الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Etude D'un Problème Source Mal-Posé D'une Equation Parabolique

Préparé par : *-Belahiana Khalida*
-Benchenouf Manal

Soutenue devant le jury

Président : Daoui.Amina. M.A.A	C.U. Abd Elhafid Boussouf
Examinateur : Sekhane.Chafika. M.A.A.	C.U. Abd Elhafid Boussouf
Encadré par : Ahmed-Yahia.Rakia. M.A.A.	C.U. Abd Elhafid Boussouf

Année Universitaire : 2019/2020

Résumé

Dans le présent travail, on a étudié un problème de Cauchy non linéaire non homogène rétrograde $u_t(t) + Au(t) = f(t, u(t))$, $0 \leqslant t < \tau$ avec $u(\tau) = \phi$, où A est un opérateur positif auto-adjoint à domaine dense sur un espace de Hilbert, il est mal posé du fait qu'une petite perturbation dans la valeur finale ϕ peut conduire à un grand écart de solution. On montre, dans des conditions appropriées sur ϕ et f qu'une solution du problème ci-dessus satisfait l'équation intégrale. On a utilisé la méthode de régularisation pour obtenir des solutions approchées stables. La méthode de régularisation spectrale tronquée est basée sur la troncature de la représentation spectrale d'un opérateur A, elle est utilisée pour obtenir des approximations régularisées pour la solution de l'équation intégrale, et l'analyse des erreurs est effectuée avec une valeur finale exacte et bruitée ϕ.

ملخص

لقد قمنا في هذا العمل بدراسة مسالة كوشي للمتراجع الغير خطي والغير متجانس

$u_t(t) + Au(t) = f\big(t, u(t)\big)$, $0 \le t < \tau$ مع $u(\tau) = \phi$, حيث A مؤثر غير خطي موجب هو قرين لذاته معرف على لمجال كثيف على فضاء هلبرت. هذه المسالة غير مطروحة جيدا أي بمجرد إحداث خلل بسيط في القيمة النهائية ϕ يمكن أن يسبب خلل كبير في النتيجة. نبين انه , عندما نضع ϕ او f في شروط ملائمة, فان حل المسالة يحقق معادلة متكاملة. تم استعمال طريقة التسوية للحصول على نتائج متقاربة و ثابتة. تعتمد طريقة التسوية الطيفية المبتورة على اقتطاع التمثيل الطيفي A . استعملت هذه الطريقة للحصول على تقريب منتظم لحل المعادلة المتكاملة تحليل الأخطاء والحصول على قيمة دقيقة وتقريبية.

Abstract

In this work we treat the nonlinear nonhomogeneous backward Cauchy problem $u_t(t) + Au(t) = f(t, u(t))$, $0 \leqslant t < \tau$ with $u(\tau) = \phi$, where A is a densely defined positive self-adjoint operator on a Hilbert space, it is ill-posed in the sense that a small perturbation in the final value ϕ can lead to a large deviation in solution. We show, under suitable conditions on ϕ and f, that a solution of the above problem satisfies an integral equation. A regularization method is used to get stable approximate solutions. The truncated spectral regularization method is based on truncation of the spectral representation of an operator A, it is used to obtain regularized approximations for the solution of the integral equation, and error analysis is carried out with exact and noisy final value ϕ.

Remerciement

Tout d'abord nous remercions dieu qui nous donne la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je souhaitais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je tiens à remercier sincèrement Madame R.Ahmed Yahia, qui, en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à ma chère collègue, pour sa générosité et la grande patience et tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

J'exprime ma gratitude à tous les jurés rencontrés lors des recherches effectuées et qui ont accepté de répondre à mes questions avec gentillesse.

Je n'oublie pas mes parents pour tous leurs sacrifices, leurs soutiens, leurs encouragements et leurs amours qui ont été la raison de ma réussite. Que dieu leur présente une bonne santé et une longue vie.

J'adresse mes remerciements à mes sœurs et mes frères pour leur disponibilité à entendre mes frustrations et leurs sources d mon stress avec mes souhaits de bonheur et de réussite dans leur vie.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ceux que j'aime et qu'ils m'aiment , qu'ils trouvent dans ce travail l'expression de mes sentiments les plus affectueux.

Merci à tous et à toutes

★ ★ ★

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

- H, K : Espace de Hilbert.
- A, B : Opérateurs linéaires.
- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.
- $D(A)$: Le domaine de définition de l'opérateur A.
- A^* : Opérateur adjoint de A.
- A^{-1} : Opérateur inverse de A.
- $\ker A$: Le noyau de l'opérateur A.
- ImA : L'image de l'opérateur A.

- λ : Valeur propre de l'opérateur A.

- $Gr(A)$: Le graphe de A.

- $R_\lambda(A)$: Résolvante de A.

- $L_a(X)$: L'ensemble d'opérateur linéaire de X.

- $\rho(A)$: L'ensemble résolvant de l'opérateur A.

- $\sigma(A)$: Spectre de A.

- $T(t), S(t)$: Semi-groupes.

- $\mathscr{L}(H)$: Espace des opérateurs linéaires continus dans H.

- $L^1([0,\tau];H)$: Désigne l'espace H e toutes les fonctions mesurables de Lebesgue.

- $C([0,\tau];H)$: Espace de Banach de toutes les fonctions continues à valeur H.

INTRODUCTION

La notion d'un problème mathématique mal-posé est apparue dans les discussions du mathématicien français J. Hadamard dans son ouvrage "Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Diferential Equations" [18], après avoir introduit, une vingtaine d'années avant, la notion d'un problème bien-posé qui doit satisfaire, d'après lui, à trois propriétés : l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution. La perte d'une des propriétés définit un problème dit mal-posé. C'était une étape pour la classification des models mathématiques de problèmes de physique associés à des équations différentielles.

Les méthodes générales de l'analyse mathématique ont bien était adaptées pour les solutions des problèmes bien-posés, cependant, ce n'était pas clair dans quel sens les problèmes mal-posés peuvent avoir solutions. Plusieurs mathématiciens comme Tikhonov, Morozov, Ivanov et d'autres ont travaillé pour développer la théorie et les méthodes pour résoudre les problèmes mal-posés. Ils ont pu donner une définition mathématique précise "des solutions approchées" pour des classes générales de ces problèmes. Pour plus de détails du traitement des problèmes mal-posés, on réfère à deux excellents livres de D. Colton, H.W. Engel, A.K. Louis [12] et de H. W. Engl, M. Hanke et A. Neubauer [21].

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre le problème mal-posé de Cauchy, on cite "la méthode de quasi-solution" de Tikhonov 1977 [7], "la méthode de quasi-réversibilité" par lattès et Lions en 1967 [55], "la méthode de la convexité logarithmique" développe par John (1960). Agmon, Nirenberg (1963), Miller (1973), Payne (1973), Carraso (1999) [58], [16], "les procedures itératives" par Kozlov et Maz'ya 1990 [17] "la méthode quasi-valeur aux limites" par Clark et Oppenheimer 1995 [28], [26] ; et "la technique des semi-groupes C-régularisés" par Mel'nikova, 2002 [29].

L'objet de ce mémoire, concerne l'étude d'un problème de Cauchy non linéaire non homogène qui est mal posé en ce sens que de petites perturbations de la valeur finale peuvent conduire à de grandes déviations dans la solution. nous montrons que la solution de ce problème satisfait une équation intégrale dans des conditions appropriées sur ϕ et f et on applique la méthode de la régularisation spectrale tronquée pour obtenir des approximations régularisées pour la solution de l'équation intégrale, et l'analyse des erreurs est effectuée avec une valeur finale exacte et bruitée.

Ce mémoire est un développement de l'étude d'un problème source mal-posé d'une équation parabolique. il est composé de trois chapitres.

premier chapitre on rappelle quelques résultats connus d'analyse fonctionnelle (les espaces de Hilbert, les opérateurs linéaires, la théorie spectrale et les semi-groupes).

dans le deuxième chapitre nous aborderons l'étude des techniques et méthodes de résolutions pour les problèmes mal-posés. On présente brièvement le principe de trois méthodes : la méthode de quasi-réversibilité, la méthode de quasi-valeurs limites et la méthode de Tikhonov.

Au chapitre trois, on étudie la Régularisation spectrale tronquée pour un problème parabolique non linéaire mal posé.
Le problème de Cauchy non linéaire non homogène étudié est le suivant :

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(t, u(t)), & 0 \leqslant t < \tau \\ u(\tau) = \phi. \end{cases} \qquad (\textbf{FVP})$$

avec $f(\cdot,\cdot)$ est une fonction à valeur dans H définie dur $[0,\tau[\times H$ et A est un opérateur borné positif auto-adjoint à domaine dense sur un espace de Hilbert.

Dans ce contexte, beaucoup d'approches ont été faites pour le cas homogène [29]. Pour l'étude du cas non homogène, on note Lattés et Lions [55], qui utilisent la méthode de quasi-réversibilité, et S.Djezzar [38] utilisant la méthode des quasi-valeurs aux limites. et Jana et Nair [1] [2] [3]utilisant la Régularisation spectrale tronquée pour un problème parabolique non linéaire mal posé.

Dans ce travail, on utilise la méthode de régularisation spectrale tronquée pour obtenir une solution approchée stable.
On donne des résultats préliminaires requis pour cette analyse, on définit la solution générale pour (**FVP**) non linéaire et on prouve l'existence d'une solution générale dans certaines conditions.
On montre la convergence des solutions régularisées vers la solution générale, et on dérive une estimation d'erreur lorsque la valeur finale ϕ est aussi bruitée que exacte, et on déduit de nombreux résultats comme cas spéciaux.

CHAPITRE

1

RAPPEL D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, les théories des opérateurs et des semi-groupes et on finira avec le théorème de Hill-Yoshida.

1.1 L'espace de Hilbert

Définition 1.1. *[19]*

Soit V un espace vectoriel réel. On appelle «semi-produit scalaire» sur $V \times V$ (ou, par abus de langage, sur V) une application

$$\{x, y\} \in V \times V \longmapsto < x, y > \in \mathbb{R}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} i) < \sum_{i=1}^{n} \lambda^i x_i, y >= \sum_{i=1}^{n} \lambda^i < x_i, y > \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{(linéairité par rapport à } x) \\ ii) < x, \sum_{j=1}^{m} \mu^j y_j >= \sum_{j=1}^{m} \mu^j < x, y_j > \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{(linéairité par rapport à } y) \\ iii) < x, y >=< y, x > \quad \textit{(symétrie)} \\ iv) < x, x >\geqslant 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \in V \quad \textit{(positivité)} \end{cases} \tag{1.1}$$

On appelle «espace préhilbertien non séparé» le couple $\{V, <,>\}$ formé d'un espace vectoriel et d'un semi-produit scalaire.
Un «produit scalaire» est une forme bilinéaire symétrique vérifiant

$$\forall x \neq 0, \quad < x, x >> 0 \quad \textit{(définie-positivité)} \tag{1.2}$$

et on appelle espace préhilbertien le couple $V, <,>$ où $<,>$ est un produit scalaire.

Remarque 1.1. *[19]*

La condition (1.1)ii) est redondante puisqu'elle résulte des conditions (1.1)i) et iii). La condition (1.2) implique évidemment la condition (1.1)iv).

La donné d'un produit scalaire définit une norme et, par suite, une distance sur l'espace V. Pour vérifier cela, nous avons besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 1.2. *[19]*

Nous dirons qu'un espace préhilbertien est un espace de Hilbert s'il est complet pour la distance associée. Donc tout espace de Hilbert est un espace de Banach (normé complet).

1.2 Rappel sur les opérateurs linéaires

1.2.1 Les opérateurs linéaires bornés

Soient H et K deux espaces de Hilbert.

Définition 1.3. ***(Opérateur linéaire)*** *[53]*

On appelle opérateur linéaire toute application $A : H \longrightarrow K$ qui vérifie

1 $\forall x, y \in H, A(x+y) = Ax + Ay$.

2 $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in H, A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Définition 1.4. *[53]*

On dit que A est borné s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\|Ax\| \leq M\|x\|, \forall x \in H$$

Si $A : H \to K$ est un opérateur linéaire borné, alors sa norme est définie par

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

L'ensemble des opérateurs linéaires bornés définis de H dans K est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ noté par $\mathcal{B}(H,K)$, si $H = K$ on note $\mathcal{B}(H)$ au lieu de $\mathcal{B}(H,H)$.

Proposition 1.1. *[53]*

Si A et B sont des opérateurs linéaires bornés sur H et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $A+B$, λA et AB sont également des opérateurs bornés car,

(i) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(ii) $\|\lambda A\| \leq \|\lambda\|\|A\|$

(iii) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Théorème 1.1. ***(Adjoint d'un opérateur)*** *[11]*

Soient H, K deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{B}(H,K)$. Alors il existe un unique opérateur $A^* \in \mathcal{B}(K,H)$ tel que

$$\forall x \in H, \forall y \in K, < Ax, y > = < x, A^*y >$$

L'opérateur A^* s'appelle l'adjoint de A.

Théorème 1.2. ***(Propriétés de l'adjoint)*** *[11]*

1 *Si $A \in \mathcal{B}(H,K)$, alors $(A^*)^* = A, \|A\| = \|A^*\|$*

2 *Si $A \in \mathcal{B}(H,K)$ et $B \in \mathcal{B}(H,K)$, alors $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$*

3 Si $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(H,K)$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors $(\lambda A_1 + \mu A_2)^* = \overline{\lambda} A_1^* + \overline{\mu} A_2^*$

Définition 1.5. *[53]*

Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ alors,

1 A est dit auto-adjoint si $A = A^*$.

2 A est dit normal si $AA^* = A^*A$.

3 A est dit non positif si $\langle Ax, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$.

Définition 1.6. ***(Inverse d'un opérateur)*** *[53]*

Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ on dit que A est inversible s'il existe un opérateur $B \in \mathcal{B}(H)$, qui vérifie

$$A.B = B.A = I$$

B est dit l'inverse de A et on note $B = A^{-1}$.

Lemme 1.1. *[53]*

Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(H)$. Si A_1 et A_2 sont inversibles, alors

$$(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

1.2.2 Les opérateurs linéaires non bornés

Définition 1.7. ***(Domaine)*** *[53]*

Un opérateur linéaire A de H dans K est une application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $D(A)$ de H appelé domaine de A, tel que

$$D(A) = \{x \in H; \quad Ax \in H\}.$$

Définition 1.8. *[53]*

Le graphe de A est le sous-espace vectoriel de $H \times K$ noté $Gr(A)$ défini par :

$$Gr(A) = \{(u, Au); u \in D(A)\}.$$

On appelle Noyau de A le sous-espace de H noté $\ker(A)$ définit par

$$\ker(A) = \{u \in D(A); Au = 0\},$$

et image de A le sous-espace de K noté $Im(A)$ définit par :

$$Im(A) = \{Ax; x \in H\},$$

On dit que A est injectif si $\ker(A) = 0$ et que A est surjectif si $Im(A) = K$.
L'opérateur A est bijectif s'il est à la fois injectif et surjectif.

Définition 1.9. *[53]*

Un opérateur linéaire non borné de H dans K est un couple $(A, D(A))$ où $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de H et A une application linéaire de $D(A)$ de H dans K.

Définition 1.10. *[53]*

On dit que $(A, D(A))$ est une extension de $(B, D(B))$ si $D(B) \subset D(A)$ et $Bx = Ax$, $\forall x \in D(B)$, on note $B \subset A$. De plus $B \subset A$ si et seulement si $Gr(B) \subset Gr(A)$.

Définition 1.11. ***(Opérateur fermé)*** *[53]*

Un opérateur $A : D(A) \subset H \to K$ linéaire non borné est fermé si son graphe est fermé dans $H \times H$.

Remarque 1.2. *[53]*

Un opérateur A est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(A)$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} Ax_n = y$, alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$.

Définition 1.12. ***(Adjoint)*** *[53]*

Soit $A : D(A) \subset H \to K$ un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans H. On appelle adjoint de A, l'opérateur $(A^*, D(A^*))$ défini par

$$D(A^*) = \{y \in K \quad \text{tel que l'application} \quad x \to \langle Ax, y\rangle \quad \text{est continue sur} \quad D(A)\},$$

et

$$\langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle, \quad \text{pour tout} \quad x \in D(A) \quad \text{et pour tout} \quad y \in D(A^*).$$

Définition 1.13. ***(Opérateur inversible)*** *[53]*

On dit qu'un opérateur $A : D(A) \subset H \to K$ est inversible si A est bijectif et possède un inverse $A^{-1} : K \to D(A) \subset H$ borné.

1.2.3 Les opérateurs compacts

Les opérateurs compacts constituent une classe particulière d'opérateurs linéaires bornés qui présentent de grandes analogies avec les opérateurs linéaires définis sur des espaces de dimension finie.

Définition 1.14. *[43]*

Un opérateur linéaire A, défini sur un espace de Hilbert H, est dit compact, ou complètement continu, si l'adhérence de l'image de toute partie bornée de H est compacte.

Critère 1.1. *[43]*

Si (x_n) est une suite bornée de vecteurs d'un espace de Hilbert H, l'opérateur A est compact si, et seulement si, on peut extraire de la suite (Ax_n) une sous-suite convergente.

Ce critère permet d'établir le théorème suivant :

Théorème 1.3. *[43]*

La limite A d'une suite convergente (A_n) d'opérateurs linéaires compacts, définis dans un espace de Hilbert H est un opérateur linéaire compact dans H.

Proposition 1.2. *[43]*

Tout opérateur de rang fini est compact.

Remarque 1.3. *[43]*

Si A et B sont deux opérateurs compacts, l'image de toute partie bornée Ω par B est bornée (car B est borné) et puisque A est compact, l'adhérence de $AB\Omega$ est compact ; le produit de deux opérateurs compacts est donc compact.

1.3 Rappel sur la théorie spectrale

Étant donné un opérateur linéaire A défini dans un espace de Hilbert H, nous allons étudier les propriétés de l'opérateur $A - \lambda I$ où λ est un nombre complexe quelconque et I l'opérateur identité. Quel que soit λ, on a $D(A - \lambda I) = D(A)$.

L'inverse de $A - \lambda I$, quand il existe, est appelé opérateur résolvant ou résolvante de A. On le note $R_\lambda(A)$. L'étude de l'opérateur $R_\lambda(A)$ simplifie considérablement celle de A. L'objet de la théorie spectrale est l'étude des propriétés de $R_\lambda(A)$ en tant que fonction de λ définie dans C et à valeurs dans l'ensemble des opérateurs linéaires dans H.

1.3.1 Les valeurs propres d'un opérateur linéaire :

X signifie un espace normé sur le corps $\mathbb{C}$

Définition 1.15. *[61]*

Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $A \in L_a(X)$ s'il existe un vecteur $x \in X$, $x \neq 0$, tel que :

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{1.3}$$

Chaque vecteur $x \neq 0$ qui satisfait (1.3) s'appelle vecteur propre de $A \in L_a(X)$ nous notons par $\sigma_p(A)$ l'ensemble de valeurs propres de A.

Définition 1.16. *[61]*

Appelons $\sigma_p(A)$ le spectre ponctuel de A, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit

$$E_\lambda = x \in X; (A - \lambda I)x = 0$$

1.3.2 Théorie spectrale

Définition 1.17. *[43]*

on appelle ensemble résolvant de l'opérateur linéaire A, et on le note $\rho(A)$, l'ensemble des valeurs de λ telles que $R_\lambda(A)$ existe, soit borné et à domaine dense ; on appelle spectre de A, et on le note $\sigma(A)$, le complémentaire de $\rho(A)$

Définition 1.18. *[43]*

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ n'existe pas est appelé le spectre discret (on dit aussi spectre ponctuel) de A. On le note $\sigma_d(A)$.
L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ existe, est à domaine dense, mais n'est pas borné est appelé le spectre continu de A. On le note $\sigma_c(A)$.
L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ existe, mais n'est pas à domaine dense est appelé le spectre résiduel de A. On le note $\sigma_r(A)$.
Les éléments du spectre discret sont appelés les valeurs propres de A.

Théorème 1.4. *[43]*

Soit A un opérateur linéaire défini dans un espace de Hilbert H.

1. *Son ensemble résolvant $\rho(A)$ est ouvert.*
2. *La fonction $\lambda \to R_\lambda(A)$ est analytique pour tout λ qui appartient à $\rho(A)$.*
3. *Son spectre $\sigma(A)$ est fermé et non vide.*

Théorème 1.5. *[43]*

Soit A un opérateur linéaire auto-adjoint défini dans un espace de Hilbert H

1. *Ses valeurs propres sont réelles.*
2. *Les vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.*
3. *Son spectre résiduel est vide.*
4. *Son spectre continu est réel.*

Théorème 1.6. *[43]*

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert H.

1. *Son spectre $\sigma(A)$ est inclus dans un disque de rayon $\|A\|$ centré à l'origine.*
2. *Son ensemble résolvant $\rho(A)$ n'est pas vide.*

Définition 1.19. *[43]*

On appelle rayon spectral d'un opérateur linéaire borné A le nombre positif $r(A)$ défini par :

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Théorème 1.7. *[43]*

Si A un opérateur linéaire compact sur un espace de Hilbert H et λ une valeur propre non nulle de A, l'espace vectoriel $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ est de dimension finie.

Définition 1.20.

Une famille de projection $E(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$ dans un espace de Hilbert H, est appelée résolution de l'identité ou famille spectrale si les conditions suivantes sont satisfaites :
(i) $E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu)), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
(ii) $E(-\infty) = 0\,; E(+\infty) = I$

où

$$E(-\infty)x = \lim_{\lambda \to -\infty} E(\lambda)x,$$

et

$$E(+\infty)x = \lim_{\mu \to \infty} E(\mu)x, \;\; x \in H,$$

(iii) $E(\lambda + 0) = E(\lambda)$, *où* $E(\lambda + 0)x = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} E(\lambda + \varepsilon)x, \;\; x \in H$

1.4 Rappel sur les semi-groupes

1.4.1 Continuité uniforme des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés

Définition 1.21. *[8]*

Soit X un espace de Banach, une famille à paramètre $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, d'opérateurs linéaires bornés de X vers X, est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :
(i) $T(0) = I$, *(I est l'opérateur identité sur X)*
(ii) $T(s + t) = T(s)T(t)$ *pour tout* $t, s \geq 0$ *(propriété des semi-groupes)*

Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $T(t)$, est uniformément continu si :

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0$$

L'opérateur linéaire A défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \;\; existe \right\}$$

Et

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{\mathrm{d}^+ T(t)x}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} \quad pour \;\; x \in D(A)$$

est le générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)$, $D(A)$ est le domaine de A.

Remarque 1.4. *[8]*

Par cette définition, il est clair que si $T(t)$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continus, alors :

$$\lim_{t\downarrow 0}\|T(s)-T(t)\|=0$$

Théorème 1.8. *[8]*

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu, si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.

Théorème 1.9. *[8]*

Soient $S(t)$ et $T(t)$ deux semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés.

Si :

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)-I}{t}=A=\lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)-I}{t}$$

Alors :

$$T(t)=S(t), \quad \textit{pour tout} \quad t\geq 0.$$

1.4.2 Continuité forte des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés

Définition 1.22. *[8]*

Un semi-groupe $T(t)$, $0\leq t<\infty$, d'opérateurs linéaires bornés sur X est un semi-groupe fortement continu, d'opérateurs linéaires bornés si :

$$\lim_{t\downarrow 0}T(t)x=x \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \;\; x\in X$$

Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur X est appelé un semi-groupe de classe C_0 ou simplement un C_0 semi-groupe.

Théorème 1.10. *[8]*

Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe. Il existe une constante $\omega\geq 0$ et $M\geq 1$ tels que :

$$\|T(t)\|\leq Me^{\omega t} \quad \textit{pour} \quad 0\leq t<\infty$$

Corollaire 1.1. *[8]*

Si $T(t)$ est un C_0 semi-groupe, alors pour tout $x \in X$, $t \to T(t)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}_0^+$ (l'axe non négatif) dans X.

Théorème 1.11. *[8]*

Soit $T(t)$ est un C_0 semi-groupe et soit A est son générateur infinitésimal. Alors :
$a)$ Pour $x \in X$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s = T(t)x$$

$b)$ Pour $x \in X$, $\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s \in D(A)$ et

$$A\left(\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s\right) = T(t)x - x$$

$c)$ Pour $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

$d)$ Pour $x \in D(A)$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\mathrm{d}\tau = \int_s^t AT(\tau)x\mathrm{d}\tau$$

Corollaire 1.2. *[8]*

Si A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, alors $D(A)$ le domaine de A, est dense dans X et A est un opérateur linéaire fermé.

Théorème 1.12. *[8] (**Théorème Hille-Yosida**)*

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ sur X tel que $\|T(t)\| \leq \mathrm{M}e^{\omega t}$ avec $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ si et seulement si :
(i) A est fermé et $\overline{D(A)} \subset X$
(ii) L'ensemble résolvant de A contient $]\omega, \infty[$ et

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq M/(\lambda - \omega)^n \quad pour \quad \lambda > \omega \quad n = 1, 2, \ldots$$

On note que si un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ sur X tel que $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$, $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$, alors

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)xds \quad \text{pour tous} \quad \lambda > \omega \;\text{ et }\; x \in X$$

où $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)xds$ est une intégrale de Bochner et c'est la transformée de Laplace du semi-groupe $(T(t))_t$

Corollaire 1.3. *[8]*

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions $T(t)$. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient le demi-plan ouvert droit, i.e,

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda : Re\lambda > 0\}$$

tels que :

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}$$

Corollaire 1.4. *[8]*

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe satisfaisant

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t},$$

si et seulement si,

$i)$ *A est fermé et $\overline{D(A)} = X$*

$ii)$ *L'ensemble résolvant $\rho(A)$, de A contient l'axe $\{\lambda : Im\lambda = 0, \lambda > \omega\}$, tels que :*

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$$

CHAPITRE

2

MÉTHODES DE RÉGULARISATION

On aborde dans ce chapitre le principe de quelques méthodes de régularisation. En fait, cette partie est une introduction aux méthodes de régularisation les plus courantes : la méthode de Quasi-réversibilité, la méthode de Quasi-valeurs limites (quasi-boundary value method) et on termine par une la méthode de Tikhonov. Pour une lecture plus approfondie on propose de voir le livre de Kirsch [5].

Régulariser un problème mal-posé, c'est le remplacer par un autre, bien-posé de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité. La principale difficulté dans l'application d'une méthode de régularisation à un problème particulier est la détermination du paramètre de régularisation lui-même.

2.1 Méthode de quasi-réversibilité modifiée pour un problème de Cauchy mal posé

2.1.1 Introduction

Soit H un espace de Hilbert complexe, où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $\|\cdot\|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On considère le problème de Cauchy rétrograde suivant :

$$u'(t) + Au(t) = 0, \ \ 0 < t < T, u(T) = f, \qquad \textbf{(FVP)}$$

où $A : \mathcal{D}(A) : H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire, non-borné, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$, $A^* = A, \exists \gamma > 0, \langle Au, u \rangle \geq \gamma \|u\|^2, \forall u \in \mathcal{D}(A)$.

Le problème consiste à déterminer $u(t)$ pour $0 \leqslant t < T$ à partir de la connaissance de la condition finale $u(T) = f$.

Il est bien connu que ce type de problème est fortement mal posé au sens d'Hadamard [18] ,c'est-à-dire : même si la solution existe unique, elle ne dépend pas continûment de f.

Puisque le semi-groupe $S(t) = \mathrm{e}^{-tA}$ est irréversible, on souhaite trouver un opérateur $S_\alpha(t)$, $\alpha > 0$ 'proche' de $S(t)$ dans un certain sens, de façon que le problème **(FVP)** soit bien posé.

Parmi les stratégies d'approche de ce type de questions, on peut citer la méthode de quasi-réversibilité proposée par [55] .L'idée principale de cette méthode consiste à remplacer l'opérateur A dans l'équation **(FVP)** par $A_\alpha = g_\alpha(A)$.

Dans la méthode originale [55] proposent $g_\alpha = A - \alpha A^2$, pour obtenir un problème bien posé dans le sens inverse du temps, et dans la méthode de quasi-réversibilité modifiée , [20] proposent $g_\alpha = A(I - \alpha A)^{-1}$.

On indique qu'en utilisant cette méthode, on est confronté à certaines difficultés.

La première résulte du terme correcteur (αA^2) (opérateur d'ordre deux) ce qui induit une difficulté sérieuse pour l'implémentation numérique, et la seconde consiste dans le fait que le coefficient d'erreur $(\mathrm{e}(\alpha))$ résultant d'une petite perturbation de la donnée f est l'ordre $\mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha}}$.Pour toute ces raisons, on propose une modification de cette méthode, en introduisant une nouvelle perturbation :

$$A_\alpha = g_\alpha(A) = -\frac{1}{pT} \ln(\alpha + \mathrm{e}^{-pTA}), \alpha < 0, p \geq 1.$$

Le premier avantage de cette perturbation résulte du fait que $(A_\alpha \in \mathscr{L}(H))$,ce qui impliquer une position correcte du problème perturbé dans les deux directions du temps, le deuxième avantage réside dans la possibilité d'établir des résultats meilleurs (optimalité de la méthode) par rapport aux résultats obtenus précédemment.

2.1.2 Préliminaire

Dans cette section on présente les notations et le cadre fonctionnel qui seront utilisés dans cette analyse. On note par $E_\lambda, \lambda \geq \gamma > 0$ la résolution de l'identité associée à l'opérateur A.

Soit $S(t) := \mathrm{e}^{-tA} = \int_{\gamma}^{\infty} \mathrm{d}E_\lambda \in \mathscr{L}(H), t \geq 0$, le semi-groupe engendré par $-A$. Quelques propriétés de base de $S(t)$ sont données par le théorème suivant :

Théorème 2.1. *(voir [8], Chap.2, Théorème 6.13, P. 74)*

Pour cette famille d'opérateur on a :

1. $\|S(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$;
2. *la fonction* $t \longmapsto S(t), t > 0$, *est analytique ;*
3. *pour tout* $r \geq 0$ *et* $t > 0$, *l'opérateur* $S(t) \in \mathscr{L}(H, \mathcal{D}(A^r))$;
4. *pour tout entier* $\kappa \geq 0$ *et* $t > 0$, $\|S^{(\kappa)}(t)\| = \|A^\kappa S(t)\| \leq c(\kappa)t^{-\kappa}$;
5. *pour tout* $x \in \mathcal{D}(A^r), r \geq 0$ *on a* $S(t)A^r x = A^r S(t)x$.

Théorème 2.2.

pour $t > 0$ *est auto-adjoint, injectif et à image dense*

$$(S(t) = S(t)^*, \overline{\mathcal{R}(S(t))} = H).$$

2.1.3 Méthode de quasi-réversibilité modifiée

On introduit maintenant la méthode de quasi-réversibilité modifiée pour régulariser le problème **(FVP)**.

Description de la méthode :

1. Soit v_α la solution du problème suivant :

$$v_\alpha'(t) + A_\alpha v_\alpha(t) = 0, \;\; 0 \leq \alpha \leq t < T, v_\alpha(T) = f, \qquad \textbf{(FVP)}_\alpha$$

   où l'opérateur A est remplacé par A_α.

2. On injecte la condition initiale

$$v_\alpha(0) = \varphi_\alpha$$

   dans le problème :

$$u_\alpha'(t) + Au_\alpha(t) = 0, 0 < t \leq T, u_\alpha(0) = \varphi_\alpha, \qquad \textbf{(IVP)}_\alpha$$

3. Enfin, on montre que

$$\Phi_\alpha(f) = \|u_\alpha(T) - f\| \longrightarrow 0, \alpha \longrightarrow 0.$$

2.1.4 Analyse de la méthode

Analyse de A_α et ses conséquences

On commence l'analyse par une étude qualitative de la perturbation A_α et ses conséquences. Pour $0 < \alpha \leq \alpha_* = 1 - \mathrm{e}^{-\gamma T}$, $p \geq 1$, on définit :

$$\begin{aligned} A_\alpha = g_\alpha(A) &= -\frac{1}{pT}\ln(\alpha + \mathrm{e}^{-pTA}) \\ &= \int_\gamma^\infty -\frac{1}{pT}\ln(\alpha + \mathrm{e}^{-pT\lambda})\mathrm{d}E_\lambda. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.

On a

1. $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$ *et* $\|A_\alpha\| \leq \dfrac{1}{pT}\ln(\dfrac{1}{\alpha})$;
2. $A_\alpha = A_\alpha^* \geq 0$ *et* $A_\alpha A^\theta v = A^\theta A_\alpha v, v \in \mathcal{D}(A^\theta), \theta \geq 0$;
3. $\forall v \in \mathcal{D}(A), \lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} \|A_\alpha v - Av\| = 0$;
4. $\forall v \in H, S_\alpha(t)v = e^{-tA_\alpha v} \longrightarrow S(t)v, \alpha \longrightarrow 0.$

preuve.

1. La propriété $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$ découle directement des propriétés de la fonction $g_\alpha, \lambda \geq \gamma$. En effet, le choix de α nous permet d'écrire

$$\alpha + \mathrm{e}^{-pT\gamma} \leq \alpha + \mathrm{e}^{-T\gamma} \leq 1$$

ce qui implique que

$$\underline{g_\alpha} := g_\alpha(\gamma) = -\frac{1}{pT}\ln(\alpha + \mathrm{e}^{-pT\gamma}) \geq 0.$$

D'autre part

$$\overline{g_\alpha} := \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} g_\alpha(\lambda) - \frac{1}{pT}\ln(\alpha > 0).$$

On remarque que $g'_\alpha > 0$, ce qui montre que $g_\alpha \nearrow$ et $\sup\limits_{\lambda \geq \gamma} = \overline{g_\alpha}$. D'après la représentation spectrale de $g_\alpha(\lambda), \lambda \geq \gamma$, on conclut que $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$.

2. La propriété (2) résulte directement du calcul fonctionnel et les propriétés de A.

3. Soit $v \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$A_\alpha v = -\frac{1}{pT} \ln(\alpha + \mathrm{e}^{-pTA}) A^{-1} A v.$$

Notons

$$B_\alpha = -\frac{1}{pT} \ln(\alpha + \mathrm{e}^{-pTA}) A^{-1} = \int_\gamma^{+\infty} M_\alpha(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda,$$

où $M_\alpha(\lambda) = -\frac{1}{pT} \ln(\alpha + \mathrm{e}^{-pTA}) \lambda^{-1}$. De la définition de α, on remarque que $M_\alpha(\lambda) \geq 0$, pour tout $\lambda \geq \gamma$. De plus

$$M_\alpha(\lambda) = 1 - \frac{1}{pT} \ln(1 + \alpha \mathrm{e}^{pTA}) \lambda^{-1} \geq 0.$$

Ce qui implique $M_\alpha(\lambda) \leq 1$, pour tout $\lambda \geq \gamma$. Par conséquent, l'opérateur B_α est uniformément borné ,i.e.,$\|B_\alpha\| \leq 1$, $\forall 0 < \alpha \leq 1 - \mathrm{e}^{-\gamma T}$. Soit $v = \mathrm{e}^{-pTA} h$, $h \in H$. On calcule

$$\|(B_\alpha - I)v\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} \left(\frac{1}{pT} \ln(1 + \alpha \mathrm{e}^{pT\lambda}) \lambda^{-1} \right)^2 \mathrm{e}^{-2pT\lambda} \mathrm{d}\|E_\lambda h\|^2. \qquad (a_\alpha)$$

En vertu $'' \ln(1+x) \leq x$, $x \geq 0''$ la quantité (a_α) peut être dominée comme suit :

$$\|(B_\alpha - I)v\|^2 \leq \left(\frac{\alpha}{p\gamma T} \right)^2 \|h\|^2 \longrightarrow 0, \alpha \longrightarrow 0,$$

ce qui montre que $B_\alpha v \longrightarrow v$ dans H, quand $\alpha \longrightarrow 0$, $\forall \alpha \in \mathcal{R}(S(pT))$.Mais $\mathcal{R}(S(pT))$ est dense dans H et B_α est uniformément borné sur H. Ainsi, par le théorème du prolongement par continuité, on a

$$\forall v \in H, B_\alpha v \longrightarrow v, \alpha \longrightarrow 0.$$

En particulier pour $v \in \mathcal{D}(A)$, on obtient

$$A_\alpha v = B_\alpha A v \longrightarrow A v, \alpha \longrightarrow 0.$$

4. Puisque $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$, alors on peut définir

$$S_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-tA_\alpha} = \left(\alpha + \mathrm{e}^{-pTA}\right)^{\frac{t}{pT}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} A_\alpha^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il est claire que $\|S_\alpha(t)\| \leq 1$, $t \geq 0$. D'où $S_\alpha(t)$, $t \geq 0$ est un semi-groupe de contraction sur H.
On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_\alpha(t) = -A_\alpha(t) S_\alpha(t)$$

et

$$\begin{aligned} S_\alpha(t) - S_\beta(t) &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(S_\beta(t-\tau) S_\alpha(\tau)\right) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \left(S_\beta(t-\tau) S_\alpha(\tau)(A_\beta - A_\alpha)\right) \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

D'où, $\forall t \geq 0, \quad 0 < \alpha, \quad \beta \leq 1 - \mathrm{e}^{-\gamma T}$, $h \in \mathcal{D}(A)$, on obtient l'estimation

$$\|S_\alpha(t)h - S_\beta(t)h\| \leq t \|A_\beta h - A_\alpha h\|,$$

ce qui montre que $S_\alpha(t)h$ est une suite de Cauchy dans H, uniformément par rapport à $t \in [0, T]$. Comme $S_\alpha(t)$ est une contraction et $\mathcal{D}(A)$ est dense H, alors la limite

$$S_\alpha(t)h \longrightarrow \tilde{S}(t)h, \quad \alpha \longrightarrow 0, \quad t \geq 0$$

se prolonge pour tout $h \in H$ et uniformément par rapport à $t \in [0, T]$. Il est clair que $\tilde{S}(t) \in \mathscr{L}(H)$ est un semi-groupe de contraction sur H.
Soit $h \in \mathcal{D}(A)$, $t > 0$, alors

$$\begin{aligned} \|S(t)h - S_\alpha(t)h\| &= \left\| \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} (S(\tau) S_\alpha(t-\tau) \mathrm{d}\tau) \right\| \\ &\leq \int_0^t \|S_\alpha(t-\tau)(A - A_\alpha) S(\tau) h\| \mathrm{d}\tau \\ &\leq \int_0^t \|A - A_\alpha S(\tau) h\| \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

De l'inégalité

$$\|A_\alpha S(\tau) h\| = \|B_\alpha A S(\tau) h\| \leq \|S(\tau) A h\|$$

vient

$$\|(A_\alpha - A)S(\tau)h\| \leq 2\|S(\tau)Ah\|.$$

Puisque $\|S(\tau)Ah\|$ est continue comme fonction de t, une application du théorème de Lebesgue de la convergence dominée donne

$$\lim_{\alpha\longrightarrow 0}\|S(t)h - S_\alpha(t)h\| \leq \int_0^t \lim_{\alpha\longrightarrow 0}\|(A - A_\alpha)S(\tau)h\|\mathrm{d}\tau = 0.$$

Ce qui implique que $S_\alpha(t) \longrightarrow S(t) = \tilde{S}(t)$ sur $\mathcal{D}(A)$, quand $\alpha \longrightarrow 0$. Grâce à la densité de $\mathcal{D}(A)$ dans H, on conclut que $S_\alpha \longrightarrow S(t) = \tilde{S}(t)$ sur H, quand $\alpha \longrightarrow 0$.

□

Remarque 2.1.

Par un calcul direct, on peut montrer que

$$\forall h \in H, \quad S_\alpha(t)h \longrightarrow S(t)h, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

En effet, soit $v = \mathrm{e}^{-pTA}h, \quad h \in H$, *on calcule*

$$\|S_\alpha(t)v - S(t)v\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} \left((\alpha + \mathrm{e}^{-pT\lambda})^{\frac{t}{pT}} - \mathrm{e}^{-t\lambda}\right)^2 \mathrm{e}^{-2pT\lambda}\mathrm{d}\|E_\lambda h\|^2.$$

et $\alpha + \mathrm{e}^{-pT\lambda} \leq 1$, *la fonction*

$$M_\alpha(\lambda) = (\alpha + \mathrm{e}^{-pT\lambda})^{\frac{t}{pT}} - \mathrm{e}^{-t\lambda} = \mathrm{e}^{-t\lambda}\left((1 + \alpha\mathrm{e}^{pT\lambda})^{\frac{t}{pT}} - 1\right)$$

peut être dominée comme suit :

$$M_\alpha(\lambda) \leq \frac{\frac{t}{pT}\alpha\mathrm{e}^{pT\lambda}(\alpha + \mathrm{e}^{-pT\lambda})^{\frac{t}{pT}}}{(1 + \frac{t}{pT}\alpha\mathrm{e}^{pT\lambda})} \leq \frac{\alpha}{p}\mathrm{e}^{pT\lambda}.$$

Ce qui implique

$$\|S_\alpha(t)v - S(t)v\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} M_\alpha(\lambda)^2\mathrm{e}^{-2pT\lambda}\mathrm{d}\|E_\lambda h\|^2 \leq \left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 \|h\|^2 \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

En vertu de la densité de $\mathcal{R}(S(pT))$ *et* $\|S_\alpha(t)\| \leq 1, t \geq 0$, *on conclut que*

$$\forall h \in H, \quad S_\alpha(t)h \longrightarrow S(t)h, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.1.

Remarque 2.2.

Dans la proposition 2.1*, on a justifié que la perturbation proposée donne une bonne approximation de A. Ainsi, on peut espérer que cette perturbation produira un effet régularisant significatif.*

Résultats de convergence

Il est important de caractériser la classe admissible pour laquelle le problème **(FVP)** admet une solution. La réponse à cette question est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.1.

*Le problème **(FVP)** admet une solution unique, si et seulement si $f \in \mathcal{C}_1(A)$. Dans ce cas, elle est donnée par :*

$$u(t) = \mathrm{e}^{(T-t)A} f. \tag{2.1}$$

preuve*.*

Si $f \in \mathcal{C}_1(A)$, i.e., $\int_{\gamma}^{+\infty} \mathrm{e}^{2pT} \mathrm{d}\|E_\lambda f\|^2$ est finie, alors on définie $u(t) = \mathrm{e}^{(T-t)A} f = \mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{TA} f$. On voit que $u(t)$ donnée par cette expression vérifie l'équation **(FVP)**. Maintenant, si on suppose que $u(t) = \mathrm{e}^{T-t} f$ est solution de l'équation **(FVP)**, alors $u(0) = \mathrm{e}^{TA} f \in H$ si et seulement si $\|u(0)\| = \mathrm{e}^{TA} f = \int_{\gamma}^{+\infty} \mathrm{e}^{2T\lambda} \mathrm{d}\|E_\lambda f\|^2$ est finie. $\square$

Remarque 2.3.

En utilisant le cadre théorique des semi-groupes et les propriétés de $S_\alpha(t)$, on montre le théorème suivant :

Théorème 2.3.

Pour tout $f \in H$, la fonction

$$v_\alpha = \mathrm{e}^{(T-t)A_\alpha} f = \left(\alpha + \mathrm{e}^{-pTA}\right)^{-\frac{(T-t)}{pT}} f \tag{2.2}$$

*est l'unique solution du problème **(FVP)**$_\alpha$ et elle dépend continûment de f.*
Pour montrer la dépendance continue de v_α de f, on calcule

$$\|v_\alpha(t)\| = \left\| (\alpha + \mathrm{e}^{-pTA})^{-\frac{(T-t)}{pT}} f \right\| \leq (\frac{1}{\alpha})^{\frac{T-t}{pT}} \|f\| \leq (\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{p}} \|f\| = \mathrm{e}(\alpha)\|f\|. \tag{2.3}$$

A partir de (2.2) *on construit*

$$\varphi_\alpha = v_\alpha(0) = \left(\alpha + \mathrm{e}^{-pTA}\right)^{-\frac{1}{p}} f.$$

Théorème 2.4.

Le problème ***(IVP)***$_\alpha$ *est bien posé, et sa solution est donnée par :*

$$u_\alpha(t) = S(t)\varphi_\alpha = \mathrm{e}^{-tA}\left(\alpha + \mathrm{e}^{-pTA}\right)^{-\frac{1}{p}} f. \tag{2.4}$$

Corollaire 2.1.

Si $f \in \mathcal{C}_{1+\theta}(A)$, $\theta > 0$, *alors* $\sup\limits_{0\le t\le T} \|u_\alpha(t) - u(t)\|$ *converge vers zéro, avec l'ordre* $\alpha^{\frac{\theta}{p}}$ *se termine par ce travail par la construction d'une famille d'opérateurs régularisante pour le* ***(FVP)***.

Définition 2.1.

Une famille d'opérateurs $\{\mathrm{R}(t), \alpha > 0, t \in [0, T]\} \subset \mathscr{L}(H)$ *est dite famille d'opérateurs régularisante pour le problème* ***(FVP)*** *si pour toute solution* $u(t)$, $0 \le t \le T$ *du problème* ***(FVP)*** *avec la condition finale* f, *et pour tout* $\delta > 0$, *il existe un choix* $\alpha(\delta) > 0$, *tel que*

$$\alpha(\delta) \longrightarrow 0, \delta \longrightarrow 0, \qquad\qquad (\mathscr{R})_1$$

$$\|\mathrm{R}_{\alpha(\delta)} f_\delta - u(t)\| \longrightarrow 0, \delta \longrightarrow 0, \qquad (\mathscr{R})_2$$

pour tout $t \in [0, T]$ *dés que* f_δ *satisfait* $\|f_\delta - f\| \le \delta$.
On définit $\mathrm{R}_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-tA}\left(\alpha + \mathrm{e}^{-pTA}\right)^{-\frac{1}{p}}$, $t \ge 0$, $\alpha \ge 0$; *il est clair que* $\mathrm{R}_\alpha(t) \in \mathscr{L}(H)$.
Dans ce qui suit, on montre que $\mathrm{R}_\alpha(t)$ *est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème* ***(FVP)***.

Théorème 2.5.

On suppose que $f \in \mathcal{C}_1(A)$, *alors* $(\mathscr{R}_2)$ *a lieu.*

preuve.

On a

$$H_\alpha(t) = \|\mathrm{R}_\alpha(t) f_\alpha - u(t)\| \le \|\mathrm{R}_\alpha(t)(f_\alpha - f)\| + \|\mathrm{R}_\alpha(t) f - u(t)\| = \Delta_1(t) + \Delta_2(t), \tag{2.5}$$

où

$$\Delta_1 = \|\mathrm{R}_\alpha(t)(f_\alpha - f)\| \leq \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \delta, \tag{2.6}$$

et

$$\Delta_2(t) = \|\mathrm{R}_\alpha(t)f - u(t)\|. \tag{2.7}$$

choisissons $\alpha = \sqrt{\delta}$, alors $\alpha(\delta) \longrightarrow 0$, $\delta \longrightarrow 0$, et

$$\Delta_1(t) \leq \delta^{\frac{2p-1}{2p}} \longrightarrow 0, \delta \longrightarrow 0. \tag{2.8}$$

On obtient

$$\Delta_2(t) = \|u_\alpha(t) - u(t)\| \longrightarrow 0, \delta \longrightarrow 0, \tag{2.9}$$

uniformément par rapport à t. En combinant (2.8) et (2.9) on obtient

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathrm{R}_\alpha(t) f_\delta - f\| \longrightarrow 0, \quad \delta \longrightarrow 0. \tag{2.10}$$

Ce qui montre que $\mathrm{R}_\alpha(t)$ est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème **(FVP)**. □

Par des calculs similaires à ceux utilisés pour établir les résultats précédents, on montre que

$$\Delta_2(t) \leq C(p,t,T)\alpha^{\frac{t}{pT}}\|f\|_1, \quad t > 0, \tag{2.11}$$

avec

$$C(p,t,T) = p^{-\frac{pT+t}{pT}}(pT-t)^{\frac{pT-t}{pT}} t^{\frac{t}{pT}} T^{-1} \leq 1.$$

remarques et conclusion

Pour comparer ces résultats avec les résultats obtenus en utilisant les méthodes **Q.R.** de LATTÈS et LIONS, la méthode **Q.R.M.** de GASEWSKI et ZACCARIAS, on rappelle les résultats obtenus par ces deux méthodes :

- **La méthode (Q.R.)** :

$$u_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{T(A-\alpha A^2)} f, \tag{$S_{Q.R.}$}$$

avec le coefficient d'erreur $\mathrm{e}(\alpha) = \mathrm{e}^{1/\alpha}$.

- **La méthode(Q.R.M.)** :

$$u_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{TA(A+\alpha A)^{-1}} f, \qquad (S_{Q.R.M.})$$

avec le coefficient d'erreur $\mathrm{e}(\alpha) = \mathrm{e}^{1/\alpha}$.

1. Dans le cas $p = 1$, la représentation de $u_\alpha(.)$ coïncide avec la représentation $(S_{Q.B.V.})$ obtenue par la méthode **(Q.B.V.)** , avec le même coefficient d'erreur $\mathrm{e}(\alpha)$ d'ordre $\frac{1}{\alpha}$.
2. Dans les méthodes **(Q.R.)** et **(Q.R.M.)** le coefficient d'erreur $\mathrm{e}(\alpha)$ est de l'ordre $\mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha}}$.

   On remarque que pour $p \geq 1$, $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} < \mathrm{e}^{\frac{1}{p}}$ et $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/p} < \frac{1}{\alpha}$ pour $p > 1$.

2.2 La méthode de Quasi-valeurs limites (quasi-boundary value method) [49]

Soit A un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H où $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact de contraction dans H. On considère le problème de trouver $u : [0; T] \to H$ tel que :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & 0 < t < T \\ u(T) = \phi \end{cases} (\mathbf{FVP}) \tag{2.12}$$

pour une certaine valeur finale ϕ dans H. Ce problème n'est pas bien-posé car si une solution unique existe sur $[0; T]$, elle ne va pas dépendre continûment de la valeur finale ϕ : Ce type de problèmes a était considéré par plusieurs auteurs utilisant des approches différentes, comme Lattès et Lions [55], Lavrentiev [41],ils ont approché (**FVP**) en perturbant l'opérateur A.

Un problème similaire a était traité d'une autre manière voir [36], [26]. En perturbant la condition de la valeur finale, ils approchent le problème (**FVP**) par :

$$\begin{cases} u' + Au = 0, & 0 \leq t \leq T \\ \alpha u(0) + u(T) = \phi \end{cases} (\mathbf{Q.B.V.P}) \tag{2.13}$$

une approche similaire est connue comme la méthode des conditions aux limites auxiliaires et donnée dans [14]

Selon cette méthode, G.Clarck et S.Oppenheimer [26], ont approché le problème (**FVP**) par :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T \\ \alpha u(0) + u(T) = \phi \end{cases} \tag{2.14}$$

Ce qui a permis d'obtenir des estimations explicites, concernant l'ordre de convergence des approximations. L'erreur introduite par de petits changements dans la valeur finale ϕ n'est pas exponentielle mais, de l'ordre de $\frac{1}{\alpha}$ sur $[0; T]$: Il montra que ce problème est bien posé pour tout $\alpha > 0$ et que, les approximations u_α sont stables. Il montra aussi, que $u_\alpha(T)$ converge vers ϕ quand tend vers zéro et, que les valeurs $u_\alpha(t)$ convergent sur $[0; T]$ si et seulement si (**FVP**) admet une solution.

Exemple

Soit A un opérateur auto-adjoint positif sur un espace de Hilbert H. On considère le problème de trouver $u : [0, T] \longrightarrow H$, tel que :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & 0 \leq t < T \\ u(T) = f \end{cases} \quad (\mathbf{FVP}) \tag{2.15}$$

pour une certaine valeur finale f dans H.
Ce problème a été traité dans [[36], [26], [67]] de cette manière :

$$\begin{cases} u' + Au = 0, & 0 < t < T \\ \alpha u(0) + u(T) = f \end{cases} \quad (\mathbf{Q.B.V.P}) \tag{2.16}$$

Soit $\{E_\lambda\}_{\lambda>0}$ est une mesure spectrale associée à l'opérateur A dans H, alors pour tout $f \in H$ on peut écrire :

$$f = \int_0^\infty \mathrm{d}E_\lambda f \tag{2.17}$$

Si le problème **(FVP)** (resp**(Q.B.V.P)**) admet une solution u(resp u_α) alors cette solution peut être représentée par :

$$u(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda(T-t)} \mathrm{d}E_\lambda f \tag{2.18}$$

respectivement :

$$u_\alpha(t) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\alpha\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda T}} \mathrm{d}E_\lambda f \tag{2.19}$$

Alors :
$$u'_\alpha(t) = \int_0^\infty \frac{-\lambda e^{-\lambda t}}{\alpha\lambda + e^{-\lambda T}} dE_\lambda f \tag{2.20}$$
Et nous avons l'estimation suivant :
$$\|u_\alpha(t)\| \leq \frac{T}{\alpha(1+\ln(T/\alpha))}\|f\|, \qquad \forall t \in [0,T], f \in H \tag{2.21}$$
où $\alpha < eT$
Maintenant, nous donnons le résultat de convergence.

Théorème 2.6.

Pour tout $f \in H$, $u_\alpha(T)$ converge vers f dans H, lorsque α tend vers zéro.

Théorème 2.7.

*Pour chaque $f \in H$, le problème **(FVP)** a une solution classique donnée par (2.18) si et seulement si la suite $(u'_\alpha(0))_{\alpha>0}$ converge dans H. De plus, on a alors que $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ dans $C^1([0,T],H)$ lorsque α tend vers zéro.*

Théorème 2.8.

*Si la fonction u donnée par (2.18) est une solution classique du problème **(FVB)**, et u_α^δ est une solution du problème **(Q.B.V.P)** pour $f = f_\delta$, telle que $\|f - f_\delta\| < \delta$ alors on a :*
$$\|u(0) - u_\alpha^\delta(0)\| \leq c(1+\ln\frac{T}{\delta})^{-1} \tag{2.22}$$
où $c = T(1 + \|Au(0)\|)$.

Remarque 2.4.

D'après (2.22), pour $T > e^{-1}$ on a :
$$\|u(0) - u_\alpha^\delta(0)\| \leq c(\ln\frac{1}{\delta})^{-1}. \tag{2.23}$$

Remarque 2.5.

*Sous l'hypothèse du théorème ci-dessus, si on note U_α^δ la solution du problème **(FVP)** pour $f - f_\delta$, en utilisant la méthode de Quasi-réversibilité [55] on obtient l'estimation suivante :*
$$\|u(0) - U_\alpha^\delta(0)\| \leq c_1(\ln\frac{1}{\delta})^{-2/3}. \tag{2.24}$$

Théorème 2.9.

S'il existe un $\varepsilon \in]0, 2[$ *tel que :*

$$\int_0^\infty \lambda^\varepsilon e^{\varepsilon\lambda T} \|dE_\lambda f\|^2. \tag{2.25}$$

converge, alors $u_\alpha(T)$ *converge vers* f *d'ordre* $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$ *lorsque* α *tend vers zéro.*

Corollaire 2.2.

S'il existe un $\varepsilon \in]0, 2[$ *tel que :*

$$\int_0^\infty \lambda^{(\varepsilon+2\gamma)} e^{(\varepsilon+2)\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2 \tag{2.26}$$

où $\gamma = \overline{0, 1}$, *converge alors* u_α *converge vers* u *dans* $C^1([0, T], H)$ *d'ordre de convergence* $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$.

2.3 La méthode de Tikhonov [51]

Dans cette partie $A : X \to Y$; désigne un opérateur linéaire et borné défini entre deux espaces de Hilbert X et Y.
Cette méthode de régularisation consiste à résoudre le système linéaire

$$Ax = y \tag{2.27}$$

qui revient à minimiser

$$\|Ax - y\|_Y$$

tels que $x \in X$; $y \in Y$:

Si X est de dimension infinie et l'opérateur A est compact, ce problème de minimisation est aussi mal-posé, voir le lemme suivant :

Lemme 2.2.

Soient $A : X \longrightarrow Y$; *un opérateur linéaire et borné et* $y \in Y$. *Il existe* $\widehat{x} \in X$ *tel que* $\|A\widehat{x} - y\|_Y \leq \|Ax - y\|_Y$, *pour tout* $x \in X$ *si et seulement si* $\widehat{x} \in X$; *est une solution de l'équation :*

$$A^* A\widehat{x} = A^* y \tag{2.28}$$

On se donne $A : X \longrightarrow \mathrm{Y}$; un opérateur linéaire et borné et $y \in \mathrm{Y}$ et on veut déterminer $x^{\alpha} \in X$, qui minimise la fonctionnelle de Tikhonov :

$$J_{\alpha}(x) = \|Ax - y\|^2 + \alpha\|x\|^2 \tag{2.29}$$

On a le théorème suivant :

Théorème 2.10.

Soient $A : X \longrightarrow Y$; un opérateur linéaire et borné et $\alpha > 0$. La fonctionnelle de Tikhonov J_{α} admet un seul minimum $\widehat{x} \in X$. Ce minimum est la solution unique de l'équation

$$\alpha x^{\alpha} + A^* A x^{\alpha} = A^* y \tag{2.30}$$

Pour la démonstration de ce théorème voir [5] p.37.

La solution de l'équation 2.30 peut être écrite sous la forme $x^{\alpha} = R_{\alpha} y$, tel que :

$$R_{\alpha} = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* : \mathrm{Y} \longrightarrow X \tag{2.31}$$

En choisissant un système singulier (μ_j, x_j, y_j) pour l'opérateur compact A, on voit que $R_{\alpha} y$ admet la représentation suivante :

$$R_{\alpha} y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2}(y, y_j)x_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j}(y, y_j)x_j, \quad y \in \mathrm{Y} \tag{2.32}$$

avec : $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2}$. Cette fonction q est appelée la fonction filtre.

Théorème 2.11.

Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire et compact et $\alpha > 0$:

a) L'opérateur $\alpha I + A^* A$ admet un inverse borné. L'opérateur $R_{\alpha} : \mathrm{Y} \longrightarrow X$ défini par 2.31 forme une stratégie de régularisation avec $\|R_{\alpha}\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$. On l'appelle la méthode de régularisation de Tikhonov. $R_{\alpha} Y^{\delta}$ est déterminé comme la solution unique $x^{\alpha,\delta} \in X$ de l'équation du second espèce.

$$\alpha x^{\alpha,\delta} + A^* A x^{\alpha,\delta} = A^* y^{\delta} \tag{2.33}$$

Chaque choix $\alpha(\delta) \longrightarrow 0 (\delta \longrightarrow 0)$ avec $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \longrightarrow 0 (\delta \longrightarrow 0)$ est admissible.

b) Soit $x = A^* z \in \mathrm{Im}(A^*)$ avec $\|z\| \leq E$. On choisit $\alpha(\delta) = \frac{c\delta}{E}$ pour $c > 0$; alors l'estimation suivante est vérifiée :

$$\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c}\right)\sqrt{\delta E} \tag{2.34}$$

c) Soit $x = A^*Az \in \mathrm{Im}(A^*A)$ avec $\|z\| \leq E$. Le choix $\alpha(\delta) = c(\frac{\delta}{E})^{\frac{2}{3}}$, pour $c > 0$, donne l'estimation de l'erreur :

$$\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c}\right) E^{\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}} \tag{2.35}$$

Pour cela, la méthode de régularisation de Tikhonov est optimale pour $\|(A^*)^{-1}x\| \leq E$ où $\|(A^*A)^{-1}x\| \leq E$.

Les valeurs propres de A tendent vers zéro et les valeurs propres de $\alpha I + A^*A$ sont bornées loines de zéro par $\alpha > 0$.

Du théorème précédent, on observe que α a été choisi d'une façon à dépendre de δ et qu'il converge vers zéro quand δ tend vers zéro mais pas plus vite que δ^2.

Théorème 2.12.

Soit $K : X \longrightarrow \mathrm{Y}$ un opérateur linéaire compact et bijectif tel que l'image $\mathrm{Im}(K)$ est de dimension infinie. De plus, soit $x \in X$; et on assume qu'il existe une fonction continue : $[0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ avec $\alpha(0) = 0$; telle que

$$\lim_{\delta \to 0} \|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\|\delta^{\frac{-2}{3}} = 0$$

pour tout $y \longrightarrow \mathrm{Y}$ avec $\|y^{\alpha} - Ax\|$, où $x^{\alpha(\delta),\delta} \in X$ résout 2.33. Alors $x = 0$.

La démonstration détaillée de ce résultat se trouve dans le livre de Kirsch [5].p.39.

La méthode de régularisation de Tikhonov n'est pas optimale pour des hypothèses plus fortes sur la solution x.

Le choix de α dans le théorème 2.11 est mis à priori, c'est-à-dire avant de commencer le calcul de x^{α}, choix à posteriori.

CHAPITRE

3

RÉGULARISATION SPECTRALE TRONQUÉE POUR UN PROBLÈME PARABOLIQUE NON LINÉAIRE MAL POSÉ

3.1 Introduction

Soit H un espace de Hilbert sur le corps des réels ou complexe, et soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur non borné auto-adjoint à domaine dense . Pour $\tau > 0$ et $\phi \in H$ on s'intéresse à la résolution du problème de la valeur finale non linéaire désigné brièvement comme le **FVP** non linéaire,

$$u_t(t) + Au(t) = f(t, u(t)), \quad 0 \leqslant t < \tau \tag{3.1}$$
$$u(\tau) = \phi, \tag{3.2}$$

où $f(\cdot, \cdot)$ est une fonction à valeur dans H définie sur $[0, \tau] \times H$. On sait que le problème ci-dessus est mal-posé (cf.Goldstein [15]) du fait qu'une petite perturbation dans la valeur finale ϕ peut conduire à un grand écart de solution. C'est pourquoi une certaine méthode de régularisation doit être utilisée pour obtenir des solutions approchées stables.

Il existe beaucoup de méthodes de régularisation pour le **FVP** parabolique. Voici quelques-unes des méthodes dans littérature.

(a) Méthode de Quasi-réversibilité : Cette méthode est basée sur la considération d'une perturbation de l'opérateur A et elle a été introduite par Lattès et Lions (cf. [55]) pour le **FVP** homogène linéaire. D'autres auteurs ont également utilisé cette méthode pour le **FVP** homogène linéaire (voir par exemple Boussetila et Rebbani [44], Miller [30] et Showalter [56]). Dans [1], Jana et Nair ont utilisé cette méthode pour le **FVP** linéaire non homogène. Dans [37], Fury a utilisé cette méthode pour des problèmes semi-linéaires non autonomes. Dans [48], Tuan, Trong et Quan ont envisagé une approche similaire pour le **FVP** non linéaire non homogène avec le terme non homogène $f(u(t))$.

(b) Méthode de Quasi-valeur limite : Cette méthode est basée sur la considération d'une perturbation dans la valeur finale et elle a été utilisée par Clark et Oppenheimer (voir [26]), Denche et Bessila (voir [38]), Denche et Djezzar (voir [39]) pour le **FVP** homogène linéaire.

(c) Méthode de régularisation spectrale tronquée : Cette méthode est basée sur la troncature de la représentation spectrale d'un opérateur. Dans [46], Tuan a considéré cette méthode pour le **FVP** homogène linéaire. Cette méthode a été envisagée pour le **FVP** linéaire non homogène (voir par exemple Jana et Nair [2] et Tuan et Trong [47]).

Dans ce travail, on considère la méthode de régularisation spectrale tronquée pour le **FVP** non linéaire non homogène $(3.1)-(3.2)$.

On peut rappeler qu'une fonction $u:[0,\tau]\to H$ est une solution du **FVP** $(3.1)-(3.2)$ si u est différentiable sur $[0,\tau]$ et satisfait $(3.1)-(3.2)$. Nous verrons que si $u(\cdot)$ est une solution de $(3.1)-(3.2)$, alors elle satisfait l'équation intégrale

$$u(t)=\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{(\tau-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\phi-\int\limits_t^\tau\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s))\mathrm{d}s \quad 0\leqslant t\leqslant\tau, \tag{3.3}$$

dans certaines conditions appropriées sur ϕ et $f(\cdot,\cdot)$, où $E_\lambda:\lambda>0$ est la résolution d'identité de l'opérateur A. On définit la solution lisse du **FVP** non linéaire donnée par $(3.1)-(3.2)$ comme la solution de l'équation intégrale (3.3). Notons qu'en raison de la présence de l'opérateur non borné $\varphi\mapsto\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{(\tau-t)\lambda}dE_\lambda\varphi$, le problème de trouver une solution lisse est mal posé. Par conséquent, une méthode de régularisation doit être utilisée pour obtenir des solutions approchées stables. Dans ce travail, on considère la solution régularisée $u_\beta(t,\phi)$ comme la solution de l'équation intégrale obtenue à partir de (3.3) par troncature, c'est-à-dire que $u_\beta(t,\phi)$ est une solution de

$$u_\beta(t,\phi) = \int_0^\beta \mathrm{e}^{(\tau-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\phi - \int_t^\tau \int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u_\beta(s,\phi))\mathrm{d}s \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.4}$$

pour $\beta > 0$. Dans des conditions appropriées sur ϕ et f, l'existence, la régularité et la convergence des solutions régularisées sont prouvées lorsque la valeur finale est aussi bruitée qu' exacte.

Dans la section 2, on donne les résultats préliminaires requis pour cette analyse. Dans la section 3, on définit la solution générale (mild) pour le **FVP** non linéaire et on prouve l'existence d'une solution générale (mild) dans certaines conditions. Dans la section 4, on définit les solutions régularisées. Dans la section 5, on montre la convergence des solutions régularisées vers la solution générale (mild), et on dérive une estimation d'erreur lorsque la valeur finale ϕ est aussi bruitée qu'exacte, et on déduit de nombreux résultats comme cas spéciaux.

3.2 Préliminaires

Tout au long de ce travail, $C([0,\tau];H)$ représente l'espace de Banach de toutes les fonctions continues à valeurs H dans $[0,\tau]$ avec la norme

$$\|v\|_\infty = \sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} \|v(t)\|, \;\; v \in C([0,\tau];H).$$

De plus, $L^1([0,\tau];H)$ désigne l'espace H de toutes les fonctions mesurables de Lebesgue h sur $[0,\tau]$ tel que

$$\int_0^\tau \|h(t)\|\mathrm{d}t < \infty,$$

où l'intégration se fait au sens de Lebesgue. On désigne le domaine et l'image d'un opérateur T par $D(T)$ et $R(T)$, respectivement.

3.2.1 Quelques conséquences du théorème spectral.

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur non borné positif auto-adjoint à domaine dense défini sur l'espace de Hilbert H. On rappelle le théorème spectral (cf. Yosida [32]) que

$$A\varphi = \int_0^\infty \lambda \mathrm{d}E_\lambda\varphi, \;\; \varphi \in D(A)$$

où
$$D(A) = \left\{ \varphi \in H : \int_0^\infty \lambda^2 \mathrm{d}\|E_\lambda \varphi\|^2 < \infty \right\}.$$
De plus, pour toute fonction continue ou continue par partie $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$, l'opérateur $h(A)$ est défini par
$$h(A)\varphi = \int_0^\infty h(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda \varphi, \ \ \varphi \in D(h(A)),$$
Où
$$D(h(A)) = \left\{ \varphi \in H : \int_0^\infty h(\lambda)^2 \mathrm{d}\|E_\lambda \varphi\|^2 < \infty \right\}$$
Et dans ce cas :
$$\|h(A)\varphi\|^2 = \int_0^\infty h(\lambda)^2 \mathrm{d}\|E_\lambda \varphi\|^2, \ \ \varphi \in D(h(A)).$$
En particulier, pour $t \geqslant 0$, l'opérateur e^{tA} est donné par :
$$\mathrm{e}^{tA}\varphi = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda t} \mathrm{d}E_\lambda \varphi, \ \ \forall \varphi \in D(\mathrm{e}^{tA})$$
Où
$$D(\mathrm{e}^{tA}) = \left\{ \varphi \in H : \int_0^\infty \mathrm{e}^{2\lambda t} \mathrm{d}\|E_\lambda \varphi\|^2 < \infty \right\}.$$
De plus, on peut voir pour $t \geqslant 0$
$$\mathrm{e}^{-tA} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda} \mathrm{d}E_\lambda,$$
Où
$$D(\mathrm{e}^{-tA}) = \left\{ \varphi \in H : \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\lambda t} \mathrm{d}\|E_\lambda \varphi\|^2 < \infty \right\} = H.$$
On note aussi que $\{\mathrm{e}^{-tA} : t \geqslant 0\}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés sur H qui est un semi-groupe fortement continu, dont $-A$ est le générateur (cf. Pazy [8]),

et $\|e^{-tA}\| \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$. En utilisant la représentation spectrale, ce qui suit peut être prouvé facilement. Pour $t > 0$,

$$R(e^{-tA}) \subseteq D(e^{tA}) \text{ et } \tag{3.5}$$

$$e^{-tA}e^{tA} = I \quad \text{sur} \quad D(e^{tA}) \text{ et } e^{tA}e^{-tA} = I \quad \text{sur} \quad H. \tag{3.6}$$

Observons que pour $t > 0$, e^{-tA} est un opérateur injectif avec un espace $D(e^{tA})$, et e^{tA} est un opérateur fermé bijectif dont l'inverse est e^{-tA}.

3.3 Solution générale (mild) et existence

On utilise le lemme suivant pour les prochains résultats.

Lemme 3.1.

Soit $F : [0,\tau] \times H \to H$ une fonction mesurable de Borel satisfaisant aux conditions suivantes :
(i) il existe $\varphi_0 \in H$, tel que la fonction $s \mapsto F(s,\varphi_0)$ appartient à $L^1([0,\tau];H)$.
(ii) il existe $c > 0$ tel que $\|F(s,\varphi_1) - F(s,\varphi_2)\| \leqslant c\|\varphi_1 - \varphi_2\|$ pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in H$ et pour tout $s \in [0,\tau]$.
Alors pour chaque $w \in L^1([0,\tau];H)$, la fonction $s \mapsto F(s,w(s))$ appartient à $L^1([0,\tau];H)$.

preuve.

Soit $w \in L^1([0,\tau];H)$. Puisque F est fonction mesurable de Borel, il s'ensuit que la fonction $s \mapsto F(s,w(s))$ est mesurable. Ainsi, en utilisant $(i)-(ii)$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \|F(s,w(s))\|\mathrm{d}s &\leqslant \int_0^\tau \|F(s,\varphi_0)\|\mathrm{d}s + \int_0^\tau \|F(s,w(s)) - F(s,\varphi_0)\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^\tau \|F(s,\varphi_0)\|\mathrm{d}s + c\int_0^\tau \|w(s) - \varphi_0\|\mathrm{d}s < \infty.\end{aligned}$$

Ainsi, $s \mapsto F(s,w(s))$ appartient à $L^1([0,\tau];H)$. □

Théorème 3.1.

*Soit $u : [0,\tau] \to H$ une solution du **FVP** $(3.1)-(3.2)$. On suppose que $f(\cdot,\cdot)$ est la fonction mesurable de Borel satisfaisant l'une des conditions suivantes :*
(i) La fonction $s \mapsto f(s,\varphi)$ est dans $L^1([0,\tau];H)$ pour certains $\varphi \in H$, et

$$\|f(s,\varphi_1) - f(s,\varphi_2)\| \leqslant \kappa\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

pour tout φ_1, φ_2 et pour tout $s \in [0,\tau]$ où $\kappa > 0$.
(ii) *La fonction $f : [0,\tau] \times H \to H$ est continue.*
Alors
(1) *$s \mapsto f(s,u(s))$ appartient à $L^1([0,\tau]; H)$,*
(2) *pour chaque $t \in [0,\tau]$, $\phi - \int_t^\tau e^{-(\tau-s)A} f(s,u(s)) ds$ appartient à $D(e^{(\tau-t)A})$ et*
(3)*u satisfait*

$$u(t) = e^{(\tau-t)A} \left(\phi - \int_t^\tau e^{-(\tau-s)A} f(s,u(s)) ds \right)$$

pour tous $t \in [0,\tau]$.
De plus, si $\phi \in D(e^{\tau A})$, $f(s,u(s)) \in D(e^{sA})$ pour tous $s \in [0,\tau]$ et $s \mapsto e^{sA} f(s,u(s))$ appartient à $L^1([0,\tau], H)$, alors

$$u(t) = e^{(\tau-t)A}\phi - \int_t^\tau e^{(s-t)A} f(s,u(s)) ds \tag{3.7}$$

pour tout $t \in [0,\tau]$.

preuve.

On utilise la procédure de Pazy [8] pour trouver la solution générale (mild) du problème de Cauchy abstrait linéaire non homogène à valeur initiale. Soit

$$w(s) = e^{-(\tau-s)A} u(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau.$$

En prenant la dérivée de w par rapport à s, on obtient

$$w'(s) = A e^{-(\tau-s)A} u(s) + e^{-(\tau-s)A} u'(s).$$

Maintenant utilisant (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} w'(s) &= A e^{-(\tau-s)A} u(s) - A e^{-(\tau-s)A} u(s) + e^{-(\tau-s)A} f(s,u(s)) \\ &= e^{-(\tau-s)A} f(s,u(s)). \end{aligned}$$

si $f(\cdot,\cdot)$ satisfait à la condition (i) par le lemme 3.1, $s \mapsto f(s,u(s))$ appartient à $L^1([0,\tau]; H)$.
si $f(\cdot,\cdot)$ satisfait à la condition (ii), alors $s \mapsto f(s,u(s))$ est continue. Dans tous les cas $s \mapsto f(s,u(s))$ appartient à $L^1([0,\tau]; H)$. Donc $s \mapsto w'(s) = e^{-(\tau-s)A} f(s,u(s))$ appartient à $L^1([0,\tau]; H)$. Maintenant, on intégrant w' de t à τ, on obtient

$$w(\tau) - w(t) = \int_t^\tau e^{-(\tau-s)A} f(s,u(s)) ds,$$

i.e.,

$$\mathrm{e}^{-(\tau-t)A}u(t) = \phi - \int_t^\tau \mathrm{e}^{-(\tau-s)A} f(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

D'après l'équation ci-dessus, il est clair que $\phi - \int_t^\tau \mathrm{e}^{-(\tau-s)A} f(s,u(s))\mathrm{d}s$ appartient à $D(\mathrm{e}^{(\tau-t)A})$ et

$$u(t) = \mathrm{e}^{(\tau-t)A}\left(\phi - \int_t^\tau \mathrm{e}^{-(\tau-s)A} f(s,u(s))\mathrm{d}s\right) \tag{3.8}$$

Puisque : $\mathrm{e}^{(\tau-t)A}$ est un opérateur fermé (voir(3.6)) et $\int_t^\tau \mathrm{e}^{-(\tau-s)A} f(s,u(s))\mathrm{d}s$ existe sous les hypothèses $f(s,u(s)) \in D(\mathrm{e}^{sA})$ pour tous $s \in [0,\tau]$ et $s \mapsto \mathrm{e}^{sA}f(s,u(s))$ appartient à $L^1([0,\tau];H)$, par le théorème de Hille pour $t \in [0,\tau]$ on a :

$$\mathrm{e}^{(\tau-t)A}\int_t^\tau \mathrm{e}^{-(\tau-s)A} f(s,u(s))ds = \int_t^\tau \mathrm{e}^{(s-t)A} f(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

Ainsi, si $\phi \in D(\mathrm{e}^{\tau A}), f(s,u(s)) \in D(\mathrm{e}^{sA})$ pour tous $s \in [0,\tau]$ et $s \mapsto \mathrm{e}^{sA}f(s,u(s))$ appartient à $L^1([0,\tau];H)$ alors de (3.8) on obtient

$$u(t) = \mathrm{e}^{(\tau-t)A}\phi - \int_t^\tau \mathrm{e}^{(s-t)A} f(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

Ceci complète la preuve $\square$

Au vu de la dernière partie du théorème 3.1, on définie la solution générale (mild) de $(3.1)-(3.2)$ comme suit.

Définition 3.1.

*Étant donné $\phi \in D(\mathrm{e}^{\tau A})$ et une fonction mesurable de Borel $f : [0,\tau] \times H \to H$, une fonction $u : [0,\tau] \to H$ est appelé une solution générale du **FVP** non linéaire donnée par $(3.1)-(3.2)$ si*
(i) $f(s,u(s)) \in D(\mathrm{e}^{sA})$ pour tout $s \in [0,\tau]$,
(ii) $s \mapsto \mathrm{e}^{sA}f(s,u(s))$ appartient à $L^1([0,\tau],H)$ et
(iii) $u(t) = \mathrm{e}^{(\tau-t)A}\phi - \int_t^\tau \mathrm{e}^{(s-t)A} f(s,u(s))\mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$

Remarque 3.1.

La définition d'une solution générale (mild), pour le problème parabolique linéaire non homogène donnée par Jana et Nair [2], coïncide avec la définition ci-dessus lorsque $f(t,u(t))$ est remplacé par $f(t)$.

Remarque 3.2.

*Par le théorème 3.1, si $u(\cdot)$ est la solution du **FVP** non linéaire donnée par$(3.1)-(3.2)$ alors c'est une solution générale si*
(i) $\phi \in D(\mathrm{e}^{\tau A})$,
$(ii) f(s,u(s)) \in D(\mathrm{e}^{sA})$ pour tout $s \in [0.\tau]$ et
(iii) la fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{sA} f(s,u(s))$ appartient à $L^1([0,\tau],H)$.
Cependant, une solution générale n'a pas besoin d'être une solution par exemple choisissons $f(\cdot,\cdot)=0$ et $\phi \in D(\mathrm{e}^{\tau A})$ mais $\phi \notin D(A\mathrm{e}^{\tau A})$. Alors la solution générale est de la forme $u(t)=\mathrm{e}^{(\tau-t)A}\phi$. Notons que

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(h)-u(0)}{h}=-A\mathrm{e}^{\tau A}\phi.$$

puisque $\phi \notin D(A\mathrm{e}^{\tau A})$, $u(\cdot)$ n'est pas différentiable en 0. Par conséquence, $u(\cdot)$ n'est pas une solution.

maintenant on prouve l'existence d'une solution générale sous certaines conditions en $f(\cdot,\cdot)$.
Pour cela on utilise les lemmes suivants.

Lemme 3.2.

Soit $T : C([0,\tau];H) \to C([0.\tau];H)$ tel qu'il $c>0$ satisfaisant

$$\|T(v)(t)-T(w)(t)\| \leqslant c\int_t^\tau \|v(s)-w(s)\|\mathrm{d}s \quad 0\leqslant t\leqslant \tau \tag{3.9}$$

pour tous $v,w \in C([0,\tau];H)$. Alors T a un point fixe unique.

***preuve**.*

On montre que l'opérateur T est une contraction par rapport à une nouvelle norme complète sur $C([0,\tau];H)$, de sorte que par le principe de cartographie de contraction T a un point fixe unique. Par hypothèse,

$$\|T(v)(t)-T(w)(t)\| \leqslant c\int_t^\tau \|v(s)-w(s)\|\mathrm{d}s.$$

Par conséquent, pour toute $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} e^{t\eta}\|T(v)(t)-T(w)(t)\| &\leqslant c\int_t^\tau e^{t\eta}\|v(s)-w(s)\|ds \\ &\leqslant c\int_t^\tau e^{(t-s)\eta}e^{s\eta}\|v(s)-w(s)\|ds \\ &\leqslant K_\eta \sup_{0\leqslant s\leqslant \tau} e^{s\eta}\|v(s)-w(s)\|, \end{aligned}$$

Où

$$K_\eta = c\int_t^\tau e^{(t-s)\eta}ds = \frac{c}{\eta}(1-e^{-(\tau-t)\eta}).$$

maintenant, soit

$$\|v\|_\eta = \sup_{0\leqslant s\leqslant \tau} e^{s\eta}\|v(s)\|, \quad v\in C([0,\tau];H).$$

Notons $\|.\|_\eta$ est la norme sur $C([0,\tau];H)$ et elle satisfait

$$\|v\|_\infty \leqslant \|v\|_\eta \leqslant e^{\tau\eta}\|v\|_\infty \quad \forall v\in C([0,\tau];H).$$

Donc, $C([0,\tau];H)$ est un espace de Banach par rapport à $\|.\|_\eta$ et $K_\eta < 1$ chaque fois $\eta > c$. Ainsi, pour $\eta > c$, T est une contraction par rapport à la norme complète $\|.\|_\eta$ sur $C([0,\tau];H)$. □

Lemme 3.3.

Si $h \in C([0,\tau];H)$, alors la fonction $t\mapsto e^{-tA}h(t)$ est continue.

preuve.

Soient $t, t_0 \in [0,\tau]$ et $\psi(t) = e^{-tA}h(t)$. En utilisant $\|e^{-tA}\| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} \|\psi(t)-\psi(t_0)\| &\leqslant \|e^{-tA}(h(t)-h(t_0))\| + \|(e^{-tA}-e^{-t_0A})h(t_0)\| \\ &\leqslant \|h(t)-h(t_0)\| + \|(e^{-tA}-e^{-t_0A})h(t_0)\|. \end{aligned}$$

Puisque pour chaque $\varphi \in H, t\mapsto e^{-tA}\varphi$ (cf. Pazy [8]), $\lim_{t\to t_0}\psi(t) = \psi(t_0)$. □

Théorème 3.2.

Soient $\phi \in D(e^{\tau A})$ et $f : [0,\tau]\times H \to H$ satisfaisant aux conditions suivantes :
(i) Pour chaque $\varphi \in H$, $f(s,\varphi) \in D(e^{sA})$ pour tout $s\in[0,\tau]$ et la fonction
$(s,\varphi)\mapsto e^{sA}f(s,\varphi)$ est mesurable de Borel.

(ii) pour certain $\varphi_0 \in H$, la fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{sA} f(s, \varphi_0)$ appartient à $L^1([O, \tau]; H)$.
(iii) il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\|\mathrm{e}^{sA}(f(s, \varphi_1) - f(s, \varphi_2))\| \leqslant \kappa \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in H$ et pour tout $s \in [0, \tau]$.
Alors la fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{sA} f(s, w(s))$ appartient à $L^1([0, \tau]; H)$ pour tout $w \in C([0, \tau]; H)$, et il existe une unique $u \in C([0, \tau]; H)$ tel que

$$u(t) = \mathrm{e}^{(\tau - t)A}\phi - \int_0^\tau \mathrm{e}^{(s-t)A} f(s, u(s)) \mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

preuve.

Par le lemme 3.1 pour $w \in C([0, \tau]; H)$, la fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{sA} f(s, w(s))$ appartient à $L^1([0, \tau]; H)$. Pour $w \in C([0, \tau]; H)$, soit

$$G(w)(t) = \mathrm{e}^{(\tau - t)A}\phi - \int_t^\tau \mathrm{e}^{(s-t)A} f(s, w(s)) \mathrm{d}s,$$

qui peut aussi s'écrire

$$G(w)(t) = \mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{\tau A}\phi - \mathrm{e}^{-tA} \int_t^\tau \mathrm{e}^{sA} f(s, w(s)) \mathrm{d}s.$$

Puisque $\{\mathrm{e}^{-tA} : t \geqslant 0\}$ est un semi-groupe fortement continu, $t \mapsto \mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{\tau A}\phi$ est continu. De plus, puisque la fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{sA} f(s, w(s))$ appartient à $L^1([0, \tau]; H)$, $t \mapsto \int_t^\tau \mathrm{e}^{sA} f(s, w(s)) \mathrm{d}s$ est continue. Donc, par le lemme 3.3, $G(w) \in C([0, \tau]; H)$ de sorte que l'application $G : C([0, \tau]; H) \to C([0, \tau]; H)$ est bien défini. On prouve que G a un point fixe unique. à cet effet, on observe que

$$\|G(v)(t) - G(w)(t)\| \leqslant \kappa \int_t^\tau \|v(s) - w(s)\| \mathrm{d}s \tag{3.10}$$

pour tous $v, w \in C([0, \tau]; H)$ et pour tout $t \in [0, \tau]$. En effet, en utilisant $\|\mathrm{e}^{-tA}\| \leqslant 1$ et la condition (iii), on a

$$\begin{aligned} \|G(v)(t) - G(w)(t)\| &\leqslant \int_t^\tau \|\mathrm{e}^{-tA}\| \|\mathrm{e}^{sA}(f(s, v(s)) - f(s, w(s)))\| \mathrm{d}s \\ &\leqslant \kappa \int_t^\tau \|v(s) - w(s)\| \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Par conséquent, par le lemme 3.2, G a un point fixe unique, de plus la conclusion du théorème est vraie. $\square$

3.4 Régularisation

Soit $u(\cdot)$ la solution lisse du **FVP** non linéaire donnée par $(3.1)-(3.2)$ selon la définition 3.1. C'est,

$$u(t)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{(\tau-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\phi-\int_t^\tau\int_0^\infty \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s))\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau \tag{3.11}$$

Où $\phi\in D(\mathrm{e}^{\tau A})$ et $f:[0,\tau]\times H\to H$ une fonction mesurable de Borel satisfaisant aux conditions $(i)-(iii)$ dans la définition 3.1. Puisque $\varphi\mapsto\int_0^\infty \mathrm{e}^{(\tau-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\varphi$ un opérateur non borné, c'est clair de (3.11) que la dépendance de $u(\cdot)$ sur ϕ n'est pas continue. Pour obtenir une approximation stable de $u(t)$, une méthode de régularisation doit être utilisée. Dans ce but, on définit $u_\beta(t,\phi)$ comme la solution de l'équation intégrale obtenue à partir de (3.11) par troncature, c'est-à-dire que, $u_\beta(t,\phi)$ est une solution de

$$u_\beta(t,\phi)=\int_0^\beta \mathrm{e}^{(\tau-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\phi-\int_t^\tau\int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u_\beta(s,\phi))\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau \tag{3.12}$$

pour $\beta>0$. On montre que l'équation intégrale non linéaire (3.12) a une solution unique, et la solution est, en effet, une solution régularisée sous certaines hypothèses sur $f(\cdot,\cdot)$. Pour cela, on utilise le lemme suivant.

Lemme 3.4.

Soient $\varphi\in H$ et $0\leqslant t\leqslant s\leqslant\tau$. Alors pour $\beta>0$

$$\left\|\int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\varphi\right\|\leqslant \mathrm{e}^{(s-t)\beta}\|\varphi\|.$$

preuve.

En utilisant le fait que $e^{2(s-t)\lambda} \leqslant e^{2(s-t)\beta}$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \beta$, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^\beta e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda \varphi\right\|^2 &= \int_0^\beta e^{2(s-t)\lambda} d\|E_\lambda \varphi\|^2 \\ &\leqslant e^{2(s-t)\beta} \int_0^\beta d\|E_\lambda \varphi\|^2 \leqslant e^{2(s-t)\beta}\|\varphi\|^2.\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Théorème 3.3.

Soient $\phi \in H$ et $f : [0,\tau] \times H \to H$ une fonction mesurable de Borel satisfaisant aux conditions suivants :
(i) Pour certain $\varphi_0 \in H$, la fonction $s \mapsto f(s,\varphi_0)$ appartient à $L^1([0,\tau];H)$.
(ii)Il existe $\kappa > 0$ tel que $\|f(s,\varphi_1) - f(s,\varphi_2)\| \leqslant \kappa\|\varphi_1 - \varphi_2\|$ pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in H$ et pour tout $s \in [0,\tau]$.
Alors pour chaque $\beta > 0$, il existe un $u_\beta \in C([0,\tau];H)$ unique tel que :

$$u_\beta(t) = \int_0^\beta e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi - \int_t^\tau \int_0^\beta e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s,u_\beta(s)) ds \;\; 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

preuve.

Soit $v \in C([0,\tau];H)$. D'après le lemme 3.1, $s \mapsto f(s,v(s))$ appartient à $L^1([0,\tau];H)$. Par conséquent, en utilisant le lemme 3.4 et le fait que $e^{s\beta} \leqslant e^{\tau\beta}$ pour $\beta > 0$ et $0 \leqslant s \leqslant \tau$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \left\|\int_0^\beta e^{s\lambda} dE_\lambda f(s,v(s))\right\| ds &\leqslant \int_0^\tau e^{s\beta}\|f(s,v(s))\| ds \\ &\leqslant e^{\tau\beta} \int_0^\tau \|f(s,v(s))\| ds < \infty.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'intégral

$$\int_0^\tau \int_0^\beta e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s,v(s)) ds$$

est bien défini pour tout $v \in C([0,\tau];H)$ et pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Maintenant, pour $\beta > 0$, soit

$$G_\beta(v) = \int_0^\beta e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi - \int_t^\tau \int_0^\beta e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s,v(s)) ds, \quad v \in C([0,\tau];H).$$

On observe que

$$\begin{aligned} G_\beta(v)(t) &= \int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\phi - \int_t^\tau\int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,v(s))\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{(\tau-t)A}\chi_{[0,\beta]}(A)\phi - \int_t^\tau \mathrm{e}^{(\tau-t)A}\chi_{[0,\beta]}(A)f(s,v(s))\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{-tA}\phi_\beta - \mathrm{e}^{-tA}\int_t^\tau f_\beta(s,v(s))\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

où $\phi_\beta = \mathrm{e}^{\tau A}\chi_{[0,\beta]}(A)\phi$. Puisque $\{\mathrm{e}^{-tA} : t \geqslant 0\}$ est un C_0 semi-groupe, $t \mapsto \mathrm{e}^{-tA}\phi_\beta$ est continu. De plus, comme $s \mapsto f_\beta(s,v(s))$ appartient à $L^1([0,\tau];H)$, $t \mapsto \int_t^\tau f_\beta(s,w(s))\mathrm{d}s$ est continu. Par conséquent, par le lemme 3.3, $G_\beta(v) \in C([0,\tau];H)$. Ensuite, nous montrons que $G_\beta : C([0,\tau];H) \to C([0,\tau];H)$ a un point fixe unique. Pour cela, nous observons que

$$\|G_\beta(v)(t) - G_\beta(w)(t)\| \leqslant \kappa \mathrm{e}^{\tau\beta}\int_t^\tau \|v(s)-w(s)\|\mathrm{d}s \tag{3.13}$$

pour tous $v, w \in C([0,\tau];H)$ et pour tout $t \in [0,\tau]$. Cela se voit comme suit :

Soient $v, w \in C([0,\tau];H)$ et $t \in [0,\tau]$ en utilisant : $\mathrm{e}^{2(s-t)\lambda} \leqslant \mathrm{e}^{2(s-t)\beta}$ pour $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \tau$; $0 \leqslant \lambda \leqslant \beta$ et la condition (ii), on a :

$$\begin{aligned} \| G_\beta(v)(t) - G_\beta(w)(t) \| &\leqslant \int_t^\tau \left\| \int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda(f(s,v(s)) - f(s,w(s))) \right\| \mathrm{d}s \\ &= \int_t^\tau \left(\int_0^\beta \mathrm{e}^{2(s-t)\lambda}\|\mathrm{d}E_\lambda(f(s,v(s)) - f(s,w(s)))\|^2 \right)^{1/2} \mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_t^\tau \mathrm{e}^{(\tau-t)\beta} \left(\int_0^\beta \mathrm{d}\|E_\lambda(f(s,v(s)) - f(s,w(s)))\|^2 \right)^{1/2} \mathrm{d}s \\ &\leqslant \mathrm{e}^{(\tau-t)\beta}\int_t^\tau \|(f(s,v(s)) - f(s,w(s)))\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \kappa\mathrm{e}^{\tau\beta}\int_t^\tau \|v(s)-w(s)\|\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Ainsi, (3.13) est valable pour tous $v, w \in C([0,\tau];H)$ et pour tout $t \in [0,\tau]$. Par conséquent, par le lemme 3.2, G_β a un point fixe unique, ainsi la conclusion du théorème détient. □

Maintenant, on prouve que la solution de l'équation intégrale (3.12) dépend continuellement de ϕ . Pour cela, on utilisera le lemme suivant qui est une conséquence de l'inégalité bien connue de Gronwall (cf. Perko [35]).

Lemme 3.5.

Si $h : [0, \tau] \to H$ est une fonction continue non négative satisfaisant

$$h(t) \leqslant c_0 + \kappa \int_t^\tau h(s)\mathrm{d}s,$$

pour certains $c_0 > 0$, alors $h(t) \leqslant c_0 \mathrm{e}^{(\tau - t)\kappa}$.

Théorème 3.4.

Soit $f : [0, \tau] \times H \to H$ une fonction mesurable de Borel satisfaisant aux conditions $(i) - (ii)$ du théorème 3.3, et soient $\beta > 0$ et $\phi_1, \phi_2 \in H$. Soient $u_\beta(t, \phi_1)$ et $u_\beta(t, \phi_2)$ les solutions de l'équation intégrale (3.12) avec ϕ remplacé par ϕ_1 et ϕ_2, respectivement. Alors, pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$,

$$\|u_\beta(t, \phi_1) - u_\beta(t, \phi_2)\| \leqslant \mathrm{e}^{(\tau - t)\kappa} \mathrm{e}^{(\tau - t)\beta} \|\phi_1 - \phi_2\|.$$

preuve.

Pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$, soit

$$u_\beta^{(1)}(t) = u_\beta(t, \phi_1), \;\; u_\beta^{(2)}(t) = u_\beta(t, \phi_2), \;\; w_\beta^{1,2}(t) = f(s, u_\beta^{(1)}(t)) - f(s, u_\beta^{(2)}(t)).$$

Maintenant

$$u_\beta^{(1)}(t) - u_\beta^{(2)}(t) = \int_0^\beta \mathrm{e}^{(\tau - t)\lambda} \mathrm{d}E_\lambda(\phi_1 - \phi_2) - \int_t^\tau \int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda} \mathrm{d}E_\lambda(w_\beta^{1,2}(s))\mathrm{d}s.$$

En utilisant le lemme 3.4, on a

$$\left\| \int_0^\beta \mathrm{e}^{(\tau - t)\lambda} \mathrm{d}E_\lambda(\phi_1 - \phi_2) \right\| \leqslant \mathrm{e}^{(\tau - t)\beta} \|\phi_1 - \phi_2\|,$$

$$\left\| \int_0^\beta \mathrm{e}^{(s - t)\lambda} \mathrm{d}E_\lambda(w_\beta^{1,2}(s)) \right\| \leqslant \mathrm{e}^{(s - t)\beta} \|w^{1,2}(s)\|.$$

Par conséquent,

$$\|u_\beta^{(1)}(t) - u_\beta^{(2)}(t)\| \leqslant e^{(\tau-t)\beta}\|\phi_1 - \phi_2\| + \int_t^\tau e^{(s-t)\beta}\|w_\beta^{1,2}(s)\|ds.$$

Par la condition (ii) dans le théorème 3.3 on a

$$\|w_\beta^{1,2}(s)\| \leqslant \kappa\|u_\beta^{(1)}(s) - u_\beta^{(2)}(s)\|.$$

Par conséquent

$$e^{t\beta}\|u_\beta^{(1)}(t) - u_\beta^{(2)}(t)\| \leqslant e^{\tau\beta}\|\phi_1 - \phi_2\| + \kappa\int_t^\tau e^{s\beta}\|u_\beta^{(1)}(s) - u_\beta^{(2)}(s)\|ds.$$

ainsi, par le lemme 3.5,

$$e^{t\beta}\|u_\beta^{(1)}(t) - u_\beta^{(2)}(t)\| \leqslant e^{\tau\beta}\|\phi_1 - \phi_2\|e^{(\tau-t)\kappa}.$$

Donc, on obtient ainsi l'inégalité requise. □

3.5 Estimation de l'erreur de convergence

soit $u(\cdot)$ la solution générale du **FVP** non linéaire donnée par $(3.1)-(3.2)$. notons que la condition sur ϕ et $f(\cdot,\cdot)$ dans la définition 3.1 implique

$$\int_0^\infty e^{2\lambda\tau}d\|E_\lambda\phi\|^2 < \infty \quad \text{et} \int_0^\tau \left\|\int_0^\beta e^{s\lambda}dE_\lambda f(s,u(s))\right\|ds < \infty. \tag{3.14}$$

On prouve la convergence de la solution régularisée à la solution générale et on estime les erreurs en supposant également que ϕ et $f(\cdot,\cdot)$ satisfait l'hypothèse suivante.

Hypothèse (A). Il existe une fonction continue ou continue par morceaux et croissante monotone $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ telle que

(1) $\int_0^\infty g^2(\lambda)e^{2\tau\lambda}d\|E_\lambda\phi\|^2 \leqslant \varrho_g < \infty$,

(2) $\int_0^\tau \left(\int_0^\infty g^2(\lambda)e^{2s\lambda}d\|E_\lambda f(s,u(s))\|^2\right)^{1/2} ds \leqslant \eta_g < \infty$

où ϱ_g et η_g sont des constantes positives.

Il est à noter que l'hypothèse (2) implique que

$$\int_0^\infty g(\lambda)\mathrm{e}^{s\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s))$$

est bien défini presque partout pour $s \in [0,\tau]$ avec

$$\left\| \int_0^\infty g(\lambda)\mathrm{e}^{s\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s)) \right\|^2 = \int_0^\infty g^2(\lambda)\mathrm{e}^{2s\lambda} d\|E_\lambda f(s,u(s))\|^2,$$

et donc la condition dans (2) est équivalente à l'hypothèse que la fonction

$$s \mapsto \left\| \int_0^\infty g(\lambda)\mathrm{e}^{s\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s)) \right\|$$

appartient à $L^1([0,\tau];H)$.

Clairement, si $|g| \leqslant 1$, alors les conditions de (3.14) impliquent les conditions (1) et (2) de l'hypothèse (A). On verra que le cas où g est une fonction non bornée, est plus pertinent pour cette analyse. Pour les choix (i) $g(\lambda) = \mathrm{e}^{p\lambda}$ pour certains $p \geqslant 0$ et (ii) $g(\lambda) = \lambda q$ pour certains $q > 0$, les conditions de l'hypothèse (A) prennent la forme

$(i) \int_0^\infty \mathrm{e}^{2(p+\tau)\lambda}\mathrm{d}\|E_\lambda \phi\|^2 < \infty$ et $\int_0^\tau \left\| \int_0^\infty \mathrm{e}^{(p+s)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s)) \right\| \mathrm{d}s < \infty$

and

$(ii) \int_0^\infty \lambda^{2q}\mathrm{e}^{2\tau\lambda}\mathrm{d}\|E_\lambda \phi\|^2 < \infty$ et $\int_0^\tau \left\| \int_0^\infty \lambda^q \mathrm{e}^{s\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s)) \right\| \mathrm{d}s < \infty,$

respectivement

3.5.1 Analyse des erreurs avec des données exactes

Pour prouver les résultats sur les estimations de l'erreur de convergence, on utilise les deux lemmes suivants.

Lemme 3.6.

Soit $w \in L^1([0,\tau];H)$ et soit $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ une fonction continue ou continue et croissante monotone telle que

$$\int_0^\tau \left(\int_0^\beta g^2(\lambda)\mathrm{e}^{2s\lambda}\mathrm{d}\|E_\lambda w(s)\|^2 \right)^{1/2} \mathrm{d}s < \infty.$$

Alors

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_0^T\left\|\int_\beta^\infty g(\lambda)\mathrm{e}^{s\lambda}\mathrm{d}E_\lambda w(s)\right\|\mathrm{d}s = 0.$$

preuve.

Par l'hypothèse, pour presque tout $s \in [0,\tau]$,

$$\begin{aligned}\left\|\int_\beta^\infty g(\lambda)\mathrm{e}^{s\lambda}\mathrm{d}E_\lambda w(s)\right\|^2 &= \int_\beta^\infty g^2(\lambda)\mathrm{e}^{2s\lambda}\mathrm{d}\|E_\lambda w(s)\|^2\\ &\leqslant \int_0^\infty g^2(\lambda)\mathrm{e}^{2s\lambda}\mathrm{d}\|E_\lambda w(s)\|^2 < \infty\end{aligned}$$

et alors

$$\left\|\int_\beta^\infty g(\lambda)\mathrm{e}^{s\lambda}\mathrm{d}E_\lambda w(s)\right\|^2 \to 0 \quad \textit{quant} \quad \beta\to\infty$$

pour presque tout $s \in [0,\tau]$. par conséquent, on a

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\tau\left\|\int_\beta^\infty g(\lambda)\mathrm{e}^{s\lambda}\mathrm{d}E_\lambda w(s)\right\|\mathrm{d}s = \int_0^\tau\lim_{\beta\to\infty}\left\|\int_\beta^\infty g(\lambda)\mathrm{e}^{s\lambda}\mathrm{d}E_\lambda w(s)\right\|\mathrm{d}s = 0.$$

□

Lemme 3.7.

Soit $g : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ une fonction continue ou continue par morceaux et croissante. Soient $s \geqslant 0$ et $\varphi \in H$ tels que

$$\int_0^\beta g^2(\lambda)\mathrm{e}^{2s\lambda}\mathrm{d}\|E_\lambda\varphi\|^2 < \infty.$$

Alors, pour $\beta > 0$,

$$\left\|\int_\beta^\infty \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\varphi\right\| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t\beta}}{g(\beta)}\left\|\int_\beta^\infty g(\lambda)\mathrm{e}^{s\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\varphi\right\|.$$

preuve.

On a
$$\frac{e^{-t\lambda}}{g(\lambda)} \leqslant \frac{e^{-t\beta}}{g(\beta)}$$
pour tout $\lambda \geqslant \beta$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\beta^\infty e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda \varphi \right\| &= \int_\beta^\infty \frac{e^{-2s\lambda}}{g^2} g^2(\lambda) e^{2s\lambda} d\|E_\lambda \varphi\|^2 \\
&\leqslant \frac{e^{-2t\beta}}{g^2(\beta)} \int_\beta^\infty g^2(\lambda) e^{2s\lambda} d\|E_\lambda \varphi\|^2 = \frac{e^{-2t\beta}}{g^2(\beta)} \left\| \int_\beta^\infty g^2(\lambda) e^{s\lambda} dE_\lambda \varphi \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Le résultat est donc valable. □

Théorème 3.5.

*Soient $\phi \in H$ et $f : [0, \tau] \times H \to H$ une fonction mesurable de Borel satisfaisant aux conditions $(i) - (ii)$ du Théorème 3.3. Soit $u(\cdot)$ la solution douce du **FVP** non linéaire donnée par $(3.1) - (3.2)$ et soit $u_\beta(\cdot) = u_\beta(\cdot, \phi)$ la solution de l'équation intégrale (3.12) pour $\beta > 0$. Soient g, ϕ et $f(\cdot, \cdot)$ satisfont l'hypothèse (A). Alors pour $0 \leqslant t < \tau$,*

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \leqslant e^{(\tau-t)\kappa} C_g(\beta) \frac{e^{-t\beta}}{g(\beta)} \leqslant (\varrho_g + \eta_g) e^{(\tau-t)\kappa} \frac{e^{-t\beta}}{g(\beta)} \tag{3.15}$$

pour tout $\beta > 0$, où

$$C_g(\beta) = \left\| \int_\beta^\infty g(\lambda) e^{\tau\lambda} dE_\lambda \varphi \right\| + \int_0^\tau \left\| \int_s^\infty g(\lambda) e^{s\lambda} dE_\lambda f(s, u(s)) \right\| ds \to 0 \quad \textit{quand} \quad \beta \to \infty.$$

En particulier,
$$\lim_{\beta \to \infty} u_\beta(t) = u(t), \quad 0 \leqslant t < \tau.$$

preuve.

Pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$, tel que :

$$w_\beta(t) = f(t, u(t)) - f(t, u_\beta(t)).$$

de (3.11) et (3.12) on a :

$$\begin{aligned}
u(t)-u_\beta(t) &= \int_\beta^\infty \mathrm{e}^{(\tau-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\phi - \int_t^\tau\int_0^\infty \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s))\mathrm{d}s \\
&+ \int_t^\tau\int_0^\beta \mathrm{e}^{(s_t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u_\beta(s))\mathrm{d}s \\
&= \int_\beta^\infty \mathrm{e}^{(\tau-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\phi - \int_t^\tau\int_\beta^\infty \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s))\mathrm{d}s \\
&- \int_t^\tau\int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}lE_\lambda w_\beta(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

maintenant, en utilisant le lemme 3.7, on a

$$\left\|\int_\beta^\infty \mathrm{e}^{(\tau-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\phi\right\| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t\beta}}{g(\beta)}\left\|\int_\beta^\infty g(\lambda)\mathrm{e}^{\tau\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\phi\right\| \tag{3.16}$$

et

$$\int_t^\tau\left\|\int_\beta^\infty \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s))\right\|\mathrm{d}s \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t\beta}}{g(\beta)}\int_0^\tau\left\|\int_\beta^\infty g(\lambda)\mathrm{e}^{s\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s))\right\|\mathrm{d}s. \tag{3.17}$$

En utilisant aussi, le lemme 3.4, on a

$$\int_t^\tau\left\|\int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda w_\beta(s)\right\|\mathrm{d}s \leqslant \int_t^\tau \mathrm{e}^{(s-t)\beta}\|w_\beta(s)\|\mathrm{d}s.$$

En utilisant la condition (ii) dans le théorème 3.3

$$\int_t^\tau\left\|\int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\phi\right\|\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{e}^{-t\beta}\int_t^\tau \kappa\mathrm{e}^{s\beta}\|u(s)-u_\beta(s)\|\mathrm{d}s. \tag{3.18}$$

Maintenant, en utilisant (3.16),(3.17) et (3.18),on a

$$\begin{aligned}
\|u(t)-u_\beta(t)\| &\leqslant \left\|\int_\beta^\infty \mathrm{e}^{(\tau-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\phi\right\| + \int_t^\tau\left\|\int_\beta^\infty \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda f(s,u(s))\right\|\mathrm{d}s \\
&+ \int_t^\tau\left\|\int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda}\mathrm{d}E_\lambda w_\beta(s)\right\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t\beta}}{g(\beta)}C_g(\beta) + \mathrm{e}^{-t\beta}\int_t^\tau \kappa\mathrm{e}^{s\beta}\|u(s)-u_\beta(s)\|\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus peut s'écrire sous la forme :

$$e^{t\beta}\|u(t)-u_\beta(t)\| \leqslant \frac{C_g(\beta)}{g(\beta)} + \int_t^\tau \kappa e^{s\beta}\|u(s)-u_\beta(s)|ds.$$

Par conséquent, par le lemme 3.5, on a

$$e^{t\beta}\|u(t)-u_\beta(t)\| \leqslant \frac{C_g(\beta)}{g(\beta)} e^{(\tau-t)\kappa},$$

ie.,

$$\|u(t)-u_\beta(t)\| \leqslant e^{(\tau-t)\kappa} C_g(\beta) \frac{e^{-t\beta}}{g(\beta)} \tag{3.19}$$

pour tout $t \in [0,\tau)$, notons que $C_g(\beta) \leqslant \varrho_g + \eta_g$ pour tout $\beta > 0$. Donc, de (3.19), on obtient l'inégalité (3.15). Puisque $\int_0^\infty g^2(\lambda)e^{2\tau\lambda}d\|E_\lambda\phi\|^2 < \infty$, on a

$$\left\|\int_\beta^\infty g(\lambda)e^{\tau\lambda}dE_\lambda\phi\right\|^2 = \int_\beta^\infty g^2(\lambda)e^{2\tau\lambda}d\|E_\lambda\phi\|^2 \to 0 \quad quand \quad \beta \to \infty. \tag{3.20}$$

en utilisant (3.20) et le lemme 3.6, on a $C_g(\beta) \to 0$ quand $\beta \to \infty$. Donc, de (3.19), $\|u(t)-u_\beta(t)\| \to 0$ quand $\beta \to \infty$. □

Remarque 3.3.

Quand $(i) g(\lambda) = e^{p\lambda}, p \geqslant 0$ *et* $(ii) g(\lambda) = \lambda^q, q > 0$, *par le théorème* 3.5 *on a :*
$(i)\|u(t)-u_\beta(t)\| \leqslant (\varrho_g+\eta_g)e^{(\tau-t)\kappa}e^{-(t+p)\beta}$ *et*
$(ii)\|u(t)-u_\beta(t)\| \leqslant (\varrho_g+\eta_g)e^{(\tau-t)\kappa}e^{-t\beta}/\beta^q$,
respectivement, pour $0 \leqslant t < \tau$.

3.5.2 Analyse des erreurs avec des données bruitées

Supposons que les données ϕ *soient bruitées, c'est-à-dire que nous avons* ϕ_ε *à la place de* ϕ *avec*

$$\|\phi-\phi_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$$

*pour certain $\varepsilon > 0$. Soit $u(.)$ la solution général du **FVP** non linéaire donnée par* $(3.1) - (3.2)$ *et soit $u_{\beta,\varepsilon} = u_\beta(\phi_\varepsilon, .)$ la solution de l'équation intégrale* (3.12) *avec ϕ remplacé par ϕ_ε, c'est-à-dire*

$$u_{\beta,\varepsilon}(t) = \int_0^\beta \mathrm{e}^{(\tau-t)\lambda} \mathrm{d}E_\lambda \phi_\varepsilon - \int_t^\tau \int_0^\beta \mathrm{e}^{(s-t)\lambda} \mathrm{d}E_\lambda f(s, u_{\beta,\varepsilon}(s)) \mathrm{d}s$$

pour chaque $\beta > 0$.

Théorème 3.6.

Soient $\phi \in H$ et $f : [0, \tau] \times H \to H$ une fonction mesurable de Borel satisfaisant aux conditions $(i) - (ii)$ du théorème 3.3. *Supposons que g, ϕ et $f(\cdot, \cdot)$ satisfont l'hypothèse (A). Alors*

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leqslant c_g(t) \left(\mathrm{e}^{(\tau-t)\beta} \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}^{-t\beta}}{g(\beta)} \right), \quad 0 \leqslant t < \tau,$$

où $c_g(t) = \mathrm{e}^{(\tau-t)\kappa} \max\{1, \varrho_g + \eta_g\}$.

preuve.

Soit $0 \leqslant t < \tau$ et soit $u_\beta(t) = u_\beta(\phi, t)$ la solution de l'équation intégrale (3.12). Maintenant, en utilisant le théorème 3.4, on obtient

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{(\tau-t)\kappa} \mathrm{e}^{(\tau-t)\beta} \|\phi - \phi_\varepsilon\|$$

pour que

$$\|u_\beta(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{(\tau-t)\kappa} \mathrm{e}^{(\tau-t)\beta} \|\phi - \phi_\varepsilon\| + \|u(t) - u_\beta(t)\|.$$

puisque $\|\phi - \phi_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$

$$\|u_\beta(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{(\tau-t)\kappa} \mathrm{e}^{(\tau-t)\beta} \varepsilon + \|u(t) - u_\beta(t)\|. \tag{3.21}$$

À partir de (3.21), en utilisant le théorème 3.5, on obtient l'estimation requise. □

Remarque 3.4.

En particulier, lorsque (i) $g(\lambda) = \mathrm{e}^{p\lambda}$, $p \geqslant 0$ et (ii) $g(\lambda) = \lambda^q$, $q > 0$, par le théorème 3.6 *on a*
(i) $\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leqslant c_g(t)(\mathrm{e}^{(\tau-t)\beta}\varepsilon + \mathrm{e}^{-(p+t)\beta})$ *et*
(ii) $\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leqslant c_g(t)(\mathrm{e}^{(\tau-t)\beta}\varepsilon + \mathrm{e}^{-\beta t}/\beta^q)$,
respectivement, pour $0 \leqslant t < \tau$.

3.5.3 Estimation des erreurs dans les stratégies de choix des paramètres

à partir du théorème 3.6, on a

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leqslant c_g(t) \left(\mathrm{e}^{(\tau-t)\beta}\varepsilon + \frac{\mathrm{e}^{-t\beta}}{g(\beta)} \right), 0 \leqslant t < \tau,$$

où $c_g(t) = \mathrm{e}^{(\tau-t)\kappa} \max\{1, \varrho_g + \eta_g\}$. notons que, pour un ε fixe et $0 \leqslant t < \tau$, $\lim\limits_{\beta\to\infty} = \varepsilon\mathrm{e}^{(\tau-t)\beta} = \infty$ .Plus loin,

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\beta}}{g(\beta)} = 0,$$

quand $0 < t < \tau$, et pour $t = 0$,

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\beta}}{g(\beta)} = 0,$$

quand g est non borné.

Ainsi, dans le but d'obtenir des solutions régularisées approchées pour un t fixe, il faut choisir le paramètre de régularisation $\beta_t(\varepsilon)$, qui dépend de ε tel que

$$\left(\varepsilon\mathrm{e}^{(\tau-t)\beta_t(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{e}^{-t\beta_t(\varepsilon)}}{g(\beta_t(\varepsilon))} \right) \to 0 \quad \textit{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

Aussi,il est également souhaitable que $\beta_t(\varepsilon)$ satisfait

$$\varepsilon\mathrm{e}^{(\tau-t)\beta_t(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{e}^{-t\beta_t(\varepsilon)}}{g(\beta_t(\varepsilon))} = \inf_{\beta>0} \left(\mathrm{e}^{(\tau-t)\beta_\varepsilon} + \frac{\mathrm{e}^{-t\beta}}{g(\beta)} \right).$$

Cela peut être fait en suivant la méthode adaptée [3].

3.6 Conclusion

On a défini la solution lisse pour le **FVP** non-homogène non linéaire pour le problème parabolique et on a considéré des approchées régularisées pour celui-ci, après on a effectué des estimations de l'erreur lorsque ϕ est exact aussi bien que inexact.

CONCLUSION

Tout d'abord, ce document mémoire est une étude plus motivante basée sur la méthode de régularisation spectrale tronquée et ses applications dans le cadre d'équation intégrale.
Ensuite, ce travail vise à obtenir des approximations régularisées pour la solution de l'équation intégrale et l'analyse des erreurs est effectuée avec une valeur finale exacte et bruitée ϕ.
Finalement, on peut envisager d'appliquer cette méthode à d'autre types d'équations et le choix du paramètres des résultats de convergences peuvent être établis.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.Jana , M.T.Nair : *Quasi-reversibility method for an ill-posed nonhomogeneous parabolic problem*. Numer Funct. Anal. Optim 37 (2016) , pp[1529-1550].

[2] A.Jana , M.T.Nair : *truncated spectral regularization for an ill-posed nonhomogneous parabolic problem.* J.Math.Anl. App. 438 (2016), pp[351-372].

[3] A.Jana, M.T.Nair : *A truncated spectral regularization method for a source identification problem.* To appear in J.Anal .

[4] A.Hasanov and J.L.Mueller, *A numerical method for backward parabolic problems with non-selfadjoint elliptic operators*. Appl. Numer. Math. 37(2001), No.1-2, 55–78.

[5] A.Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. (Ap- plied mathematical sciences ; V.120, Springer, New-York, 1996.

[6] A.N.Tikhonov and V.Y.Arsenin, *Solutions of ill-posed problems*. (Translated from the Russian) Scripta Series in Mathematics. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C. :John Wiley & Sons, New York–Toronto, Ont.–London, 1977.

[7] A.N.Tikhonov, A.V.Goncharsky, V.V.Stepanov, A.G.Yagola, *Numerical me- thods for the solution of ill-posed problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995

[8] A.Pazy : *Semigroups of Linear Operaters and Applications to Partial Differential Equation.* Applied Mathematical Sciences 44, Springer, New York, 1983.

[9] A.S.Carasso, J.G.Sanderson, and J.M.Hyman, *Digital removal of random media image degradations by solving the diffusion equation backwards in time*. SIAM J.Numer. Anal. 15(1978), No. 2, 344–367.

[10] A.S.Carasso, *Logarithmic convexity and the "slow evolution" constraint in ill-posed initial value problems*. SIAM J.Math. Anal. 30(1999), No.3, 479–496 (electronic).

[11] Carlos S. Kubrusly : *Elements of operators theory*, Rio de Janeiro, 2001, ISBN 3-7643-4174-2, pp[387-401].

[12] D.Colton, H.W.Engel, A.K.Louis, J.R.Mc Laughlin and W.Rundell (editors), (2000) *Survey on solution methods for inverse problems*, Springer, Wien, New York.

[13] F.John, *Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a presribed bound*. Comm. Pure Appl. Math. 13(1960), 551–585.

[14] F.JEDRZEJEWSKI : *Introduction aux méthodes numériques.* 2 eme édition, Springer-Verlag, ISBN 2-287-25203-7, France 2005, 2006.

[15] J.A.Goldstein : *Semi-group of linear Operateurs and Application* . Oxford Mathematical Monographs , Oxford University Press, Oxford, 1985.

[16] J.Baumeister. *Stable Solution of Inverse Problems*. Vieweg, Braunschweig, 1987.

[17] J.Baumeister and A.Leit ao, *On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations*. J.Inverse Ill-Posed Probl. 9(2001), No. 1, 13–29.

[18] J.Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.

[19] J.Pierre Aubin, *Analyse fonctionnelle appliquée.* TOME1, 1987, ISBN 2-13-039264-4, pp[16-17].

[20] H.Gajewski and K.Zacharias, *Zur Regularisierung einer Klasse nichtkorrekter Problem bei Evolutionsgleichungen*. J.Math. Anal. Appl. 38(1972), 784–789.

[21] H.W.Engl, M.Hanke, and A.Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer, Dordrecht, 1996.

[22] I.Cioranescu and V.Keyantuo, *Entire regularizations of strongly continuous groups and products of analytic generators*. Proc. Amer. Math. Soc. 128(2000), No.12, 3587–3593.

[23] I.V.Melnikova and S.V.Bochkareva, *C-semigroups and the regularization of an ill-posed Cauchy problem*. (Russian) Dokl. Akad. Nauk 329(1993), No.3, 270–273 ; English transl. : Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 47(1993), No.2, 228–232

[24] I.V.Melnikova and A.I.Filinkov, *Abstract Cauchy problems* : three approaches.Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 120. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.

[25] I.V.Melnikova, Q.Zheng, and J.Zheng, *Regularization of weakly ill-posed Cauchy problems*. J. Inverse Ill-Posed Probl. 10(2002), No.5, 503–511.

[26] G.Clark, S.F.Oppenheimer. *Quasireversibility methods for non-well-posed problems.* Electron. J.Differential Equations. 1994(1994) , pp[1-9].

[27] K.A.Ames and L.E.Payne, *Continuous dependence on modeling for some well-posed perturbations of the backward heat equation*. J.Inequal. Appl. 3(1999), No.1, 51–64.

[28] K.A.Ames, L.E.Payne, and P.W.Schaefer, *Energy and pointwise bounds in some non-standard parabolic problems*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics 134 (2004), no. 1, 1 9.

[29] K.A.Ames, R.J.Hughes : *Structural Stability for Ill-Posed Problems in Banach Space*, Semigroup Forum, Vol. 70 (2005), No 1, 127-145.

[30] K.Miller : *Stabilized quasi-reversibility and other nearly-best-posible methods for non-well posed problems.* Lect. Notes Math. 316, Springer, Berlin.

[31] K.N.Boyadzhiev, *Logarithms and imaginary powers of operators on Hilbert spaces*. Collect. Math. 45(1994), No.3, 287–300.

[32] K.Yosida : *Functional Analysis.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 123, Springer, Berlin, 1980.

[33] L.E.Payne, *Some general remarks on improperly posed problems for partial differential equations*. Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity (Heriot-Watt Univ., Edinburgh, 1972), pp[1–30]. Lecture Notes in Math., Vol.316, Springer, Berlin, 1973.

[34] L.E.Payne, *Improperly posed problems in partial differential equations*. Regional Conference Series in Applied Mathematics, No.22. Society for Industrial and Applied Mathematics,Philadelphia, Pa., 1975

[35] L.Perko : *Differential Equation and Dynamical Systems.* Textts in Applied Mathematics 7, Springer, New York, 2001.

[36] M.Ababna : *Regularization by nonlocal conditions of the problem of the control of the initial condition for evolution operator-dixoerential equations.* Vestnik Belo- russkogo Gosudarstvennogo Universiteta.Seriya 1. Fizika, Matematika, Informatika (1998), no.2, pp[60-63], 81 (Russian).

[37] M.A.Fury : *Modified quas-reversibility method for nonautonomous semilinearproblems.* Electron. J. Diff.Eqns, Conf. 20 (2013) , pp[65-78].

[38] M.Denche, S.Djezzar : *A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems.* J.Math. Anal. Appl. 301 (2005), pp[491-426].

[39] M.Denche, K.Bessila : *A modified quasi-boundary value method for a class of abstract parabolic ill-posed problems bound.*Value Probl. 2006 (2006) , Article ID 37524, pp[1-8].

[40] M.Haase, *Spectral properties of operator logarithms*. Math. Z. 245(2003), No.4, 761–779.

[41] M.M.Lavrentiev : *Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics Springer Tracts in Natural Philosophy.* vol.11, Springer, Berlin, 1967.

[42] M.M.Lavrentév, V.G.Romanov, and S.P.Shishatski, *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*. (Translated from the Russian) Translations of Mathematical Monographs, 64. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[43] N.Boccara : *Analyse fonctionnelle Ellipses.* 1984.

[44] N.Boussetila, F.Rebbani : *A quasi-reversibility method for a class III-posed Cauchy problems.* Georgian Math.J. 14(2007), pp[627-642].

[45] N.Dunford and J.T.Schwartz, *Linear operators*. Part I. General theory. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley Sons, Inc., New York,1988.

[46] N.H.Tuan : *Regularization for a class of backward parabolic problems.* Bull. Math. Anl. Appl .2 (2010), pp[18-26].

[47] N.H.Tuan, D.D.Trong : *A simple regularization method for the ill-posed evalution equation .* Czech. Math. J.61 (2011), pp[85-95].

[48] N.H.Tuan, D.D.Trong, P.H.Quan : *On a backward Cauchy problem associated with continuous spctrum operator.* Nonlinear Anal, Theory Methods Appl. Ser. A , theory Methods 73 (2010) , 1966-1972.

[49] N.Ikhlef, M.H.Dida, 2016, *Régularisation d'une classe de problèmes mal posés non homogène*. Mémoire présentée en vue de l'obtention du diplôme de Master Académique mathématique, université Dr Taher Mouley Saida, pp[56-57].

[50] N.Okazawa, *Logarithms and imaginary powers of closed linear operators*. Integral Equations Operator Theory 38(2000), No.4, 458–500.

[51] N.Teniou, A.Ayadi, 2012, *L'étude d'une classe de problèmes mal posés*, thèse présentée pour l'obtention du diplôme de doctorat en sciences, université Mentouri-Constantine, pp[27-30].

[52] P.T.Nam : *An approximate solution for nonlinear backward parabolic equation.* J.Math. Anal. Appl. 367 (2010), pp[337-349].

[53] R.Azzouz, I.Kemdja, 2019, *Équation Opératorielle De Lyapounov Pour La Dichotomie Exponentielle D'un semi-groupe*. Mémoire présentée en vue de l'obtention du diplôme de Master Académique mathématique, université Mostefa Ben Boulaid Batna2, pp[6-10].

[54] R.E.Ewing, *The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations*. SIAM J. Math. Anal. 6(1975), 283–294.

[55] R.Lattès, J.L.Lions : *Méthode de quasi-reversibilité et application.* Travaux et Rechercherchers Mathématiques 15, Dunod, Paris, 1967.(In french).

[56] R.E.Showalter : *The final value problem for evalution equation.* J. Math. Anl. A ppl. 47(1974) , pp[563-572].

[57] R.E.Showalter, *Cauchy problem for hyperparabolic partial differential equations*. Trends in the theory and practice of nonlinear analysis (Arlington, Tex., 1984), 421–425, North-Holland Math. Stud., 110, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[58] S.Agmon and L.Nirenberg. *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space*. Comm. Pure Appl. Math. 16(1963), 121–239.

[59] S.Piskarev, *Estimates for the rate of convergence in the solution of ill-posed problems for evolution equations*. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 51(1987), No.3, pp[676–687] ; English transl. : Math. USSR-Izv. 30(1988), No.3, pp[639–651].

[60] T.H.Skaggs and Z.J.Kabala, *Recovering the release history of a ground water contaminant plume : Method of quasi-reversibiliry*. Water Resources Research 31(1995),No.11, 2969–2973.

[61] V.A.Kozlov and V.G.Maz'ya, *Iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve the differential equations*. (Russian) Algebra i Analiz 1(1989), No.5, 144–170 ; English transl. : Leningrad Math. J. 1(1990), No.5, 1207–1228.

[62] V.I.Gorbachuk, *Spaces of infinitely differentiable vectors of a nonnegative selfadjoint operator*. (Russian) Ukrain. Mat. Zh. 35(1983), No.5, 617–621.

[63] V.K.Ivanov, I.V.Melnikova, and F.M.Filinkov, *Operator-differential equations and ill-posed problems*. (Russian) Fizmatlit "Nauka", Moscow, 1995.

[64] W.Hengartner, M.Lambert, C.Reischer : *Introduction à LANALYSE FONCTIONNELLE.* 1981, ISBN 2-7605-0293-7, pp[448].

[65] Y. Huang and Q.Zheng, *Regularization for ill-posed Cauchy problems associated with generators of analytic semigroups*. J.Differential Equations 203(2004), No.1, 38–54.

[66] Y.Huang and Q.Zheng, *Regularization for a class of ill-posed Cauchy problems*. Proc. Amer. Math. Soc. 133(2005), No.10, 3005–3012 (electronic).

[67] *Cauchy problem for hyperparabolic partial differential equations*, Trends in the Theory and Practice of Non linear Analysis(Arlington,Tex,1984),North-HollandMath.Stud.,vol.110, North-Holland, Amsterdam, 1985, pp[421–425].