الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالــي والبحــث العلمــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire de MILA

Nº Réf :……………

Université Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques appliquées

Optimisation des Systèmes Dynamiques Et Application en l'économie Financière

Préparé par

- **BELAIDI Rim**
- **LAIB Somia**

Devant le jury

KHALFAOUI Mohamed	U. Abelhafid Boussouf-Mila	Président
AZI Mourad	U. Abelhafid Boussouf-Mila	Rapporteur
BOUFELGHA Ibrahim	U. Abelhafid Boussouf-Mila	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Introduction Générale

L'optimisation des systèmes dynamiques est une branche très important des mathématiques appliquées, elle traite les problèmes décisionnelles dans différent domaines, telle que, la biologie, la physique et l'économique financière....ect. Pour qu'une entreprise soit plus performante et plus compétitive, elle doit optimiser toute sorte de décision.
Pour cela, l'intervention des modèles d'optimisation est donc primordiale. Nous pouvons classifier ces modèles selon les modèles statiques et les modèles dynamiques. Dans la classe des modèles dynamiques, nous trouvons les modèles de contrôle optimal, à la fois stochastiques et déterministes, qui sont probablement les plus importants parmi les systèmes de gestion en économie et en finance. Ce jugement est justifié par la dynamique des systèmes économiques et financiers et par l'importance de prendre des décisions à chaque instant afin d'optimiser un certain nombre d'objectifs soumis à certaines contraintes.

La finance d'entreprise s'intéresse au deux grands types de décision : l'investissement et le financement. Autrement dit, la fonction financière se préoccupe de la recherche et de l'allocation des ressources financières, par la suite, elle s'intéresse à la création de valeur et la maximisation de la valeur de l'entreprise ou bien l'enrichissement des actionnaires.

Depuis le début de l'ère industrielle, les entreprises ont cherché à automatiser les systèmes de production et de gestion afin d'optimiser un certain nombre de critère. Pour cela, les théoriciens se sont intéressés aux modèles dynamiques et leurs méthodes de résolution, et plus particulièrement, aux problèmes de contrôle optimal, surtout après l'apparition du principe du maximum de Pontriaguine. Ce principe a révolutionné la théorie moderne du contrôle optimal.

Les objectifs qui ont été assignés pour ce mémoire sont, tout d'abord, de faire une synthèse des travaux sur les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise, et ensuite de résoudre certains de ces modèles avec une méthode de contrôle optimal appropriée, tel que le principe du maximum de Pontriaguine, qui est une condition nécessaire d'optimalité, qui vont devenir suffisante si certaines conditions sont vérifiées.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres, d'une conclusion, et d'une bibliographie.

Dans le premier chapitre, nous présentons un panorama de la finance d'entreprise, dont nous allons donner une explication complète et simplifiée de de certain notions qui seront importantes dans la suite de ce document. En premier lieu, nous allons exposer les différentes interactions entre les source de financement, l'investissement et les flux de trésorerie. En seconde lieu, nous abordons la décision de financement et le choix d'investissement. Finalement nous terminerons ce chapitre par la gestion de la trésorerie.

Le second chapitre comprend une synthèse des travaux sur les modèles du contrôle optimal en économie financier, dont nous traitons trois problèmes différents liés à la finance d'entreprise, tel que, le problème de la gestion optimale de la trésorerie ; le problème de financement optimal ; et le problème de dynamique de l'entreprise qui englobe les différentes décisions financière.

Dans la troisième chapitre, nous exposons les aspects théoriques du contrôle optimal sans et avec retard, dont nous exposons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les deux cas.

Le quatrième chapitre est consacré à la résolution de certains modèles présentés dans le deuxième chapitre. Après avoir résolu le modèle de la dynamique de l'entreprise, nous proposons et nous résolvons un nouveau modèle, qui est une extensions du modèle dynamique d'entreprise, où on suppose un retard sur la la commande "investissement". Finalement pour visualiser l'évolution de ce modèle nous résolvons des exemples numériques.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale et une bibliographie.

Chapitre 1

Introduction à la gestion financière de l'entreprise

Introduction

La finance d'entreprise ou gestion financière, est le champ de la finance relatif aux décisions financières des entreprises. Son objectif essentiel est l'analyse et la maximisation de la valeur de la firme. En termes plus précis, l'enjeu consiste à optimiser la valeur de la séquence des profits monétaires futurs (relativement à un horizon de référence) sous la contrainte d'un risque minimum. Historiquement sa pratique est étroitement associée au recours au financement bancaire et de plus en plus à celui du marché financier.

Dans ce chapitre, nous n'entrons pas dans la complexité de toute la gestion financière, mais nous donnons une explication complète et simplifiée de : la fonction financière au niveau d'une entreprise ; les politiques de financement ; les mécanisme du choix d'investissement et nous terminons ce chapitre par la présentation des concepts de base de la gestion de la trésorerie.

1.1 Le circuit financier interne à l'entreprise : les flux

L'activité d'une entreprise est rythmée par les opérations effectuées. L'entreprise est une structure humaine organisée visant à mobiliser des ressources pour produire des biens et/ou des services. Pour ce faire, l'entreprise est rythmée par les différentes opérations que l'on peut classifier selon leur objectif : les opérations d'exploitation, d'investissement et de financement.

✓ Les opérations d'exploitation :relèvent de l'activité courante, de la finalité de l'entreprise. Acheter de la matière première, payer les salaires, vendre des produits ou des prestations

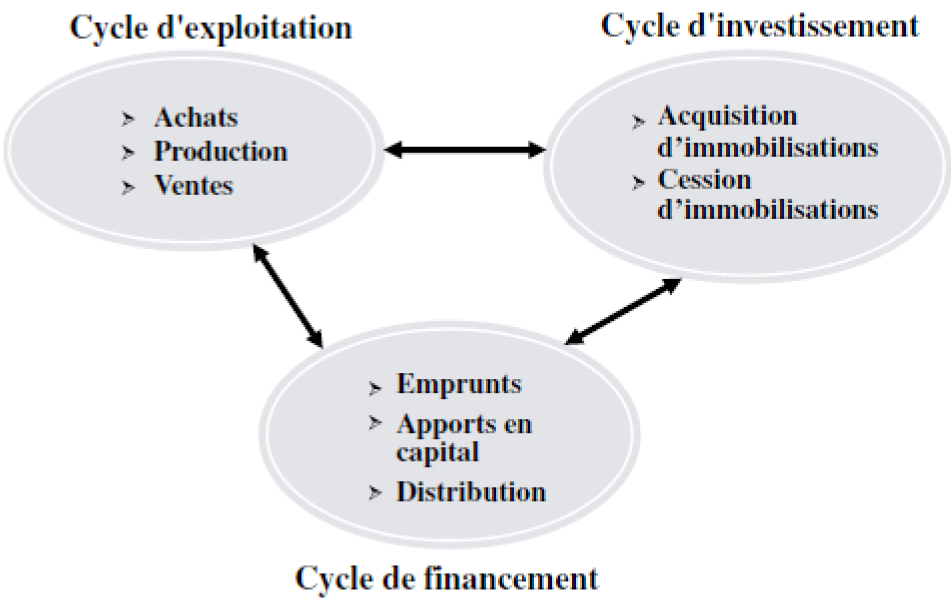

FIGURE 1.1 – Cycle de financement

sont des activités d'exploitation. Le cycle d'exploitation comprend donc toutes les opérations relatives à la production et à la vente des produits ou services de l'entreprise. Il débute donc avec la livraison des fournisseurs et se termine avec le règlement des clients. La différence entre les encaissements et les décaissements générés par les opérations d'exploitation est alors l'excédent de trésorerie d'exploitation ;

✓ Les opérations d'investissement : concourent à la modification du périmètre de l'entreprise, de son appareil productif et de sa stratégie. Le cycle d'investissement rassemble les opérations ayant pour objet l'acquisition ou la cession d'immobilisations. L'achat d'un terrain, la construction d'une usine, l'achat d'une machine sont des opérations d'investissement ;

✓ Les opérations de financement : permettent à l'entreprise de disposer des ressources nécessaires à son activité. Elles concernent les opérations d'endettement et de remboursement des emprunts, mais également les opérations sur fonds propres (augmentations de capital, distribution de dividendes).

1.2 La fonction financière au niveau de l'entreprise

La fonction financière est celle qui, au sein de l'entreprise, prépare et exécute les décisions financières. Son pouvoir de décision va dépendre de la nature de décision, de la dimension de l'entreprise et de sa structure [11]. La fonction financière a le rôle d'agir et d'adapter les ressources financières aux besoins, de satisfaire les contraintes, mais aussi de rechercher l'adéquation entre la fonction objectif de l'entreprise et celle des actionnaires et des prêteurs.

1.2.1 Les contraintes financière

L'étude des mécanismes financiers nous permet de mettre en évidence les contraintes fondamentales qui pèsent sur la vie financière de l'entreprise. Toute activité économique repose sur une procédure d'échanges qui exige la disposition de capital monétaires. Mais toute détention de capital comporte un coût. L'entreprise doit en même temps disposer d'un capital et assurer la rémunération des capitaux immobilisés [11]. En effet, toute entreprise qui veut assurer son fonctionnement et un développement durable, ne peut s'échapper à cette double contrainte.

1.2.1.1 La solvabilité

On entendre ici par la solvabilité, l'aptitude de l'entreprise à assurer à tout instant le paiement de ses dettes exigibles. Cette notion de solvabilité dite technique, s'oppose à la notion juridique de solvabilité selon laquelle l'entreprise est solvable si ses actifs permettent de rembourser ses dettes. L'insolvabilité est l'état de cessation de paiement [11].
Généralement, la solvabilité résulte de l'équilibre entre les flux de monnaie des diverses recettes et des diverses dépenses. La solvabilité est une contrainte majeure au niveau d'une entreprise ; l'incapacité de l'entreprise à rembourser ses dettes est suivie généralement par la cessation de paiements vis-à-vis de l'ensemble des relations qu'elle entretient avec ses partenaires économiques. En effet, ces situations mènent à la disparition de l'entreprise ou au départ de ses dirigeants.

1.2.1.2 La rentabilité

La rentabilité est une notion qui s'applique à toute action économique mettant en oeuvre des moyens matériels, humains ou financiers. Elle s'exprime par le rapport entre le revenu obtenu ou prévu et les ressources employées pour l'obtenir. Presque tout ce que nous faisons en finance d'entreprise se réfère d'une manière ou d'une autre à l'évaluation de la rentabilité. Quand on analyse s'il faut investir dans un actif ou dans un projet, on évalue la valeur future de l'actif et on la compare à son coût d'acquisition. Ainsi, l'existence d'un niveau minimum de rentabilité est une contrainte très importante avant chaque décision d'investissement.

1.2.2 La fonction objectif de l'entreprise

Aucune discipline ne peut se développer de manière cohérente sans avoir un corps d'objectif unifié. L'objectif principal dans la théorie financière est de maximiser la valeur de l'entreprise. Par conséquent, toute décision d'investissement et de financement qui augmente la valeur de l'entreprise est une bonne décision[8]. Mais rien n'empêche qu'il y a des firmes qui ont d'autres objectifs que celui de maximiser leurs valeurs.

1.2.2.1 L'objectif de maximiser la valeur de l'entreprise

Si l'objectif de la finance d'entreprise est de maximiser la valeur de la firme, alors : qu'est ce qui détermine la valeur de l'entreprise ? Dans un premier temps, on peut dire que la valeur d'une entreprise est ce qu'on est prêt à payer pour l'acquérir. Les comptables utilisent souvent cette approche de la valeur et ils l'appellent valeur comptable. Cette définition pose deux problèmes. Le premier est que si un actif en particulier a été acheté dans le passé, son prix historique ne reflète pas fidèlement sa valeur actuelle. Le second est que cette définition dissimule presque entièrement la valeur créée par un investissement futur. Nous pouvons dire que cette valeur de la firme, est déterminée par les cash-flows (la différence entre les recettes et les dépenses) que les actifs vont générer et par l'incertitude de ces flux financiers.

1.2.2.2 L'objectif de maximiser les cours des actions

Dans la finance classique, les dirigeants de la firme ont seulement besoin de se concentrer sur l'objectif de maximisation du prix des actions. Mais cette vision simpliste de penser peut engendrer des dommages pour les autres acteurs de la firme (prêteurs, employés, milieu social...).

1.2.2.3 L'objectif de maximiser les profits

Certaines firmes ont des objectifs qui portent plus sur la rentabilité que sur la valeur. Leur raisonnement est basé sur le fait que les profits peuvent être mesurés plus facilement et que les profits plus élevés se traduisent en valeur plus élevée à long terme [8]. L'objectif du bien être social,centaines firmes, spécialement celles du secteur public, ont pour objectif le bien être social. A titre d'exemple, une firme visant à maximiser la couverture des services sanitaires et prenant des décisions dans ce sens, peut se trouver face à des pertes de rentabilité financière.

1.2.3 La circuit financier

La meilleure façon pour comprendre le fonctionnement financier de l'entreprise est sans doute celle qui consiste à regrouper les interactions et les problèmes qui touchent les différentes décisions financière de l'entreprise. Nous les résumons sous forme d'un "circuit" dans le schéma ci-après. La partie supérieure du schéma correspond aux origines et aux utilisations des capitaux manipulés par l'entreprise. La partie inférieure traduit la discipline du coût et du revenu de ces capitaux.

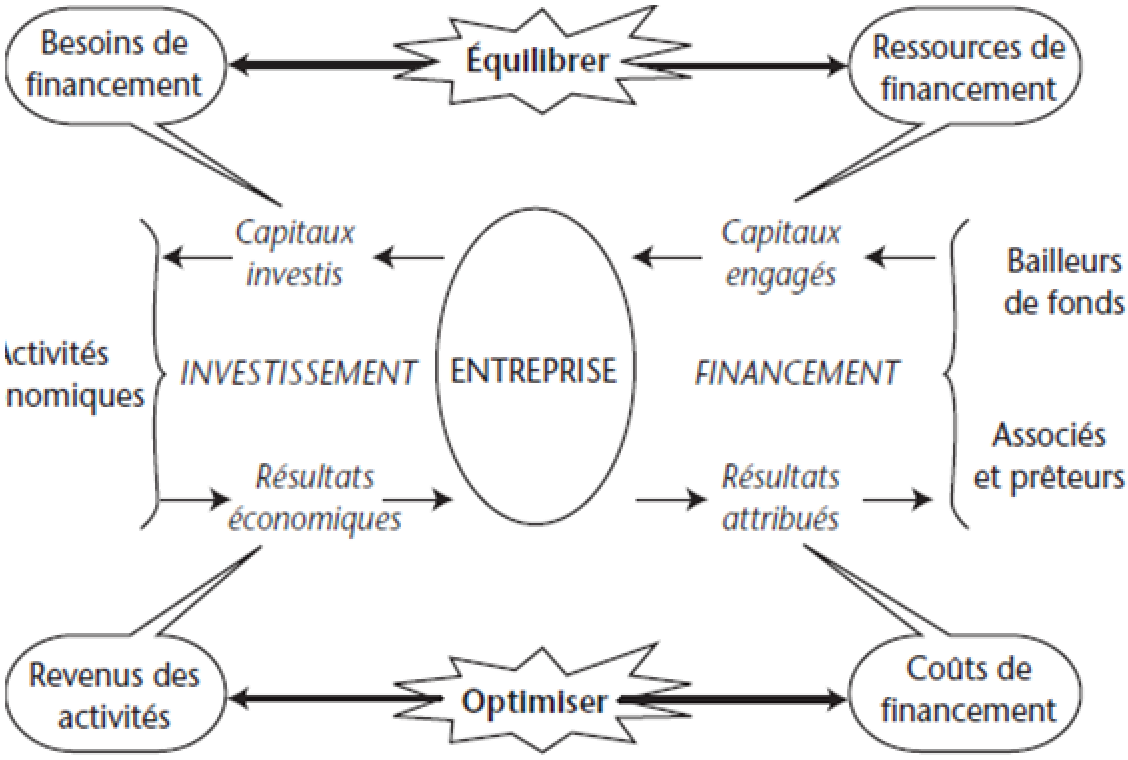

FIGURE 1.2 – la circuit de finance

1.3 La décision de financement et coûts des capitaux

1.3.1 Principales sources de financement

Une fois le choix du projet d'investissement est effectué, il reste bien souvent pour l'entreprise à déterminer le meilleur mode de financement et doit connaitre la politique de financement qui repose sur un équilibre entre les efforts des actionnaires et l'endettement financier. Généralement, il existe deux modes de financement le premier est par des fonds(capitaux) propres et le deuxièmes est par des dettes.
Les éléments suivants détermineront les sources de financement, leur mode de sélection et comprendront les coûts des capitaux.

1.3.1.1 Financement par capitaux propres

Les fonds propres, ou capitaux propres, constituent la ressource stable de financement de votre entreprise. Au premier jour de création de l'entreprise, les fonds propres sont composés du capital social de l'entreprise, mais vont ensuite augmenter à mesure des exigences de l'en-

treprise.
Les fonds propres comprennent donc les apports en numéraire des associés, ainsi que les profits qui ont été dégagés chaque année et conservés par l'entreprise sans être réinvestis ou distribués sous forme de dividende. L'actionnaire peut apporter les fonds dont l'entreprise même que l'autofinancement.

1. **L'autofinancement**
   L'autofinancement est le mode de financement réalisé par un agent économique à l'aide de ses propres ressources au lieu de recourir à des ressources extérieures. En fait, lorsque la société décide de verser des dividendes aux actionnaire, ces dividendes sont prélevés sur la capacité d'autofinancement. Ainsi, seule la partie non distribuée assure l'autofinancement. Donc l'autofinancement est le résultat de la différence entre la CAF et les dividendes.
   $$\text{Autofinancement} = \text{CAF} - \text{Dividendes.}$$
   telleque La CAF représente l'ensemble des ressources générées par l'entreprise.
2. **Les augmentations du capital**
   L'actionnaire peut apporter les fonds dont l'entreprise a besoin pour financer ses projets lors de la phase de construction ou à l'occasion des augmentations successives du capital. Les associés peuvent apporter des biens, des créances. Il s'agit d'apports en nature sous déduction éventuelle d'un passif. Les apports en numéraire peuvent faire l'objet d'appels fractionnés. Il s'agit d'une ressource sûre sans échéance de remboursement et dont la rémunération (les dividendes) est associée aux résultats de l'entreprise. Les distributions de dividendes sont donc souples. Néanmoins, pour fidéliser ses associés, une rémunération est nécessaire. Il convient de définir le montant et le moment avec précaution.

1.3.1.2 Financement par dettes

Cette tranche de financement est une source externe telle-que les dettes sont classifiés en fonctions de leurs durées, les dettes à long terme et les dettes à court terme.

- **Dettes à long terme** : Pour les entreprises, les dettes à long terme peuvent prendre plusieurs formes. Il peut être un emprunt à long terme auprès d'une banque ou de toute autre institution financière, ou un emprunt obligataire à long terme émis sur un marché financier. Globalement, on distingue trois grandes catégories. Les dettes bancaires, les emprunts auprès du public (obligation) et le crédit-bail (leasing).
  1. *Emprunt bancaire*

Les emprunts auprès des établissements de crédit se différencient par les durées, les modalités de remboursement, les taux d'intérêt, les garanties, les conditions de remboursement. La mise en concurrence des banques permet l'obtention de taux plus faibles. Dans certains cas, les annuités, trimestrielles ou mensualités sont constantes, le remboursement du principal est stable. Le remboursement peut se faire en une seule fois à échéance. Dans certains cas le taux d'intérêt est fixe, dans d'autre il est variable.

2. *Emprunts obligatoires*

   Consiste en l'émission d'obligations auprès du public par l'intermédiaire du système bancaire, ses caractéristiques sont : Sa valeur nominale ;
   Son prix d'émission ;
   Son prix de remboursement ;
   Son taux d'intérêt.

3. *Crédit bail*

   Il s'agit d'un contrat de location avec option d'achat. Le locataire paie les loyers et achète en fin de bail le bien pour une faible somme. Dans de nombreux cas, une période de location irrévocable est stipulée. La cession-bail (lease back) est un procédé plus récent. Une entreprise, propriétaire d'un bien, le vend à une société de crédit-bail. Cette dernière le loue à l'entreprise selon les modalités d'un contrat de crédit-bail, c'est-à-dire avec option d'achat. L'objectif est d'initier un investissement grâce à la levée de fonds dont la rentabilité soit supérieure au taux de revient du contrat de crédit-bail.

– **Dettes à court terme** Par définitions une dette à courte termes désigne une somme d'argent empruntée pour une durée souvent inférieur à un an. Ce type de ressources permet de financier les besoins de trésorerie ses formes de financement contient Les crédits d'escompte, de trésorerie et par signature.

  - *crédits d'escompte* : L'escompte commercial permet de mobiliser les créances d'une entreprise sur sa clientèle matérialisé par des effets de commerce.
  - *Les crédits de trésorerie* : Sont mis en place par les banques à la disposition des entreprises, dans le BFE excède les possibilités du fonds de roulement. Par exemple, facilités de caisse à découvert . . .
  - *Les crédits par signature* : On distingue trois formes d'interventions :
    L'engagement par un tiers ou signataire de l'effet qui se porte garant du paiement.

L'acceptation : engagement donné dans le but de mobilisation du crédit.

La caution : qui est un engagement pris à l'égard des créanciers qui l'acceptent, de satisfaire à l'obligation du débiteur si celui-ci n'y satisfait pas lui-même.

1.3.2 Coûts des capitaux

Le coût du capital d'une entreprise est le coût de la totalité de sa dette (argent emprunté), plus le coût de tous ses capitaux propres (capital des actions ordinaires et privilégiées). Chaque composante est pondérée pour exprimer le coût en pourcentage (coût moyen pondéré du capital ou CMPC). Comme il s'agit du coût réel des affaires, il faut donc bien le comprendre.
Le coût moyen pondéré du capital (CMPC), ou weighted average cost of capital (WACC) en anglais, est un indicateur économique, représentant le taux de rentabilité annuel moyen attendu par les actionnaires et les créanciers, en retour de leur investissement. Le CMPC mesure la capacité de l'entité économique (entreprise) de valoriser les capitaux (propres) qui lui ont été confiés par les actionnaires. Pour l'entreprise, c'est un paramètre indispensable pour valider les investissements futurs. Le CMPC traduit le coût moyen des capitaux propres et de la dette financière de l'entreprise, soit ses ressources financières disponibles à des fins d'investissement. Il est défini mathématiquement comme la moyenne pondérée des coûts des différentes sources de financement (fonds propres "CP", fonds de tiers (endettement) "D"). :

$$CMPC = r_p \frac{CP}{CP + D} + r_d \frac{CP}{CP + D} \tag{1.1}$$

où : r_p :Coûts des capitaux propres,
r_d :Coût de la dette. A cause qu'il y deux cotés principaux de financement, on distingue deux différents formes de cout de capitaux.

1.3.2.1 Coûts des capitaux propres

Le coût des capitaux propres correspond au taux de rendement requis des actionnaires d'une entreprise eu égard à la rémunération qu'ils pourraient obtenir d'un placement présentant le même profil de risque sur le marché. Il est estimé par le modèle d'évaluation des actifs financiers MEDAF selon lequel le rendement d'une action est égal à la somme du rendement de l'actif sans risque et d'une prime de risque reflétant la prise de risque de l'entreprise par rapport au marché. Ce dernier admet deux approches sont possibles : par les modèles actuariel et par le couple rendement-risque, mais nous pouvons utiliser l'approche principal d'évaluation du coût des capitaux propres appelée modèle de Gordon-Shapiro.

-Modèle de Gordon-Shapiro : La formule de Gordon-Shapiro explique taux de rentabilité anticipé d'autres titres de risque comparable K en fonction du dividende attendu l'année prochaineD_1, du taux de croissance anticipé g et P_0 qui est la valeur de l'action sur le marché.alors ona :

$$k = \frac{D_1}{p_0} + g. \tag{1.2}$$

Mais ce modèle n'est applicable que pour $g < k$.

1.3.2.2 Coûts des dettes

Le coût des capitaux propres correspond au taux de rendement requis des actionnaires d'une entreprise par rapport à la rémunération qu'ils pourraient obtenir d'un placement présentant le même profil de risque sur le marché. Il est estimé par le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) selon lequel le rendement d'une action est égal à la somme du rendement de l'actif sans risque et d'une prime de risque reflétant la prise de risque de l'entreprise par rapport au marché. On distingue deux types des couts :

- Coût de la dette à court terme :

  Nous ne traiterons que des emprunts bancaires, pour lesquels l'entreprise ne subit pas de frais d'émission. Le coût des dettes à court terme serait alors établi en fonction du taux d'intérêt assumé par l'entreprise sur sa marge de crédit. Comme nous savons que les intérêts sont déductibles d'impôt, alors le coût de la dette à court terme est le taux d'intérêt respectif (nominal) corrigés de l'impôt :

  $$k_d = [c1 + \frac{i}{c})^c - 1] * [1 - t_c] \tag{1.3}$$

  où :

  i :taux d'intérêt nominal chargé sur l'emprunt à court terme ;

  c :nombre de capitalisation annuelles ;

  t_c : taux d'imposition effectif de la société.

- Coût de la dette à long terme (obligation) : Pour recourir au financement obligataire, une entreprise doit tenir compte des taux de rendement (r) du marché offerts pour des titres ayant le même niveau de risque, de sont taux d'imposition (Tc) et des frais d'émission (f). De sont financement afin d'établir le coût net de cette source de fonds. La détermination du coût de l'obligation (k_o) ce fait par la relation suivante :

  $$k_0 = \frac{r(1 - t_c)}{1 - f(1 - t_c)}. \tag{1.4}$$

  Pour le coût d'endettement bancaire à long terme il se calcul de la même manière que celui à court terme.

1.3.3 Les critères de sélection de mode de financement

Le choix d'une structure de financement optimal peut être schématisé par le souci de minimiser les coûts de ressources mise à la disposition de l'entreprise. Ce choix intervient dans le cadre de certaines contraintes qui limite le champ des possibilités. Les contraintes à respecter lors d'une décision de financement :

- Règle d'équilibre financier minimum : c'est-à-dire les emplois stables doivent être financés par les ressources stables ;
- Règle de l'endettement maximum : le montant de dettes de financement ne doit pas excéder le montant des fonds propres ;
- Règle de la capacité de remboursement : le montant de dettes de financement ne doit pas présenter plus de 4 fois la CAF ;
- Règle minimum de la CAF : l'entreprise doit autofinancer une partie de l'investissement pour lequel elle sollicite des crédits.

  Alors la prise en considération de ces contraintes conduit à éliminer systématiquement certains modes de financement.

1.4 Le choix des investissements

La politique d'investissement relève de la stratégie générale de l'entreprise.Elle est le garant du développement futur de l'entreprise. Toutes les décisions d'investissement conditionnent le futur. Il faut s'assurer que ces investissements sont évaluer, qu'il soit créateurs de valeurs et que leur financement ne déséquilibre pas la structure financière de l'entreprise.
On peut définir la décision d'investissement comme le jugement de transformer les moyens financiers en biens corporels ou incorporels ayant la capacité de produire des services pendant un certain temps, un sacrifice de ressources que on fait aujourd'hui dans l'espoir d'une série de recettes dont le total sera supérieur aux décaissements initiaux correspondants au cout de l'investissement.

1.4.1 Les caractéristiques de la décision d'investissement

La décision d'investir pour une entreprise est très importante et très complexe, **son importance est due au fait que l'investissement** :

- est le moyen de croissance et de survie de l'entreprise ;
- il consomme des ressources très importante ;
- constitue un engagement à moyen et long terme et sauvent irréversible ;

– il influence l'environnement économique et financier.

Sa complexité est due aux :

– la difficulté de collecter des informations par conséquent les estimations ne sont pas très fiables ;
– l'appréciation du risque est une tache pas facile à réaliser.

1.4.2 L'investissement et la croissance

L'investissement permet l'accumulation du capital, c'est-à-dire l'accumulation de bien dont la durée de vie dépasse plusieurs périodes et qui ne sont pas entièrement détruits lors de leur utilisation. Néanmoins, les biens peuvent connaître une certaine usure : on parle alors de dépréciation du capital. Si on note pour la période t, σ_t le taux de dépréciation du capital [2], I_t l'investissement brut et k_t le capital en début de période, on peut alors traduire le processus d'accumulation du capital par rapport à la dépréciation et l'investissement par l'équation :

$$k_{t+1} = k_t - \sigma_t k_t + I_t. \tag{1.5}$$

Cette relation illustre que le capital est un stock et l'investissement est un flux. Cette propriété est encore plus évidente si on considère l'investissement net $I_{NT} = I_t - \sigma_t k_t$. L'équation (1.5) devient alors :

$$k_{t+1} - k_t = I_{NT}. \tag{1.6}$$

Cette équation montre que la variation du stock de capital est égale au flux d'investissement net. L'accumulation du capital par les entreprises est un processus leur permettant d'augmenter leurs capacités productives dan le futur. Ainsi, l'investissement réalisé aujourd'hui donne lieu à des revenus futurs qui dépend du prix auquel elle va vendre son bien et des coûts de production, ces revenus peuvent se traduire par une fonction de production dont les facteurs de production sont le travail et le capital. La croissance de la production peut provenir en investissant aux niveaux de ces facteurs : en utilisant d'une manière plus large ces facteurs ou en augmentant leur efficacité productive. Cette efficacité se mesure par la productivité apparente (rapport entre la quantité de bien produite et la quantité de facteur de production utilisée. Ainsi, ce processus de croissance et de création de valeur peut être analysé comme une donnée économique absolue, en abordant la notion de facteurs de production et de fonction de production.

1.4.2.1 Facteurs de production

L'analyse microéconomique suppose, Généralement, que l'objectif principale de producteur et de maximiser son profit, donc à la fois de mettre en œuvre la combinaison de facteur de production efficace pour produire à moindre coût, et atteindre un niveau de production optimal. De nombreux facteurs participent à l'activité de production. Sur courte période on distingue les facteurs fixes qui sont ceux dont le producteur ne peut modifier les quantités, des facteurs variable qui sont ceux dont le producteur peut modifier les quantités (consommation intermédiaires, le travail ,...). Sur longue période, il n'existe plus de facteur fixe, tous les facteurs peuvent être variables. Le plus souvent, pour analyser la production (quantité de produit) on se ramène à étude les facteurs de production : le travail (la quantité de travail est généralement notée L), et le capital qui comprend tous les autres inputs les machine, énergie et matière première (la quantité de capital est généralement notée K). Ainsi, l'investissement peut se représenter comme le comportement du producteur visant à fixer le niveau de facteurs de production nécessaire pour assurer un certain niveau de production. On distingue ainsi trois types d'investissements :

- **L'investissement productif (capacité)** : il vise à garantir ou à augmenter un niveau de production de bien et service en augmentant le niveau de facteurs de production (ex : le producteur rajoute une nouvelle machine aux machines existantes dans l'espoir de produire plus) ;
- **L'investissement de remplacement** : il vise à renouveler le capital amorti ou vieillissant pour maintenir un niveau de production équivalent ;
- **L'investissement de substitution** : il vise à augmenter le niveau de production en modifiant la productivité des facteurs de production en substituant l'un par les autres du travail (ex : si on a trois ouvrier, on place une machine et un seul ouvrier pour plus de production).

1.4.2.2 Fonction de production

La fonction de production est une relation technique qui indique, à partir de la quantité de facteur mis en œuvre par le producteur, la quantité de produit qu'il peut obtenir (Q). Ainsi, $Q = f(K, L)$ si on a utilisé le capital et le travail comme moyens de production. En effet, pour pouvoir produire, l'entreprise va devoir payer les facteurs de production qu'il utilise. Il va donc subir un coût qui s'exprime mathématiquement comme la somme des rémunérations de chaque facteur. Si le travail et le capital sont les seuls facteurs variables. En notant w le salaire versé pour chaque unité de travail utilisée et r le taux de rémunération du capital, le coût de production sera donné :

$$c(K, L) = wL + rK + f, \tag{1.7}$$

où f représente la rémunération de l'ensemble des facteurs fixe de l'entreprise.
Le profit étant défini comme la différence entre le chiffre d'affaires réalisé et les coûts, il s'écrit mathématiquement comme suit :

$$\Pi(K, L) = PQ(K, L) - WL - rK - f. \tag{1.8}$$

où p représente le prix du bien ou du service produit.
Avec cette fonction de profit, on voit bien que si le producteur veut maximiser cette fonction de profit, il a intérêt d'investir au niveau de ces facteurs de production : soit en augmentant l'un des facteurs pour avoir une quantité de produit plus importante, soit en substituant l'un par l'autre pour réduire les coûts de production. De manière générale, une fonction de production s'exprime sous la forme $Q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où Q est la quantité produite et $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sont les facteurs de production. Elle se diffère d'une entreprise à une autre, elle est étroitement liée au cycle d'exploitation. Les fonctions de production les plus connues sont :

- La fonction de production additive de la forme : $Q = c + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$; où $c, a_1, a_2, \ldots n$ sont des constantes déterminées à estimer ;
- La fonction de Cobb-Douglas définit :$Q = c.x_1^{a_1}.x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$.
- La fonction de Leontieff, elle suppose que Les facteurs de production sont complémentaires, elle prend la forme :
$$Q = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n);$$
- La fonction de Domar, elle prend en compte qu'un seul facteur de production (le capital K), elle s'écrit comme suit : $Q = \frac{k}{v}$, où v est le coefficient de capital, qui donne la quantité de capital nécessaire pour produire une unité de biens et services.

1.4.3 Les critères de choix des investissements

Une fois estimés les flux de trésorerie requis par un investissement et ceux que l'on peut espérer retirer de son exploitation, il est nécessaire d'appliquer certains critères ou règles de décision pour déterminer si le projet doit être retenu ou non. Pour qu'un projet soit acceptable, il est nécessaire que son rendement soit au moins égal au coût des capitaux qui serviront à le financer. Nous utilisons couramment les critères suivants qui son les plus importants :

- la valeur actuelle nette ;
- le taux interne de rentabilité ;
- l'indice de profitabilité.

Nous exposerons leurs avantages et leurs lacunes.

- **a) La valeur actualisée nette**

  La valeur actuelle nette (VAN) se définit comme la valeur actualisée des flux de trésorerie prévus de laquelle on déduit le montant de l'investissement lui-même actualisé s'il y a lieu. La valeur actuelle nette est une différence entre ce que doit rapporter l'investissement et le coût de celui-ci.

  $$VAN = \Sigma_{n=1}^{n=N} \frac{F_t}{(1+r)^n} - I_0, \tag{1.9}$$

  où :

  I_0 : la valeur de l'investissent initiale ;

  n : l'année de 1 à N ;

  F_t : flux nette de trésorerie ;

  r : taux d'actualisation, généralement, le coût moyen pondéré du capital (CMPC).

  L'interprétation de la VAN, on accepte les investissements si la VAN est positive (rejet des projets si la VAN est strictement négative).

  - Si $VAN = 0$ signifie que la somme actualisée des FNT à un taux T d'actualisation donnée a permit la récupération du montant initial de l'investissement, la rémunération du capital investit à ce taux T choisit ;
  - Si $VAN > 0$ signifie que la rentabilité de l'investissement est supérieure aux taux d'actualisation retenu. L'entreprise va récupérer sa mise initiale, touche un taux d'intérêt (= taux d'actualisation) et en plus l'investissement lui a rapporté un gain net actualisé supplémentaire égal à la VAN.

- **b)Le taux interne de rentabilité (TIR)** Le taux interne de rentabilité est le taux d'actualisation qui, appliqué aux flux de trésorerie d'exploitation d'un projet, leur donne une valeur actuelle égale au montant de l'investissement. Pour qu'un projet soit acceptable, son taux interne de rentabilité doit être supérieur au coût de son financement. En d'autres termes, le taux interne de rentabilité est la rémunération maximale offerte aux fournisseurs de capitaux. Dans le cadre des projets ordinaires caractérisés par des sorties de fonds suivies d'entrées de fonds, lorsque le taux d'actualisation s'élève, la valeur actuelle nette diminue. La valeur actuelle nette atteint zéro lorsque le taux d'actualisation est égal au taux interne de rentabilité. Si un projet est complexe, par exemple une alternance de sorties et d'entrées de fonds, il est possible de constater plusieurs taux internes de rentabilité, il convient alors d'appliquer le critère de la valeur actuelle nette au détriment du taux interne de rentabilité et comme le TRI c'est le taux qui annule la VAN, on obtient :

  $$I_0 = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{F_t}{(1+t_a)^n}, \tag{1.10}$$

avec

I_0 : montant de l'investissement initial ;

t_a : le taux d'actualisation.

– **c) L'indice de profitabilité** L'indice de profitabilité (IP) est le rapport de la valeur actualisée des flux de trésorerie prévus d'un projet au montant de l'investissement (I). Il convient de choisir les projets ayant un indice supérieur à 1, donc ceux qui rapportent plus qu'ils ne coûtent.

C'est le rapport de la somme des FNT actualisés et l'investissement initial :

$$IP = \sum \frac{F_t(1+t)^{-n}}{I_0}. \tag{1.11}$$

– **Si** $IP > 1$: le projet est rentable ;
– **Si** $IP = 1$: on récupère la mise de fonds placé à un taux T ;
– **Si** $IP < 1$: le projet doit être rejeté car il n'est pas rentable.

1.5 Gestion de trésorerie

Le rôle majeur du trésorier est la gestion des liquidités, Il doit veiller à ce que l'entreprise dispose d'une encaisse suffisante pour faire face, au moindre coût, aux paiements prévus. La seconde tâche essentielle du trésorier consiste, une fois les soldes de trésorerie prévisionnels connus, à adapter au mieux les décisions de placement et de financement plus la maîtrise des risques (de change , de taux d'intérêt, de liquidité et de signature. Pour atteindre cet objectif, il faut répartir le montant de la réserve entre argent liquide et titre quasi-liquide de façon à maximiser la différence entre le rendement des titres et les coûts probables de leur achat et de leur vente.

1.5.1 L'équilibre financier et gestion de trésorerie

l'équilibre financier d'une société peut être appréhendé dans un premier temps à partir de son bilan. Celui-ci répertorie à l'actif ses différents investissements ou emplois et, au passif, les ressources mobilisées pour les financer. Dans ce contexte, la trésorerie (T) est la différence algébrique entre le fonds de roulement (FR) et le besoin en fonds de roulement (BFR) de l'entreprise.

Le Fonds de roulement est défini comme l'excédent de capitaux stables, par rapport aux emplois stable, il peut être définit de deux manières :

FR liquidité = ressources à plus d'une an- emplois (besoins) à plus d'un an.

FR Fonctionnel = ressources stable - emplois stables.
Quant au BFR, il n'a véritablement de sens que dans une optique fonctionnelle. Il représente le besoin de financement généré par le cycle d'exploitation de l'entreprise. Il se calcule généralement ainsi :
BFR = Stocks + créances clients (argent dues à l'entreprise par ses clients) - dette d'exploitation.
Ainsi, le excédent de trésorerie d'exploitation (T) est donné par :
$T = FR - BFR$.

1.5.2 La gestion des risques financiers

La détermination de la structure de trésorerie prévisionnelle sur la banque pivot et la réalisation des placements et des financements donnent une position finale en euros et, le cas échéant, en devises étrangères. Les décisions financières et la structure de trésorerie en devises génèrent différents risques :

- le risque de taux d' intérêt sur les décisions de placement ou de financement ;
- le risque de change sur la position de trésorerie en devises et sur chaque mouvement de fonds en devises en direction ou en provenance de l'étranger, notamment ceux inhérents aux décisions de placement et de financement en monnaie étrangère. En outre, certains placements et financements sont exposés à deux risques supplémentaires, les risques de signature et de liquidité. La gestion de ces risques consiste à apprécier les pertes susceptibles d'affecter le patrimoine ou les revenus de l'entreprise, puis à déterminer le mode et l'importance de la couverture, en accord avec la direction générale de l'entreprise.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons simplifié les concepts les plus importants tels que dans le monde de la finance, comme point d'entrée, nous avons détaillé la fonction financière et les différentes sources de financement, ainsi que le circuit financier.
D'autre part, nous nous somme intéressés à l'analyse et à la compréhension de la vie de d'une entreprise, qui est basée sur les critères de choix des investissements par le biais de l'évaluation des coûts des différents financement.
Finalement, nous avons exposé et clarifié l'élément le plus important de d'entreprise qui est la trésorerie, qui consiste au premier lieu, à déterminer le niveau optimal de réserve de liquidité ; en second lieu, à maximiser autant que possible le rendement des surplus de liquidité.

Chapitre 2

Modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise

Introduction

Les modèles de contrôle optimal, à la fois stochastiques et déterministes, sont probablement les plus importants parmi les systèmes de gestion en économie et en finance. Ce sont des situations où l'on fait face à des systèmes dynamiques qui évoluent dans des conditions d'incertitude et où il s'agit de prendre des décisions à chaque date afin d'optimiser des critères économiques et financiers.

Comme il est difficile de couvrir l'ensemble des applications de contrôle optimal en finance, nous avons opté de focaliser sur les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise.
Comme toute modélisation exige une simplification de la réalité pour faciliter la résolution et l'interprétation des résultats, nous sommes amenés à présenter dans ce document des modèles qui supposent que l'entreprise ne se trouve confrontée à aucune incertitude en ce qui concerne les événements futurs.
Dans ce chapitre, nous abordons les différentes questions de la finance d'entreprise : En premier lieu nous parlons d'un modèle étudié par Sethi et Thompson [20], qui modélise la problématique de la gestion optimale de la trésorerie ; puis nous exposons un modèle de financement optimal d'une entreprise proposé par Krouse et Lee [14] ; finalement, dans la dernière section de ce chapitre, nous discutons un modèle de la dynamique d'une firme qui englobe les décisions financières au niveau d'une entreprise.

2.1 Modèle de gestion de la trésorerie

Le problème de la gestion de trésorerie, dans sa forme la plus simple, est un problème à objectif d'établir des règles de décision qui permettraient de gérer la trésorerie de façon optimale tout on respectons sa demande de liquidité.
Dans ce qui suit, nous présentons un modèle déterministe de gestion de trésorerie développé par Sethi [19].

2.1.1 Description du modèle

Prenons une entreprise qui veut gérer le processus de sa trésorerie d'une manière optimale sur un intervalle du temps $[0, t^*]$. Cette gestion consiste à répartir le mieux possible les réserves de liquidités entre argent liquide (placement à court terme, Sethi parle de placement dans des comptes bancaires) et des titres quasi-liquides (action, obligation). Si l'entreprise conserve trop de liquidités, elle perd de l'argent en termes de coût d'opportunité, dans la mesure ou elle peut gagner un rendement supérieur en achetant des actions. D'autre part, si le solde de caisse est trop petit, l'entreprise doit vendre des titres pour répondre à la demande de liquidités. Ce transfert d'argent entre le compte bancaire, l'achat et la vente d'actions encourt le payement d'une commission de courtier. D'une façon générale, pour formuler le problème, nous introduisons les notation :
$x(t) =$ le montant de la réserve de liquidités investi en compte bancaire(le solde de trésorerie) à l'instant t ;
$y(t) =$ le montant de la réserve de liquidités investi en action à l'instant t ;
$r_1(t) =$ le taux d'intérêt percu du placement au compte bancaire ;
$r_2(t) =$les gains financier sur le capital investit (croissance du prix des actions).
A chaque instant t, l'entreprise reçoit une demande $d(t)$. Cette dernière peut être positive ou négative : une demande positive représente les flux d'encaissement (recette ou entrée de liquidités), et celle négative reflète les flux de décaissement (dépense ou sortie de liquidités).
Pour répondre à la demande de liquidités et pour mieux répartir les fonds, l'entreprise peut prendre la décision d'engager un montant $u = u(t)$ en vendant des actions, une valeur négative de $u(t)$ représente un achat. En outre, la variable de contrôle $u(t)$ est bornée, c'est-à-dire :

$$M_1 \leq u(t) \leq M_2, \quad \text{où} : M_1 \geq 0; \quad M_2 \leq 0. \tag{2.1}$$

Pour chaque unité d'action qui est achetée ou vendue u(t), l'entreprise verse une valeur positive d'une commission de courtier $\alpha \mid u(t) \mid$.

En effet, la variation des montants investis en compte bancaire et donnée par :

$$\dot{x} = r_1 x - d + u - \alpha \mid u(t) \mid, \qquad x(0) = x_0, \tag{2.2}$$

et la variation de montant de la réserve de liquidités investi en action est :

$$\dot{y} = r_2 y - u; \qquad y(0) = y_0. \tag{2.3}$$

Dans ce modèle, nous n'imposons aucune autre contrainte sur les variables d'état $x(t)$ et $y(t)$. Cela signifie que les découverts sur les liquidités et la vente à découvert d'actions sont autorisés. L'objectif de l'entreprise est de gérer le niveau de solde de trésorier à un coût minimal, une formulation équivalente peut être obtenue en terme de maximisation de la valeur terminale des actifs. Dans ce cas, la fonction objectif s'écrit :

$$\max J = x(t^*) + y(t^*). \tag{2.4}$$

Pour plus de commodité, le modèle optimal de gestion de la trésorerie se représente comme suit :

$$\max J = x(t^*) + y(t^*). \begin{cases} \dot{x} = r_1 x - d + u - \alpha \mid u(t) \mid; \qquad x(0) = x_0, \\ \dot{y} = r_2 y - u; \qquad y(0) = y_0, \\ M_1 \leq u(t) \leq M_2, \text{où : } M_1 \geq 0; M_2 \leq 0.T \in [0, t^*]. \end{cases}$$

2.2 Modèle de financement optimal

Dans la présente section, nous discutons un modèle d'entreprise qui doit financer ses investissements par une combinaison optimale des dividendes (bénéfices) non répartis et fonds propres externes. Ce modèle a été discuté par Krouse et lee [14], avec des modifications et des extensions par Sethi (1978). Pour des raisons de simplicité et de facilité, ce modèle ne prend pas en considération la dette en tant que source de financement, mais il permet comme moyen de financement des proportions des bénéfices non répartis et des fonds propres externes.

2.2.1 Description du modèle

Pour construire le modèle de contrôle optimal non linéaire simplifié nous utilisons la notation suivante :

$x(t) =$ le rendement sur le capital investi ;

$y(t) =$ le capital investi jusqu'à l'instant t ;

$r =$ est taux de rendement des capitaux investis ;

$g =$ est la borne supérieure du taux de croissance des actifs de l'entreprise.
A chaque instant t, l'entreprise peut prendre deux décisions de financement, soit par des dividendes non distribués $v(t)$, soit par des fonds propres externes (augmentation de capital) $u(t)$, engendrant des frais de transaction $(1 - c)$ pour chaque unité de capital.

Compte tenu de ces notations, le rendement courant est $x = ry$, la variation des revenus est donné par :

$$\dot{x} = r\dot{y} = r(cu + v)x, \qquad x(0) = x_0. \tag{2.5}$$

En outre, la borne supérieure sur le taux de croissance du capital investi implique la contrainte suivante sur les variables de contrôle :

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{(cu + v)x}{(x/r)} = r(cu + v) \leq g. \tag{2.6}$$

Enfin, l'objectif de l'entreprise est de maximiser sa valeur, qui est considérée comme la valeur actuelle des flux de dividendes futurs qui s'accumulent à partir de l'instant $t = 0$. Pour obtenir cette expression, notons que :

$$\int_0^{t^*} (1 - v)x\mathrm{e}^{-it}dt.$$

est la valeur des dividendes distribués par l'entreprise jusqu'à l'instant t^*. Une partie de ces dividendes revient aux apporteurs des capitaux propres externes, qu'est évalué par :

$$\int_0^{t^*} ux\mathrm{e}^{-it}dt.$$

Ainsi, la valeur actualisée nette des dividendes futurs versée aux actions est la différence des deux expressions précédentes, c'est-à-dire :

$$J = \int_0^{t^*} (1 - v - u)x\mathrm{e}^{-it}dt. \tag{2.7}$$

Ainsi, le modèle peut s'écrire comme suit :

$$\max J = \int_0^{t^*} (1 - v - u)x\mathrm{e}^{-it}dt.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r\dot{y} = r(cu + v)x & , x(0) = x_0, \\ r(cu + v) \leq g, \\ u \geq 0; \qquad 0 \leq v \leq 1. \end{cases}$$

2.3 Modèle dynamique d'entreprise

Les modèles dynamiques de l'entreprise sont des thèmes de recherche en microéconomie. Plusieurs de ces modèles décrivent les différents facteur qui influent sur l'activité et la valeur d'entreprise. L'un des premiers modèles dynamiques de ce genre est le modèle classique de Jorgensen (1967). Ce modèle propose que le problème de l'entreprise est de choisir le niveau de sa production, son utilisation de main-œuvre et le montant de ses investissements de manière à maximiser sa valeur.

Après le modèle de Jorgensen, plusieurs autres modèles ont été étudiés, tout en tenant en compte d'autres facteurs. Le modèle que nous exposons ici, est celui étudié par Blok dans [4] comme un modèle de base. En plus de la recherche à déterminer les politiques optimales en matière d'investissements, d'utilisation de facteurs de production et de dépréciation, ce modèle prend en considération la politique de distribution des dividendes.

2.3.1 Description du modèle

Examinons le comportement d'une entreprise sur un intervalle de temps fini $T = [0, t^*]$, où t^* est un horizon de planification. A chaque instant, l'entreprise produit une quantité de bien $Q = Q(t) = q^{-1}k(t)$, où $k = k(t)$ est le capital de l'entreprise accumulé à instant t et q est la productivité du capital. La production est vendue sur le marché et entraîne un chiffre d'affaires notée $S = S(q^{-1}k(t))$. Le capital de l'entreprise $k(t)$ se décompose en capitaux propres $x = x(t)$ et en montant de l'emprunt (dette) $y = y(t)$:

$$k(t) = x(t) + y(t), t \in T. \tag{2.8}$$

En outre, nous supposons que les capitaux empruntés sont non négatifs et ne dépassent pas la valeur des capitaux propres, ce qui est traduit par la contrainte suivante :

$$0 \leq y(t) \leq bx(t) \qquad 0 \leq b \leq 1. \tag{2.9}$$

La variation du capital en fonction de taux de dépréciation a est donne par :

$$\dot{k} = I - ak, \tag{2.10}$$

où I est l'investissement. Cette équation exprime la dynamique du taux de variation du capital qui est, à tout instant t, égal aux nouveaux investissements entrepris à l'instant t, moins la portion du capital qui se trouve dépréciée au même moment.

La variation du capital propres en fonction de le revenu $S(Q)$ (vente de produit) et l'amortissement $ak(t)$, l'intérêt des emprunts $ry(t)$(r est le taux d'intérêt), paiements des salaires $wL(t)$($w > 0$ est le taux de salaire de la main-d'oeuvre, $L = L(t) = lq^{-1}k(t)$ est la quantité de travail employée), les dividendes $D(t)$ et les taxes est décrite par l'équation :

$$\dot{x} = (1 - f)\{S - ak - wL - ry\} - D. \tag{2.11}$$

Pour $S = S(q^{-1}k)$, et en utilisant l'équation 2.8 et la relation $L = lq^{-1}k(t)$, nous éliminons les variables y et L, ce qui nous donne :

$$\dot{x} = (1-f)\left\{S(q^{-1}k) - ak - wlq^{-1}k - r(k-x)\right\} - D. \tag{2.12}$$

Et d'après (2.8) et (2.9), nous obtenons les contraintes sur les variables d'état :

$$x(t) \leq k(t) \leq (1+b)x(t), \qquad\qquad t \in T. \tag{2.13}$$

Dans les équations différentielles (2.10) et (2.12) les variables x et k sont considérées comme des variables d'état. Les variables de contrôle sont les dividendes D et l'investissement I.
Les dividendes $D(t)$ et les investissements $I(t)$ obéissent aux contraintes directes suivantes :

$$D(t) \geq 0, \qquad I(t) \geq 0; \qquad\qquad t \in T. \tag{2.14}$$

Nous supposons que les commandes admissible de l'entreprise est déterminée par la maximisation de la valeur détenue par les actionnaires (la valeur de l'entreprise) à l'instant t^*, qui est considérée ici comme la somme des dividendes distribués plus la valeur actualisée des capitaux propres à l'instant t^*. En introduisant un taux d'actualisation constant $i > 0$, la valeur finale de l'entreprise est alors donnée par :

$$V(D,I) = \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{-it} D(t)dt + \mathrm{e}^{-it^*} x(t^*). \tag{2.15}$$

Les commandes admissibles $D^*(t)$ et $I^*(t)$, $\;t \in T$ sont dites optimales si :

$$V(D^*, I^*) = \max V(D,I).$$

Ainsi, le problème qui nous donne la politique optimale de l'entreprise en terme de d'investissement et de financement se traduit par le modèle suivant :

$$\max_{D,I} V(D,I) = \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{-it} D(t)dt + \mathrm{e}^{-it^*} x(t^*).$$

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = I(t) - ak(t), \quad k(0) = k_0, \\ \dot{x}(t) = (1-f)\{S(q^{-1}k(t)) - ak(t) - wlq^{-1}k(t) - r(k(t) - x(t))\} - D(t), x(0) = x_0, \\ k(t) - x(t) \geq 0, \\ (1+b)x(t) - k(t) \geq 0, \qquad 0 \leq b \leq 1, \\ D(t) \geq 0, \\ I(t) \geq 0. \end{cases}$$

Conclusion

Ce chapitre est pour objectif de donner une idée générale sur les différentes modèles et problématiques financière au niveau d'une entreprise. Ainsi, nous avons abordé ce chapitre par la discussion d'un modèle proposé par Sethi et al., qui modélise la décision d'investir les excédants de trésorerie en compte bancaire ou dans l'achat des actions, afin de maximiser la valeur des actifs. Le point visé par le deuxième modèle est de rependre au problème de financement des investissements par les capitaux propres externes et les dividendes non distribués. Le troisième modèle discute la dynamique d'une entreprise en terme de financement et d'investissement, afin de maximiser la valeur de l'entreprise .

Chapitre 3

Contrôle optimal des systèmes dynamiques

Introduction

La théorie du contrôle optimal traite les problèmes d'optimisation des systèmes dynamiques. En 1963, Jorgenson est le premier qui a écrit sur l'utilisation de la théorie du contrôle optimal, afin d'analyser la dynamique financière et le comportement d'une entreprise. Une décennie plus tard, des rapports sont apparus sur des modèles plus réalistes de l'entreprise, tels que les travaux de Lesourne [1973] et Bensoussan & al. [1974]. Puis de nombreux documents sont apparues, par exemple : Van Loon [1983] [24], Van Schijndel [1988] [12], Kort [1989] [13], Van Hilten [1991][22] et Van Hilten et al [1993] [23]. Leurs investigations sont caractérisées par une approche analytique des problèmes d'optimisation (Principe de maximum de Pontriaguin combiné avec la procédure de couplage de chemin de Van Plongeon).
Une bonne interprétation économique des solutions des modèles mathématique est obtenu, cependant, la résolution analytique devient pratiquement irréalisable ou difficile lorsque les modèles deviennent plus complexes, par exemple, une non-linéarité plus forte, des fonctions dépendant du temps et de plus grand nombre de variables d'état et de contrôle et des contraintes complexe. Par exemple, la procédure de couplage de chemin est compliquée pour les problèmes d'optimisation où les discontinuités se produisent.

Dans ce chapitre, nous exposons l'essentielle de la théorie de contrôle optimal des systèmes dynamiques sans et avec retard, puis à la fin du chapitre nous donnons un vision général sur la résolution des ces systèmes par couplage des chemins.

3.1 Contrôle optimal des systèmes dynamiques

La partie la plus importante de tout résolution de problème de contrôle optimal est le processus de modéliser le système dynamique le plus fidèle possible à la situations réelles, qu'il soit physique, économique ou autre. Le but est d'arriver à une description mathématique qui soit assez simple et suffisamment réaliste pour pouvoir prédire la réponse du système à une entrée donnée.
Dans cette section, nous rappelons le principe du maximum pour les problèmes de contrôle optimal étudie par Pontriaguine et all [1962][18] et Feichtinger & Hartl [1986] et Sethi [21, 19].

3.1.1 Le contrôle optimal des systèmes dynamiques sans contraintes

Formulons le problème de contrôle optimal comme suit :

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{z} \phi(u(t))dt + \varphi(x(z)), \tag{3.1}$$

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{3.2}$$

avec :
$x(t) \in \mathbb{R}^n$,
$u(t) \in \mathbb{R}^m$,
$\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,
$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
On suppose que les fonctions F, φ, f sont toutes continument différentiables.

3.1.1.1 Principe du maximum

Considérons l'Hamiltonien du problème précédent :

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = \phi(u(t)) + \psi^T f(x, u, t).$$

Théorème 3.1 (Principe du maximum)**.** *Soit u^* une commande optimal du problème (3.1)-(3.2), et x^* sa trajectoire correspondante, alors il existe le vecteur adjoint ψ tels que les conditions suivante sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \dot{x}^* = f(t, x^*, u^*)\,,\ x^*(t_0) = x_0, \\ \dot{\psi} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \psi(t),), t) \quad , \quad \psi(z) = \dot{\varphi}(x(z), z), \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}|_{u=u^*} = 0, \\ \mathcal{H}(x^*, u^*, \psi, t) \geq \mathcal{H}(x^*, u, \psi, t)\,, \quad \forall u \in \Omega(t), t \in [t_0, z]. \end{cases} \tag{3.3}$$

La commande $u^*(t)$ doit fournir un maximum global de l'Hamiltonien $H[x^*(t), u, \psi(t), t]$ sur $u \in \Omega(t)$. Pour cette raison, les conditions nécessaires (3.3) sont appelées le principe du maximum.

Théorème 3.2 (Les conditions suffisante). *Soit (x^*, u^*, ψ) satisfait les conditions nécessaires (3.3). Si $\mathcal{H}^0(x, u, \psi(t), t)$ est concave en x à chaque $t \in [t_0, z]$,, alors (u^*) est un contrôle optimal.*

3.1.2 Le contrôle optimal des systèmes dynamiques avec contraintes

Soit le problème du contrôle optimal suivant :

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{z} \phi((u(t)))dt + \varphi(x(z)),$$

$$\dot{x} = f(t, x(t, u(t)))$$

avec les contraintes suivantes :

$$g(x(t), u(t)) \geq 0, \tag{3.4}$$

$$h(x(t)) \geq 0, \tag{3.5}$$

avec :

$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. On suppose que la fonction g est continument différentiable par rapport à leurs arguments, et que la fonction h est deux fois continument différentiable.

Un couple $(x(t), u(t))$ pour $t \in [t_0, z]$ est appelé une solution réalisable pour le contrôle optimal du problème avec contrainte, si $u(t)$ est continu par morceaux dans $[t_0, z]$ et les conditions (3.4) et (3.5) sont satisfaites.

La qualification faible des contraintes : il faut que la matrice :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(x(t), u(t)) & \qquad G(x(t), u(t)) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

a le rang de ligne complet p, où : $G(x,u)$ est une matrice diagonale $p \times p$ avec $G_{ii}(x,u) = g_i(x,u)(i = 1,2,\dots,p)$. Ainsi, la qualification de contrainte faible dit que les gradients $\partial g_i/\partial u$ pour toutes les contraintes actives $g_i \geq 0(i = 1,2,\dots,p)$ doivent être linéairement indépendantes.

À l'extension de (3.6), on trouve **la qualification forte des contraintes** qui exige que la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(x(t),u(t)) & G(x(t),u(t)) & 0 \\ \frac{\partial k}{\partial u}(x(t),u(t)) & 0 & H(x(t)) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

a le rang de ligne complet $p+q$,

où : $H(x)$ est une matrice diagonale $q \times q$ avec $H_{ii}(x) = h_i(x)(i = 1,2,\dots,q)$.

3.1.2.1 Principe du maximum

On considérons l'Hamiltonien et Lagrangienne du problème précédent :

$$\mathcal{H}(x,u,\psi,t) = \phi(u(t)) + \psi^T f(x,u,t),$$

$$\mathcal{L}(x,u,\psi,\mu,\nu,t) = \mathcal{H}(x,u,\psi,t) + \mu^T g(x,u) + \nu^T h(t,x(t)).$$

Théorème 3.3 (**Principe du maximum avec contraintes**). *Soit u^* une commande optimal du problème avec contraintes, et x^* la trajectoire correspondante, alors il devrait exister une fonctions ψ continument différentiable par morceaux et μ et ν sont des fonctions continues aussi par morceaux, dont les conditions suivants sont satisfaites :*

$$\begin{cases} \dot{x}^* = f(t,x^*,u^*)\,,\; x(t_0) = x_0, \\ \dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}|_{u=u^*} = 0, \\ (x^*) \geq 0, \\ \psi(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(z),z) + \gamma\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(z)), \\ \gamma h(x^*(z),z) = 0,\;\; \gamma \geq 0, \\ \mathcal{H}(x^*,u^*,\psi,t) \geq \mathcal{H}(x^*,u,\psi,t), \\ g(x^*,u,t)\,,\; h(x^*(t),t) \geq 0, \\ \mu(t) \geq 0\,,\; \mu g(x^*,u^*,t) = 0\,,\; \nu(t) \geq 0\,,\; \nu h(x^*,t) = 0\,,\; \forall t \in [t_0,z]. \end{cases} \tag{3.8}$$

Définissons le Hamiltonien maximisé

$$\mathcal{H}^0(x, \lambda, t) = \max_{\{u|g(x,u,t)\geq 0\}} \mathcal{H}(x, u, \lambda, t).$$

Théorème 3.4 (Les conditions suffisantes). *On se remplace dans le cadre du théorème des conditions nécessaires (3.8) Si $\mathcal{H}^0, \varphi$ sont concaves par rapport $x$etu et que g, h sont semi-concaves par rapport $x$etu alors (x^*, u^*) est optimal $\forall \in [t_0, z]$. et les conditions nécessaires sont aussi suffisantes.*

3.2 Contrôle optimal des problèmes dynamiques avec retard

En 1966, Chyung et Lee ont obtenus le principe du maximum pour un problèmes de contrôle optimal avec retard mixte à la fois sur l'état et le contrôle.

3.2.1 Contrôle optimal des systèmes dynamiques avec retard sans contraintes

Considérons le problème de contrôle optimal avec retard constant, $h \geq 0$ dans $\mathbb{R}$ et $s \geq 0$ dans $\mathbb{R}$ suivant :

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{z} \phi(t, x(t), x(t-h), u(t), u(t-s))dt + \varphi(x(z), z), \tag{3.9}$$

$$\dot{x} = f(t, x(t-h), u(t), u(t-s)), \tag{3.10}$$

avec :

$x(t) \in \mathbb{R}^n$,

$u(t) \in \mathbb{R}^m$,

$\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Théorème 3.5. ***Principe dumaximum*** *[17] Soit $u^*(t) \in \mathbb{U}$ une commande optimale admissible où U est un ensemble des contrôles admissibles et $x^*(t)$ la trajectoire optimale associée à $u^*(t)$, alors il existe un vecteur adjoint tels que les conditions suivante sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t) - \chi_{[0,z-h]}\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x(t-h)}(t+h), \quad \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(0) = 0 \ \ pour\,,\, t > 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(t) + \chi_{[0,z-s]}\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u(t-s)}(t+s) = 0, \\ \psi^*(0) = 0, \\ \psi^*(z) = 0\,,\ pour\ x(0)\ et\ x(z)\ sont\ libres, \end{cases} \tag{3.11}$$

avec l'hamiltonien $\mathcal{H}$ est définit par :

$$\mathcal{H}(x,u,\psi,t) = \phi(t,x(t),x(t-h),u(t),u(t-s)) + \psi^T f(t,x(t),x(t-h),u(t),u(t-s)).$$

Preuve. voir [17] □

3.2.2 Contrôle optimal des dynamiques avec retard avec contraintes

Considérons le problème avec contraintes suivant :

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{z} \phi(t,x(t),x(t-h),u(t),u(t-s))dt + \varphi(x(z),z); \tag{3.12}$$

$$\dot{x} = f(t,x(t-h),u(t),u(t-s))\,,\ t \in [t_0,z], \tag{3.13}$$

$$x(t) = x_0(t)\,,\ t \in [t_0-h,z],$$

$$u(t) = u_0(t)\,,\ t \in [t_0-s,z],$$

$$\omega(z) = 0,$$

$$C(x(t),x(t-h),u(t),u(t-s)) \geq 0\,,\ t \in [t_0,z], \tag{3.14}$$

avec :
$C : [t_0,z] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$,
$\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q \ \ ; \ \ 0 \leq q \leq n.$
Posons $(h,s) \neq (0,0)$ et considérons l'Hamiltonien et Lagrangienne de ce problème :

$$\mathcal{H}(x,u,\psi,t) = \phi(t,x(t),x(t-h),u(t),u(t-s)) + \psi^T f(x,u,t),$$

$$\mathcal{L}(x,u,\psi,\lambda,t) = \mathcal{H}(x,u,\psi,t) + \lambda^T C(x,u,t),$$

Où ψ dans $\mathbb{R}^n$, μ dans $\mathbb{R}^p$ et ν dans $\mathbb{R}^q$.

Théorème 3.6 (Principe du maximum). *[17] Soit $u^*(t) \in \mathbb{U}$ une commande optimale admissible où $\mathbb{U}$ un ensemble de contrôle admissible et $x^*(t)$ la trajectoire optimale associée à $u^*(t)$. Alors il existe un vecteur adjoint $\psi(t)$ et un multiplicateur de Lagrange $\lambda(t)$ et $\varsigma \in \mathbb{R}^p$ tels que les équations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \dot{\psi}^* = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t) - \chi_{[t_0,z-h],}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(t-h)}(t+h), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(t)}(t) + \chi_{[t_0,z-s]}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(t-s)}(t+s) = 0, \\ \psi(z) = \varphi_x(x(z),z) + \varsigma\omega_x(x^*(z)), \\ \lambda^*(t) \geq 0 \quad , \quad \lambda_i^*(t)C_i(t,x^*,u^*) = 0, \quad i = 1,\dots p. \end{cases} \tag{3.15}$$

3.3 Contrôle optimal des systèmes dynamiques a valeur actualisée

Dans la plupart des problèmes de sciences de gestion et d'économie, la fonction objective est généralement formulé en termes d'argent ou d'utilité. Ces quantités ont une valeur temporelle, et donc les futurs flux d'argent ou d'utilité vont perdre de la valeur.
La fonction d'objectif actualisée peut être écrite comme un cas de (3.1) en supposant un taux d'actualisation $i > 0$ et notons $\phi(x,u,t) = F(x,u,t)\mathrm{e}^{-it}$ et $\varphi(x,z) = S(x(z))\mathrm{e}^{-iz}$.
En effet, le problème (3.1) - (3.2) dans ce cas s'écrit :

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{z} F(x,u,t)\mathrm{e}^{-it}dt + S(x(z))\mathrm{e}^{-iz}, \tag{3.16}$$

$$\dot{x} = f(t,x(t),u(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{3.17}$$

alors, l'Hamiltonien a valeur actualisée, $\mathcal{H}^{vp}$ est :

$$\mathcal{H}^{vp}(x,u,\psi,t) = \mathrm{e}^{-it}F(u) + \psi^T f(x,u,t). \tag{3.18}$$

D'après le principe du maximum sans contraintes on a :

$$\dot{\psi} = -\mathcal{H}_x^{vp}, \quad \text{avec : } \ \mathcal{H}_x^{vp} = \frac{\partial \mathcal{H}^{vp}}{\partial x},$$

et :

$$\psi(z) = \frac{\partial(\mathrm{e}^{-it}S(x(z)))}{\partial x}.$$

Soit l'Hamiltonien a valeur actualisée suivant :

$$\mathcal{H}(x,u,\lambda,t) = F(u) + \lambda^T f(x,u,t).$$

On pose :

$$\lambda = \mathrm{e}^{it}\psi. \tag{3.19}$$

En effet l'équation (3.18) peut s'écrire comme suit :

$$\mathcal{H} = \mathrm{e}^{it}\mathcal{H}^{vp}. \tag{3.20}$$

De plus, d'après (3.19) nous obtenons :

$$\dot{\lambda} = i\mathrm{e}^{it}\psi + \mathrm{e}^{it}\dot{\psi}. \tag{3.21}$$

En utilisant les (3.18), (3.19) et (3.20) on peut simplifier l'équation 3.21 comme suit :

$$\dot{\lambda} = i\lambda - \mathcal{H}_x. \tag{3.22}$$

Par conséquent, les conditions nécessaires d'optimalité du problème -((3.16)) - ((3.17))- peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) = \max_{\in\Omega(x^*(t),t)} \mathcal{H}(x^*, u, \lambda(t), t), \\ \dot{\lambda}(t)^T - i\lambda(t)^T = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t), \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) = 0, \\ \lambda(z)^T = \dfrac{\partial S}{\partial x}(x^*(z)). \end{cases}$$

Considérons le problème avec contrainte suivant :

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{z} F(x,u,t)\mathrm{e}^{-it}dt + S(x(z))\mathrm{e}^{-iz}, \tag{3.23}$$

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \qquad x(t_0) = x_0, \tag{3.24}$$

$$g(x(t), u(t)) \geq 0, \tag{3.25}$$

$$h(x(t)) \geq 0. \tag{3.26}$$

Soit la fonction Lagrangienne de la valeur présent $\mathcal{L}^{vp}$ définie comme suit :

$$\mathcal{L}^{vp}(x, u, , \psi, \mu^{vp}, \nu^{vp}, t) = H^{vp}(x, u, \psi, t) + \mu^{vp} g(x, u) + \nu^{vp} h(x). \tag{3.27}$$

avec le vecteur adjoint $\psi(t)$ et le multiplicateur γ^{vp} vérifient les conditions suivante :

$$\dot{\psi} = -\mathcal{L}_x^{vp} \quad , \quad \text{avec :} \mathcal{L}^{vp} = \frac{\mathcal{L}^{vp}}{\partial x} \tag{3.28}$$

avec la condition terminale :

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \varphi_x(x(z), z) + \gamma^{vp} h_x(x^*(z)), \\ &= \mathrm{e}^{-iz} S_x(x(z)) + \gamma^{vp} h_x(x^*(z)). \;\; \gamma^{vp} \geq 0, \;\; \gamma^{vp} h(x^*(z)) = 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

et μ^{vp} et ν^{vp} vérifié :

$$\mu^{vp} \geq 0\,, \mu^{vp} g = 0. \qquad \nu^{vp} \geq 0\,, \nu^{vp} h = 0. \tag{3.30}$$

Définissons la fonction $\mathcal{L}$ comme suit :

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda, \mu, \nu, t) = \mathcal{H}(x, u, \lambda, t) + \mu^T g(x, u) + \nu^T h(x),$$

et posons :

$$\lambda = \mathrm{e}^{it}\psi, \qquad \mu = \mathrm{e}^{it}\mu^{vp}, \qquad \nu = \mathrm{e}^{it}\nu^{vp}. \tag{3.31}$$

La fonction $\mathcal{L}$ a valeur actualisée s'écrit donc :

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{it}\mathcal{L}^{vp}. \tag{3.32}$$

De plus on : $\mathcal{H} = \mathrm{e}^{it}\mathcal{H}^{vp}$, alors maximiser $\mathcal{H}^{vp}$ par apport à u équivalant à maximiser l'hamiltonien $\mathcal{H}$ par apport à u. De plus, d'après (3.31) on obtient :

$$\dot{\lambda} = i\mathrm{e}^{it}\psi + i\mathrm{e}^{it}\dot{\psi}. \tag{3.33}$$

en utilisant les relations (3.28), (3.31) et (3.32) on peut simplifier l'équation 3.33 de la manière suivante :

$$\dot{\lambda} = i\lambda - \mathcal{L}_x, \tag{3.34}$$

et :

$$\lambda(z) = \frac{\partial S}{\partial x}(x(z), z) + \gamma \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(z)), \tag{3.35}$$

où la condition terminale pour $\lambda(z)$ découle immédiatement de la condition terminale pour $\psi(z)$. De (3.29) et (3.35) on obtient :

$$\gamma = e^{it}\gamma^{vp}.$$

En outre, nous avons les conditions complémentaire suivante : $\mu(t) \geq 0\,, \mu(t)g(x,u,t) = 0 \qquad \nu(t) \geq 0\,, \;\; \nu(t)h(x(t)) = 0 \qquad \gamma(t) \geq 0\,, \gamma(t)h(x(z)) = 0.$

Théorème 3.7 (Les conditions nécessaire d'optimalité). *[4] Soit $(x^*(t), u^*(t))$ un couple optimal du problème (3.23)−(3.26) et supposons que la qualification de contrainte (3.6) est satisfaite pour tout $t \in [t_0, z], x = x^*(t), u \in \Omega(x^*(t), t)$, alors il existe $\lambda_0 \geq 0$, continument différentiable par morceaux et le vecteur adjointe $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$, et un multiplicateurs de Lagrange $\mu(t) \in \mathbb{R}^p$ et $\nu(t) \in \mathbb{R}^q$, et un multiplicateurs constants $\gamma \in \mathbb{R}^q$, ainsi que des instants de temps $\tau_j \in [t_0, z]$ où $\lambda(t)$ est discontinu, et paramètres saut $\eta(\tau_j) \in \mathbb{R}^q$, avec $(\gamma_0, \lambda, \mu, \nu, \gamma, \eta(\tau_1), \eta(\tau_2)\cdots) \neq 0$ pour tout t, de sorte que les équations suivantes sont vérifiées pour tous les instants à l'exception* *des points de discontinuité de u et les points de couplage :*

$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda_0, \lambda(t), t) = \max_{\in\Omega(x^*(t),t)} \mathcal{H}(x^*, u \lambda_0, \lambda(t), t), \tag{3.36}$$

$$\dot{\lambda}(t)^T - i\lambda(t)^T = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda_0, \lambda(t), \mu(t), \nu(t), t), \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda_0, \lambda(t), \mu(t), \nu(t), t) = 0, \tag{3.38}$$

$$\mu(t) \geq 0\,,\ \mu(t) g(x^*(t), u^*(t)) = 0, \tag{3.39}$$

$$\nu(t) \geq 0\,,\ \nu(t) h(x^*(t)) = 0, \tag{3.40}$$

$$\lambda(z)^T = \lambda_0 \frac{\partial S}{\partial x}(x^*(z)) + \gamma \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(z)), \tag{3.41}$$

$$\gamma \geq 0, \quad \gamma h(x^*(z)) = 0. \tag{3.42}$$

Aux instants τ où (3.5) est active, des discontinuités (sauts) apparaissent dans la forme suivante :

$$\lambda(\tau^-)^T = \lambda(\tau^+) + \eta(\tau^+) \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(\tau^+)) \tag{3.43}$$

$$\eta(\tau) \geq 0, \qquad \eta(\tau)^T h(x^*(\tau)) = 0, \tag{3.44}$$

avec : $\lambda(\tau^-) = \lim_{t\uparrow\tau} \lambda(t)$ *et* $\lambda(\tau^+) = \lim_{t\downarrow\tau} \lambda(t)$

Pour les conditions suffisante on énonce le théorème suivant :

Théorème 3.8 (**Conditions suffisante**). *Si $\mathcal{H}(x, u, \lambda, \lambda_0, t)$ une fonction concave par apport aux (x, u) ; $S(x)$ concave par apport au x ;et les contraintes $g(x, u, t)$, $h(x(t), t)$ sont semi-concave en par apport aux ses arguments ; alors Les conditions nécessaires (3.36)- (3.44) si $\lambda_0 = 1$ sont également suffisantes pour l'optimalité d'un point réalisable.*

Contrôle optimal des systèmes dynamiques avec retard a valeur actualisée

On peut apporter des modifications au problème avec un retard $s > 0$ sur le variable de contrôle valeur actualisé, ainsi nous obtenons le résultat suivant :

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{z} F(x, u, t) \mathrm{e}^{-it} dt + S(x(z)) \mathrm{e}^{-iz}, \tag{3.45}$$

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t), u(t-s)) \qquad x(t_0) = x_0, \tag{3.46}$$

$$g(x(t), u(t), u(t-s)) \geq 0. \tag{3.47}$$

alors, l'Hamiltonien et Lagrangien de la valeur présent, $\mathcal{H}^{vp}$ est :

$$\mathcal{H}^{vp}(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), \psi, t) = \mathrm{e}^{-it} F(x, u, t) + \psi^T f(x(t), x(t), u(t), u(t-s), t); \tag{3.48}$$

$$\mathcal{L}^{vp}(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), \psi, t) = H^{vp}(x, u, \psi, t) + \mu^{vp} g(x(t), u(t-s)). \tag{3.49}$$

D'après le principe du maximum avec contraintes on a :

$$\dot{\psi} = -\mathcal{L}_x^{vp},$$

avec la condition terminale :

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \varphi_x(x(z), z) + \gamma^{vp} g_x(x^*(z)), \\ &= \frac{\partial(\mathrm{e}^{-iz} S(x(z)))}{\partial x(z)} + \gamma^{vp} g_x(x^*(z)).\gamma^{vp} \geq 0, \qquad \gamma^{vp} g(x^*(z)) = 0. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Soit Lagrangienne a valeur actualisée suivant :

$$\mathcal{L}(x(t), u(t), u(t-s), \lambda, t) = \mathcal{H}(x(t), u(t), u(t-s), \psi, t) + \mu g(x, u) + \nu h(t).$$

On pose :

$$\lambda(t) = \mathrm{e}^{it}\psi \, , \mu = \mathrm{e}^{it}\psi \, , \mu = \mathrm{e}^{it}\psi \quad , \forall t \in [t_0, z] \tag{3.51}$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{e}^{it}\mathcal{H}^{vp}. \tag{3.52}$$

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{it}\mathcal{L}^{vp}. \tag{3.53}$$

De plus, d'après (3.51) nous obtenons :

$$\dot{\lambda} = i\mathrm{e}^{it}\psi + \mathrm{e}^{it}\dot{\psi}. \tag{3.54}$$

En utilisant les (3.51), (3.53) et (3.54) on peut simplifier l'équation 3.54 comme suit :

$$\dot{\lambda} = i\lambda - \mathcal{L}_x. \tag{3.55}$$

Ce passage entre la valeur présent et actualisée de la fonction $\mathcal{L}$ va changer l'équation de la fonction $\mathcal{L}^{vp}$ comme suit :

$\mathcal{L}^{vp}(x(t), x(t), u(t), u(t-s), \psi, t) = H^{vp}(x, u, \psi, t) + \mu^{vp} g(x(t), u(t, t-s)),$

donc :

$\mathrm{e}^{it}\mathcal{L}^{vp}(x(t), u(t), u(t-s), \psi, t) = \mathrm{e}^{it} H^{vp}(x, u, \psi, t) + \mathrm{e}^{it}\mu^{vp} g(x(t), u(t, t-s)),$ De puis :

Alors on obtient :

$\mathcal{L}(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), \psi, t) = H(x, u, \psi, t) + \mu g(x(t), u(t, t-s))).$

$\dfrac{\partial \mathcal{L}^{vp}}{\partial u(t)}(t) + \chi_{[t_0, z-s]} \dfrac{\partial \mathcal{L}^{vp}}{\partial u(t-s)}(t+s) = 0$

donc on peut écrire : $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(t)}(t) + \chi_{[t_0, z-s]} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(t-s)}(t+s) = 0$

Par conséquent, pour un problème avec retard sur le contrôle a valeur actualisé les conditions nécessaire (3.15) peuvent être écrites comme suit :

$$\mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda_0, \lambda, t) = \max_{u \in \Omega(x^*(t),t)} \mathcal{H}(x^*, u, \lambda_0, \lambda, t), \tag{3.56}$$

$$\dot{\lambda}(t)^T - i\lambda(t)^T = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t)\,, \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.57}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(t)}(t) + \chi_{[t_0, z-s]} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(t-s)}(t+s) = 0, \tag{3.58}$$

$$u(t) = u_0(t)\,, \quad t \in [t_0, z], \tag{3.59}$$

$$\mu(t) \geq 0\,, \quad \mu(t) g(x^*(t), u^*(t)) = 0, \tag{3.60}$$

$$\lambda(z)^T = \lambda_0 \frac{\partial S}{\partial x}(x^*(z)) + \gamma \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(z)), \tag{3.61}$$

$$\gamma \geq 0\,, \quad \gamma g(x^*(z)) = 0. \tag{3.62}$$

3.4 Résolution par couplage des chemins

La procédure de couplage de chemin est une procédure itérative développée par Van Loon [1983] [24] afin de trouver une stratégie optimale $u^*(t)$ pour toute la période de planification $[t_0, z]$.

- **Identifier les chemins :** Les variables de contrôle et d'état optimaux sur une période de temps peuvent être considérées comme une succession de chemin (chaîne), ces chemin sont séparés les uns des autres par les moment de changement de l'ensemble des contraintes actives.

  Ainsi, un chemin est identifié au moyen des multiplicateurs $\mu_i(i = 1, \ldots, p)$ et $\nu_j(j = 1, \ldots, q)$ dans un intervalle donnée : un multiplicateur a une valeur positive si la contrainte est active ou il vaut zéro si la contrainte associée est passive. En principe, cela signifie que 2^{p+q} chemins différents peuvent être distingués. Le moments $\tau_1, \tau_2 \ldots (0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < z)$ sont les instants du passage d'un chemin à un autre (points de couplage).
- **Déterminer les chemins réalisable :**

  L'une des étapes de la procédure de couplage de chemin est l'exclusion des chemins qui ne satisfit pas les hypothèses du modèle et / ou les conditions nécessaires d'optimalité.
- **Synthèse de la résolution du problème :** Ce processus commence par la détermination du chemins finaux. Ce seront les chemins qui obéissent aux conditions de transversalité dans théorème (3.7). En principe, cela nécessite de vérifier 2^q combinaisons différentes de γ_i ($\gamma_i > 0$ ou $\gamma_i = 0 \;\; (i = 1, \ldots, q)$).

  Ensuite, la procédure consiste, à partir du chemin final, on construit les prédécesseur réalisable de chaque chemin d'une manière récursive. La récursivité prend fin dès qu'il sera impossible de trouver un prédécesseur pour n'importe quelle succession de chemins (chaine). La chaîne avec la plus grande valeur de la fonction objectif et qui respecte les conditions initiales $x(t_0) = x_0$, sera considérer comme une solution optimale du problème $(3.23) - (3.26)$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés au aspect théorique des problèmes de contrôle optimal, dont nous avons présenté les conditions nécessaires d'optimalité d'un problème de contrôle optimal sans et avec contraintes, puis nous avons traité le principe du maximum pour un problème de commande optimale avec retard.
Finalement, nous avons exposé la technique de résolution par couplage des chemins.

Chapitre 4

Résolution du modèle dynamique de l'entreprise

Introduction

Dans ce chapitre nous résolvons l'un des modèles le plus important et le plus connu de la finance d'entreprise, ce modèle s'intéresse à la recherche de la politique optimale de l'entreprise concernant la décision de financer les investissements par le baie des dividendes non distribues et l'endettement. En premier lieu nous résolvons le modèle sans prendre on compte le retard au niveau de la commande investissement, puis nous donnons la solution détail du modèle avec retard en se basant sur le principe d maximum de Pontryaguin adapté.

4.1 Le modèle dynamique de l'entreprise

4.1.1 Formulation de problème

Dans cette section nous étudions le problème de contrôle optimal discuté dans le chapitre 2 qui est formulé comme suit :

$$\max_{(D,I)} V(D,I) = \int_0^z \mathrm{e}^{-it} D(t)dt + \mathrm{e}^{-iz} X(z) \tag{4.1}$$

$$\dot{K}(t) = I(t) - aK(t), \quad K(0) = K_0, \tag{4.2}$$

$$\dot{X}(t) = (1-f)\Big\{S(t, K(t)) - aK(t) - wlq^{-1}K(t) - r(K(t) - X(t))\Big\}$$
$$-D(t), \quad X(0) = X_0 \tag{4.3}$$

$$K(t) - X(t) \geq 0, \tag{4.4}$$

$$(1+b)X(t) - K(t) \geq 0, \tag{4.5}$$

$$D(t) \geq 0, \tag{4.6}$$

$$I(t) \geq 0. \tag{4.7}$$

4.1.2 Les conditions d'optimalité

La qualification de contrainte faible pour ce problème est satisfaite si la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & I(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & D(t) \end{pmatrix}$$

est de rang 2 complet.

D'après le théorème (3.7), nous pouvons construire respectivement l'Hamiltonien et le Lagrangienne comme suit :

$$\mathcal{H}(X, K, \lambda_1, \lambda_2, D, I, t) = D + \lambda_1[I - aK]$$
$$+\lambda_2\Big[(1-f)\Big\{S(q^{-1}K) - aK - wlq^{-1}K - r(K-X)\Big\} - D\Big] \tag{4.8}$$

$$\mathcal{L}(X, K, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, D, I, t) = \mathcal{H}(X, K, \lambda_1, \lambda_2, D, I, t)$$
$$+\mu_1 I + \mu_2 D + \nu_1(K - X) + \nu_2((1+b)X - K) \tag{4.9}$$

où :

- λ_1 : vecteur adjoint du capitale de production $K(t)$;
- λ_2 : vecteur adjoint du capital propre $X(t)$;
- μ_1 : multiplicateur de Lagrange de l'investissement $I(t)$;
- μ_2 : multiplicateur de Lagrange des dividendes $D(t)$;
- ν_1 : multiplicateur de Lagrange de la borne inférieur des dettes ;
- ν_2 : multiplicateur de Lagrange de la borne supérieur des dettes.

4.1.2.1 Les conditions nécessaire d'optimalité

D'après le théorème (3.7), nous obtenons :

Le système d'adjoint :

$$\dot{\lambda}_1(t) - i\lambda_1(t) = a\lambda_1(t) - (1-f)\left\{\frac{\partial S}{\partial K} - wlq^{-1} - a - r\right\}\lambda_2 \\ -\nu_1(t) + \nu_2(t), \tag{4.10}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) - i\lambda_2(t) = -(1-f)r\lambda_2(t) + \nu_1(t) - (1+b)\nu_2(t). \tag{4.11}$$

Les conditions stationnaires :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I} = 0 \iff \lambda_1(t) + \mu_1(t) = 0, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D} = 0 \iff 1 - \lambda_2(t) + \mu_2(t) = 0. \tag{4.13}$$

Les conditions complémentaires et non-négative :

$$\mu_1(t)I(t) = 0\,,\ \mu_1(t) \geq 0, \tag{4.14}$$

$$\mu_2(t)D(t) = 0\,,\ \mu_2(t) \geq 0, \tag{4.15}$$

$$\nu_1(t)\left(K(t) - X(t)\right) = 0\,,\ \nu_1(t) \geq 0, \tag{4.16}$$

$$\nu_2(t)\left((1+b)X(t) - K(t)\right) = 0, \nu_2(t) \geq 0. \tag{4.17}$$

Les conditions de transversalité :

$$\lambda_1(z) = \gamma_1 - \gamma_2, \tag{4.18}$$

$$\lambda_2(z) = 1 - \gamma_1 + (1+b)\gamma_2, \tag{4.19}$$

$$\gamma_1\left(K(z) - X(z)\right) = 0\,,\ \gamma_1 \geq 0, \tag{4.20}$$

$$\gamma_2\left((1+b)X(z) - K(z)\right) = 0\,,\ \gamma_2 \geq 0. \tag{4.21}$$

Nous remarquons d'après l'équation (4.8) que la fonction Hamiltonien est linéaire donc concave par apport aux arguments X, K, I et D,, puisque S est une fonction strictement concave par rapport à K d'après l'hypothèse suivante :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Q^2} < 0 \,\text{et}\, \frac{\partial S}{\partial Q} > 0,$$

de plus le terme résiduel dans la fonction objectif et toutes les contraintes d'inégalité sont linéaires en K, X, I et D, alors d'après le théorème des conditions suffisantes les conditions **nécessaires** d'optimalité (4.10)-(**??**) deviennent des conditions **suffisantes** d'optimalité.

4.1.3 Résolution du modèle

Les conditions de complémentaires ((4.14)) - ((4.17)) exigent que chaque multiplicateurs de Lagrange $(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2)$ peut prendre des valeurs nulle (0) ou bien des valeurs positives (+). Par conséquent nous pouvons construire (2^4) chemins possibles qui sont présentés dans le tableau suivant :

Pour chaque chemin possible si un multiplicateur a le signe positive '+' alors la contrainte

chemin	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
μ_1	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0
μ_2	+	+	0	0	+	+	0	0	+	+	0	0	+	+	0	0
ν_1	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+
ν_2	0	0	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0	+	+	+	+

TABLE 4.1 – Tableau des chemins possibles

associer est active, par contre si il est nulles '0' la contrainte peut être passives. En effet la recherche de la commande optimale nous oblige de traiter les (16) cas.

4.1.3.1 Les chemins non-réalisables

- **Les chemins** $13, 14, 15$ **et** 16 sont des chemins non-réalisables puisque la dette ne peut pas atteindre ses deux bornes (supérieur et inférieur) au même temps. Si ν_1 et ν_2 sont strictement positives alors l'équation (4.16) et (4.17) nous donne :

$$K(t) = X(t), \tag{4.22}$$

$$K(t) = (1+b)X(t). \tag{4.23}$$

  Les relations (4.22) et (4.23) sont vérifiées au même temps si et seulement si $K(t) = X(t) = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent nous éliminons ces chemins.

- **Pour les chemins** 1 **et** 5 : nous avons $\mu_1 > 0\,, \mu_2 > 0\,, \nu_1 > 0$. de l'équation (4.14) nous obtenons : $I = D = 0$, de plus l'équation, (4.15) nous donne $K = X$.

  Si ces hypothèses sont vérifiées nous obtenons :

$$(1-f)S = \Big\{(1-f)\left[wlq^{-1} + a\right] - a\Big\}\,K.$$

  Dans cette équation le coté à gauche est une fonction concave est celui de la droit est une fonction linéaire de K. Cette équation admet au plus une solution si $K \neq 0$. Cela signifie que le chemin 1 est réalisable seulement à un instant de temps. La même chose pour le chemin 5, Les chemins durant seulement un instant de temps peuvent être ignorés .

- **Pour les chemins** 11 **et** 12 : nous avons $\mu_2 = \nu_1 = \nu_2 = 0$, d'après les relations (4.11) et (4.13) nous obtenons :

$$\lambda_2(t) = e^{i-(1-f)r}, \tag{4.24}$$

$$\lambda_2(t) = 1, \tag{4.25}$$

en effet on obtient $i - (1-f)r = 0 \Rightarrow i = (1-f)r$.
Par conséquent si : $i = (1-f)r$ alors $\dfrac{\partial L}{\partial D} = 0 \Rightarrow$, ce qui veut dire que nous pouvons rien dire sur l'optimalité d'une commande donnée (point arbitraire).

4.1.3.2 Les chemins réalisables

D'après ce qui précède, les chemins restants sont réalisables ils sont représentés sur le tableau suivant :

chemin	2	3	4	6	7	8	9	10
μ_1	0	+	0	0	+	0	+	0
μ_2	+	0	0	+	0	0	+	+
ν_1	+	+	+	0	0	0	0	0
ν_2	0	0	0	+	+	+	0	0

TABLE 4.2 – Les chemins réalisables

Chemin 2 : dans ce cas nous avons $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0, \nu_1 > 0, \nu_2 = 0$.
En effet, d'après les équations :

$$(4.14), (4.15) \quad \text{nous obtenons :} \quad I > 0,\ D = 0; \tag{4.26}$$

$$(4.16) \quad \text{nous donne :}\ K = X \implies Y = 0\,,\ \dot{K} = \dot{X}; \tag{4.27}$$

$$(4.12), (4.13) \quad \text{on aura :}\ \lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = 1 + \mu_2 > 0; \tag{4.28}$$

$$(4.10) \quad \text{nous donne :}\ \lambda_2(1-f)\left\{\frac{\partial S}{\partial K} - wlq^{-1} - a - r\right\} = -\nu_1;$$

$$\implies \frac{\partial S}{\partial K} < wlq^{-1} + a + r \implies K > K_{10}, \tag{4.29}$$

$$\dot{X} = (1-f)S - wlq^{-1} - aK > 0 \Rightarrow \dot{k} > 0. \tag{4.30}$$

$$\text{On a :} \quad \lambda_2 = 1 + \mu_2, \tag{4.31}$$

$$\text{Alors :} \quad \dot{\mu}_2 = i(1+\mu_2) - (1-f)r(1+\mu_2) + \nu_1. \tag{4.32}$$

Sur le chemin 2, μ_2 est positif, mais sa valeur peut approcher zéro au début ou la fin de ce chemin. À partir de la restriction de non-négatives (4.14), nous pouvons écrire, pour ce cas, les conditions nécessaires suivantes :

$$\mu_2^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow \dot{\mu}_2 \leq 0\,,\ \text{si}\ \mu_2 = 0, \tag{4.33}$$

$$\mu_2^{\leftarrow} = 0 \Rightarrow \dot{\mu}_2 \geq 0\,,\ \text{si}\ \mu_2 = 0, \tag{4.34}$$

$$\text{alors nous obtenons que : } \mu_2^{\rightarrow} = 0 \Rightarrow i < (1-f)r. \tag{4.35}$$

Chemin 3 : Les multiplicateurs dans ce chemin sont donnés par :

$\mu_1 > 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \nu_1 > 0, \quad \nu_2 = 0.$

D'après les équations :

$$(4.14), (4.15) : \text{nous trouvons} \qquad I = 0\,,\ D > 0, \tag{4.36}$$

$$(4.16) : \ \text{nous donne} \qquad K = X \Longrightarrow Y = 0 = \dot{Y}, \dot{K} = \dot{X}, \tag{4.37}$$

$$(4.12), (4.13) : \ \text{nous obtenons}\ \ \lambda_1 = -\mu_1 < 0 \ \ , \lambda_2 = 1, \tag{4.38}$$

$$i < (1-f)r, \tag{4.39}$$

$$\dot{K} = -aK(t) \Longrightarrow K(t) = \mathrm{e}^{-it}K_0 > 0 \Longrightarrow \dot{K} < 0, \dot{X} < 0,$$

$$\dot{X} < 0 \Leftrightarrow S < wlq^{-1}K + aK + \frac{D}{1-f},$$

$$\frac{\partial S}{\partial K} < wlq^{-1} + a. \tag{4.40}$$

Chemin 4 : Dans ce chemin on a :$\mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \nu_1 > 0, \quad \nu_2 = 0.$

D'après les équations :

$$(4.14), (4.15) : \quad \text{on aurra} \ \ : I > 0\,,\ D > 0, \tag{4.41}$$

$$(4.16) : \ \text{nous trouvons :} \quad K = X \Longrightarrow Y = 0, \dot{Y} = 0, \tag{4.42}$$

$$(4.12), (4.13) : \ \text{nous obtenons :} \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \tag{4.43}$$

$$(4.10), (4.43) : \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial K} = wlq^{-1} + a + \frac{i}{(1-f)},$$

$$(4.11)\ (4.43) : \text{alors on a} \ \ : \quad \nu_1 = -i + (1-f)r, \tag{4.44}$$

$$\text{puisque :} \qquad \nu_1 > 0 \Longrightarrow i < (1-f)r, \tag{4.45}$$

$$\Longrightarrow K = K_4, \tag{4.46}$$

$$\Leftrightarrow \dot{K} = \dot{X} = 0.$$

Chemin 6 : Dans ce cas on a :$\mu_1 = 0, \mu_2 > 0, \nu_1 = 0, \nu_2 > 0.$

D'après les équations :

$$(4.14), (4.15) \text{ nous obtenons } : I > 0 \; D = 0, \tag{4.47}$$

$$(4.12), (4.13) \text{ on aura } : \lambda_1 = 0\,,\, \lambda_2 = 1 + \mu_2, \tag{4.48}$$

$$(4.10)(4.48) \text{ nous obtenons} : (1-f)\left\{\frac{\partial S}{\partial K} - wlq^{-1} - a - r\right\}(1+\mu_2) = \nu_2,$$

$$\text{puisque} \quad \mu_2 > 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial K} > wlq^{-1} + a + r, \tag{4.49}$$

$$\text{et de } (4.37), (4.48) \text{ on trouve } : \tag{4.50}$$

$$\dot{\mu}_2 = \{i - (1-f)r\}(1+\mu_2) - (1+b)\nu_2, \tag{4.51}$$

$$(4.34), (4.51) : \mu_2^{\leftarrow} = 0 \Rightarrow i > (1-f)r, \tag{4.52}$$

$$\text{de}(4.28), (4.52) : \dot{X} > 0 \Rightarrow \dot{K} > 0 \Rightarrow \dot{Y} > 0.$$

Chemin 7 :dans ce chemin :$\mu_1 > 0, \mu_2 = 0, \nu_1 = 0, \nu_2 > 0$,
en effet d'après :

$$(4.14), (4.15) \text{ nous avons } I = 0\,,\, D > 0; \tag{4.53}$$

$$(4.16) \text{ on aura } : K = (1+b)X \Rightarrow Y = bX; \tag{4.54}$$

$$(4.12), (4.13) \text{ nous trouvons} : \lambda_1 + \mu_2 = 0, \quad \lambda_2 = 1 + \mu_1; \tag{4.55}$$

$$(4.10) \text{ on a } i - (1-f)r = (1+b)\nu_2 \Rightarrow \nu_2 = \frac{i-(1-f)r}{1+b} > 0\,,\, b > 0,$$

$$\Longrightarrow : i > (1-f)r; \tag{4.56}$$

$$(4.53) \text{ nous obtenons } : \dot{K} = -aK(t) \Longrightarrow K(t) = \mathrm{e}^{-it}K_0 > 0,$$

$$\Longrightarrow \dot{K} < 0, \dot{X} < 0, \dot{Y} < 0,$$

$$\text{alors} : \dot{X} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial K} < wlq^{-1} + a + \frac{rb}{b+1}. \tag{4.57}$$

Chemin 8 : dans ce chemin :$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \nu_1 = 0, \nu_2 > 0$

en effet, d'après les équations :

$$(4.14), (4.15) \text{ nous obtenons :} I = 0\,,\ D > 0; \tag{4.58}$$

$$(4.16) \text{ on aura : } \quad K = (1+b)X \Rightarrow Y = bX; \tag{4.59}$$

$$(4.12), (4.13) \text{ nous trouvons : } \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 + \mu_2; \tag{4.60}$$

$$(4.11) \text{ nous donne } \quad i - (1-f)r = (1+b)\nu_2,$$
$$\Rightarrow \nu_2 = \frac{i-(1-f)r}{1+b} > 0, b > 0,$$
$$\Longrightarrow i > (1-f)r; \tag{4.61}$$

$$(4.10) \text{ nous trouvons} (1-f)\left\{\frac{\partial S}{\partial K} - wlq^{-1} - a - r\right\} = \nu_2; \tag{4.62}$$

$$(4.61), (4.62) \text{ nous avons : } \frac{\partial S}{\partial K} = wlq^{-1} + a + r + \frac{br + i/(1-f)}{1+b}, \tag{4.63}$$

$$(4.63) \text{ implique que} K = K_8 \Leftrightarrow \dot{K} = 0,\ \dot{X} = 0\,,\quad \dot{Y} = 0. \tag{4.64}$$

Chemin 9 : dans ce cas : $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \nu_1 = \nu_2 = 0$

et de les équations :

$$(4.14), (4.15) : \text{ nous trouvons} I = D = 0; \tag{4.65}$$

$$(4.16) \text{ nous donne : } X < K < (1+b)X \Rightarrow 0 < Y < bX; \tag{4.66}$$

$$(4.13) \text{ nous trouvons : } \lambda_2 = 1 + \mu_2; \tag{4.67}$$

$$\text{alors } \dot{\mu}_2 = \{i - (1-f)r\}(1+\mu_2) \Leftrightarrow$$

$$\mu_2^{\leftarrow} = 0 \Longrightarrow i > (1-f)r; \tag{4.68}$$

$$\mu_2^{\rightarrow} = 0 \Longrightarrow i < (1-f)r; \tag{4.69}$$

$$(4.65) : \dot{K} = -aK(t) \Longrightarrow K(t) = \mathrm{e}^{-at}K_0 > 0,$$
$$\Longrightarrow \dot{K} < 0, \dot{X} \gtreqless 0, \dot{Y} \gtreqless 0,$$
$$\dot{X} \Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial K} \gtreqless wlq^{-1} + a + r.$$

Chemin 10 :dans ce chemin on a :$\mu_1 = 0, \mu_2 > 0, \nu_1 = \nu_2 = 0$,

en effet, d'après les équations :

$$(4.14), (4.15) : \text{ nous obtenons : } I > 0 \quad , \quad D = 0; \tag{4.70}$$

$$(4.16) \text{ nous donne : } X < K \leq (1+b)X \Rightarrow 0 < Y \leq bX; \tag{4.71}$$

$$(4.13) \text{ nous trouvons : } \lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = 1 + \mu_2. \tag{4.72}$$

de (4.11),(4.72) :

$$\dot{\mu}_2 = \{i - (1-f)r\}(1+\mu_2). \tag{4.73}$$

et d'après (4.34)(4.73) :

$$\mu_2^{\leftarrow} = 0 \Rightarrow i > (1-f)r. \tag{4.74}$$

de (4.11) :

$$\begin{aligned} &\dot{\mu}_2 = \{i-(1-f)r\}(1+\mu_2) - (1+b)\nu_2, \\ &(4.10)\ \frac{\partial S}{\partial K} = wlq^{-1} + a + r\,,\ K = K_{10}, \\ &\quad \Longrightarrow \frac{\partial S^2}{\partial^2 K}\dot{K} = 0, \\ &(4.75)\ \text{ nous obtenons } \dot{X} = 0 \Longrightarrow \dot{Y} = \dot{K} - \dot{X} \Longrightarrow \dot{Y} < 0. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Pour plus de commodité nous présentons le tableau suivant :

chemin	I	D	$\dot{Y}$	$\dot{X}$	$\dot{K}$	Y	$\frac{\partial S}{\partial K}$
2	$+$	0	0	$+$	$+$	0	
3	0	$+$	0	$-$	$-$	0	
4	aK	$+$	0	0	0	0	$= wlq^{-1} + a + \frac{i}{1-f}$
6	$+$	0	$+$	$+$	$+$	bX	
7	0	$+$	$-$	$-$	$-$	bX	
8	$+$	$+$	$+$	0	$+$	bX	$= wlq^{-1} + a + \dfrac{br + i/(1-f)}{(1+b)}$
9	0	0	$\pm$	$\pm$	$-$	$+$	
10	aK	0	$-$	$+$	0	$+$	$= wlq^{-1} + a + r$

TABLE 4.3 – Caractéristiques des chemins possibles.

Déterminer les chemins finaux :

Les conditions de transversalité nous donne les équations de discontinuité de λ_1, λ_2 en temps

$$\lambda_1(z^+) = 0,\quad \lambda_1(z^-) = \gamma_1 - \gamma_2,$$
$$\lambda_2(z^+) = 1,\quad \lambda_2(z^-) = 1 - \gamma_1 + (1+b)\gamma_2.$$

final z : Par conséquent nous obtenons :

$$\mu_1(z^-) = -\gamma_1 + \gamma_2,$$
$$\mu_2(z^-) = -\gamma_1 + (1+b)\gamma_2.$$

En effet :

- **Si** $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ alors $\mu_1(z^-) = \mu_2(z^-) = 0$. Ces conditions sont vérifies pour l les chemins 4 et 8 , alors ils sont les seules chemins finaux.
- **Si** $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 > 0$ alors $\mu_1(z^-) > 0, \mu_2(z^-) > 0$. Ces conditions sont vérifiées pour le chemin 9, donc il est un chemin final.

Remarque 4.1.1. D'après la relation de cash-flows nous obtenons :

$$c_f = I(t) + D(t) - \dot{Y} = 0 + 0 - \dot{Y} \Leftrightarrow c_f < 0.$$

Dans ce cas l'entreprise produit à perte, en effet on ignore le cas où le chemin 9 est final [22].

- Pour $i < (1-f)r$, alors le chemin final est 4.
- pour $i > (1-f)r$, donc le chemin final est 8.

4.1.3.3 La construction des chaînes qui se terminent par le chemin final 4 :

Puisque les variables d'état K et X sont continues, alors la variable Y et aussi continues. Pour le chemin 4 nous avons $Y = 0$, par conséquent

$$y = 0 \quad \text{à la fin du chemin qui précède le chemin 4} \tag{4.76}$$

En raison de l'équation (4.46) nous obtenons :

$$K = K_4 \quad \text{à la fin du chemin qui précède le chemin 4 .} \tag{4.77}$$

De l'équation (4.44) on a :

$$i < (l-f)r \text{ pour tout les chemins qui précèdent le chemin 4.} \tag{4.78}$$

Et enfin, puisque $\mu_2 = 0$ sur chemin 4, alors

$$\mu_2^{\rightarrow} = 0 \qquad \text{sur le chemin qui précède le chemin 4.} \tag{4.79}$$

Les chemins qui précèdent le chemin 4 doivent remplir les quatre conditions (4.76) – (4.79). En effet les prédécesseurs réalisables sont présentés sur le tableau suivant :

chemins	Prédécesseur réalisable ?	raison
2	oui	
3	oui	
6	non	(4.78) est violé en raison de(4.52)
7	non	(4.78) est violé en raison de(4.56)
8	non	4.78 est violé en raison de(4.61)
9	non	4.76 est violé en raison de(4.66)
10	non	(4.76) est violé en raison de(4.74)

Table 4.4 – sélection des chemins qui précédent le chemin 4

Alors, les chemins qui précèdent le chemin 4 sont le 2 et le 3. De la même manière nous déterminons les chemins qui précèdent les chaines $2 \rightarrow 4$ et $3 \rightarrow 4$. Dont les conditions(4.76)$_($4.79) sont vérifiées, en effet nous avons les résultats suivants :

avec :$t_{l,j}$: est le point de couplage entre le chemin l et le chemin j

chemins	Prédécesseur réalisable ?	raison
3	non	K est discontinue au $t_{3,2}$
4	non	Kest discontinue au $t_{4,2}$
6	non	Yest discontinuités au $t_{6,2}$
7	non	(4.74)est violé en raison de (4.56)
8	non	(4.74)est violé en raison de (4.61)
9	non	Yest discontinue au $t_{9,2}$
10	oui	

TABLE 4.5 – Sélection des chemins précédent la chaine $2 \rightarrow 4$

chemins	Prédécesseur réalisable ?	raison
2	non	Yest discontinue au $t_{2,10}$
3	non	Yest discontinue au $t_{4,10}$
4	non	Yest discontinue au $t_{3,10}$
6	oui	
7	non	(4.78)est violé en raison de (4.56)
8	non	(4.78)est violé en raison de (4.61)
9	oui	

TABLE 4.6 – Sélection des chemins précédent la chaine $10 \rightarrow 2 \rightarrow 4$

chemins	Prédécesseur réalisable ?	raison
2	non	Y est discontinue au $t_{2,6}$
3	non	Y est discontinue au $t_{3,6}$
4	non	Y est discontinue au $t_{4,6}$
7	non	(4.78)est violé en raison de (4.56)
8	non	(4.78)est violé en raison de (4.61)
9	non	K est discontinue au $t_{9,6}$
10	non	K est discontinue au $t_{10,6}$

TABLE 4.7 – Sélection des chemins précédent la chaine $6 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 4$

Alors, les trajectoires optimales dans ce cas sont :

- $3 \rightarrow 4$ avec la condition initiale $K_0 = X_0$;
- $9 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ avec condition initial : $X_0 < K_0 < (1+b)X_0$;
- $6 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ avec condition initial : $K_0 = (1+b)X_0$;

4.1.3.4 La construction des chaînes qui se terminent par le chemin final 8 :

Puisque les variables d'état K et X (et par conséquent Y) doivent être continues, nous avons la condition suivante pour un chemin qui précède le chemin 8) :

chemins	Prédécesseur réalisable ?	raison
2	non	Y est discontinue au*au* $t_{2,9}$
3	non	Y est discontinue au $t_{3,9}$
4	non	Y est discontinue au $t_{4,9}$
6	non	Y est discontinue au $t_{6,9}$
7	non	(4.78)est violé en raison de (4.56)
8	non	(4.78)est violé en raison de (4.61)
10	non	K est discontinue au $t_{10,9}$

TABLE 4.8 – Sélection des chemins précédent la chaine $9 \to 10 \to 2 \to 4$

chemins	Prédécesseur réalisable ?	raison
2	non	Kest discontinue au $t_{2,3}$
4	non	Kest discontinue au $t_{4,3}$
6	non	Kest discontinue au $t_{6,3}$
7	non	(4.78)est violé en raison de (4.56)
8	non	(4.78)est violé en raison de (4.56)
10	non	Kest discontinue au$t_{2,9}$

TABLE 4.9 – Sélection des chemins précédant à la chaine $3 \to 4$

$$Y = bX \qquad \text{à la fin du chemin qui précède le chemin 8.} \tag{4.80}$$

De l'équation (4.64) on obtient :

$$K = K_8 \qquad \text{à la fin du chemin qui précède le chemin 8.} \tag{4.81}$$

En raison de (4.61), nous avons, également, la condition suivante :

$$i > (l - f)r \qquad \text{sur le chemin précédent.} \tag{4.82}$$

Et enfin, puisque $\mu_2 = 0$ sur le chemin : 8

$$\mu_2^{\leftarrow} = 0 \quad \text{sur le chemin qui précède le chemin 8.} \tag{4.83}$$

Un chemin qui précède le chemin 8 doit remplir les quatre conditions (4.80) – (4.83) .

Le tableau suivant nous donne les prédécesseurs réalisable du chemin 8 :

De la même manière précédente nous avons les trajectoires optimales suivant :

chemins	Prédécesseur réalisable ?	raison
2	non	y est discontinue au $t_{2,6}$
3	non	(4.82) est violé en raison de (4.39)
4	non	(4.82) est violé en raison de (4.20)
6	oui	
7	oui	
9	non	(4.82) est violé en raison de (4.69)
10	non	Kest discontinue au $t_{10,7}$

TABLE 4.10 – Sélection des chemins précédant à chemin 8

- $7 \rightarrow 8$, si la condition initial : $X_0 > m$;
- $6 \rightarrow 8$, si la condition initial : $X_0 < m$;

- 8, si la condition initial : $X_0 = m$.
  avec : $m = \frac{1}{1+b} K_8^*(t)$;

Exemple 4.1.1. Concéderons la fonction de prix suivante :

$$P(Q(t)) = \bar{P}(1 - \frac{Q(t)}{\bar{Q}}),$$

avec : $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ égalent respectivement $95,263$ et $0,0625$.

Le taux d'amortissement sur le capital de production est $(a = 0,1)$ par unité de temps. Dans cet exemple, l'entreprise est autorisée à posséder un montant de dette maximum deux fois supérieur au montant du capital propre, c'est-à-dire $b = 2$; au départ, $Y_0 = bX_0 = 0,0024$, alors $K_0 = 0,0036$.

L'entreprise doit payer quarante pour cent de sa marge brute comme fiscalité $(f = 0,4)$. Le taux d'intérêt sur la dette s'élève à dix pour cent par unité de temps $(r = 0,1)$.

Pour le taux d'actualisation temporelle de l'actionnaire est $i = 0,04$, dans ce cas les capitaux propres sont moins chers que la dette.

La productive du capital est $q = 62,5$ par unité de temps. Le coût de la main-d'œuvre par unité de capital de production est $(wl = 80)$. avec : $z = 60$.

Dans cet exemple nous avons : $i = 0.04 < (1 - f)r = 0,06$ et comme $K_0 = (1 + b)X_0$, alors la trajectoire optimale est $6 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 4$.

On note τ_i, $i = 1, 2, 3$, les points de couplage du passage d'un chemin à un autre.

•Calculons les points de couplage entre chemin, τ_i :

– **Calculons le** τ_1 :

Sur chemin 6 : nous avons $K_0 = 0,0036$, $K(t) = (1+b)X(t)$ et $D(t) = 0$, $\forall t \in [0, \tau_1]$. Alors, nous obtenons la relation suivante :

$$\dot{K} = (1+b)\dot{X}.$$

En effet

$$\dot{K} = (1+b)\left((1-f)\left\{S(t,K(t)) - aK(t) - wlq^{-1}K(t) - r(K(t) - X(t))\right\}\right).$$

D'après la définition de la fonction S nous avons :

$$S(t, Q(t)) = Q(t)P(Q(t)) = Q(t)\bar{P}(1 - \frac{Q(t)}{\bar{Q}}),$$

avec : $Q(t) = q^{-1}K(t)$, par conséquent on trouve :
$S(t, K(t)) = 1,524K(t) - 0.390K^2(t) \forall t \in [0, z]$.
De cette dernière relation, on obtient l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $[0, \tau_1]$:

$$\dot{K}_6(t) = -0,702K^2(t) + 0.139K(t), \forall t \in [0; \tau_1].$$

qu'est une équation de Bernoulli d'ordre 2 avec la condition initiale $K_0 = 0,0036$, la solution de cette équation est :

$$K_6(t) = \frac{1}{272,727\mathrm{e}^{-0,139t} + 5,05}. \tag{4.84}$$

A l'instant τ_1 la continuité de K exige que : $K_6(\tau_1) = K_{10}(\tau_1)$.
Comme

$$S(t, K(t)) = 1,524K(t) - 0,139K^2(t), \tag{4.85}$$

alors :

$$\frac{\partial S}{\partial K_{10}} = 1,524 - 0,78K_{10}(t), \tag{4.86}$$

et d'autre part :

$$\frac{\partial S}{\partial K_{10}} = 1,48. \tag{4.87}$$

Ces deux dernières équations nous donne que $K_{10}(t) \simeq 0.05641$, $\forall t \in [\tau_1, \tau_2]$
Par conséquent :
$K_6(\tau_1) = K_{10}(\tau_1) \simeq 0.05641 \Longrightarrow \boxed{\tau_1 \simeq 22.07}$

– **Calculons le τ_2 :** Sur le chemin 10, nous avons $D(t) = 0$ et $X_{10}(t) < K_{10}(t) < (1-b)X_{10}(t)$.

De la relation (4.85) et de $K_{10}(t) \simeq 0.05641$, $\forall t \in [\tau_1, \tau_2]$ et de l'équation :

$$\dot{X}_{10} = (1-f)\left\{S(t, K_{10}(t)) - aK_{10}(t) - wlq^{-1}K_{10}(t) - r(K_{10}(t) - X_{10}(t))\right\}, \qquad (4.88)$$

nous obtenons l'équation différentielle suivante sur $[\tau_1, \tau_2]$:

$$\dot{X}_{10} = (1-f)rX_{10}(t), \qquad (4.89)$$

par conséquent nous obtenons :

$$X_{10}(t) = 0,005\mathrm{e}^{0,06t}, \forall t \in [\tau_1, \tau_2]. \qquad (4.90)$$

Du chemin 2 on a $X_2(\tau_2) = K_2(\tau_2)$, en utilisons la continuité des trajectoires X, K nous obtenons les relations suivantes : $X_2(\tau_2) = X_{10}(\tau_2)$, $K_2(\tau_2) = K_{10}(\tau_2)$.
en effet :

$$X_{10}(\tau_2) = K_{10}(\tau_2) \simeq 0.05641.$$

Et en utilisant la relation (4.90) on obtient alors , $\boxed{\tau_2 = 40,46}$.

– **Calculons le τ_3 :**

Sur le chemin 2 nous avons : $D(t) = 0$ et $X_2(t) = K_2(t) \Longrightarrow \dot{X}_2 = \dot{K}_2(t)$.

Alors,

$$K_2(t) = \frac{1}{549.045\mathrm{e}^{-0.0864t} + 0.965} \qquad (4.91)$$

À l'instant τ_3 la continuité de K exige que : $K_2(\tau_3) = K_4(\tau_3)$.
D'après ce qui précède nous avons : $\dfrac{\partial S}{\partial K_4} = 1,524 - 0,78K_4(t)$.
et d'autre part :$\dfrac{\partial S}{\partial K_4} = 1,446$.
En effet : $K_4(t) = 0,1$.

Par conséquent on obtiens : $\boxed{\tau_3 \simeq 47,53}$

De l'équation $\dot{K}(t) = I(t) - aK(t)$ on obtient : $I(t) = \dot{K}(t) + aK(t)$
alors nous trouvons les valeures de $I(t)$ sur [0,z] :

$$I(t) = \begin{cases} \dfrac{10.636\mathrm{e}^{-0.139t} + 0.505}{227.727\mathrm{e}^{-0.139t} + 5.05} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 22.07 \\ 0.00564 & \text{si} \quad 22.07 \leq t \leq 40.38 \\ \dfrac{102.34\mathrm{e}^{-0.0864t} + 0.0965}{549.045\mathrm{e}^{-0.0864t} + 0.965} & \text{si} \quad 40.38 \leq t \leq 47.53 \\ 0.001 & \text{si} \quad 47.53 \leq t \leq 60 \end{cases}$$

Dans les chemins 6 ,10 et 2 les dividendes sont nulles . Mais dans le chemin 4 sont strictement

positive et on peut les calculer d'après l'équation differentielle de $X(t)$ qui nous donnent : $D(t) = (1-f)\{S(t, K_4(t)) - aK_4(t) - wlq^{-1}K_4(t)\}$
car $X_4(t) = 0.1 \Longrightarrow \dot{X}(t) = 0$,
en effet $D(t) \simeq 0.0078$
alors :
$D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 47.53 \\ 0.0078 & \text{si} \quad 47.53 \leq t \leq 60 \end{cases}$
Nous avons $X_4(t) = 0.1$,alors : $X(z) = 0.1$, par conséquant nous obtenons :

$$V(D^*, I^*) \simeq 0.0205$$

4.2 Le modèle dynamique d'entreprise avec retard sur l'investissement

Dans cette section, nous présentons une extension du modèle étudié précédemment, dont nous allons supposé un retard s sur l'investissement. Cela signifie que la capital de production à tout instant t, égal aux investissements entrepris à l'instant $t-s$, moins la dépréciation du capital à l'instant t.

4.2.1 Formulation du modèle avec retard

Dans ce modèle, on suppose un retard $s > 0$ sur l'investissement I. Ainsi le modèle peut s'écrire comme suit :

$$\max_{D,I} V(D, I) = \int_0^z \mathrm{e}^{-it} D(t)dt + \mathrm{e}^{-iz} X(z). \tag{4.92}$$

$$\dot{K}(t) = I(t-s) - aK(t) \quad , K(0) = K_0, \tag{4.93}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) = (1-f)\Big\{S(t, K(t)) - aK(t) - wlq^{-1}K(t) - r(K(t) - X(t))\Big\} \\ -D(t) \quad , X(0) = X_0, \end{aligned} \tag{4.94}$$

$$K(t) - X(t) \geq 0, \tag{4.95}$$

$$(1+b)X(t) - K(t) \geq 0, \tag{4.96}$$

$$D(t) \geq 0, \tag{4.97}$$

$$I(t-s) \geq 0, \tag{4.98}$$

4.2.2 Les conditions d'optimalité

La qualification de contrainte faible pour ce problème est satisfaite puisque la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & I(t-s) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & D(t) \end{pmatrix}$$

est de rang 2 complet.

D'après le chapitre précédent, nous pouvons construire la fonction Hamiltonien et Lagrangienne comme suit :

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}(X, K, \lambda_1, \lambda_2, D, I_s, t) = D + \lambda_1(t)[I_s - aK] \\ &+\lambda_2 \left[(1-f)\left\{S(q^{-1}K) - aK - wlq^{-1}K - r(K-X)\right\} - D\right], \end{aligned} \tag{4.99}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(X, K, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, D, I, t) = \mathcal{H}(X, K, \lambda_1, \lambda_2, D, I_s, t), \\ &\quad +\mu_1(t)I_s + \mu_2 D + \nu_1(K-X) + \nu_2(((1+b)X - K)). \end{aligned} \tag{4.100}$$

Avec : $I_s = I(t-s)$.

D'après le théorème (3.6), nous obtenons les conditions suivantes : **Le système d'adjoint** :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) - i\lambda_1(t) &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K(t)}, \\ \dot{\lambda}_2(t) - i\lambda_2(t) &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X(t)}. \end{aligned}$$

Les conditions stationnaires :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I(t)}(t) + \chi_{[0,z-s]}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_s}(t+s) = 0, \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D(t)} = 0. \end{aligned}$$

Les conditions complémentaires et non-négatives :

$$\begin{aligned} &\mu_1(t)I(t-s) = 0\,,\ \mu_1(t) \geq 0 \ \text{ avec}, t \in [0, z-s], \\ &\mu_2(t)D(t) = 0\,, \quad \mu_2(t) \geq 0, \\ &\nu_1(t)\left(K(t) - X(t)\right) = 0\,, \quad \nu_1(t) \geq 0, \\ &\nu_2(t)\left((1+b)X(t) - K(t)\right) = 0, \quad \nu_2(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Les conditions de transversalités :

$$\begin{aligned} &\lambda_1(z) = \gamma_1 - \gamma_2, \\ &\lambda_2(z) = 1 - \gamma_1 + (1+b)\gamma_2, \\ &\gamma_1\left(K(z) - X(z)\right) = 0\,,\ \gamma_1 \geq 0, \\ &\gamma_2\left((1+b)X(z) - K(z)\right) = 0\,,\ \gamma_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Les conditions de discontinuités(saut) :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(\tau^-) = \lambda_1(\tau^+) + \eta_1(\tau) - \eta_2(\tau),\\
&\lambda_2(\tau^-) = \lambda_2(\tau^+) - \eta_1(\tau) + (1+b)\eta_2(\tau),\\
&\eta_1(\tau)\,(K(z) - X(z)) = 0\,,\ \eta_1(\tau) \geq 0,\\
&\eta_2(\tau)\,((1+b)X(z) - K(z)) = 0\,,\ \eta_1(\tau) \geq 0.
\end{aligned}$$

Alors on obtient :

$$\begin{cases}
\dot{\lambda}_1(t) - i\lambda_1(t) = a\lambda_1(t) - (1-f)\left\{\dfrac{\partial S}{\partial K} - wlq^{-1} - a - r\lambda_2 + \nu_1(t) - \nu_2(t)\right\},\\
\dot{\lambda}_2(t) - i\lambda_2(t) = -(1-f)r\lambda_2(t) - \nu_1(t) + (1+b)\nu_2(t),\\
\lambda_1(z) = \gamma_1 - \gamma_2,\\
\lambda_2(z) = 1 - \gamma_1 + (1+b)\gamma_2,\\
\chi_{[0,z-s]}\,(\lambda_1(t+s) + \mu_1(t+s)) = 0, \quad t \in [0, z-s],\\
1 - \lambda_2(t) + \mu_2(t) = 0,\\
\mu_1(t)I(t-s) = 0\,,\ \mu_1(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, z-s],\\
\mu_2(t)D(t) = 0\,,\ \mu_2(t) \geq 0,\\
\nu_1(t)\,(K(t) - X(t)) = 0\,,\ \nu_1(t) \geq 0,\\
\nu_2(t)\,((1+b)X(t) - K(t)) = 0, \nu_2(t) \geq 0.
\end{cases}$$

L'Hamiltonien dans ce modèle, est linéaire et concave par rapport à X, I, D et K, de plus le terme résiduel dans la fonction objectif et toutes les contraintes d'inégalité sont linéaire en K, X, I_s et D, alors les conditions **nécessaires** d'optimalité sont aussi **suffisantes**.

4.2.3 Résolution du modèle avec retard sur l'investissement

Les conditions nécessaires d'optimalité nous donnent (4) multiplicateur de Lagrange μ_1 , μ_2 , ν_1 et ν_2, chaque multiplicateur admis deux valeur possible : (0) ou (+), par conséquent, nous obtenons 2^4 chemins possibles, qui sont donnés dans le tableau suivant :

chemin	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
μ_1	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0	+	0
μ_2	+	+	0	0	+	+	0	0	+	+	0	0	+	+	0	0
ν_1	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+
ν_2	0	0	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0	+	+	+	+

TABLE 4.11 – Les chemins possibles

Remarque 4.2.1. Pour ce modèle, on observe que nous avons les mêmes chemins possibles avec le modèle sans retard, de plus nous avons les mêmes conditions avec le quelle nous avons obtenu les chemin non réalisable. En effet, les chemins réalisable (respectivement : non réalisable) sont 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 et 10 ($respectivement$: 1, 5, 11, 12, 13, 14, 15 et 16).

Chemin final :

Les conditions de transversalité nous donne les équations de discontinuité de λ_1, λ_2 en temps final z :

$$\begin{aligned}
\lambda_1(z^+) &= 0 \quad , \quad \lambda_1(z^-) = \gamma_1 - \gamma_2, \\
\lambda_2(z^+) &= 1 \quad , \quad \lambda_2(z^-) = 1 - \gamma_1 + (1+b)\gamma_2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mu_1(z^-) &= -\gamma_1 + \gamma_2, \\
\mu_2(z^-) &= -\gamma_1 + (1+b)\gamma_2.
\end{aligned}$$

En effet :

- **Si** $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ $alors$ $\mu_1(z^-) = \mu_2(z^-) = 0$. Ces conditions sont vérifies juste pour les chemins 4 et 8, alors ils sont les seules chemins finaux.
- **Si** $\gamma_1 = 0, \gamma_2 > 0$ $alors$ $\mu_1(z^-) > 0, \mu_2(z^-) > 0$. Ces conditions sont vérifies pour le chemin 9, donc il est le seul chemin final.

Remarque 4.2.2. D'après la relation de cash-flows nous obtenons :

$$c_f = I(t) + D(t) - \dot{Y} = 0 + 0 - \dot{Y} \Leftrightarrow c_f < 0,$$

dans ce cas l'entreprise produit à perte, en effet on ignore le cas où le chemin 9 est final [22].

D'après les relations 4.45 et 4.61, nous aurons le résultat suivant :

- Pour $i < (1-f)r$, le chemin final est, le chemin 4 ;
- Pour $i > (1-f)r$, donc le chemin final est le chemin 8.

4.2.3.1 La construction des chaînes qui se terminent par le chemin final 4 :

Puisque les variables d'état K et X sont continues alors la variable Y et aussi continues. Pour le chemin 4 nous avons $Y = 0$, par conséquent

$$y = 0 \;\text{ à la fin du chemin qui précède le chemin 4.} \tag{4.101}$$

En raison de l'équation (4.46) nous trouvons :

$$K = K_4 \ \text{ à la fin du chemin qui précède le chemin 4.} \tag{4.102}$$

De la relation (4.45) on a :

$$i < (l - f)r \quad \text{pour tout les chemins qui précèdent le chemin 4.} \tag{4.103}$$

Et enfin, puisque $\mu_2 = 0$ sur chemin 4, alors :

$$\mu_2^{\rightarrow} = 0 \qquad \text{sur le chemin qui précède le chemin 4.} \tag{4.104}$$

Les chemins qui précèdent le chemin 4 doivent remplir les quatre conditions (4.101) – (4.104). En effet, les prédécesseurs réalisables sont présentés sur le tableau suivant :

chemins	Prédécesseur réalisable ?	raison
2	oui	
3	oui	
6	non	(4.104) est violé en raison de (4.52)
7	non	(4.103) est violé en raison de (4.56)
8	non	4.103 est violé en raison de (4.61)
9	non	4.101 est violé en raison de (4.66)
10	non	(4.101) est violé en raison de (4.74)

TABLE 4.12 – Sélection des chemins qui précédent le chemin 4

Alors, les chemins qui précèdent le chemin 4 sont le chemin 2 et le chemin 3.
De la même manière on va construire tout les prédécesseurs, afin de construire les chaines réalisables. Par conséquent, les trajectoires optimales associées sont :

– Si $i < (1 - f)r$
- $3 \rightarrow 4$, si on a la condition initiale $K_0 = X_0$;
- $9 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, si on a comme condition initiale : $X_0 < K_0 < (1 + b)X_0$;
- $6 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, si on a la condition initiale : $K_0 = (1 + b)X_0$.

– Si $i > (1 - f)r$
- 8, si on a la condition initiale $X(0) = m$;
- $7 \rightarrow 8$, si on a la condition initial : $X_0 > m$;
- $6 \rightarrow 8$, si on a la condition initial : $X_0 < m$.

  Avec : $m = \dfrac{1}{1 + b} K_8(t)$.

Exemple 4.2.1. Afin d'interpréter et de visualiser l'évolution du modèle, nous avons utilisé les valeurs numériques suivantes : $s = 2,\ \ z = 60,\ \ \bar{P} = 95.263,\ \ \bar{Q} = 0.0625,\ \ a = 0.1,\ \ b = 2,\ \ Y_0 = bX_0 = 0.0024,\ \ K_0 = 0.0036,\ \ f = 0,4,\ \ r = 0.1,\ \ i = 0.04,\ \ q = 62.5,\ \ wl = 80,$ *posons que* $t \in [-s, 0],\ \ I(t) = 0.002$ Dans cette exemple nous avons : $i = 0.04 < (1 - f)r = 0,06$ et comme $K_0 = (1 + b)X_0$, alors la chaine optimale est $6 \to 10 \to 2 \to 4$.

ona $t \in [0, s]$ $I(t - s) = 0.002 \Rightarrow \dot{K}(t) = -0.1K(t)$ alors :
$K(t) = -0.0164\mathrm{e}^{-0.1t} + 0.02$. Dans ce qui suit, nous allons calculer les points de couplage entre chemin :

- **Calculons le** τ_1 :

Sur chemin 6 : nous avons $K_0 = 0,0036$, $K(t) = (1 + b)X(t)$ et $D(t) = 0$, $\forall t \in [0, \tau_1]$.
Par conséquent, nous obtenons la relation suivante :

$$\dot{K}(t) = (1 + b)\dot{X}(t), \quad \forall t \in [s, \tau_1].$$

En effet,pour $forall t \in [s, \tau_1]$:

$$\dot{K} = (1 + b)\left((1 - f)\left\{S(t, K(t)) - aK(t) - wlq^{-1}K(t) - r(K(t) - X(t))\right\}\right).$$

D'après la définition de la fonction S nous avons : $S(t, K(t)) = 1,524K(t) - 0.390K^2(t) \forall t \in [0, z]$.
De cette dernière relation, nous obtenons l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $[s, \tau_1]$:

$$\dot{K_6}(t) = -0,702K^2(t) + 0.139K(t),$$

qu'est une équation de Bernoulli d'ordre 2 avec la condition initiale $K(s) \simeq 0,00294$, la solution de cette équation est :

$$K_6(t) = \frac{1}{194.625\mathrm{e}^{-0,139t} + 5,05}. \tag{4.105}$$

À l'instant τ_1 la continuité de K exige que : $K_6(\tau_1) = K_{10}(\tau_1)$.
Comme

$$S(t, K(t)) = 1,524K(t) - 0,139K^2(t), \tag{4.106}$$

alors :

$$\frac{\partial S}{\partial K_{10}} = 1,524 - 0,78K_{10}(t), \tag{4.107}$$

et d'autre part :

$$\frac{\partial S}{\partial K_{10}} = 1,48. \tag{4.108}$$

Ces deux dernières équations nous donne que $K_{10}(t) \simeq 0.05641$, $\forall t \in [\tau_1, \tau_2]$.

Par conséquent :

$K_6(\tau_1) = K_{10}(\tau_1) \simeq 0.05641 \Longrightarrow \boxed{\tau_1 \simeq 19.653}$

– **Calculons le τ_2 :**

Sur le chemin 10, nous avons $D(t) = 0$ et $X_{10}(t) < K_{10}(t) < (1-b)X_{10}(t)$. De la relation (4.85) et de $K_{10}(t) = 0.05641$, $\forall t \in [\tau_1, \tau_2]$ et de l'équation :

$$\dot{X}_{10} = (1-f)\left\{S(t, K_{10}(t)) - aK_{10}(t) - wlq^{-1}K_{10}(t) - r(K_{10}(t) - X_{10}(t))\right\}, \qquad (4.109)$$

nous obtenons l'équation différentielle suivante sur $[\tau_1, \tau_2]$:

$$\dot{X}_{10} = (1-f)rX_{10}(t). \qquad (4.110)$$

Par conséquent nous avons la solution :

$$X_{10}(t) \simeq 0,005\mathrm{e}^{0,06t} \quad , \forall t \in [\tau_1, \tau_2]. \qquad (4.111)$$

Du chemin 2 on a $X_2(\tau_2) = K_2(\tau_2)$, de plus en utilisons la continuité des trajectoires X, K nous obtenons les relations suivantes : $X_2(\tau_2) = X_{10}(\tau_2)$, $K_2(\tau_2) = K_{10}(\tau_2)$.

En effet, on aura :

$$X_{10}(\tau_2) = K_{10}(\tau_2) \simeq 0.05641.$$

En utilisant la relation (4.111) nous obtenons alors $\boxed{\tau_2 \simeq 37.97}$.

– **Calculons le τ_3 :**

Sur le chemin 2 nous avons : $D(t) = 0$ et $X_2(t) = K_2(t) \Longrightarrow \dot{X}_2 = \dot{K}_2(t)$.

Alors :

$$K_2(t) = \frac{1}{445.743\mathrm{e}^{-0.0864t} + 0.965}. \qquad (4.112)$$

A l'instant τ_3 la continuité de K exige que : $K_2(\tau_3) = K_4(\tau_3)$.

D'après ce qui précède nous avons : $\dfrac{\partial S}{\partial K_4} = 1,524 - 0,78K_4(t)$,

et d'autre part :$\dfrac{\partial S}{\partial K_4} = 1,446$.

En effet : $K_4(t) = 0,1$.

Par conséquent, on obtiens : $\boxed{\tau_3 \simeq 45.123}$.

De l'équation $\dot{K}(t) = I(t-s) - aK(t)$ on obtient : $I(t-s) = \dot{K}(t) + aK(t)$.

Alors, on peut trouver la commande $I(t)$sur chaque chemin :

$$I(t-s)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 2, \\ \dfrac{10.636\mathrm{e}^{-0.139t}+0.505}{227.727\mathrm{e}^{-0.139t}+5.05} & \text{si} \quad 2 \leq t \leq 25.55, \\ 0.00564 & \text{si} \quad 25.55 \leq t \leq 43.86, \\ \dfrac{138.222\mathrm{e}^{-0.0864t}+0.0965}{741.537\mathrm{e}^{-0.0864t}+0.965} & \text{si} \quad 43.86 \leq t \leq 51.014 \\ 0.001 & \text{si} \quad 51.014 \leq t \leq 60 \end{cases}$$

Sur les chemins 2, 10 et 6 les dividendes sont nulles, par contre sur le chemin 4 elles sont positives, de plus nous avons $X(t)$ est une constante sur le chemin 4 alors $\dot{X}(t)=0$. En effet, d'après l'équation différentielle 4.94 on trouve : $D(t)=(1-f)\left\{S(t,K_4(t))-aK_4(t)-wlq^{-1}K_4(t)\right\}$.
Par conséquent, on obtient : $D(t)\simeq 0.0078$.
Alors, la politique optimale de distribution de dividende est :

$$D(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 51.014. \\ 0.0078 & \text{si} \quad 51.014 \leq t \leq 60. \end{cases}$$

En plus nous avons : $X(z)=0.1$, alors on obtient :

$$V(D^*,I^*)\simeq 0.0235.$$

par un petit comparaison entre les exemples précédent nous avons résumer les différent résultats sur le chemin 4 dans le tableau suivant :

	sans retard	avec retard
τ_1	22.07	19.653
τ_2	40.46	37.97
τ_3	47.38	45.123
$V(t)$	0.0205	0.0167

Table 4.13 – différent résultat sur le chemin 4

Alors le retard dans le commande $I(t)$ est effets les points de couplage (les points des commutation)qui sont avancé, est lais la valeur de la fonction objectif, donc on peut dire que un retard sur l'investissement dans cette exemple est fait un croissance de la valeur de la fonction objectif de l'entreprise.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons détaillé la résolution du modèle dynamique d'entreprise en utilisant le principe de maximum de Pontryagin d'un problème sans et avec retard sur le l'investissement $I(t)$.
Pour visualisé l'évolution du modèle nous avons présente un exemple numérique pour les deux

cas. Les exemples illustre que le retard sur l'investissement affecte directement les points de commutation, les commandes et les trajectoires optimales, ce qui donne une valeur de la fonction objectif supérieur à celle du modèle sans retard.

Conclusion générale

Les objectifs qui ont été fixés pour ce mémoire sont, tout d'abord, de traiter des modèles en finance d'entreprise, et ensuite de résoudre certain d'entre eux avec une méthode de contrôle optimal appropriée. Pour cela, nous avons donné dans le premier chapitre, les concepts les plus importants dans le monde de la finance d'entreprise, tel que la fonction financière, les sources de financement, ainsi que les critères du choix d'investissement. Finalement, nous avons terminé ce chapitre par la gestion de la trésorerie.

Dans le second chapitre, nous avons fait une synthèse des travaux sur les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise, qui traitent les différentes problématiques financières, tel que le modèle de la gestion optimal des excédents de la trésorier. Puis, nous avons exposé un modèle de financement optimal d'une entreprise. Finalement, nous avons exposé un modèle dynamique d'entreprise, qui cherche à maximiser la valeur des capitaux propres et les dividendes distribués, tout en prenant en compte les décisions et les sources de financement, et le choix d'investissement. Dans la troisième chapitre, nous avons exposé les aspects théoriques du contrôle optimal sans et avec retard, dont nous avons présenté les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les deux cas.
Dans le quatrième chapitre, nous avons présenté les aspects théorique et numérique de certains modèles présentes dans le deuxième chapitre. Après avoir résolu le modèle de la dynamique d'une entreprise, nous avons proposé et résolu un nouveau modèle, qui est une extensions du modèle dynamique d'entreprise, où nous avons supposé un retard sur la la commande "investissement".

Résumé :

Ce mémoire vise à fournir un aperçu de l'optimisation des systèmes dynamiques et de leur application à économie financière, où les méthodes et les bases du financement des entreprises car ont été abordées car la plupart des entreprises rencontrent des problèmes : pour investir de manière optimale d'argent avec une augmentation du pourcentage des dividendes et réduire

les pertes, où a été ces problèmes traduits en des modèles mathématiques, Ces derniers ceux-ci diffèrent que ce soit dans la fonction objectif ou dans les variables qui contrôlent les stratégies commerciales des entreprises sous certaines conditions. Ces modèles sont souvent résolus en utilisant la théorie du contrôle optimal qui est basée sur le Principe de Maximum de Pontriaguine. Sur cette base , nous avons analysé un modèle qu'est appeler le modèle de dynamique de l'entreprise, par lequel une présentation détaillée de la solution a été présentée sous forme des trajectoires optimales et comme ce modèle est contrôlé par la valeur des dividendes et de l'investissement, Comme les entreprises n'obtiennent souvent pas de dividende d'investissement en même temps que l'investissement, on peut donc dire que l'investissement est retardé dans le temps. En outre, ce modèle sera également étudié avec un retard sur l'investissement. Où la différence entre les résultats dans les deux cas a été observée dans les exemples numériques.
Mots clés : système dynamique, contrôle optimale, économie financière, modèle dynamique avec retard, principe du maximum.

Bibliographie

[1] Arkam D, Kadi Y, Méthodes Mathématiques de la Gestion de Stocks Entreprise CeVital, Mémoire de fin d'études, Université Abderrahmane Mira de Béjaia (2016).

[2] Beffy P.O, Initiation à l'Economie , De Boeck, Paris , 2008.

[3] Benyahia G, Yahiaoui M, Les Techniques d'évaluation et les modes de financement d'un projet d'investissement, Mémoire de fin de cycle, Université Abderrahmane Mira de Béjaia, 2013

[4] Blok M.W.J, Kearney A. T, Dynamic Models of the Firm Determining Optimal Investment, Financing and Production Policies by Computer, vol 434, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996 .

[5] Charreaux G, Théorie financière et stratégie financière, Revue française de gestion, Lavoisier, 2006/1 n° 160 , p. 109-137.

[6] Coulon Y, Guide pratique de la finance comportementale ,premier Édition , Gualino éditeur , Lextenso éditions , 2017 .

[7] Dabache H,Guezira W, Les problèmes d'optimisation en économie financière ,Mémoire de fin d'études , Universitaire Mila ,2015.

[8] Delahaye F.D, Delahaye J, DCG 6 Finance d'entreprise, Dunod, Paris, 2015.

[9] Desbrières P, Poincelot E, Gestion de trésorerie, deuxième édition, 2015.

[10] Gabasov R, Kirillova F.M, Prischepova S.V, Optimal Feedback Control, Springer-Verlag London Limited, 1995.

[11] Hendricks E, Jannerup O and Sorensen.P.H, Linear Systems Control, Springer, Verlag, Berlin, 2008.

[12] Jan G, van Schijndel C. Th, Dynamic Firm and Investor Behaviour under Progressive Personal Taxation , Lectu re Notes in Economics and Mathematical Systems. vol 305. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1988.

[13] Kort P.M, Optimal Dynamic Investment Policies of a Value Maximizing Firm, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol 330,Springer-Verlag Berbn Heidelberg, 1989.

[14] Krouse C.G, Lee W. Y, Optimal equity

financing of the corporation, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1973, 8(3) :539 - 563.

[15] Legros G, Mini manuel de finance d'entreprise, Dunod, Paris, 2010.

[16] Max P, Un modèle dynamique de stratégie de l'entreprise, Revue économique, vol 18, n° 1, 1967.

[17] Mezmaz K,Rouibeh K, Contrôle optimal d'un système dynamique avec retards ,Mémoire de fin d'études,Centre Universitaire Mila, 2016.

[18] Pontryagin L.S, Boltyanskii V.G, Gamkrelidze R.V, and Mishchenko E.F, The Mathematical Theory of Optimal Processes , JOHN WILEY & SONS, Inc. New York. London, 1962.

[19] Sethi S.P,Optimal Control Theory , Applications to Management Science and Economics, Third Edition,Springer Nature Switzerland AG ,2019.

[20] Sethi S.P, Thompson G. L, Applications of Mathematical Control Theory to Finance : Modeling Simple Dynamic Cash Balance Problems, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1970, 5(04) : 381-394.

[21] Sethi S.P, Thompson G.L, Optimal Control Theory, Applications to Management Science and Economice, second Edition,Springer Nature Switzerland AG , 2005.

[22] van Hilten O, Optimal Firm Behaviour in the Context of Technological Progress and a Business Cycle, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol 352, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1991.

[23] Van Hilten O, Kort P.M, Van Loon P.J.J.M, Dynamic Policies of the Firm An Optimal Control Approach, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993.

[24] Van Loon P, A Dynamic Theory of the Firm :Production,Finance and Investment, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol 218, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1983.