoulli, polynômes de Genoucchi et polynômes de Laguerre dérivés du calcul ombral.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions et propriétés sur les espaces vectoriels, les séries formelles et les nombres de Stirling.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques propriétés du calcul ombral.

Dans le troisième chapitre, nous démontrons, en utilisant les propriétés du calcul ombral, quelques identités des polynômes de Bernoulli, polynômes de Genoucchi et polynômes de Laguerre. Ces identités sont démontrées dans les articles [6], [2] et [5] respectivement.

Mots clés : calcul ombral, polynômes de Bernoulli, polynômes de Genoucchi et polynômes de Laguerre.

Abstact

We present in this thesis some identities of Bernoulli polynomials, Genoucchi polynomials and Laguerre polynomials arising from the application of umbral calculus.

In the first chapter, we recall some notions and properties on vector spaces, formal series and Stirling numbers.

In the second chapter, we present some properties of the ombral calculus.

In the third chapter, we prove, using the properties of the ombral calculus, some identities of Bernoulli polynomials, Genoucchi polynomials and Laguerre polynomials. The proofs of these identities was given in [6], [2] et [5] respectively.

Key words : umbral calculs, Bernoulli polynomials, Genoucchi polynomials and Laguerre polynomials.

ACRONYMES ET NOTATION

- $\mathcal{P}$: l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{C}$
- $\mathcal{P}^*$: l'espace dual de $\mathcal{P}$.
- $\delta_{n,k}$: le symbole de Kronecker.
- B_n : le n-ième nombre de Bernoulli.
- $B_n(x)$: le n-ième polynôme de Bernoulli.
- $B_n^{(a)}(x)$: le n-ième polynôme de Bernoulli d'ordre a.
- E_n : le n-ième nombre d'Euler.
- $E_n(x)$: le n-ième polynôme d'Euler.
- $E_n^{(a)}(x)$: le n-ième polynôme d'Euler d'ordre a.
- G_n : le n-ième nombre de Genoucchi.
- $G_n(x)$: le n-ième polynôme de Genoucchi.
- $G_n^{(a)}(x)$: le n-ième polynôme de Genoucchi d'ordre a.
- L_n : le n-ième nombre de Laguerre.
- $L_n(x)$: le n-ième polynôme de Laguerre.
- $S_1(n,k)$: le nombre de Stirling de premier espèce.
- $S_2(n,k)$: le nombre de Stirling de seconde espèce.
- $\binom{n}{k}$: le coefficient binomial.
- $\binom{n}{k_1,\dots,k_n}$: le coefficient multinomial.

Table des matières

Introduction Générale

Le calcul ombral est le nom d'un ensemble de technique de calcul formel qui, avant les années 1970, était plutôt appelé calcul symbolique. Il s'agit de l'étude des similarités surprenantes entre certaines formules polynomiales a priori non reliées entre elles, et d'un ensemble de règles de manipulation (au demeurant assez peu claires) pouvant être utilisées pour les obtenir.

Dans les années 1930 et 1940 Eric Bell Temple a essayé de fournir les bases calcul ombral rigoureuses, ne réussissant que partiellement. Mais en 1970 le développement de calcul ombral sur la base solide de fonction linéaire sur les espaces polynomiales est réussi par Steven Roman, Gian-Carlo Rota et d'autres.

Le calcul ombral est un outil pour l'étude les suites de Sheffer et en particulier les suites de polynômes de type binomial et les suites d'appell.

En 2011, R. Dere et Y. Simsek ont démontré quelques identités des polynômes de Genoucchi en appliquant le calcul ombral (cf. [2]). Après eux, plusieurs auteurs ont considéré le même problème pour d'autres suites de polynômes : les polynômes de Bernoulli [5] et les polynômes de Laguerre [6]. Dans ce mémoire nous présentons les résultats obtenus dans [2], [5] et [6].

Ce manuscrit est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre introductif visé à présenter les définitions et notions de base importantes dans le calcul ombral qui sont largement utilisés.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à étudier les propriétés du calcul ombral.

Le chapitre 3 est consacré à présenter quelques identités des polynômes de Bernoulli, de Genoucchi et de Laguerre dérivés du calcul ombral.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces vectoriels

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni de deux opérations. D'abord d'une addition, c'est à dire qu'à tout couple $v, w \in E$ on peut associer $v + w \in E$ tel que $(E, +)$ est un groupe abélien, autrement dit :*

- *$u + v = v + u$ pour tous $u, v \in E$;*
- *$(u + v) + w = u + (v + w)$ pour tous $u, v, w \in E$;*
- *il existe un élément noté 0_E tel que $u + 0_E = u$ pour tout $u \in E$;*
- *pour tout $u \in E$ il existe un élément $v \in E$ tel que $u + v = 0_E$.*

De plus il existe une application de $\mathbb{K} \times \mathbb{E} \longrightarrow E$ notée $(\lambda, v) \longrightarrow \lambda \cdot v$, telle que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $v, w \in E$ on ait

- *$1 \cdot v = v$;*
- *$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$;*
- *$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$;*
- *$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.*

Remarque 1.1. *Dans la suite $\lambda \cdot v$ sera noté λv pour simplifier.*

Remarque 1.2. *Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires et les éléments de E les vecteurs. La seconde opération est la multiplication par les scalaires.*

Remarque 1.3. *Le vecteur 0_E est appelés le vecteur nul, il sera noté 0 simplement.*

Théorème 1.1. *Soit E un espaces vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ on a :*

1. *$\lambda u = 0_E$ si et seulement si $(\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E)$.*
2. *$(-\lambda)u = -(\lambda u) = \lambda(-u)$.*

Définition 1.2. *Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble F non-vide de E tel que :*

- *si $u, v \in F$ alors $u + v \in F$;*
- *si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in F$, alors $\lambda u \in F$.*

1.1.2 Système de vecteur et dimension

Soit E un espace vectoriel. Un système de vecteurs de E est une famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vecteurs de E.

Définition 1.3. *Un système $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est lié si il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Si le système n'est pas lié il est libre.*

Un système $(v_i)_{i \in I}$ est lié si il existe $\lambda_i, i \in I$ presque tous nuls (nuls sauf un nombre fini d'entre eux) tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$ Si le système n'est pas lié il est libre.

Définition 1.4. *Étant donné un système $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur de la forme $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. L'ensemble des combinaisons linéaires d'un système de vecteurs est un sous-espace vectoriel appelé le sous-espace engendré par le système.*

Définition 1.5. *Un système $\{v_1, \ldots, v_n\}$ (resp. $(v_i)_{i \in \mathbb{I}}$) est générateur pour un espace vectoriel E si tout vecteur de E est combinaison linéaire des v_i.*

Définition 1.6. *Un système $\{v_1, \ldots, v_n\}$ (resp.$(v_i)_{i \in \mathbb{I}}$) est une base d'un espace vectoriel E si il est générateur et libre.*

Définition 1.7. *On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel admettant une famille génératrice finie.*

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 1.2. *Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie on le même nombre d'éléments appelé dimension de l'espace.*

Théorème 1.3. *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel fini E. Alors, F est de dimension finie, et*

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus, on a

$$\dim(F) = \dim(E) \Longleftrightarrow F = E.$$

1.1.3 Applications Linéaires

Dans tout ce qui suit, E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 1.8. *Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application linéaire si les deux conditions sont satisfaites pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v, w \in E$:*

1. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

2. $f(v + w) = f(v) + f(w)$.

Théorème 1.4. *La somme de deux applications linéaires est linéaire. Si on multiplie une application linéaire par un scalaire on obtient encore une application linéaire.*

Théorème 1.5. *L'ensemble des applications linéaires de E dans F forme un espace vectoriel noté $L(E, F)$.*

Théorème 1.6. *Si f est une application linéaire de E dans F, et G une application linéaire de F dans G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.*

Définition 1.9. *Le noyau de f est l'ensemble des $\{v \in E$ tel que $f(v) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E noté $\ker(f)$.*

L'image de f est l'ensemble des $\{f(v), v \in E\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E noté $\mathrm{Im}(f)$.

Définition 1.10. *On appelle rang de f la dimension de l'image de f.*

Définition 1.11. *Le rang d'un système de vecteurs $(v_1, \cdots, v_n)$ est la dimension du sous-espace qu'il engendre. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, le rang de f est le rang du système de vecteurs $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$.*

Théorème 1.7 (Théorème du rang)**.** *On a*

$$rang(f) = \dim(E) - \dim(\ker f)$$

Théorème 1.8. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, et supposons que $\dim E = \dim F$ et qu'elle est finie. On a alors équivalence entre*

(i) f est injective

(ii) f est surjective

(iii) f est bijective

1.1.4 Espace dual d'un espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel (de dimension finie ou non).

Définition 1.12. *On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.*

Définition 1.13. *L'ensemble $L(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est appelé l'espace dual de E et noté E^*.*

Théorème 1.9. *E^* est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel,*

Théorème 1.10. *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie. Alors sont dual $\mathbb{E}^*$ est de dimension finie et on a*

$$dim\mathbb{E}^* = dim\mathbb{E}.$$

Théorème 1.11. *Soit un espace vectoriel E de dimension n et de base $B = (e_1, \dots, e_n)$. L'espace vectoriel E^* est de dimension n et admet pour base (en particulier) le système de formes linéaires $(e_1^*, \dots, e_n^*)$, où e_i^* est définit par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$,0 sinon. Cette base de E^* est appelée base duale de la base B.*

1.1.5 Opérateur linéaire

Définition 1.14. *Un opérateur linéaire est une fonction entre deux espaces vectoriels qui est linéaire sue son domaines de définition.*

1.1.6 $\mathbb{K}$-algèbre

Définition 1.15. *Une algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'une opération binaire $\times$ bilinéaire, ce qui signifie que pour tous vecteurs x, y, z dans A et tous scalaires a, b dans $\mathbb{K}$, les égalités suivantes sont vraies :*

1. $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$;
1. $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$;
1. $(ax) \times (by) = (ab)(x \times y)$;

1.2 Séries formelles

1.2.1 Définitions et opérations

Définition 1.16. *Une série formelle en X sur le corps $\mathbb{K}$ est une expression :*

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots , \tag{1.1}$$

où a_n sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Remarque 1.4. *Contrairement aux polynômes, on ne suppose pas qu'il n y a qu'un nombre fini de coefficients a_n non nuls.*

Définition 1.17 (Addition et multiplication). *La somme et le produit de deux séries formelles sont donnés respectivement par :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n \tag{1.2}$$

et

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) X^n. \tag{1.3}$$

Définition 1.18 (Multiplication par un scalaire). *La série $\beta(X) = \sum_{n=0}^{\infty} kX^n$ est le produit de la série $\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$ par le scalaire k.*

Définition 1.19. *L'espace vectoriel des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par N, muni de la multiplication interne définie ci-dessus, est une $\mathbb{K}$-algèbres commutative appelée algèbre des séries formelles a une indéterminée sur $\mathbb{K}$, cette algèbre se note $\mathbb{K}[[X]]$.*

Définition 1.20 (Division). *Soit $\alpha(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ et $\beta(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ deux séries formelles telle que $\beta(X) \neq 0$. On dit que β divise α si et seulement s'il existe une série formelle ω tell que $\alpha = \beta \cdot \omega$.*

Définition 1.21 (intégration). *La série $\beta(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{X^{n+1}}{n+1}$ est le résultat de l'intégration de la série $\alpha(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$.*

1.2.2 L'ordre d'une série formelle

Définition 1.22. *On appelle ordre de la série formelle $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \neq 0$, le plus petit entier n pour lequel a_n est non nul et est noté $O(S)$. Alors, on a*

$$O(S) := \min \{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}. \tag{1.4}$$

Remarque 1.5. *Par convention, on a $O(0) = +\infty$.*

Théorème 1.12. *Soient S et T deux séries formelles. Alors,on a :*

$$O(S+T) \geq \min(O(S), O(T)) \tag{1.5}$$

et

$$O(ST) = O(S) + O(T). \tag{1.6}$$

Définition 1.23. *Une série S avec $O(S) = 1$ est appelée série delta.*

1.2.3 Composition des séries formelles

Définition 1.24. *Soit $S \in \mathbb{K}[[X]]$ telle que $O(S) \geq 1$ et soit $T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$. On appelle composé de T par S et on note $T \circ S$ (ou $T(S)$) la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} b_n S^n$. On dit que $T \circ S$ est obtenue par composition de T avec S.*

Théorème 1.13. *L'application $T \longmapsto T \circ S$ de $\mathbb{K}[[X]]$ dans lui-même est un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre.*

Ceci veut dire qu'on a les propriétés suivantes :

$$(T_1 + T_2) \circ S = T_1 \circ S + T_2 \circ S, \tag{1.7}$$

$$(T_1 T_2) \circ S = (T_1 \circ S)(T_2 \circ S), \tag{1.8}$$

$$\lambda \circ S = \lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{K}). \tag{1.9}$$

Théorème 1.14. *Soient S, T et U dans $\mathbb{K}[[X]]$ avec $O(S) \geq 1$ et $O(T) \geq 1$ (donc $O(S \circ T) \geq 1$). Alors*

$$U \circ (S \circ T) = (U \circ S) \circ T. \tag{1.10}$$

1.2.4 La dérivé d'une série formelle

Définition 1.25. *Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$. On appelle dérivé de S et on note S', la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} X^n$.*

Remarque 1.6. *La dérivation des séries formelles prolonge la dérivation des polynômes et aussi celle des fractions rationnelles sans pôle en 0.*

Théorème 1.15. *La dérivation des séries formelles possède les propriétés habituelles :*

$$(S + T)' = S' + T', \quad (\lambda S = \lambda S') \quad (\lambda \in \mathbb{K}), \quad (ST)' = S'T + ST'.$$

1.2.5 Inverse d'une série formelle

Dans $\mathbb{K}[[X]]$, on a l'identité :

$$(1 - X)(1 - X + X^2 + \cdots + X^n + \cdots) = 1$$

.

Donc $1 - X$ est inversible et $(1 - X)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$.C'est cet exemple fondamental qui nous permet de déterminer les séries formelles inversibles.

Théorème 1.16. *Soit* $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$.
Pour que S *soit inversible dans* $\mathbb{K}[[x]]$*, il faut et il suffit que* $a_0 \neq 0$*, c'est-à-dire que* $O(S) = 0$.

1.3 Nombres de Stirling

En mathématique, les nombres de Stirling apparaissent dans plusieurs problème combinatoire . Ils tirent leur nom de James Stirling, qui les a introduits au XVIII siècle. Il en existe deux sortes, nommée les nombres de Stirling de première espèce $S_1(n, k)$ et les nombres de Stirling de seconde espèce $S_2(n, k)$.

1.3.1 Nombres de Stirling de première espèce

Définition 1.26. *Les nombres de Stirling de première espèce* $S_1(n, k)$ *sont les coefficient du développement de la factorielle décroissante* $(x)_n$*, c'est-à-dire que*

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} S_1(n,k)x^k \tag{1.11}$$

Remarque 1.7. *On a,* $(x)_0 = 1$ *car il s'agit d'un produit vide.*

Exemple 1.1. *On a*

$$(x)_3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x,$$

d'où l'on tire :

$$S_1(3,0) = 0, \quad S_1(3,1) = 2, \quad S_1(3,2) = -3 \quad \text{et} \quad S_1(3,3) = 1.$$

Remarque 1.8. *Le nombre* $S_1(n, k)$ *a même signe que* $(-1)^{n-k}$.

Le tableaux suivant donnant quelques valeurs des $S_1(n, k)$:

$n \vert k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	-1	1							
3	0	2	-3	1						
4	0	-6	11	-6	1					
5	0	24	-50	35	-10	1				
6	0	-120	274	-225	85	-15	1			
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1		
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1	
9	0	40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36	1

En utilisant le fait que

$$(x)_{n+1} = x(x)_n - n(x)_n$$

on obtient le théorème suivant :

Théorème 1.17. *Les nombres de Stirling de première espèce satisfont la relation de récurrence*

$$\forall k > 0, \quad S_1(n+1,k) = S_1(n,k-1) - nS_1(n,k), \tag{1.12}$$

avec les conditions initiales :

$$S_1(0,0) = 1 \quad et \quad \forall n > 0,\ S_1(n,0) = S_1(0,n) = 0. \tag{1.13}$$

Théorème 1.18. *Les nombres de Stirling de première espèce satisfont les identités suivantes :*

1. $\forall k > n$, *on a* $S_1(n,k) = 0$,
2. $S_1(n,n) = 1$,
3. $S_1(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$,
4. $S_1(n,n-1) = -\binom{2}{n}$,
5. $S_1(n,n-2) = \frac{3n-1}{4}\binom{3}{n}$,
6. $S_1(n,n-3) = -\binom{2}{n}\binom{4}{n}$.

On a l'important théorème suivant :

Théorème 1.19. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_1(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}. \tag{1.14}$$

1.3.2 Nombres de Stirling de seconde espèce

Définition 1.27. *Les nombres de Stirling de seconde espèce sont les nombres réels* $S_2(n,k)$ $(n,k \in \mathbb{N},\ k \leq n)$ *qui figurent dans l'écriture de* x^n *comme combinaison linéaire des polynômes* $(x)_k (0 \leq k \leq n)$*. On a précisément pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n} S_2(n,k)(x)_k = x^n. \tag{1.15}$$

Exemple 1.2. *On a :*

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x = (x)_1 + 3(x)_2 + (x)_3.$$

D'où l'on tire :

$$S_2(3,0) = 0, \quad S_2(3,1) = 1, \quad S_2(3,2) = 3 \quad \textit{et} \quad S_2(3,3) = 1.$$

Théorème 1.20. *Les nombres de Stirling de seconde espèce sont donnés par la formule explicite*

$$S_2(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n. \tag{1.16}$$

Á partir de la définition des nombres de Stirling de seconde espèce, on peut également démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.21. *Les nombres de Stirling de seconde espèce satisfont la relation de récurrence :*

$$\forall k \geq 0 : \ S_2(n+1,k) = S_2(n,k-1) + kS_2(n,k), \tag{1.17}$$

avec les conditions initiales

$$S_2(0,0) = 1 \quad \textit{et} \quad \forall n > 0 : \ S_2(n,0) = S_2(0,n) = 0. \tag{1.18}$$

Nous donnons maintenant quelques valeurs des nombres de Stirling de seconde espèce

$n \vert k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Les nombres de Stirling de seconde espèce vérifiant les identités suivantes :

Théorème 1.22. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

1. $S(n, n) = 1$,
2. $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$,
3. $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

Chapitre 2

Calcul ombral

Soit $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{C}$. L'un des points de départ du calcul ombral est le fait que toute série formelle dans $\mathcal{F}$ peut jouer trois rôles différents : en tant que série formelle, en tant qu'application linéaire sur $\mathcal{P}$ et en tant qu'opérateur linéaire sur $\mathcal{P}$. Explorons d'abord le lien entre les séries formelles et les applications linéaires.

2.1 Définitions et propriétés

Soit $\mathcal{P}^*$ l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires sur $\mathcal{P}$. Notons que $\mathcal{P}^*$ est l'espace dual de $\mathcal{P}$. Il sera pratique de désigner l'action de $L \in \mathcal{P}^*$ sur $p(x) \in \mathcal{P}$ par :

$$\langle L | p(x) \rangle. \tag{2.1}$$

Donc, les opérations de l'espace vectoriel $\mathcal{P}^*$ sont :

$$\langle L + M | p(x) \rangle = \langle L | p(x) \rangle + \langle M | p(x) \rangle, \tag{2.2}$$

et

$$\langle rL | p(x) \rangle = r \langle L | p(x) \rangle, \ r \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Notons également que puisque toute application linéaire sur $\mathcal{P}$ est déterminée par ses valeurs sur la base de $\mathcal{P}$, l'application $L \in \mathcal{P}^*$ est déterminée par les valeurs $\langle L | x^n \rangle$ pour $n \geq 0$.

D'autre part, toute série formelle de $\mathcal{F}$ peut être écrite sous la forme :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k, \tag{2.4}$$

et on peut l'utiliser pour définir une application linéaire$f(t)$ en posant :

$$\langle f(t) | x^n \rangle = a_n \quad \text{pour } n \geq 0. \tag{2.5}$$

En d'autre terme, l'application linéaire $f(t)$ est définie par :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f(t) | x^k \rangle}{k!} x^k, \tag{2.6}$$

où l'expression $f(t)$ à gauche est une série formelle. Remarquons en particulier que,

$$\langle t^k | x^n \rangle = n! \delta_{n,k}, \tag{2.7}$$

où $\delta_{n,k}$ est la fonction delta de Kronecker. Ceci implique,

$$\langle t^k | p(x) \rangle = p^{(k)}(0). \tag{2.8}$$

Alors, toute application linéaire L sur $\mathcal{P}$ a la forme $f(t)$. Pour voir cela, on note simplement que si

$$f_L(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L | x^k \rangle}{k!} t^k, \tag{2.9}$$

alors,

$$\langle f_L(t) | x^n \rangle = \langle L | x^n \rangle \quad \text{pour } n \geq 0 \tag{2.10}$$

et donc comme une application linéaire, $L = f_L(t)$.

Ainsi, on peut définir l'application ϕ par :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{P}^* & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ & L & \longmapsto & f_L(t). \end{array} \tag{2.11}$$

Théorème 2.1. *([7], page 440) L'application ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{P}^*$ sur $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Soient $L, M \in \mathcal{P}^*$ et $r, s \in \mathbb{C}$. En utilisant les opérations (2.2) et (2.3), on obtient

$$\begin{aligned} \phi(rL + sM) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle rL + sM | x^k \rangle}{k!} t^k \\ &= r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L | x^k \rangle}{k!} t^k + s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M | x^k \rangle}{k!} t^k \\ &= r\phi(L) + s\phi(M), \end{aligned}$$

d'où ϕ est une application linéaire. Ceci d'une part.
D'autre part, comme,

$$f_L(t) = f_M(t) \Rightarrow \langle L | x^n \rangle = \langle M | x^n \rangle \ \forall n \geq 0 \Rightarrow L = M,$$

alors, ϕ est injective. De plus, l'application ϕ est surjective, car pour tout $f \in \mathcal{F}$, l'application linéaire $L = f(t)$ a la propriété $\phi(L) = f_L(t) = f(t)$. □

Dans la suite, nous identifions l'espace vectoriel $\mathcal{P}^*$ avec l'espace vectoriel $\mathcal{F}$, en utilisant l'isomorphisme ϕ. Ainsi, nous considérons les applications linéaires sur $\mathcal{P}$ simplement comme des séries formelles. L'avantage de cette approche est que $\mathcal{F}$ est plus qu'un simple espace vectoriel, c'est un algèbre. Par conséquent, on a automatiquement défini une multiplication des applications linéaires, autrement dit, le produit des séries formelles. L'algèbre $\mathcal{F}$, lorsqu'il est considéré à la fois comme l'algèbre des séries formelles et l'algèbre des applications linéaires sur $\mathcal{P}$, est appelé l'algèbre ombral.

Exemple 2.1. *Pour $a \in \mathbb{C}$, la fonction d'évaluation $\varepsilon_a \in \mathcal{P}^*$ est définie par :*

$$\langle \varepsilon_a | p(x) \rangle = p(a). \tag{2.12}$$

En particulier, on a

$$\langle \varepsilon_a | x^n \rangle = a^n,$$

alors, la représentation en série formelle de l'application ε_a est :

$$f_{\varepsilon_a}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \varepsilon_a | x^k \rangle}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} t^k = e^{at}, \tag{2.13}$$

qui est la série exponentielle. Si e^{bt} est l'évaluation en b alors,

$$e^{at} e^{bt} = e^{(a+b)t},$$

donc le produit de l'évaluation en a et de l'évaluation en b est l'évaluation en $a + b$.

Remarque 2.1. *Lorsque on considère la série delta $f \in \mathcal{F}$ comme une application linéaire, on la désigne comme une application delta. De même, une série inversible $f \in \mathcal{F}$ est appelée application inversible.*

Théorème 2.2. *([7], page 441)*

1) Pour $f \in \mathcal{F}$,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f(t) | x^k \rangle}{k!} t^k. \tag{2.14}$$

2) Pour $p \in \mathcal{P}$,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle t^k | p(x) \rangle}{k!} x^k. \tag{2.15}$$

3) Pour $f, g \in \mathcal{F}$,

$$\langle f(t) g(t) | x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle f(t) | x^k \rangle \langle g(t) | x^{n-k} \rangle. \tag{2.16}$$

4) Si $o(f(t)) > \deg p(x)$, alors $\langle f(t) | p(x) \rangle = 0$.

5) Si $o(f_k(t)) = k$ pour $k \geq 0$, alors

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t) | p(x) \right\rangle = \sum_{k \geq 0} a_k \langle f_k(t) | p(x) \rangle, \tag{2.17}$$

où la somme à droite est finie.

6) Si $o(f_k(t)) = k$ pour $k \geq 0$, alors

$$\langle f_k(t) | p(x) \rangle = \langle f_k(t) | q(x) \rangle \text{ pour } k \geq 0 \Longrightarrow p(x) = q(x). \tag{2.18}$$

7) Si $\deg p_k(x) = k$ pour $k \geq 0$ alors,

$$\langle f(t) | p_k(x) \rangle = \langle g(t) | p_k(x) \rangle \text{ pour } k \geq 0 \Longrightarrow f(t) = g(t). \tag{2.19}$$

Démonstration. On démontre seulement la partie 3). Soient

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$$

et

$$g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{j!} t^j.$$

On a

$$f(t)g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a_k b_{m-k} \right) t^m.$$

En appliquant les deux membre de l'expression précédente (comme une application linéaire) à x^n on obtient,

$$\langle f(t)g(t) | x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

Le résultat vient du fait que la partie 1) implique

$$a_k = \langle f(t) | x^k \rangle$$

et

$$b_{n-k} = \langle g(t) | x^{n-k} \rangle.$$

□

maintenant, on présente le premier résultat "ombral".

Théorème 2.3. *([7], page 442) Pour tout $f(t) \in \mathcal{F}$ et $p(x) \in \mathcal{P}$,*

$$\langle f(t) | xp(x) \rangle = \langle \partial_t f(t) | p(x) \rangle. \tag{2.20}$$

Démonstration. Par linéarité, il suffit de l'établir pour $p(x) = x^n$. Si

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k,$$

alors,

$$\begin{aligned} \langle \partial_t f(t) | x^n \rangle &= \left\langle \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1} | x^n \right\rangle \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_k}{(k-1)!} \delta_{k-1,n} \\ &= a_{n+1} \\ &= \langle f(t) | x^{n+1} \rangle \end{aligned}$$

□

Considérons quelques exemples d'applications linéaires importantes et leurs représentations en séries formelles.

Exemple 2.2.

1) Nous avons déjà vue que la fonction d'évaluatione^{at}*, satisfaisant :*

$$\langle e^{at} | p(x) \rangle = p(a). \tag{2.21}$$

2) L'application de différence avant est l'application delta $e^{at} - 1$*, satisfaisant :*

$$\langle e^{at} - 1 | p(x) \rangle = p(a) - p(0). \tag{2.22}$$

3) L'application Abel est l'application delta te^{at}*, satisfaisant :*

$$\langle te^{at} | p(x) \rangle = p'(a). \tag{2.23}$$

4) L'application inversible $(1-t)^{-1}$ *satisfait*

$$\langle (1-t)^{-1} | p(x) \rangle = \int_0^a p(u) du. \tag{2.24}$$

5) Déterminer l'application linéaire f *satisfaisante*

$$\langle f(t) | p(x) \rangle = \int_0^a p(u) du, \tag{2.25}$$

on remarque que,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f(t) | x^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} t^k = \frac{e^{at} - 1}{t}.$$

2.2 Série formelle en tant qu'opérateurs linéaires

Dans cette section, nous étudions la relation entre les séries formelles et les opérateurs linéaires sur $\mathcal{P}$. Notons l'opérateur dérivé k-ème sur $\mathcal{P}$ par t^k. alors,

$$t^k p(x) = p^{(k)}(x). \tag{2.26}$$

On peut alors le généralise à la série formelle :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \tag{2.27}$$

en définissant l'opérateur linéaire $f(t) : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ par :

$$f(t)p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}[t^k p(x)] = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k!} p^{(k)}(x), \tag{2.28}$$

où la dernière somme étant finie. Notons en particulier que,

$$f(t)x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}. \tag{2.29}$$

Avec cette définition, nous voyons que chaque série formelle $f \in \mathcal{F}$ joue trois rôles dans le calcul ombral : en tant que série formelle, en tant que application linéaire et en tant qu'opérateur linéaire.

Les deux notations $\langle f(t)|p(x)\rangle$ et $f(t)p(x)$ sont clair si nous considérons f comme une application ou comme un opérateur.

Il est important de noter que $f = g$ dans $\mathcal{F}$ si et seulement si $f = g$ comme applications linéaires, ce qui est vrai si et seulement si $f = g$ comme opérateurs linéaires. Il convient également de noter que

$$[f(t)g(t)]p(x) = f(t)[g(t)p(x)] \tag{2.30}$$

donc on peut écrire $f(t)g(t)p(x)$, de plus on a

$$f(t)g(t)p(x) = g(t)f(t)p(x), \qquad \text{pour } f, g \in \mathcal{F} \text{ et } g \in \mathcal{P}. \tag{2.31}$$

Lorsque nous considérons une série delta f comme un opérateur, nous l'appelons un opérateur delta. Le théorème suivant décrit la relation clé entre les applications linéaires et les opérateurs linéaires de la forme $f(t)$.

Théorème 2.4. *([7], page 444) Si $f, g \in \mathcal{F}$ alors,*

$$\langle f(t)g(t)|p(x)\rangle = \langle f(t)|g(t)p(x)\rangle, \tag{2.32}$$

pour tous les polynômes $p(x) \in \mathcal{P}$.

Démonstration. Si f a la forme (2.27) alors d'après (2.29) on a,

$$\langle t^0|f(t)x^n\rangle = \left\langle t^0|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k x^{n-k}\right\rangle = a_n = \langle f(t)|x^n\rangle. \tag{2.33}$$

Par linéarité, cela est vrai pour x^n remplacé par tout polynôme $p(x)$. Par conséquent, l'application au produit fg donne

$$\begin{aligned}\langle f(t)g(t)|p(x)\rangle &= \langle t^0|f(t)g(t)p(x)\rangle \\ &= \langle t^0|f(t)[g(t)p(x)]\rangle \\ &= \langle f(t)|g(t)p(x)\rangle.\end{aligned}$$

□

La relation (2.33) montre que l'application de l'application linéaire $f(t)$ équivalent à l'application de l'opérateur $f(t)$ puis à une évaluation en $x = 0$.

Voici les versions opérateur des applications de l'exemple 2.2.

Exemple 2.3.

1) L'opérateur e^{at} satisfait

$$e^{at}x^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}t^k x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{n-k} = (x+a)^n, \tag{2.34}$$

alors,

$$e^{at}p(x) = p(x+a) \quad \text{pour } p \in \mathcal{P}. \tag{2.35}$$

Donc, e^{at} est un opérateur de traduction.

2) L'opérateur de différence avant est l'opérateur delta $e^{at} - 1$, où

$$(e^{at}-1)p(x) = p(x+a) - p(a). \tag{2.36}$$

3) L'opérateur Abel est l'opérateur delta te^{at}, où

$$te^{at}p(x) = p'(x+a). \tag{2.37}$$

4) L'opérateur inversible $(1-t)^{-1}$ *satisfait*

$$(1-t)^{-1}p(x) = \int_0^\infty p(x+u)e^{-u}du. \tag{2.38}$$

5) L'opérateur $(e^{at}-1)/t$ *satisfait*

$$\frac{e^{at}-1}{t}p(x) = \int_x^{x+a} p(u)du. \tag{2.39}$$

Nous avons vu que toutes les applications linéaires sur $\mathcal{P}$ ont la forme $f(t)$, pour $f \in \mathcal{F}$. Cependant, tous les opérateurs linéaires sur $\mathcal{P}$ n'ont pas cette forme. Pour voir cela, observons que

$$\deg[f(t)p(x)] \leq \deg p(x),$$

mais l'opérateur linéaire $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ défini par $\phi(p(x)) = xp(x)$ n'a pas cette propriété.

Caractérisons les opérateurs linéaires de la forme $f(t)$. Tout d'abord, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 2.1. *Si* T *est un opérateur linéaire sur* $\mathcal{P}$ *et* $Tf(t) = f(t)T$ *pour certaines séries delta* $f(t)$*, alors* $\deg(Tp(x)) \leq \deg(p(x))$.

Démonstration. Pour tout $m \geq 0$ on a,

$$\deg(Tx^m) - 1 = \deg(f(t)Tx^m) = \deg(Tf(t)x^m),$$

alors,

$$\deg(Tx^m) = \deg(Tf(t)x^m) + 1.$$

Comme $\deg(f(t)x^m) = m-1$, nous allons utilisé le raisonnement par récurrence. Pour $m = 0$, on a $\deg(T1) = 1$. Supposons qu'elle est vrai pour $m-1$, alors

$$\deg(Tx^m) = \deg(Tf(t)x^m) + 1 \leq m - 1 + 1 = m.$$

□

Théorème 2.5. *Les assertions suivantes sont équivalentes pour un opérateur linéaire* $T : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$.

1) *T a la forme $f(t)$, , c'est-à-dire qu'il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $T = f(t)$ comme un opérateur linéaire.*
2) *T commute avec l'opérateur dérivé, c'est-à-dire $tT = Tt$.*

3) T commute avec n'importe quel opérateur delta $g(t)$, c'est-à-dire, $Tg(t) = g(t)T$.

4) T commute avec n'importe quel opérateur de translation , c'est-à-dire, $Te^{at} = e^{at}T$.

Démonstration. Il est clair que 1) implique 2). Pour l'inverse, soit

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle t^0 | T x^k \rangle}{k!} t^k,$$

alors,

$$\langle g(t) | x^n \rangle = \langle t^0 | T x^k \rangle.$$

Puisque T commute avec t, on a

$$\begin{aligned}
\langle t^n | T x^k \rangle &= \langle t^0 | t^n T x^k \rangle \\
&= \langle t^0 | T t^n x^k \rangle \\
&= (k)_n \langle t^0 | T x^{k-n} \rangle \\
&= (k)_n \langle t^0 | g(t) x^{k-n} \rangle \\
&= \langle t^n | g(t) x^k \rangle
\end{aligned}$$

et puisque cela est vrai pour tout n et k on obtient $T = g(t)$. □

2.3 Suite de Sheffer

Nous pouvons maintenant définir le principal objet d'étude dans le calcul ombral. En se référant à une suite $s_n(x)$ dans $\mathcal{P}$, nous supposerons toujours que $\deg(s_n(x)) = n$ pour tout $n \geq 0$.

Théorème 2.6. *Soit f une série delta, soit g une série inversible et considérons dans $\mathcal{F}$ la suite géométrique*

$$g, gf, gf^2, gf^3, \ldots.$$

Il existe alors une unique suite $s_n(x)$ dans $\mathcal{P}$ satisfaisant les conditions d'orthogonalité :

$$\langle g(t) f^k(t) | s_n(x) \rangle n! \delta_{n,k} \quad \textit{pour } n, k \geq 0. \tag{2.40}$$

Démonstration. L'unicité découle du théorème 2.2. Pour l'existence, si on pose

$$s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x_j$$

et

$$g(t)f^k(t) = \sum_{i=k}^{\infty} b_{k,i}t^i,$$

où $b_{k,k} \neq 0$ alors (2.40) s'écrit :

$$\begin{aligned} n!\delta_{n,k} &= \left\langle \sum_{i=k}^{\infty} b_{k,i}t^i \middle| \sum_{j=0}^{n} a_{n,j}x_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} b_{k,i}a_{n,j} \left\langle t^i | x_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} b_{k,i}a_{n,i}i!. \end{aligned}$$

Prenons $k = n$, nous obtenons

$$a_{n,n} = \frac{1}{b_{n,n}}.$$

Pour $k = n - 1$, on a

$$0 = b_{n-1,n-1} = a_{n,n-1}(n-1)! + b_{n-1,n}a_{n,n}n!$$

et en utilisant le fait que $a_{n,n} = 1/b_{n,n}$ nous pouvons résoudre ce problème pour $a_{n,n-1}$. En prenant successivement $k = n, n-1, n-2\ldots$ nous pouvons résoudre les équations résultantes pour les coefficients a_n, k de la suite $s_n(x)$. □

Définition 2.1. *La suite $s_n(x)$ est appelée la suite de Sheffer pour $(g(t), f(t))$.*

Deux types spéciaux de séquences Sheffer méritent une mention explicite.

Définition 2.2. *La suite de Sheffer pour une paire de la forme $(1, f(t))$ est appelée la suite associée pour $f(t)$. La suite de Sheffer pour une paire de la forme $(g(t), t)$ est appelée la suite Appell pour $g(t)$.*

Notons que la suite $s_n(x)$ de Sheffer pour $(g(t), f(t))$ si et seulement si

$$\langle g(t)f^k(t)|s_n(x)\rangle n!\delta_{n,k}$$

ce qui équivaut à

$$\langle f^k(t)|g(t)s_n(x)\rangle n!\delta_{n,k}$$

qui est aussi équivalente à dire que la suite $p_n(x) = g(t)s_n(x)$ est la séquence associée à $f(t)$.

Théorème 2.7. *La suite $s_n(x)$ de Sheffer pour $(g(t), f(t))$ si et seulement si la suite $p_n(x) = g(t)s_n(x)$ est la suite associée à $f(t)$.*

Avant de considérer des exemples, nous souhaitons décrire plusieurs caractérisations des suites de Sheffer. Tout d'abord, nous avons besoin d'un résultat clé.

Théorème 2.8. *La suite $s_n(x)$ de Sheffer pour $(g(t), f(t))$.*

1) Pour $h \in \mathcal{F}$,

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | s_k(x) \rangle}{k!} g(t) f^k(t). \tag{2.41}$$

2) Pour $p \in \mathcal{P}$,

$$p(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\langle g(t) f^k(t) | p(x) \rangle}{k!} s_k(x). \tag{2.42}$$

Démonstration. 1) découle du théorème 2.2, puisque

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | s_k(x) \rangle}{k!} g(t) f^k(t) | s_n(x) \right\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | s_k(x) \rangle}{k!} n! \delta_{n,k} \\ &= \langle h(t) | s_n(x) \rangle. \end{aligned}$$

2) découle de la même manière du théorème 2.2. □

Nous pouvons maintenant commencer notre caractérisation des suites de Sheffer, en commençant par la fonction génératrice. L'idée d'une fonction génératrice est assez simple. Si $r_n(x)$ est une suite de polynômes, nous pouvons définir une série formelle de la forme :

$$g(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k(x)}{k!} t^k.$$

Cette série formelle est appelée la fonction génératrice (exponentielle) pour la suite $r_n(x)$.

Théorème 2.9. *([7], page 449)*

1) La suite $p_n(x)$ est la suite associée à la série delta $f(t)$ si et seulement si

$$e^{y\overline{f}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(y)}{k!} t^k, \tag{2.43}$$

où $\overline{f}(t)$ est l'inverse de composition de $f(t)$.

2) La suite $s_n(x)$ de Sheffer pour $(g(t), f(t))$ si et seulement si

$$\frac{1}{g(\overline{f}(t))} e^{y(\overline{f}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(y)}{k!} t^k. \tag{2.44}$$

La somme de droite est appelée la fonction génératrice de $s_n(x)$.

Démonstration. La partie 1) est un cas particulier de la partie 2). Pour la partie 2), l'expression ci-dessus est équivalente à

$$\frac{1}{g(t)}e^{yt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(y)}{k!} f^k(t),$$

ce qui équivaut à

$$e^{yt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(y)}{k!} g(t) f^k(t).$$

Mais si $s_n(x)$ est Sheffer pour $(f(t), g(t))$ alors ce n'est que le théorème d'expansion pour e^{yt}. Inversement, cette expression implique,

$$s_n(y) = \langle e^{yt} | s_n(x) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(y)}{k!} \langle g(t) f^k(t) | s_n(x) \rangle,$$

alors,

$$\langle g(t) f^k(t) | s_n(x) \rangle = n! \delta_{n,k},$$

donc $s_n(x)$ est la suite de Sheffer pour (f, g). □

Nous pouvons maintenant donner une représentation pour les suites de Sheffer

Théorème 2.10. *([7], page 450)*

1) La suite $p_n(x)$ est la suite associée pour $f(t)$ si et seulement si

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \langle \overline{f}(t)^k | x^n \rangle x^k. \tag{2.45}$$

2) La suite $s_n(x)$ est la suite de Sheffer pour $(g(t), f(t))$ si et seulement si

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \langle g(\overline{f}(t))^{-1} \overline{f}(t)^k | x^n \rangle x^k. \tag{2.46}$$

Démonstration. Il suffit de prouver la partie 2). On sait que $s_n(x)$ la suite de Sheffer pour $(g(t), f(t))$ si et seulement si

$$\frac{1}{g(\overline{f}(t))} e^{y\overline{f}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(y)}{k!} t^k.$$

Mais cela est équivalent à

$$\left\langle \frac{1}{g(\overline{f}(t))} e^{y\overline{f}(t)} | x^n \right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(y)}{k!} t^k | x^n \right\rangle = s_n(y).$$

Le développement de l'exponentielle sur la gauche donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle g(\overline{f}(t))^{-1}\overline{f}(t)^k | x^n \rangle}{k!} y^k = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(y)}{k!} t^k | x^n \right\rangle = s_n(y).$$

Le remplacement de y par x donne le résultat. □

Les suites de Sheffer peuvent également être caractérisées au moyen d'opérateurs linéaires.

Théorème 2.11. *([7], page 450)*

1) La suite $p_n(x)$ est la suite associée à $f(t)$ si et seulement si

(a) $p_n(0) = \delta_{n,0}$.

(b) $f(t)p_n(x) = np_{n-1}(x)$ pour $n \geq 0$.

2) La suite $s_n(x)$ est la suite de Sheffer pour $(g(t), f(t))$ si et seulement si

$$f(t)s_n(x) = ns_{n-1}(x) \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Démonstration. Pour la partie 1), si $p_n(x)$ est associé à $f(t)$ alors,

$$p_n(0) = \langle e^{0t} | p_n(x) \rangle \langle f(t)^0 | p_n(x) \rangle = n!\delta_{n,0}.$$

et

$$\begin{aligned} \langle f(t)^k | f(t)p_n(x) \rangle &= \langle f(t)^{k+1} | p_n(x) \rangle \\ &= n!\delta_{n,k+1} \\ &= n(n-1)!\delta_{n,k+1} \\ &= n\langle f(t)^k | p_{n-1}(x) \rangle \end{aligned}$$

et comme cela est vrai pour tout $k \geq 0$ nous obtenons 1b). Inversement, si 1a) et 1b) sont vrais alors

$$\begin{aligned} \langle f(t)^k | p_n(x) \rangle &= \langle t^0 | f(t)^k p_n(x) \rangle \\ &= (n)_k p_{n-k}(0) \\ &= (n)_k \delta_{n-k,0} \\ &= n!\delta_{n,k}, \end{aligned}$$

donc $p_n(x)$ est la suite associée à $f(t)$.

Comme dans la partie 2), si $s_n(x)$ est la suite de Sheffer pour $(g(t), f(t))$, alors

$$\begin{aligned} \langle g(t)f(t)^k | f(t)s_n(x) \rangle &= \langle g(t)f(t)^{k+1} | s_n(x) \rangle \\ &= n!\delta_{n,k+1} \\ &= n(n-1)!\delta_{n-1,k} \\ &= n\langle g(t)f(t)^k | s_{n-1}(x) \rangle, \end{aligned}$$

donc, $f(t)s_n(x) = ns_{n-1}(x)$, comme voulu. Inversement, supposons que

$$f(t)s_n(x) = ns_{n-1}(x)$$

et soit $p_n(x)$ la suite associée à $f(t)$. Considérons T l'opérateur inversible sur V défini par :

$$Ts_n(x) = p_n(x),$$

alors,

$$Tf(t)s_n(x) = nTs_{n-1}(x) = np_{n-1}(x) = f(t)p_n(x) = f(t)Ts_n(x),$$

donc, d'après le théorème 2.5 $T = g(t)$ pour certaines séries inversibles $g(t)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\left\langle g(t)f^k(t)|s_n(x)\right\rangle &= \left\langle f^k(t)|g(t)s_n(x)\right\rangle \\
&= \left\langle t^0|f^k(t)p_n(x)\right\rangle \\
&= (n)_k p_{n-k}(0) \\
&= (n)_k \delta_{n-k,0} \\
&= n!\delta_{n,k}
\end{aligned}$$

et ainsi $s_n(x)$ est suite de Sheffer pour $(g(t), f(t))$. □

Nous donnons ensuite une formule pour l'action d'un opérateur linéaire $h(t)$ sur une suite de Sheffer.

Théorème 2.12. *([7], page 452) Soient $s_n(x)$ une suite de Sheffer pour $(g(t), f(t))$ et $p_n(x)$ la suite associée à $f(t)$. Alors pour tout $h(t)$ on a*

$$h(t)s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle h(t)|s_k(x)\rangle\, p_{n-k}(x). \tag{2.47}$$

Démonstration. Par le théorème d'expansion

$$h(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle h(t)|s_k(x)\rangle}{k!} g(t)f^k(t).$$

On a

$$\begin{aligned}
h(t)s_n(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle h(t)|s_k(x)\rangle}{k!} g(t)f^k(t)s_n(x) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle h(t)|s_k(x)\rangle}{k!} (n)_k P_{n-k}(x),
\end{aligned}$$

quelle est la formule souhaitée. □

Théorème 2.13. *([7], page 452)*

1) (L'identité binomiale) Une suite $p_n(x)$ est la suite associée à une série delta $f(t)$ si et seulement si elle est de type binomial, c'est-à-dire si et seulement si elle satisfait l'identité :

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(y) p_{n-k}(x), \tag{2.48}$$

pour tout $y \in \mathbb{C}$.

2) (L'identité de Sheffer) Une suite $s_n(x)$ est de Sheffer pour $(g(t), f(t))$, pour certains inversibles $g(t)$ si et seulement si

$$s_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(y) s_{n-k}(x), \tag{2.49}$$

pour tout $y \in \mathbb{C}$, où $p_n(x)$ est la suite associée pour $f(t)$.

Démonstration. Pour prouver la partie 1), si $p_n(x)$ est une séquence associée alors prendre $h(t) = e^{yt}$ dans le théorème 2.12 donne l'identité binomiale. À l'inverse, supposons que la suite $p_n(x)$ soit de type binomial. Nous utiliserons la caractérisation d'opérateur pour montrer que $p_n(x)$ est une suite associée. En prenant $x = y = 0$ nous avons pour $n = 0$

$$p_0(0) = p_0(0)p_0(0)$$

donc $p_0(0) = 1$. De plus,

$$p_1(0) = p_0(0)p_1(0) + p_1(0)p_0(0) = 2p_1(0)$$

alors $p_1(0) = 0$. Supposons que $p_i(0) = 0$ pour $i = 1, \ldots, m-1$, on a

$$p_m(0) = p_0(0)p_m(0) + p_1(0)p_0(0) = 2p_m(0)$$

d'où $p_m = 0$. Par suite $p_n(0) = \delta_{n,0}$.

Ensuite, définissons une application linéaire $f(t)$ par

$$\langle f(t) | p_n(x) \rangle = \delta_{1,n}.$$

Comme $\langle f(t)|1\rangle = \langle f(t)|p_0(x)\rangle = 0$ et $\langle f(t)|p_1(x)\rangle = 1 \neq 0$ on en déduit que $f(t)$ est une série delta. Maintenant, l'identité binomiale donne

$$\begin{aligned} \langle f(t)|e^{yt}p_n(x)\rangle &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_n(y) \langle f(t)|p_{n-k}(x)\rangle \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_n(y) \delta_{n-k,1} \\ &= n p_{n-1}(y) \end{aligned}$$

alors

$$\langle e^{yt}|f(t)p_n(x)\rangle = \langle e^{yt}|np_{n-1}(x)\rangle$$

et comme cela est vrai pour tout y, nous obtenons $f(t)p_n(x) = np_{n-1}(x)$. Ainsi, $p_n(x)$ est la suite associée à $f(t)$.

Pour la partie 2), si $s_n(x)$ est une suite de Sheffer, alors prendre $h(t) = e^{yt}$ dans le théorème 2.12 donne l'identité de Sheffer. À l'inverse, supposons que l'identité de Sheffer soit vraie, où $p_n(x)$ est la suite associée pour $f(t)$. Il suffit de montrer que $g(t)s_n(x) = p_n(x)$ pour certain $g(t)$ inversible. Définissons un opérateur linéaire T par

$$Ts_n(x) = p_n(x).$$

Alors

$$e^{yt}Ts_n(x) = e^{yt}p_n(x) = p_n(x+y)$$

et par l'identité de Sheffer

$$Te^{yt}s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(y)Ts_{n-k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(y)p_{n-k}(x)$$

et les deux sont égaux par la partie 1). Par conséquent, T commute avec e^{yt} et est donc de la forme $g(t)$, comme souhaité. $\square$

2.4 Exemples de suite de Sheffer

Nous pouvons maintenant donner quelques exemples de suite de Sheffer. Bien qu'il soit souvent relativement simple de vérifier qu'une suite donnée est Sheffer pour une paire donnée $(g(t), f(t))$, il en va tout autrement de trouver la suite de Sheffer pour une paire donnée. Le calcul ombral propose deux formules à cet effet, l'une des ce qui est direct, mais nécessite le calcul habituellement très difficile de la série $(f(t)/t)^{-n}$. L'autre est une relation de récurrence qui exprime chaque $s_n(x)$ en termes de termes précédents dans la suite de Sheffer. Malheureusement, l'espace ne nous permet pas de discuter en détail de ces formules. Cependant, nous discuterons de la formule de récurrence des suites associées plus loin dans ce chapitre.

Exemple 2.4. *La suite $p_n(x) = x^n$ est la suite associée pour la série delta $f(t) = t$. La fonction génératrice de cette suite est*

$$e^{yt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^k$$

et l'identité binomiale est la formule binomiale bien connue

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Exemple 2.5. *Les polynômes factoriels inférieurs*

$$(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

former la suite associée pour la fonction de différence directe

$$f(t) = e^t - 1$$

discuté dans l'exemple 18.2. Pour voir cela, nous calculons simplement, en utilisant le théorème 18.12. Puisque $(0)_0$ *est défini comme étant 1, nous avons* $(0)_n = \delta_{n,0}$*. Aussi,*

$$\begin{aligned}
(e^t-1)(x)_n &= (x+1)_n - (x)_n \\
&= (x+1)x(x-1)\cdots(x-n+2) - x(x-1)\cdots(x-n+1) \\
&= x(x-1)\cdots(x-n+2)(x+1-(x-n+1)) \\
&= nx(x-1)\cdots(x-n+2) \\
&= n(x)_{n-1}.
\end{aligned}$$

La fonction génératrice des polynômes factoriels inférieurs est

$$e^{y\ln(1+t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y)_k}{k!} t^k$$

qui peut être réécrit sous la forme la plus familière

$$(1+t)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k} t^k.$$

Bien sûr, il s'agit d'une identité formelle, il n'est donc pas nécessaire de restreindre t*. L'identité binomiale dans ce cas est*

$$(x+y)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k}$$

qui peut également être écrit sous la forme

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}.$$

C'est ce qu'on appelle la formule de convolution de Vandermonde.

Exemple 2.6. *Les célèbres polynômes Hermite $H_n(x)$ forment la suite d'Appell pour la fonction inversible*

$$g(t) = e^{t^2/2}.$$

En utilisant ce fait, nous obtenons

$$H_n(x) = e^{-t^2/2}x^n = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \frac{(n)_{2k}}{k!} x^{n-k}.$$

La fonction génératrice des polynômes Hermite est

$$e^{yt-t^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(y)}{k!} t^k$$

et l'identité de Sheffer est

$$H_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(x) y^{n-k}.$$

Il faut remarquer que les polynômes Hermite, tels que définis dans la littérature, diffèrent souvent de notre définition par une constante multiplicative.

Exemple 2.7. *Les polynômes de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ d'ordre α forment la suite de Sheffer pour la paire*

$$g(t) = (1-t)^{-\alpha-1} \quad et \quad f(t) = \frac{t}{t-1}.$$

On a

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{\alpha+n}{n-k} (-x)^k.$$

La fonction génératrice des polynômes de Laguerre est

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{yt/(t-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{k!} t^k.$$

Comme pour les polynômes Hermite, certaines définitions des polynômes de Laguerre diffèrent par une constante multiplicative.

Corollaire 2.1. *Les polynômes de Sheffer satisfont les relations suivantes :*

$$s_n(x) = g(t)^{-1} x^n, \tag{2.50}$$

formule dérivée

$$t s_n(x) = s_n'(x) = n s_{n-1}(x), \tag{2.51}$$

formule de récurrence

$$s_{n+1}(x) = \left(x - \frac{g'(t)}{g(t)} \right) s_n(x), \tag{2.52}$$

théorème d'expansion

$$h(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | s_k(x) \rangle}{k!} g(t) t^k, \tag{2.53}$$

théorème de multiplication

$$s_n(\alpha x) = \alpha^n \frac{g(t)}{g(\frac{\alpha}{t})} s_n(x), \tag{2.54}$$

et

$$\langle h(t) | p(\alpha x) \rangle = \langle h(\alpha t) | p(x) \rangle , \tag{2.55}$$

où $\alpha \neq 0$.

Corollaire 2.2. *Soit* $f_1(t), \ldots, f_m(t) \in \mathcal{F}$. *Alors, on a*

$$\langle f_1(t) f_2(t) \cdots f_m(t) | x|^n \rangle = \sum \left(\binom{i_1, \ldots, i_m}{n} \right) \left\langle f_1(t) | x^{i_1} \right\rangle \cdots \left\langle f_m(t) | x^{i_m} \right\rangle , \tag{2.56}$$

où la somme est sur tous les entiers non négatifs $i_1, \ldots, i_m$ *tels que* $i_n + \cdots + i_m = n$.

Chapitre 3

Quelques identités des polynômes de Bernoulli, de Genoucchi et de Laguerre dérivés du calcul ombral

Dans ce chapitre, en utilisant les propriétés des suites de Sheffer et les suites d'Appell, nous démontrons de nombreuses propriétés fondamentales

3.1 Calcul ombral et polynômes de Genocchi d'ordre supérieur

Définition 3.1. *Les polynômes de Genocchi d'ordre supérieur $G_n^{(a)}(x)$ sont définis par la fonction génératrice suivante :*

$$\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^a e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(a)}(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{3.1}$$

où $|t| < \pi$. Notons que $G_n^{(1)} = G_n(x)$ est le polynôme de Genocchi.

En utilisant (2.50) et(3.1), nous arrivons à le lemme suivant :

Lemme 3.1. *On a :*

$$G_n^{(b)}(x) = \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^b x^n. \tag{3.2}$$

Théorème 3.1. *On a*

$$\langle (e^t+1)^k | G_n(x)\rangle = 2n(k-1)!\sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-j-1}\frac{S(n-1,j)}{(k-j-1)!}. \tag{3.3}$$

où $G_n(x)$ et $S(u,v)$ désignons respectivement les polynômes de Genocchi et les nombres Stirling du deuxième espèce.

Démonstration. D'après le lemme 3.1, on obtient

$$\langle (e^t+1)^k | G_n(x)\rangle = \left\langle (e^t+1)^k | \frac{2t}{e^t+1}x^n \right\rangle.$$

En utilisant (2.32) et (2.51), on obtient

$$\langle (e^t+1)^k | G_n(x)\rangle = 2n\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{(k-j-1)!}2^{k-j-1}\left\langle \frac{(e^t-1)^j}{j!} | x^{n-1}\right\rangle. \tag{3.4}$$

Comme

$$S(n-1,j) = \frac{1}{j!}\langle (e^t-1)^j | x^{n-1}\rangle,$$

alors en substituant la relation ci-dessus en (3.4), on arrive au résultat souhaité. □

En utilisant (2.51), on arrive au lemme suivant.

Lemme 3.2. *On a*

$$tG_n^{(a)}(x) = nG_{n-1}^{(a)}(x).$$

Remarque 3.1. *Une deuxième preuve du lemme 3.2 est également obtenue à partir de* (3.1) *en utilisant la dérivée par rapport à x.*

Remarque 3.2. *D'après le lemme 3.2, on peut voir que*

$$\frac{1}{t}G_n^{(a)}(x) = \frac{1}{n+1}G_{n+1}^{(a)}(x).$$

Lemme 3.3. *On a*

$$\left(\frac{1}{e^t+1}\right)G_n^{(a)}(x) = \frac{1}{2(n+1)}G_{n+1}^{(a+1)}(x).$$

Démonstration. De (3.1) et lemme 3.1, on obtient

$$\left(\frac{1}{e^t+1}\right)G_n^{(a)}(x) = \frac{1}{e^t+1}\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^a x^n.$$

Après quelques calculs dans l'équation au dessus, on arrive à

$$\left(\frac{1}{e^t+1}\right)G_n^{(a)}(x) = \frac{1}{2t}\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{a+1} x^n.$$

En utilisant le lemme 3.2, on obtient le résultat souhaité. □

Une représentation intégrale de $\langle \frac{e^{ta}-1}{2t} | G_n^{(b)}(x)\rangle$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.2. *On a*

$$\left\langle \frac{e^{ta}-1}{2t} | G_n^{(b)}(x) \right\rangle = \frac{1}{2}\int_0^a G_n^{(b)}(x)dx.$$

Démonstration. En utilisant le lemme 3.2, on a :

$$\left\langle \frac{e^{ta}-1}{2t} | G_n^{(b)}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{e^{ta}-1}{2t} | \frac{1}{n+1} tG_{n+1}^{(b)}(x) \right\rangle.$$

Par (2.32), on obtient :

$$\left\langle \frac{e^{ta}-1}{2t} | G_n^{(b)}(x) \right\rangle = \frac{1}{n+1}\langle e^{at}-1 | G_{n+1}^{(b)}(x)\rangle.$$

Le résultat souhaité découle maintenant de (2.22). □

Une formule de récurrence pour $G_n^{(a)}(x)$ est donné par le prochaine théorème.

Théorème 3.3 (Formule de récurrence)**.** *On a*

$$G_n^{(a+1)}(x) = \frac{2}{a}\left((n-a+1)G_{n+1}^{(a)}(x) + (a-x)(n+1)G_n^{(a)}(x)\right).$$

Démonstration. Dans la formule (2.52), posons

$$g(t) = \left(\frac{e^t+1}{2t}\right)^{(a)}. \tag{3.5}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} G_{n+1}^{(a)} &= \left(x - a\frac{e^t t - (e^t+1)}{t(e^{t+1})}\right) G_n^{(a)}(x) \\ &= xG_n^{(a)}(x) - a\left(\frac{e^t}{(e^t+1)} - \frac{1}{t}\right) G_n^{(a)}(x) \\ &= xG_n^{(a)}(x) + \frac{a}{2(n+1)} G_{n+1}^{(a+1)}(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, dans l'équation ci-dessus en utilisant le lemme 3.3, la remarque 3.2 et le fait que

$$G_n^{(a)}(x) = 2nG_{n-1}^{(a-1)}(x) - G_n^{(a)}(x),$$

nous arrivons au résultat souhaité. □

Nous sommes maintenant prêt à prouver la formule de multiplication des polynômes de Genocchi comme suit :

Théorème 3.4 (Formule de multiplication)**.** *Pour chaque entier impair positif α, on a*

$$G_n(\alpha x) = \alpha^{n-1}\sum_{j=0}^{\alpha-1}(-1)^n G_n\left(x + \frac{j}{\alpha}\right).$$

Démonstration. Si on substitue(3.5) dans (2.54) et posons $a = 1$, alors on obtient :

$$G_n(\alpha x) = \alpha^n \left(\frac{e^t+1}{2t}\right) \frac{\frac{2t}{\alpha}}{e^{\frac{t}{\alpha}}+1} G_n(x) = \alpha^{n-1}\frac{e^t+1}{e^{\frac{t}{\alpha}}+1}G_n(x).$$

Á partir de l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$G_n(\alpha x) = \alpha^{n-1}\sum_{j=0}^{\alpha-1}(-1)^n e^{\frac{tj}{\alpha}} G_n(x).$$

Grâce à (2.21), nous arrivons au résultat souhaité. □

Rappelons que les polynômes d'Euler $E_n^{(a)}$ d'ordre supérieur a sont définis par la série génératrice :

$$\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^a e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(a)}(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Lemme 3.4. *On a*

$$E_n^{(a)}(x) = \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^a x^n.$$

Le prochaine théorème exprime les polynômes de Genocchi en termes de polynômes d'Euler et les nombres de Stirling du premier espèce.

Théorème 3.5. *On a*

$$G_n^{(a)}(x) = \sum_{j=0}^{a}\sum_{k=0}^{j}\sum_{m=0}^{k}\binom{a}{j}\binom{j}{k}2^{k-1}(-1)^{j-k}s(k,m)n^m E_{n-k}^{(a)}(x).$$

Démonstration. De le lemme 3.1, nous trouvons

$$\begin{aligned} G_n^{(a)}(x) &= \left(\frac{1}{e^t+1}+\frac{2t-1}{e^t+1}\right)^a X^n \\ &= \sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}\frac{1}{(e^t+1)^a}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k(-1)^{j-k}t^k x^n. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$t^k x^n = (n)_k x^{n-k},$$

où $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ dans ce qui précédé, nous obtenons :

$$G_n^{(a)}(x) = \sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}\frac{1}{2^a}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k(-1)^{j-k}(n)_k\left(\frac{2}{(e^t+1)}\right)^a x^{n-k}.$$

En utilisant le lemme 3.4 et le fait que

$$(y)_k = \sum_{m=0}^{k} S(k,m)Y^m,$$

où $S(k,m)$ désigne les nombres de Stirling de premiers espèce dans ce qui précédé, nous obtenons le résultat souhaité. □

Théorème 3.6. *On a*

$$(e^t+1)G_n^{(a)}(x) = 2nG_{n-k}^{a-1}(x).$$

Démonstration. En utilisant (2.50), on obtient

$$(e^t+1)G_n^{(a)}(x) = (2t)\left(\frac{2t}{ep^t+1}\right)^{a-1} x^n.$$

Grâce aux lemmes 3.1 et 3.2, on obtient le résultat souhaité. □

En remplaçant $a=1$ dans le théorème 3.6, nous arrivons au corollaire suivant.

Corollaire 3.1. *On a*

$$G_n(x+1)+G_n(x) = 2nx^{n-1}. \tag{3.6}$$

Remarque 3.3. *Si on pose $a=1$ dans (3.1), alors on peut arriver à la prouve de corollaire 3.1 ci-dessus comme suit :*

$$2te^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty}(G_n(x+1)+G_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

d'après ce qui précédé, nous arrivons à (3.6).

3.2 Calcul ombral et polynômes de Bernoulli

Les polynômes de Bernoulli sont définit par la fonction génératrice :

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = e^{B(x)t} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n(x)\frac{t^n}{n!}}, \tag{3.7}$$

Dans le cas particulier, $x=0$, $B_n(0) := B_n$ sont appelés les nombres Bernoulli . De (3.7), on a

$$B_0 = 1 \quad \text{et} \quad (B+1)^n - B^n = B_n(1) - B_n = \delta_{1,n},$$

où $\delta_{m,k}$ est le symbole Kronecker.

En particulier, par (3.7), on a

$$B_n(x) = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}B_{n-l}x^l. \tag{3.8}$$

D'après (3.8), on voit que $B_n(x)$ est un polynôme unitaire de degré n. Nous rappelons que les polynômes Euler sont définis par la fonction génératrice :

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = e^{E(x)t} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.9}$$

Dans le cas particulier, $x = 0$, $E_n(0) = E_n$ sont appelés les nombres Euler. De (3.9), nous pouvons déduire l'équation suivante :

$$E_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} E_{n-l} x^l. \tag{3.10}$$

Ainsi par (3.10), on voit que $E_n(x)$ est aussi un polynôme unitaire de degré n.

En utilisant (3.10), on obtient

$$E_0 = 1 \quad \text{et} \quad (E+1)^n + E^n = E_n(1) + E_n = 2\delta_{0,n} \tag{3.11}$$

Théorème 3.7. *$B_n(x)$ est une suite d'Appell pour $\frac{e^t - 1}{t}$.*

Démonstration. Soit

$$g(t) := \frac{e^t - 1}{t} \in \mathcal{F}.$$

Alors $g(t)$ est une série inversible .Par (3.7), on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} t^k = \frac{1}{g(t)} e^{xt}. \tag{3.12}$$

Donc d'après (3.12), on a

$$\frac{1}{g(t)} x^n = B_n(x) \quad (n \geqslant 0), \tag{3.13}$$

et

$$tB_n(x) = B_n'(x) = nB_{n-1}(x). \tag{3.14}$$

Á partir de (3.13) et (3.14), nous déduisons le résultat souhaité. □

Théorème 3.8. *On a*

$$B_n(x) = \frac{t}{e^t - 1} x^n. \tag{3.15}$$

Démonstration. Par (3.8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+y} B_n(u)du &= \frac{1}{n+1}\left\{B_{n+1}(x+y) - B_{n+1}(x)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^{k-1} B_n(x) \\
&= \frac{e^{yt} - 1}{t} B_n(x).
\end{aligned}$$

En particulier, pour $y = 1$, nous avons

$$B_n(x) = \frac{t}{e^t - 1} \int_x^{x+1} B_n(u)du = \frac{t}{e^t - 1} x^n.$$

□

Théorème 3.9. *On a*

$$\left\langle \frac{e^{yt}-1}{t} | B_n(x) \right\rangle = \int_0^y B_n(u)du. \tag{3.16}$$

Démonstration. D'après (2.51), nous obtenons facilement

$$B_n(x) = t\left\{ \frac{1}{n+1} B_{n+1}(x) \right\} \tag{3.17}$$

Á partir de(3.17), nous pouvons déduire l'équation suivante :

$$\left\langle \frac{e^{yt}-1}{t} | B_n(x) \right\rangle = \left\langle e^{yt}-1 | \frac{1}{n+1} B_{n+1}(x) \right\rangle = \int_0^y B_n(u)du.$$

□

Pour $r \in \mathbb{N}$, les polynômes de Bernoulli d'ordre r sont définis par la fonction génératrice :

$$\left(\frac{t}{e^t-1} \right)^r e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r)}(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{3.18}$$

Dans le cas particulier, $x = 0$, $B_n^{(r)}(0) = B_n^{(r)}$ sont appelés les nombres Bernoulli d'ordre r.

De (3.18), on obtient

$$B_n^{(r)}(x) = \sum_{l=0}^{n} \binom{l}{n} B_{n-l}^{(r)} x^r. \tag{3.19}$$

Notons que

$$B_n^{(r)} = \sum_{l_1+\cdots+l_r=n} \binom{l_1,\ldots,l_r}{n} B_{l_1}\cdots B_{l_r}. \tag{3.20}$$

Grâce aux (3.19) et (3.20), on déduit que $B_n^{(r)}(x)$ est un polynôme unitaire avec des coefficients en $\mathbb{Q}$.

Maintenant, nous montrons le théorème suivant :

Théorème 3.10. $B_n^{(r)}(x)$ *est la suite d'Appell pour* $\left(\frac{e^t-1}{t} \right)^r$

Démonstration. D'après (3.19), on obtient

$$\begin{aligned} \int_x^{x+y} B_n^{(r)}(u)du &= \frac{1}{n+1}\left\{ B_{n+1}^{(r)}(x+y) - B_{n+1}^{(r)}(x) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^{k-1} B_n(x) \\ &= \frac{\exp^{yt}-1}{t} B_n^{(r)}(x), \end{aligned} \tag{3.21}$$

et

$$B_n^{(r)}(x+1) - B_n^{(r)}(x) = nB_{n-1}^{(r-1)}(x). \tag{3.22}$$

Á partir de (3.21) et (3.22), on remarque

$$\frac{e^t-1}{t}B_n^{(r)}(x)=\int_x^{x+1}B_n^{(r)}(u)du=B_n^{(r-1)}(x). \tag{3.23}$$

Par (3.23), on obtient

$$B_n^{(r)}(x)=\left(\frac{t}{e^t-1}\right)B_n^{(r-1)}(x)=\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{r-1}B_n(x)=\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{r}x^n, \tag{3.24}$$

et

$$tB_n^{(r)}(x)=n\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{r}x^{r-1}=nB_{n-1}^{(r)}(x). \tag{3.25}$$

Il est facile de montrer que $\left(\frac{e^t-1}{t}\right)^r$ est une série inversible dans $\mathcal{F}$. Donc, par (3.24) et (3.25), on obtient le théorème. □

Théorème 3.11. *Soit $p(x)\in\mathcal{P}_n$ avec $p(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kB_k(x)$. Alors on a*

$$b_k=\frac{1}{k!}\left\langle\frac{e^t-1}{t}|p^{(k)}(x)\right\rangle=\frac{1}{k!}\int_0^1p^{(k)}(u)du,$$

où $p^{(k)}(u)=\frac{d^k}{du^k}p(u)$.

Démonstration. En utilisant (3.25), on déduire

$$B_n^{(r)}(x)=t\left\{\frac{1}{n+1}B_n^{(r)}(x)\right\}\quad(n\geqslant 0). \tag{3.26}$$

Ainsi, de (3.26), on a

$$\left\langle\frac{e^{yt}-1}{t}|B_n^{(r)}(x)\right\rangle=\left\langle e^{yt}-1|\frac{1}{n+1}B_n^{(r)}(x)\right\rangle=\int_0^yB_{n+1}^{(r)}(u)du. \tag{3.27}$$

Dans le cas particulier $y=1$, on obtient

$$\left\langle\frac{e^{yt}-1}{t}|B_n^{(r)}(x)\right\rangle=\int_0^1B_{n+1}^{(r)}(u)du=B_n^{r-1}.$$

Par (2.56), on a

$$\left\langle\left(\frac{t}{e^{yt}-1}\right)^r|x^n\right\rangle=\sum_{n=i_1+\cdots+i_r}\binom{n}{i_1,\cdots,i_r}\left\langle\frac{t}{e^{yt}-1}|x^{i_1}\right\rangle\cdots\left\langle\frac{t}{e^{yt}-1}|x^{i_r}\right\rangle \tag{3.28}$$

et

$$\left\langle\frac{t}{e^{yt}-1}|x^n\right\rangle=B_n,\qquad\left\langle\left(\frac{t}{e^{yt}-1}\right)^r|x^n\right\rangle=B_n^{(r)}. \tag{3.29}$$

Ainsi, d'après (3.28) et (3.29), on a

$$\sum_{n=i_1+\cdots+i_r} \binom{n}{i_1,\ldots,i_r} B_{i_1}\cdots B_{i_r} = B_n^{(r)}.$$

Prenons $p(x) \in \mathcal{P}_n$ avec

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k B_k(x) \tag{3.30}$$

De (3.13) et (3.14), on remarque que $B_n(x) \sim (\frac{e^t-1}{t}, t)$. Par la définition des suites d'Appell, on a

$$\left\langle \frac{e^t-1}{k} t^k | B_n(x) \right\rangle = n!\delta_{n,k} \quad (n,k \geq 0), \tag{3.31}$$

et en utilisant (3.30), on déduit

$$\left\langle \frac{e^t-1}{t} t^k | p(x) \right\rangle = \sum_{l=0}^{n} b_l \left\langle \frac{e^t-1}{k} t^k | B_l(x) \right\rangle = \sum_{l=0}^{n} b_l l! \delta_{l,k} = k! b_k. \tag{3.32}$$

Par suite, d'après (3.16) et (3.32) ,on a

$$b_k = \frac{1}{k!} \left\langle \frac{e^t-1}{t} t^k | p(x) \right\rangle = \frac{1}{k!} \left\langle \frac{e^t-1}{t} | p^{(k)}(x) \right\rangle = \frac{1}{k!} \int_0^1 p^{(k)}(u) du, \tag{3.33}$$

où $p^{(k)}(u) = \frac{d^k}{du^k} p(u)$, par conséquent, grâce aux (3.30) et (3.33), nous obtenons le théorème. □

Corollaire 3.2. *Pour $n \geq 0$, on a*

$$B_n^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\langle \frac{e^t-1}{t} | B_{n-k}^{(r)}(x) \right\rangle B_k(x)$$

i. e

$$B_n^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}^{(r-1)} B_k(x).$$

Démonstration. Soit $p(x) = B_n^{(r)}(x) \in \mathcal{P}_n$ avec $p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k B_k(x)$. Alors, on a

$$p^{(k)}(x) = k! \binom{n}{k} B_{n-k}^{(r)}(x), \tag{3.34}$$

et

$$b_k = \frac{1}{k!} \left\langle \frac{e^t-1}{t} | p^{(k)}(x) \right\rangle = \binom{n}{k} \left\langle \frac{e^t-1}{t} | B_{n-k}^{(r)}(x) \right\rangle. \tag{3.35}$$

Par conséquent, le théorème 3.11 et l'identité (3.35) impliquent le corollaire. □

Théorème 3.12. *Soit $p(x) \in \mathcal{P}_n$ avec $p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(r)} B_k^{(r)}(x)$. Alors, on a*

$$b_k^{(r)} = \frac{1}{k!} \left\langle \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^r t^k | p(x) \right\rangle.$$

Démonstration. Á partir de la définition des suites d'Appell, on a

$$\left\langle \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^r t^k | B_n^{(r)}(x) \right\rangle = n! \delta_{n,k} \quad (n,k) \geq 0. \tag{3.36}$$

Soit $p(x) \in \mathcal{P}_n$ avec $p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(r)} B_k^{(r)}(x)$. D'après (3.36) on a

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^r t^k | p(x) \right\rangle &= \sum_{l=0}^{n} b_l^{(r)} \left\langle \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^r t^k | B_l^{(r)}(x) \right\rangle \\ &= \sum_{l=0}^{n} b_l^{(r)} l! \delta_{l,k} = k! b_k^{(r)}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Ainsi, grâce à (3.37), on a

$$b_k^{(r)} = \frac{1}{k!} \left\langle \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^r t^k | p(x) \right\rangle. \tag{3.38}$$

Par conséquent, par (3.38), on obtient le théorème. □

Théorème 3.13. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\binom{r}{k}}{r! \binom{n+r-k}{r-k}} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} B_{n+r-k}(j) B_k^{(r)}(x) \\ &+ \sum_{k=r}^{n} \frac{\binom{n}{k-r}}{r! \binom{k}{r}} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} B_{n+r-k}(j) B_k^{(r)}(x). \end{aligned}$$

Démonstration. Considérons $p(x) = B_n(x)$ avec

$$B_n(x) = p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(r)} B_k^{(r)}(x). \tag{3.39}$$

Le théorème 3.12 et l'identité (3.39) impliquent

$$b_k^{(r)} = \frac{1}{k!} \left\langle \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^r t^k | p(x) \right\rangle = \frac{1}{k!} \left\langle \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^r t^k | B_n(x) \right\rangle. \tag{3.40}$$

Pour $k < r$, on a

$$\begin{aligned} b_k^{(r)} &= \frac{1}{k!}\left\langle \left(\frac{e^t-1}{t}\right)^r t^k \middle| B_n(x) \right\rangle \\ &= \frac{1}{k!}\left\langle (e^t-1)^r \middle| \frac{B_{n+r-k(x)}}{(n+1)\cdots(n+r-k)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{k!(r-k)!\binom{n+r-k}{r-k}} \langle (e^t-1)^r | B_{n+r-k}(x)\rangle \\ &= \frac{\binom{r}{k}}{r!\binom{n+r-k}{r-k}} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \langle e^{jt} | B_{n+r-k(x)}\rangle \\ &= \frac{\binom{r}{k}}{r!\binom{n+r-k}{r-k}} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} B_{n+r-k(j)}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Soit $k \geq r$. Alors par (3.40), on a

$$\begin{aligned} b_k^{(r)} &= \frac{1}{k!}\langle (e^t-1)^r t^{k-r} | B_n(x)\rangle \\ &= \frac{1}{k!}\langle (e^t-1)^r | t^{k-r} B_n(x)\rangle \\ &= \frac{1}{k!}\binom{n}{k-r}(k-r)!\langle (e^t-1)^r | B_{n+r-k}(x)\rangle \\ &= \frac{\binom{n}{k-r}}{r!\binom{k}{r}} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \langle e^{jt} | B_{n+r-k(x)}\rangle \\ &= \frac{\binom{n}{k-r}}{r!\binom{k}{r}} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} B_{n+r-k}(j). \end{aligned}$$

Par conséquent, grâce aux (3.39), (3.41) et (3.42), on trouve le résultat du théorème. □

Théorème 3.14. *Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq m$. On a*

$$\begin{aligned} E_n^{(r)}(x)E_{n-m}^{(r)}(x) &= 4\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{E_{n-l+1}}{n-l+1}B_l(x)\right)\left(\sum_{p=0}^{n}\binom{n-m}{p}\frac{E_{n-m-p+1}}{n-m-p+1}B_p(x)\right) \\ &= 4\sum_{k=0}^{2n-m}\sum_{l=0}^{k}\binom{n-m}{l}\binom{n}{k-l}\frac{E_{n-m-l+1}E_{n-k+l+1}}{(n-m-l+1)(n-k+l+1)}B_l(x)B_{k-l}(x). \end{aligned}$$

Démonstration. Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq m$, on a

$$\begin{aligned} B_n^{(r)}(x)B_{n-m}^{(r)}(x) &= \left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}B_{n-l}^{(r-1)}B_l(x)\right)\left(\sum_{p=0}^{n}\binom{n-m}{p}B_{n-m-p}^{(r-1)}B_p(x)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n-m}\sum_{p=0}^{k}\binom{n-m}{p}\binom{n}{k-p}B_{n-m-p}^{r-1}B_{n-k+p}^{r-1}B_p(x)B_{k-p}(x), \end{aligned} \tag{3.42}$$

où $n-m-p \geq 0$.

Considérons $p(x) = E_n(x)$ tel que

$$E_n(x) = p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k B_k(x). \tag{3.43}$$

Alors, on a

$$p^{(k)}(x) = k!\binom{n}{k} E_{n-k}(x) \tag{3.44}$$

et

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{k!}\left\langle \frac{e^t-1}{t} | p^{(k)}(x) \right\rangle = \binom{n}{k}\left\langle \frac{e^t-1}{t} | E_{n-k}(x) \right\rangle \\ &= \binom{n}{k}\frac{E_{n-k+1}(1)-E_{n-k+1}}{n-k+1} = -2\binom{n}{k}\frac{E_{n-k+1}}{n-k+1}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

D'après (3.43) et (3.45), on obtient

$$E_n(x) = -2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{E_{n-k+1}}{n-k+1} B_k(x). \tag{3.46}$$

De (3.46), nous déduisons le résultat du théorème. □

3.3 Calcul ombral et polynômes de Laguerre

Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \{1\}$. Les polynôme de Frobenius-Euler sont définis par la fonction génératrice :

$$\left(\frac{1-\lambda}{e^t-\lambda}\right) e^{xt} = e^{H(x|\lambda)t} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x|\lambda)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.47}$$

En particulier, si $x=0$, alors $H_n(0|\lambda) = H_n(\lambda)$ est appelé le n-ième nombre de Frobenius-Euler.

D'après (3.47), on a

$$H_n(x\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} H_k(\lambda)x^{n-k}. \tag{3.48}$$

Les polynôme de Laguerre sont définis par la fonction génératrice :

$$\frac{\exp(-\frac{xt}{1-t})}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n. \tag{3.49}$$

De (3.49), on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^r}{r!}(1-t)^{-r-1}t^r \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{r!}x^r\right)t^n. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Alors, d'après (3.50), on obtient

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r \binom{n}{r}}{r!} x^r. \tag{3.51}$$

Donc, (3.50) implique que $L_n(x)$ est un polynôme de degré n avec coefficient rationnel et le coefficient dominant est $\dfrac{(-1)^n}{n!}$. Par (3.51), notons que $u = L_n(x)$ est la solution de l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$xu''(x) + (1-x)u'(x) + nu(x) = 0. \tag{3.52}$$

La formule de Rodrigues pour $L_n(x)$ est donnée par :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^n \right). \tag{3.53}$$

La formule (3.53) implique

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{n,m}, \quad (n, m \in \mathbb{N}^*), \tag{3.54}$$

où $\delta_{n,m}$ est le symbole de Kronecker.

Soit

$$\mathcal{P}_n = \{ p(x) \in \mathbb{C}[x] | \deg p(x) \leqslant n \}. \tag{3.55}$$

$\mathcal{P}_n$ est un espace préhilbertien avec le produit scalaire :

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx, \tag{3.56}$$

où $p(x)$, $q(x) \in \mathcal{P}_n$. D'après (3.54), (3.55) et (3.56), c'est clair que $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ sont une base orthogonale pour $\mathcal{P}_n$.

Théorème 3.15. *Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant k$, on a*

$$L_k(x) = \frac{(-1)^k}{n! \binom{k}{n}} S_2(n,k) (x)_k,$$

où $S_2(n,k)$ est le nombre de Stirling du deuxième espèce.

Démonstration. Pour $p(x) \in \mathcal{P}_n$, supposons que le polynôme $p(x)$ défini sur $[0, \infty)$ est donné par

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k L_k(x). \tag{3.57}$$

Par suite, d'après (3.54) et (3.57), on obtient

$$\begin{aligned} C_k &= \langle p(x), L_k(x)\rangle = \int_0^\infty e^{-x}p(x)L_k(x)dx \\ &= \frac{1}{k!}\int_0^\infty \left(\frac{d^k}{dx^k}e^{-x}x^k\right)p(x)dx. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Prenons $p(x) = x^n$ où $n \geqslant 0$. Alors, de (3.58), on obtient

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{k!}\int_0^\infty \left(\frac{d^k}{dx^k}\right)e^{-x}x^k dx \\ &= (-1)^k\frac{(n)_k}{k!}\int_0^\infty e^{-x}x^n dx \\ &= (-1)^k\binom{k}{n}n! \end{aligned} \tag{3.59}$$

Grâce aux (3.57) et (3.59), on obtient

$$x^n = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{k}{n}L_k(x). \tag{3.60}$$

Puisque

$$(x)_k = x(x-1)\cdots(n-k+1) \sim (1, e^t - 1). \tag{3.61}$$

Alors, en utilisant (2.42) et (3.60), on obtient

$$x^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\langle (e^t-1)^k | x^n\rangle}{k!}(x)_k = \sum_{k=0}^{n}S_2(n,k)(x)_k, \tag{3.62}$$

Les identités (3.60) et (3.62) impliquent

$$L_k(x) = \frac{(-1)^k}{n!\binom{k}{n}}S_2(n,k)(x)_k,$$

où $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $(n \geqslant k)$. D'où le résultat. $\square$

Théorème 3.16. *Pour $n \geqslant 0$, on a*

$$\frac{1}{n!}(L_n \circ L)(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{k}{n}L_k(x).$$

Démonstration. Soient $p_n(x)$ et $q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} q_{n,k}x^k$ deux suites de polynômes. La composition ombral de $q_n(x)$ et $p_n(x)$ est la suite

$$(q_n \circ p)(x) = \sum_{k=0}^{n} q_{n,k}p_k(x). \tag{3.63}$$

D'après (3.49) et (2.44), on remarque que

$$L_n(x) \sim \left(1-t, \frac{t}{1-t}\right). \tag{3.64}$$

Soient $S_n(x) \sim (g(t), f(t))$ et $r_n(x) \sim (h(t), l(t))$. Alors, on a

$$(r_n \circ s)(x) = (g(t)h(f(t)), l(f(t))). \tag{3.65}$$

Grâce aux (3.64) et (3.65), on déduit que

$$(L_n \circ L)(x) \sim (1, t). \tag{3.66}$$

En utilisant (2.44) et (3.65), on obtient

$$(L_n \circ L)(x) = x^n \tag{3.67}$$

Par suite, de (3.60) et (3.67) on obtient le théorème. □

Théorème 3.17. *Pour $n \geqslant 0$, on a*

$$E_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{n-k-l} (-1)^{k+l} \binom{l}{k+l} \frac{j! S_2(n-k-l, j)}{2^j (n-k-l)!} L_k(x).$$

Démonstration. Pour $p(x) = E_n(x) \in \mathcal{P}_n$, supposons que

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k L_k(x). \tag{3.68}$$

Par (3.58) et (3.68), on a

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} \left(\frac{d^k}{dx^k} e^{-x} x^k \right) E_n(x) dx \\
&= (-1)^k \binom{k}{n} \int_0^{\infty} e^{-x} x^k E_{n-k}(x) dx \\
&= (-1)^k \binom{k}{n} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{l}{n-k} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{k+l} dx \\
&= n! \sum_{l=0}^{n_k} (-1)^k \binom{l}{k+l} \frac{E_{n-k-l}}{(n-k-l)!}. \qquad (3.69)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\left(\frac{2}{e^t+1}\right) = \left(\frac{e^t+1}{2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{e^t-1}{2}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{e^t-1}{2}\right)^j \tag{3.70}$$

Notons que $(e^t-1)^j$ est une série delta et $E_n(x) \sim \left(\frac{e^t+1}{2}, t\right)$.

D'après (3.9), (**??**) et (2.44), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2}{e^t+1}\right)e^{xt} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{e^t-1}{2}\right)^j e^{xt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(\frac{e^t-1}{2}\right)^j x^n\right)\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^j (e^t-1)^j x^n\right)\frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

En comparant les coefficients les deux cotés de(3.71), on obtient

$$\begin{aligned} E_n(x) &= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^j (e^t-1)^j x^n \\ &= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^j j!\sum_{k=j}^{\infty} S_2(k,j)\frac{t^k}{k!}x^n \\ &= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^j j!\sum_{k=j}^{\infty} S_2(k,j)\binom{k}{n}x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}\left\{\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{-1}{2}\right)^j j!S_2(k,j)\right\}x^{n-k}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Grâce aux (**??**) et (3.72), on conclut

$$E_k = \sum_{j=0}^{k}\left(\frac{-1}{2}\right)^j j!S_2(k,j). \tag{3.73}$$

Alors, (**??**) et (3.73) impliquent

$$\begin{aligned} C_k &= n!\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^k\binom{l}{k+l}\frac{1}{(n-k-l)!}\sum_{j=0}^{n-k-l}\left(\frac{-1}{2}\right)^j j!S_2(n-k-l,j) \\ &= n!\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k-l}(-1)^{k+1}\binom{l}{k+l}\frac{j!S_2(n-k-l,j)}{2^j(n-k-l)!}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Par conséquent, grâce aux (3.68) et (3.74), on obtient le théorème. □

Théorème 3.18. *Pour $n \geq 0$, on a*

$$B_n(x) = n!\sum_{k=0}^{n}\left\{\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k-l}\sum_{m=0}^{j}\frac{(-1)^{m+k}\binom{j}{m}S_2(n-k-l+m,m)}{(n-k-l)!\binom{n-k-l+m}{m}}\right\}L_k(x).$$

Démonstration. On a

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)=\left(\frac{e^t-1}{t}\right)^{-1}=\left(1+\frac{e^t-t-1}{t}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{e^t-t-1}{t}\right)^j \tag{3.75}$$

Notons que $\left(\frac{e^t-t-1}{t}\right)^j=\left(\frac{e^t-1}{t}-1\right)^j$ est une série delta en $\mathcal{F}$ et $B_n(x)\sim\left(\frac{e^t-1}{t},t\right)$. En utilisant (3.7), (2.44) et (**??**), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \left(1+\frac{e^t-t-1}{t}\right)^{-1}e^{xt}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{e^t-t-1}{t}\right)^j e^{xt}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(\frac{e^t-t-1}{t}\right)^j x^n\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{3.76}$$

En comparant les coefficients des deux cotés de (3.76), on déduit

$$B_n(x)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(\frac{e^t-t-1}{t})^j x^n. \tag{3.77}$$

D'après (**??**), on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^t-t-1}{t}\right)^j x^n &= \sum_{k=0}^{n-j}\frac{\left\langle t^k|\left(\frac{e^t-t-1}{t}\right)^j x^n\right\rangle}{k!}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-j}\frac{\left\langle\left(\frac{e^t-t-1}{t}\right)^j|t^k x^n\right\rangle}{k!}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-j}\binom{n}{k}\left\langle\left(\frac{e^t-t-1}{t}\right)^j|x^{n-k}\right\rangle k!x^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-j}\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}(-1)^{j-l}\left\langle t^0|\left(\frac{e^t-l}{t}\right)^l x^{n-k}\right\rangle x^k.\end{aligned} \tag{3.78}$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^t-l}{t}\right)^l x^{n-k} &= \frac{1}{t^l}l!\sum_{m=l}^{\infty}S_2(m,l)\frac{t^m}{m!}x^{n-k}\\ &= \sum_{m=0}^{n-k}S_2(m+l,l)\frac{l!}{(m+l)!}t^m x^{n-k}\\ &= \sum_{m=0}^{n-k}S_2(m+l,l)\frac{l!}{(m+l)!}(n-k)_m x^{n-k-m}.\end{aligned} \tag{3.79}$$

Ainsi, par (3.78) et (3.79), on déduit que

$$\left(\frac{e^t-t-1}{t}\right)^j x^n = \sum_{k=0}^{n-j}\sum_{l=0}^{j}\binom{n}{k}\binom{j}{l}(-1)^{j-l}\frac{S_2(n-k+l,l)}{\binom{n-k+l}{l}}x^k. \tag{3.80}$$

Par suite, d'après (3.77) et (3.80), on obtient

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{l=0}^{j}\binom{n}{k}\binom{j}{l}(-1)^{l}\frac{S_2(n-k+l,l)}{\binom{n-k+l}{l}}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}(-1)^{l}\frac{S_2(n-k+l,l)}{\binom{n-k+l}{l}}\right\}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{l}\binom{j}{l}\frac{S_2(k+l,l)}{\binom{k+l}{l}}\right\}x^{n-k}. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Grâce aux (3.7) et (3.3), on a

$$B_k = \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j}(-1)^{l}\binom{j}{l}\frac{S_2(k+l,l)}{\binom{k+l}{l}}. \tag{3.82}$$

Notons que $B_n(x) \in \mathcal{P}_n$ (voir (3.7)). Remarquons que

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k L_k(x). \tag{3.83}$$

D'après (3.58), on a

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{k!}\int_0^\infty \left(\frac{d^k}{dx^k}e^{-x}x^k\right)B_n(x)dx \\ &= (-1)^k\binom{n}{k}\int_0^\infty e^{-x}x^kB_{n-k}(x)dx \\ &= (-1)^k\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}B_{n-k-l}\int_0^\infty e^{-x}x^{k+l}dx \\ &= (-1)^k\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}B_{n-k-l}(k+l)! \\ &= n!\sum_{l=0}^{n-k}\frac{(-1)^kB_{n-k-l}}{(n-k-l)!}\binom{k+l}{l}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

De (3.82) et (3.84), on obtient

$$C_k = n!\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k-l}\sum_{m=0}^{j}\frac{(-1)^{m+k}\binom{j}{m}S_2(n-k-l+m,m)}{(n-k-l)!\binom{n-k-l+m}{m}}. \tag{3.85}$$

Par conséquent, les identités (3.83) et (3.85) impliquent le résultat du théorème. □

Théorème 3.19. *Pour $n \geq 0$, on a*

$$H_n(x|\lambda) = n! \sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{n-k-l} \binom{k+l}{l} (-1)^k \frac{j! S_2(n-k-l, j)}{(n-k-l)!(\lambda-1)^j} \right\} L_k(x).$$

Démonstration. On a

$$\frac{1-\lambda}{e^t-\lambda} = \left(1 + \frac{e^t-1}{1-\lambda}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^j (e^t-1)^j. \tag{3.86}$$

Notons que $(e^t-1)^j$ est une série delta dans $\mathcal{F}$ et $H_n(x|\lambda) \sim \left(\frac{e^t-\lambda}{1-\lambda}, t\right)$. Les identités (3.47), (2.44) et (3.86) impliquent

$$H_n(x|\lambda) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^j (e^t-1)^j x^n, \tag{3.87}$$

et

$$\begin{aligned} (e^t-1)^j x^n &= j! \sum_{k=j}^{n} S_2(k,j) \frac{t^k}{k!} x^n \\ &= j! \sum_{k=j}^{n} S_2(k,j) \binom{n}{k} x^{n-k}. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Grâce aux (3.87) et (3.88), on arrive à

$$\begin{aligned} H_n(x|\lambda) &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} (-1)^j \frac{j!}{(1-\lambda)^j} S_2(k,j) x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ \sum_{j=0}^{k} \frac{j!}{(\lambda-1)^j} S_2(k,j) \right\} x^{n-k}, \end{aligned} \tag{3.89}$$

et

$$H_n(x|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(\lambda) x^{n-k}. \tag{3.90}$$

Ainsi, par (3.89) et (3.90), on obtient

$$H_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \frac{j!}{(\lambda-1)^j} S_2(k,j). \tag{3.91}$$

D'après (3.90), on voit que $H_n(x|\lambda) \in \mathcal{P}_n$. Supposons que

$$H_n(x|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} C_k L_k(x). \tag{3.92}$$

De (3.58), on a

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{k!}\int_0^\infty (\frac{d^k}{dx^k}e^{-x}x^k)H_n(x|\lambda)dx \\ &= (-1)^k\binom{n}{k}\int_0^\infty e^{-x}x^kH_{n-k}(x|\lambda)dx \\ &= (-1)^k\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}H_{n-k-l}(\lambda)\int_0^\infty e^{-x}x^{k+l}dx \\ &= (-1)^k\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}H_{n-k-l}(\lambda)(k+l)! \\ &= n!\sum_{l=0}^{n-k}\binom{k+l}{l}(-1)^k\frac{H_{n-k-l}(\lambda)}{(n-k-l)!}. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Par(3.91) et (3.93), on obtient

$$C_k = n!\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k-l}\frac{(-1)^k\binom{k+l}{l}j!}{(n-k-l)!(\lambda-1)^j}S_2(n-k-l,j). \tag{3.94}$$

Par conséquent, d'après (3.92) et (3.94), on obtient le théorème. □

Théorème 3.20. *Pour $n \geq 0$, on a*

$$E_n(x) = n!\sum_{k=0}^{n}\left\{\sum_{l=0}^{n-k}\binom{k-l-2}{l}(-1)^k\frac{E_{n-k-l}}{k!(n-k-l)!}\right\}L_k(x).$$

Démonstration. Pour $S_n(x) \sim (g(t), f(t))$ et $r_n(x) \sim (h(t), l(t))$, supposons que

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}r_k(x). \tag{3.95}$$

Alors, on note que

$$C_{n,k} = \frac{1}{k!}\left\langle \frac{h(\bar{f}(t))}{g(\bar{f}(t))}l(\bar{f}(t))^k|x^n \right\rangle \tag{3.96}$$

où $n, k \geq 0$. Grâce aux (**??**), (3.49) et (2.44), on note que

$$L_n(x) \sim \left(1-t, \frac{t}{t-1}\right) \quad \text{et} \quad E_n(x) \sim \left(\frac{1+\exp^t}{2}, t\right). \tag{3.97}$$

Maintenant, nous supposons que

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}L_k(x). \tag{3.98}$$

Par (3.96) et (3.97), on a

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= -\frac{1}{k!}\left\langle \left(\frac{2}{e^t+1}\right)\frac{t^k}{(t-1)^{k-1}}|x^n\right\rangle \\ &= -\binom{n}{k}\left\langle \frac{2}{e^t+1}|\left(\frac{1}{t-1}\right)^{k-1}x^{n-k}\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Comme

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{t-1}\right)^{k-1}x^{n-k} &= \sum_{l=0}^{\infty}\binom{k-l-2}{l}(-1)^{k-1}t^l x^{n-k} \\ &= \sum_{l=0}^{n-k}\binom{k-l-2}{l}(-1)^{k-1}(n-k)_l x^{n-k-l}. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Alors, d'après par (3.99) et (3.100), on obtient

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \binom{n}{k}(-1)^k\sum_{l=0}^{n-k}\binom{k-l-2}{l}\frac{(n-k)!}{(n-k-l)!}\left\langle\frac{2}{e^t+1}|x^{n-k-l}\right\rangle \\ &= n!\sum_{l=0}^{n-k}\binom{k-l-2}{l}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k-l)!}E_{n-k-l}. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Par conséquent, grâce aux (3.98) et (3.101), nous obtenons le théorème. □

Théorème 3.21. *Pour $n \geq 0$, on a*

$$B_n(x) = n!\sum_{k=0}^{n}\left\{\sum_{l=0}^{n-k}\binom{k-l-2}{l}(-1)^k\frac{B_{n-k-l}}{k!(n-k-l)!}\right\}L_k(x).$$

Démonstration. Les théorèmes 3.17 et (3.20) impliquent

$$\sum_{l=0}^{n-k}\binom{k-l-2}{l}\frac{E_{n-k-l}}{k!(n-k-l)!} = \sum_{l=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k-l}(-1)^l\binom{k+l}{l}\frac{j!S_2(n-k-l,j)}{2^j(n-k-l)!},$$

où $n, k \geq 0$ avec $n \geq k$. Supposons que

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}C_{n,k}L_k(x). \tag{3.102}$$

D'après (3.96), on a

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= -\frac{1}{k!}\left\langle\left(\frac{e^t-1}{t}\right)^{-1}\frac{t^k}{(t-1)^{k-1}}|x^n\right\rangle \\ &= -\frac{1}{k!}\left\langle\left(\frac{e^t-1}{t}\right)\frac{1}{(t-1)^{k-1}}|t^k x^n\right\rangle \\ &= -\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{k-l-2}{l}(-1)^{k-1}\frac{(n-k)!}{(n-k-l)!}\left\langle\frac{t}{e^t-1}|x^{n-k-l}\right\rangle \\ &= n!\sum_{l=0}^{n-k}\binom{k-l-2}{l}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k-l)!}B_{n-k-l}. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Par conséquent, en utilisant (3.102) et (3.103), on obtient le théorème. □

Théorème 3.22. *Pour $n \geq 0$, on a*

$$H_n(x|\lambda) = n! \sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{l=0}^{n-k} \binom{k-l-2}{l} (-1)^k \frac{H_{n-k-l}(\lambda)}{k!(n-k-l)!} \right\} L_k(x).$$

Démonstration. Posons

$$H_n(x|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} L_k(x). \tag{3.104}$$

Alors, d'après (3.96), on a

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= -\frac{1}{k!} \left\langle \left(\frac{1-\lambda}{e^t - \lambda} \right) \frac{t^k}{(t-1)^{k-1}} | x^n \right\rangle \\ &= n! \sum_{l=0}^{n-k} \binom{k-l-2}{l} (-1)^k \frac{H_{n-k-l}(\lambda)}{k!(n-k-l)!}. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Le théorème découle de l'utilisation de (3.104) et (3.105). □

Bibliographie

[1] R. Dere and Y. Simsek, *Applications of umbral algebra to some special polynomials,* Adv. Stud. Contemp. Math. **22** (2012), 433–438.

[2] R. Dere and Y. Simsek, *Genocchi polynomials associated with the Umbral algebra*, Appl. Math. Comput. **218** (2011), 756–761.

[3] B. Farhi, *Sur les nombres de Stirling de seconde espèce*, notes de cours, université de Béjaia, 2014, disponible sur http://farhi.bakir.free.fr/index_fichiers/Stirling_2.pdf.

[4] B. Farhi, *Sur les nombres de Stirling de* 1^{re} *espèce*, notes de cours, université de Béjaia, 2014, disponible sur http://farhi.bakir.free.fr/index_fichiers/Stirling_1.pdf.

[5] T. Kim, *Identities involving Laguerre polynomials derived from umbral calculus*, Russ. J. Math. Phys. **21** (2014), 36–45.

[6] D. S. Kim and T. Kim, *Umbral calculus associated with Bernoulli polynomials*, J. Number Theory **147** (2015), 871–882.

[7] S. Roman, *Advenced Linear Algebra*, springer, 2005.

[8] S. Roman, *More on the umbral calculus, with emphasis on the q-umbral calculus*, J. Math. Anal. Appl. **107** (1985), 222–254.

[9] X. H. Sun, *On umbral calculus*, I, J. Math. Anal. Appl. **244.2** (2000), 279–290.