



N° Réf :.....

*Centre Universitaire*

*Abdelhafid Boussouf Mila*

*Institut des Sciences et de Technologie*

*Département de Math et Informatique*

*Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de  
Master*

*En : Mathématique*

*Spécialité : Mathématique Appliqué*

**Observation et Analyse du  
comportement dynamique dans un  
circuit chaotique basé sur un memristor**

*Préparé par :*

*BOULEKROUNE Hadjira*

*Devant le jury :*

Meskine Habiba (M.A.A)

C.U. Abdelhafid Boussouf

Président

Boudjerida Nadjet (M.A.A)

C.U. Abdelhafid Boussouf

Rapporteur

Labeled Boudjemaa (M.A.A)

C.U. Abdelhafid Boussouf

Examineur

*Année universitaire : 2019/2020*

---

# DIDÉCACE

*Mercie Allah de m'avoir donné la capacité, la force et la patience d'aller j'usqu'au bout de rêve*

*Je dédie ce modeste travail à :*

*les meilleurs mamans du monde : ma mère Frikha ,ma deuxième maman Ma chère soeur Feirouz et son marie ou bien mon père Chafik*

*Mon épouse Hamza Ben Aziza Mes frères Kheirdinne,Abd elsatar,Abd elnnacer mercie de m'encourager ,de ma donner l'aide ,l'espoire et la confort.*

*Mes chère sœurs et ses maries :Meriem et Choeib,Hanan et salim,Zaeineb et Mohamed*

*Mes filles et fils de mes sœursAmani,sojoud,Rawad,Adem,Abd elwadoud,Youcef ,Ma fils de mon frère Ayhem*

*Toutes familles de mon épouse :*

*Ma mère Djamila,mon père madani*

*Les frères :Keirdinne,Mohamed,Hocin,Karim.*

*Les sœurs :Amel,Souhila,Salima,Sead,Rima.*

*Les enfants :R,F,A,S,S,S,K,O,S,H,A,T,A*

*Mes meilleurs aimés qui ont participé me doux avant dans ma carrière de l'étude et mon collègue dans cette travail :M,A,S,S,I,N,S,B,R,H*

---

# REMERCIENT

*En premier lieu, je remercie **Allah** le Tout-Puissant pour ma préparer pour cela, pour m'avoir donné le courage et la volonté d'apprendre et d'exploiter les lois de notre univers, la force et la patience pour continuer ce travail de fin d'étude*

*Je remercie mon encadreur **Boudjerida Nadjat** pour tout l'effort qu'il a fournis pour faciliter et aider à accomplir mon travail et pour sa patience.*

*Je remercie les membres de jury **Meskine Habiba** pour avoir accepté de présider et **Labed Boudjema** pour avoir accepté d'examiner notre travail.*

*Je remercie aussi le corps professoral et administratif de l'institut des sciences et de la technologie pour la richesse et la qualité de leur enseignement, qui déploient de grandes efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée*

*Un grand merci à toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail*

*Merci à mes amies et collègue pour leurs encouragements et spécialement*

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remercient</b>	<b>i</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Système dynamique</b>	<b>3</b>
1.1 Définition d'un système dynamique . . . . .	3
1.2 Classification des systèmes dynamiques . . . . .	4
1.2.1 Systèmes dynamiques à temps continu . . . . .	4
1.2.2 Systèmes dynamiques à temps discret . . . . .	4
1.2.3 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs . . . . .	5
1.2.4 Systèmes autonomes et non-autonomes . . . . .	5
1.3 Comportement des systèmes dynamiques . . . . .	5
1.3.1 Flot . . . . .	6
1.3.2 Orbite(trajectoire) . . . . .	7
1.3.3 Portrait de phase . . . . .	7
1.4 Propriétés des systèmes dynamiques . . . . .	7
1.4.1 point d'équilibre . . . . .	7
1.4.2 Ensembles limites . . . . .	8
1.5 Attracteurs . . . . .	8
1.5.1 Bassin d'attraction . . . . .	8
1.5.2 Types d'attracteurs . . . . .	8
1.6 Stabilité . . . . .	10
1.6.1 Classification des points d'équilibres . . . . .	10
1.7 Critère de Routh-Hirwitz . . . . .	15
1.8 Bifurcation . . . . .	16

---

1.8.1	Bifurcation en codimension 1 . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Système chaotique</b>	<b>20</b>
2.1	Introduction . . . . .	20
2.2	propriétés du système chaotique . . . . .	21
2.3	Scénarios chaotiques . . . . .	22
2.3.1	Doublements de période . . . . .	22
2.3.2	L'intermittence vers le chaos . . . . .	22
2.3.3	Le scénario via la quasi-périodicité . . . . .	22
2.4	Identification du chaos . . . . .	23
2.4.1	Exposants de Lyapunov . . . . .	23
2.5	Exemples de systèmes chaotiques . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Comportement dynamique du circuit basé sur un memristor</b>	<b>27</b>
3.1	Présentation du circuit de Chua . . . . .	27
3.2	Circuit de Chua basé sur un memristor . . . . .	28
3.2.1	Memristor . . . . .	28
3.2.2	système memristif . . . . .	29
3.3	La dynamique du circuit basé sur un memristor . . . . .	30
3.3.1	Les équation du système . . . . .	30
3.4	Étude théorique . . . . .	31
3.4.1	L'équilibre du système (3.3) . . . . .	32
3.4.2	Stabilité du système . . . . .	32
3.5	Étude numérique . . . . .	36
3.5.1	Les attracteurs . . . . .	36
3.5.2	Exposant de Lyapunov . . . . .	37
	<b>Bibliographie</b>	<b>38</b>

---

# TABLE DES FIGURES

1.1	Attracteurs réguliers (a. point fixe, b. Le cycle limite, c. un Attracteur quasi périodique (tore)). . . . .	9
1.2	Attracteurs étrange. . . . .	9
1.3	Classification des points d'équilibre. . . . .	10
1.4	Schéma explicatif résumant la notion de stabilité d'un système linéaire à deux dimensions. . . . .	11
1.5	Bifurcation nœud-col. . . . .	17
1.6	Bifurcation fourche. . . . .	17
1.7	Bifurcation transcritique. . . . .	18
1.8	Bifurcation de Hopf sous-critique. . . . .	18
2.1	Sensibilité aux conditions initiales. . . . .	22
2.2	Les attracteurs étranges de quelque système chaotique. . . . .	26
3.1	circuit de Chua . . . . .	28
3.2	système memristifs. . . . .	29
3.3	circuit de Chua basé sur un memristor. . . . .	30
3.4	Attracteurs étrange à 2-scroll avec $c = 0$ . . . . .	36
3.5	Cycle limite à 4-période avec ( $c = 0, 36$ ) . . . . .	36
3.6	Attracteur étrange à 1-scroll avec ( $c = 0, 26$ ) . . . . .	36
3.7	Un sink avec $c = 1, 23$ . . . . .	36
3.8	Le spectre de Lyapunov. . . . .	37

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Un système dynamique décrit des phénomènes évolutif par l'intermédiaire de temps, il est utilisé dans de très nombreux domaines : géophysique, météorologie, astronomie, économie, biologie, sociologie....etc.

Le monde qui nous entoure paraît souvent imprévisible, une partie de cette complexité du monde est maintenant devenue scientifique compréhensible grâce à la théorie du chaos déterministe.

La découverte de la dynamique chaotique remonte aux travaux d'**Henri Poincaré** sur la mécanique céleste et la mécanique statistique, vers 1900. Amis en évidence l'imprévisibilité d'un système de trois corps en interaction.

Ensuite le mathématicien **russe Alexandre Lyapounov** a effectué des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesure de l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines. Lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales [4].

En 1963 **Edward Lorenz** découvre un principe caractéristique du chaos le phénomène de sensibilité aux conditions initiales [14], et décrit un modèle mathématique simple de trois équations différentielles. **Lorenz** a appelé ces systèmes présentent La dépendance sensible sur les conditions initial comme avoir :l'effet papillon [18].

En 1979, **Rössler** a proposé un autre système plus simple (algébrique). Une certaine attention a été axé sur la création efficace du chaos via des systèmes physiques simples tels que les circuits électroniques [16].

En 1983, **Chua** a introduit un circuit électronique simple qui présente un comportement chaotique, qui peut être modélisé par un système des équations différentielles

---

ordinaires non linéaires [17].

Un nouvel attracteur chaotique est inventé par **Chen** et **Ueta** en 1999, pour le modèle **Lorenz**. Ce nouveau modèle chaotique ressemble aux modèles de **Lorenz** et de **Rössler**. Le modèle de **Chen** lui même est modifié par **M.A.Aziz-Alaoui** et il obtient un nouvel attracteur chaotique "non symétrique". Le modèle de **Chen** paraît être plus complexe et plus sophistiqué. Il a la même complexité que le modèle de **Lorenz**, ils sont tous les deux à trois dimensions, autonomes avec seulement deux termes du second degré, cependant ils ne sont pas topologiquement équivalents [18].

Dans ce travail on va proposer un nouveau système memristive en remplaçant la diode dans la circuit de chua avec un memristor .Contrairement aux système chaotique conventionnels, le système chaotique basé sur le memristor a un ensemble d'équilibre dont la stabilité est dépend de l'état initial de la memristor. Ensuite on va faire l'étude théorique et numérique de ce système.

Ce mémoire est constitué de : une introduction et de trois chapitres :

- **le premier Chapitre** : on va rappeler quelques notions de systèmes dynamiques, la stabilité et les différents types de bifurcations en codimension 1 .
- **le deuxième Chapitre** : On va découvrir et définir le chaos , présenter leurs propriétés, leurs scénarios et identifications.
- **le troisième Chapitre** : on va étudier un système à comportement dynamique dans un circuit chaotique basé sur un memristor.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## SYSTÈME DYNAMIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons les notions et les éléments de base du système dynamique, la stabilité d'un système linéaire et non linéaire, aussi nous présentons la bifurcation en codimension 1 (neoud-col, transcritique, fourche et la bifurcation de Hopf sous-critique).

### 1.1 Définition d'un système dynamique

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant  $t_0$  ;
- de sa loi d'évolution.

**Définition 1.1.1.** *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet  $(X; T; f)$  constitué de l'espace d'état  $X$ , du domaine temporel  $T$ , et d'une application de transition d'état  $f : X \times T \rightarrow T$ , qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant.*

*Donc, on peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continu), ou par rapport à une autre variable (système discret).*

## 1.2 Classification des systèmes dynamiques

### 1.2.1 Systèmes dynamiques à temps continu

Dans le cas continu un système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x}_t = f(x, t, \lambda), x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^q \quad (1.1)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne la dynamique du système..

$\mathbb{R}^n$  est l'espace des phases.

$\mathbb{R}^q$  est l'espace des paramètres.

**exemple 1.2.1.** :L'oscillateurs de Duffing

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \eta \cos \omega t \end{cases}$$

où  $\delta$  et  $\eta$  sont des paramètres physiques réels. L'espace des phases est  $\mathbb{R}^2$  et L'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^3$

**exemple 1.2.2.** :L'application de Hénon :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

### 1.2.2 Systèmes dynamiques à temps discret

Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une application (fonction itérative) sous la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), x_k \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^q \quad (1.2)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  indique la dynamique du système en temps discret.

### 1.2.3 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs

En physique, un système **conservatif** est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système **dissipatif** est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, et pour préciser cette définition, on dit qu'un système déterministe est **conservatif**, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale  $x_0$  a un et un seul état final  $x(t)$ ; il faut pour cela qu'il existe une application bijective de l'espace des phases.

$$\begin{aligned}\varphi : X \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow X, \\ (x, t) &\mapsto \varphi_t(x) = \varphi(x, t).\end{aligned}$$

qu'on appelle **flot**.

**Remarque 1.2.1.** *Si le système est **dissipatif**, le flot  $\varphi$  n'est pas bijectif et il existe en général un ou plusieurs attracteurs dans l'espace des phases du système.*

### 1.2.4 Systèmes autonomes et non-autonomes

**Définition 1.2.1.** *Un système différentielle est dit autonome si  $f$  ne dépend pas explicitement de  $t$ . Dans ce cas on l'écrira :*

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

*Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome*

**exemple 1.2.3.** *Soit l'équation*

$$\dot{x} = -\frac{t}{1+x}$$

*cette équation est non autonome.*

## 1.3 Comportement des systèmes dynamiques

Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variables d'état, qui est la propriété de définir complètement l'état du système à un instant donné. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état.

### 1.3.1 Flot

Considérons le système autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1.3)$$

Pour assurer l'existence et l'unicité du flot du système (1.3) nous avons le théorème suivant :

**Théorème 1.3.1.** (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

- $f$  une fonction Lipschitzienne

$$\forall x, y \in E : \exists K \in \mathbb{R}^* : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

- $f$  une fonction localement Lipschitzienne

$$\forall x_0 \in E : \exists \text{ voisinage de } x_0, N_\varepsilon(x_0) \subset E; \forall x, y \in N_\varepsilon(x_0) : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, N_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | x - x_0| < \varepsilon\}$$

**Remarque 1.3.1.** (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit  $f$  une fonction localement Lipschitzienne avec  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $U \in \mathbb{R}^n$   
Alors, pour tout  $x_0 \in U$  ; il existe une solution maximale unique  $x(t)$  au système (1.3) tel que  $x(0) = x_0$

**Définition 1.3.1.** La correspondance  $\varphi_t : x_0 \mapsto x(t)$  qui associe à une donnée initiale  $x_0$  la valeur de la solution maximale  $x(t)$  au temps  $t$ , qui correspond à cette donnée initiale, est appelée le flot au temps  $t$  du champs de vecteurs  $f$ .

Le flot du champ de vecteurs est l'application qui associe à  $(t, x)$  la solution maximale  $x(t)$  au temps  $t$  qui correspond à la donnée initiale  $x : (t, x) \mapsto \varphi(t, x) = \varphi_t(x) = x(t)$  Le flot est dit complet lorsque cette correspondance est définie pour toute valeur de  $t \in ]-\infty, +\infty[$ .

**Remarque 1.3.2.**  $\varphi_t(x_0)$  est vérifié :

1. (Régularité du flot)

Si  $f$  est de classe  $\zeta^K$  le flot est lui-même de classe  $\zeta^K$ .

2. (Transitivité du flot) Le flot vérifie, pour tous  $t$  et  $s \in \mathbb{R}^+$

$$\varphi_t(\varphi_s) = \varphi_{s+t}$$

3.  $\varphi_0(x_0) = x_0$ .

### 1.3.2 Orbite(trajectoire)

**Définition 1.3.2.** Soient  $(M, \varphi_{t \in G})$  un système dynamique et  $x$  un état de l'espace des phases. On appelle trajectoire d'un point  $x$  de  $M$  l'application définie sur  $G$  et à valeurs dans  $M$  par :

$$\varphi : G \rightarrow M$$

$$t \rightarrow \varphi^t(x)$$

Donc, la trajectoire est une solution du système différentiel.

### 1.3.3 Portrait de phase

**Définition 1.3.3.** Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace des phases. Etant donné un système dynamique, sans résoudre les équations, on peut toujours, à un instant  $t$ , représenter graphiquement (à l'aide de flèches) le champ des  $\dot{x}$  (le champ des vitesses si  $x$  sont des coordonnées). La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour avoir une idée du comportement du système.

## 1.4 Propriétés des systèmes dynamiques

### 1.4.1 point d'équilibre

**Définition 1.4.1.** Un point d'équilibre de (1.3) est un point  $x^*$  de l'espace des phases vérifiant  $f(x^*) = 0$  (ou pour tout  $\varphi(t, x^*) = x^*$ ) sinon on dit que  $a$  est un point ordinaire.

**Remarque 1.4.1.** Parmi les points ordinaires on distingue les points périodiques et les points récurrents.

1. Un point ordinaire  $x^*$  est dit périodique s'il existe  $T > 0$  tq  $(T, x^*) = x^*$ .

2. Un point ordinaire et non périodique  $a$  est dit récurrent si pour tout voisinage  $V$  de  $x^*$  et tout  $T \in \mathbb{R}$  il existe  $t > T$  tq  $\varphi(t, x^*) \in V$

### 1.4.2 Ensembles limites

- A. **Ensemble  $\omega$ -limite** : Un point  $a \in U$  est un point  $\omega$ -limite d'un trajectoire  $\varphi(\cdot, x_0)$  de (1.3), s'il existe une suite  $(t_n) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$  tq  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, x_0) = a$   
L'ensemble de tout les points  $\omega$ -limite d'une trajectoire  $\gamma_{x_0}$  est appelé ensemble  $\omega$ -limite de  $\gamma_{x_0}$  et noté  $\omega(\gamma_{x_0})$  ou  $\omega(x_0)$ .
- B. **Ensemble  $\alpha$ -limite** : Un point  $b \in U$  est un point  $\alpha$ -limite d'un trajectoire  $\varphi(\cdot, x_0)$  de (1.3), s'il existe une suite  $(t_n) \rightarrow -\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$  tq  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, x_0) = b$   
L'ensemble de tout les points  $\alpha$ -limite d'une trajectoire  $\gamma_{x_0}$  est appelé ensemble  $\alpha$ -limite de  $\gamma_{x_0}$  et noté  $\alpha(\gamma_{x_0})$  ou  $\alpha(x_0)$ .

## 1.5 Attracteurs

**Définition 1.5.1.** Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire un ensemble vers laquelle évolue un système quelles que soient ses conditions initiales.

Mathématiquement, l'ensemble  $A$  est un attracteur si :

- Pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(x_0, t) = \varphi_t(x)$  resta dans  $U$  si  $x_0 \in V$
- $\cap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$
- Il existe une orbite dense dans  $A$ .

### 1.5.1 Bassin d'attraction

Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur considéré, c'est l'ensemble

$$W = \cup \varphi_t(V), t < 0.$$

### 1.5.2 Types d'attracteurs

On distingue deux types d'attracteurs : attracteur régulier et attracteur étranqué (chaotique).

#### 1. Attracteurs réguliers :

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de système non chaotique et

peuvent être de trois sortes :

- a. **Le point fixe** : c'est l'attracteur le plus simple, il est représenté par un point dans l'espace des phases.
- b. **Cycle  $\omega$ -limite (attracteur périodique)** : C'est une trajectoire fermée qui attire toutes les trajectoires proches.
- c. **Attracteur quasi périodique (tore)** : C'est une trajectoire qui s'enroule le long d'un tore et remplit sa surface de manière dense et finira par se refermer sur elle-même au bout d'un temps infini.

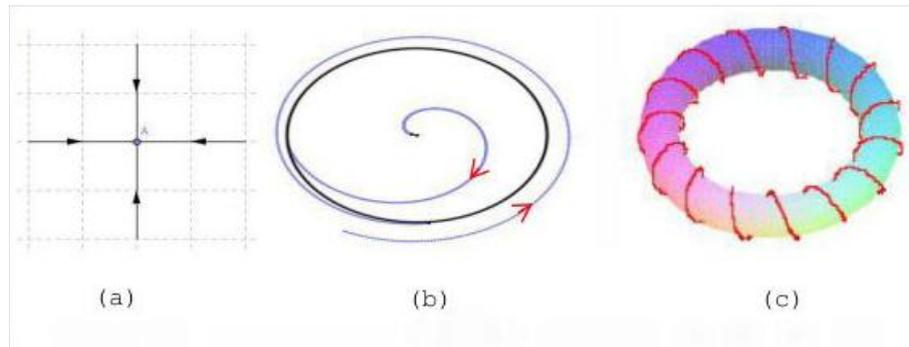


FIGURE 1.1 – Attracteurs réguliers (a. point fixe, b. Le cycle limite, c. un Attracteur quasi périodique (tore)).

## 2. Attracteurs étrange :

L'attracteur étrange est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes chaotiques, il a été introduit par Ruelle et Takens.

Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :

- a. Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nul.
- b. La dimension de l'attracteur étrange est fractale (non entière) pour un système continue autonome  $2 < d < n$ ,  $n$  la dimension de l'espace des phases.
- c. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires initialement voisines finissent toujours par s'écarteler l'une de l'autre).

## 1.6 Stabilité

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Il existe quelques concepts pour la stabilité

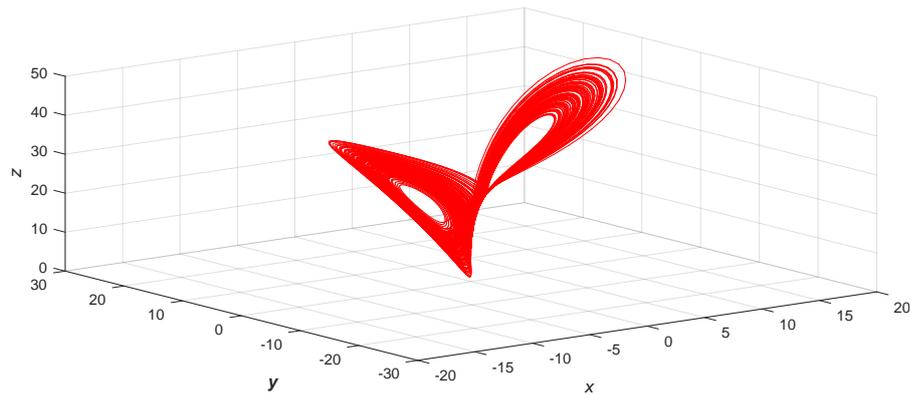


FIGURE 1.2 – Attracteurs étrange.

des systèmes dynamiques tels que la stabilité au sens de Lyapunov.

## 1.6.1 Classification des points d'équilibre

### Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots)$  et  $A$  une matrice constante inversible. Soient  $\lambda_1 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  les valeurs propres de  $A$ .

1. Si les valeurs propres  $\lambda_i$  sont réelles et de même signe, Le point  $x^*$  est appelée : **nœud instable** si  $\lambda_i > 0$ , et **nœud stable** si  $\lambda_i < 0$ .
2. Si les valeurs propres  $\lambda_i$  sont réelles, non nulles et de signe différent, la Le point  $x^*$  est appelée **point selle**.
3. Si les valeurs propres  $\lambda_i$  sont complexes, Le point  $x^*$  est appelée :
  - a. **foyer stable** si  $\Re(\lambda_i) < 0$
  - b. **foyer instable** si  $\Re(\lambda_i) > 0$
  - c. **centre** si  $\Re(\lambda_i) = 0$

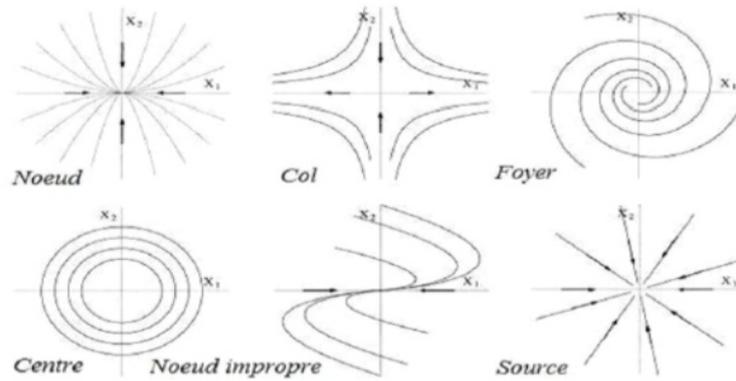


FIGURE 1.3 – Classification des points d'équilibre.

**Remarque 1.6.1.** Comme on ne peut pas toujours trouver des expressions faciles à manipuler de ces valeurs propres, on utilise le déterminant et la trace de la matrice  $A$  pour pouvoir prédire le comportement des systèmes au voisinage des points. On sait que :  $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$  et  $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$

L'équation caractéristique peut prendre donc la forme :  $P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2 = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) = 0$

Il en suit que :  $\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{(\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2}$  En se basant sur les résultats énoncés précédemment on trouve que :

- Si  $\det(A) < 0$  alors on aura 2 valeurs propres réelles l'une positive et l'autre négative ce qui implique que le point d'équilibre est **un point selle** et donc **instable**.
- Si  $\det(A) > 0$  mais  $\text{tr}(A) > 0$ , on distingue deux cas selon le signe du discriminant :
  - Si  $\Delta = (\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A) \geq 0$  donc la matrice  $A$  admet deux valeurs propres réelles positives d'où le point d'équilibre est **un noeud instable**.
  - Si  $\Delta < 0$ , la matrice  $A$  admet deux valeurs propres complexes conjuguées avec une partie réelle positive (car  $\text{tr}(A) > 0$ ) donc le point d'équilibre est **un foyer instable**.
- Si  $\det(A) > 0$ , avec  $\text{tr}(A) < 0$ , on distingue aussi deux cas selon le signe du discriminant :
  - Si  $\Delta \geq 0$ , la matrice  $A$  admet deux valeurs propres réelles négatives donc le point d'équilibre est **un noeud stable**.
  - Si  $\Delta < 0$ , la matrice  $A$  admet deux valeurs propres complexes à partie réelle négative

donc le point d'équilibre est **un foyer stable**.

- Si  $\det(A) > 0$ , avec  $\text{tr}(A) = 0$ , le point d'équilibre est un centre. L'ensemble de ces cas peut être résumé par un graphique dans le domaine  $\text{tr}(A)$ ,  $\det(A)$  où la parabole a pour équation  $(\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A)$

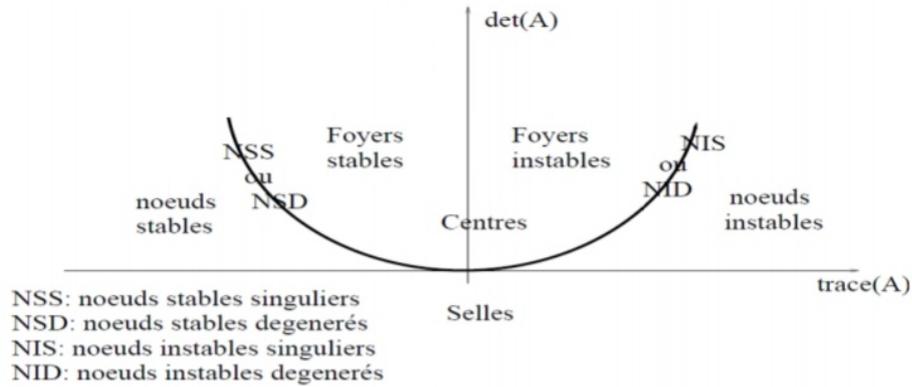


FIGURE 1.4 – Schéma explicatif résumant la notion de stabilité d'un système linéaire à deux dimensions.

### Cas d'un système dynamique non linéaire

Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1.4)$$

avec  $f$  une fonction non linéaire.

**Définition 1.6.1.** *Stabilité locale simple et asymptotique* le point d'équilibre  $x_0$  du système (1.4) est :

. *stable au sens de Lyapunov* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.5)$$

. *asymptotiquement stable* si :

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x_0\| = 0$$

. *exponentiellement stable* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < a \|x(t_0) - x\| \exp(-bt), \forall t > t_0$$

. Un équilibre qui n'est pas stable est dit *instable*.

### La stabilité en dimension $n$ quelconque

On sait déjà que l'étude de la stabilité dans le cas des systèmes non linéaires pose un problème très difficile ; en effet, en raison de leur comportement assez compliqué, les méthodes utilisées dans le cas linéaire ne sont plus applicables. Cependant, Lyapunov et autres ont remarqué par l'étude des trajectoires des courbes intégrales au voisinage de l'équilibre que dans la majorité des cas, les points d'équilibre des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux mêmes types de points d'équilibre des systèmes linéaires. Donc l'étude d'un système linéaire est aisée puisqu'elle se résout dans un critère purement algébrique. De ce fait, la méthode la plus classique pour la détermination de la stabilité non linéaire du point d'équilibre se réduit à la linéarisation du système en ce point.

Pour étudier la stabilité d'un système dynamique non linéaire (1.3) on a deux méthodes :

- Méthode indirecte basé sur la linéarisation de la fonction  $f$ .
- Méthode directe basée sur l'utilisation d'une fonction appelé fonction de Lyapunov.

#### 1- Méthode indirecte par la linéarisation

Considérons le cas général d'un système d'équations différentielles autonomes (1.3).

où  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $\zeta^1(D)$  et  $D$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  contenant le point d'équilibre du système, i.e :

$$f(0) = 0$$

Par le théorème de la moyenne, nous avons

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x$$

où  $z_i$  est un point du segment joignant  $x$  et l'origine. Cette égalité est vraie pour tout  $x \in D$  tel que le segment  $x$  et l'origine reste dans  $D$ . Comme  $f(0) = 0$ , nous pouvons écrire :

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right]x$$

D'où

$$f(x) = Ax + g(x)$$

Avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \quad \text{et} \quad g_i(x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x$$

La fonction  $g_i (i = 1, \dots, n)$  vérifié :

$$|g_i(x)| \leq \left\| \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] \right\| \|x\|$$

et par la continuité de la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , on remarque que :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$$

Cela signifie que dans un voisinage de zéro suffisamment petit, on peut approcher le système (3.3) par son linéarisé

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \quad (1.6)$$

Le théorème qui suit, donne une méthode indirecte de Lyapounov, en utilisant la linéarisation (1.6) du système (3.3) peut dans certain cas apporter une réponse au problème de la stabilité locale. Plus précisément :

**Théorème 1.6.1.** Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système (3.3)

où,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $\zeta^1(D)$ , et  $D$  un voisinage de zéro,  $(\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n)$  les valeurs propres de  $A$ .

Avec :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=0}$$

Alors :

1- L'origine est asymptotiquement stable si  $\Re(\lambda_i) < 0$  pour toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$ .

2- L'origine est instable si  $\Re(\lambda_i) > 0$  pour au moins une valeur propre  $\lambda_i$  de  $A$ .

Notons que ce théorème ne permet pas de conclure sur la stabilité du système lorsque  $\Re(\lambda_i) \geq 0$  pour tout  $i$  et  $\Re(\lambda_i) = 0$  pour un certain  $i$ .

## 2- méthode de Lyapunov (méthode directe)

Cette méthode basée sur utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapunov.

**Théorème 1.6.2. (Fonction de Lyapunov et stabilité globale) :[6]**

Si  $x^*$  est un point d'équilibre du système et si la fonction  $V$  de classe  $C^1$

$$V : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty[$$

est telle que :

- $V(x^*) = 0$  et  $V(x) > 0$  pour  $x \neq x^*$ .
- $V$  décroît le long de toutes les trajectoires ( $\frac{dV}{dt} \leq 0$ ).

Alors  $x^*$  est stable au sens de Lyapunov. Si de plus pour  $x \neq x^*$ ,  $\frac{dV}{dt} < 0$ , alors  $x^*$  est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Si on suppose encore que  $V$  tend vers l'infini lorsque  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de  $x^*$ , tendent vers  $x^*$  (on dit que  $x^*$  est globalement asymptotiquement stable), mais si  $\frac{dV}{dt} > 0$  pour  $x \neq x^*$  alors  $x^*$  est instable.  $V$  est appelé fonction de Lyapunov du système.

Il n'y a aucune méthode générale pour déterminer une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

**Exemple :** (Fonction Lyapunov)

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + ax(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= -x + ay(x^2 + y^2), \end{cases}$$

ce système un point d'équilibre unique (0,0).

Soit  $V = x^2 + y^2 > 0$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2(x\dot{x} + y\dot{y}) \\ &= 2(x(y + ax(x^2 + y^2)) + y(-x + ay(x^2 + y^2))) \\ &= 2(xy + ax^2(x^2 + y^2) - xy + ay^2(x^2 + y^2)) \\ &= 2a(x^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$

D'où, d'après le théorème de Lyapunov :

- Si  $a < 0$ , le point d'équilibre (0,0) à l'origine est asymptotiquement stable.

- Si  $a = 0$ , le point d'équilibre  $(0,0)$  est stable (ici les trajectoires sont des cercles).
- Si  $a > 0$ , le point d'équilibre  $(0,0)$  est instable.

## 1.7 Critère de Routh-Hirwitz

1- On va exprimer le polynôme caractéristique sous la forme suivante :

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

### 2- Condition nécessaire pour la stabilité du système

Tous les coefficients sont positifs ou ils ont le même signe. Si un des coefficients est zéro ou négatif, et au moins un autre coefficient est positif, il existe au moins une racine imaginaire avec une partie réelle positive.

### 3- Condition suffisante pour la stabilité du système

Tous les éléments de la première colonne de Routh sont positifs ou ils ont le même signe. La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du système en boucle fermée est que les coefficients du polynôme caractéristique et les éléments de la première colonne de Routh - Hurwitz doivent être positives ou doivent avoir le même signe. Pour un polynôme d'ordre 4, le critère de Routh va devenir :

a- Tous les coefficients  $a_0, a_1, a_3, a_4$  sont positifs.

b- Le déterminant de Routh est :

$$(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0$$

**Exemple :**(Critère de Routh-Hirwitz) Par le critère de Routh Hurwitz, déterminer la stabilité du système représenté par l'équation suivante :

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 2 = 0$$

On compare l'équation avec le polynôme caractéristique , on obtient :

$$0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 2, a_4 = 2$$

Tous les coefficients  $a$  sont positives **Condition nécessaire** pour la stabilité du système.

On va former la colonne de Routh comme suite :

$$\begin{array}{r} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \\ 2 & & \end{array} .$$

Tous les coefficients de la première colonne Routh sont positives : **Condition suffisante** pour la stabilité du système

**Alternative :**  $(10 - 2) * 2 - 4 * 2 = 8 > 0$  : **Système stable**

## 1.8 Bifurcation

Soit le système :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

**Définition 1.8.1.** Soit un système dynamique non linéaire de dimension  $n$  et de paramètre de contrôle  $\mu$  et soit  $x^*$  sa solution.

Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $x^*$  du système (1.7) lorsqu'on modifie  $\mu$ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

### 1.8.1 Bifurcation en codimension 1

On parle ici seulement de la bifurcation de codimension un et il existe quatre types de bifurcations de codimension un, qui correspondent tous à des comportements génériques.

#### 1. Bifurcation noeud-col

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre  $\mu$  est le polynôme quadratique  $f(x) = \mu - x^2$

Considérons le système (1.7)

Si on peut réécrire la fonction  $f$  sous la forme :

$$f(x, \mu) = \mu - x^2$$

les points fixes de cette dernière équation sont :  $x_{\pm}^* = \pm \sqrt{\mu}$

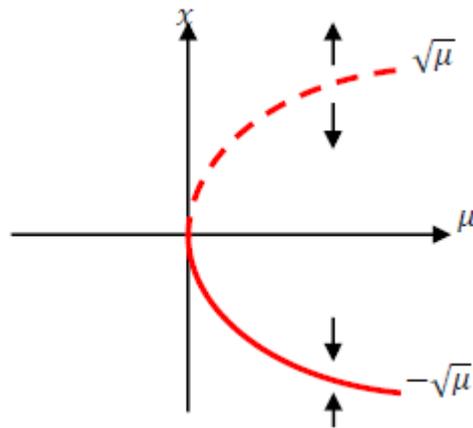


FIGURE 1.5 – Bifurcation nœud-col.

Alors :

- si  $\mu < 0$  : il n'y a pas point d'équilibre.
- si  $\mu = 0$  : l'origine est le seul point d'équilibre.
- si  $\mu > 0$  : il existe deux équilibres :  $x_+^* = \sqrt{\mu}$  qu'est stable et l'autre  $x_-^* = -\sqrt{\mu}$  instable.

## 2. Bifurcation fourche (Pitchfork)

Soit

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2)$$

Où  $\mu$  est un paramètre réel.

Trois cas sont possibles :

- si  $\mu < 0$  : l'origine est l'unique point d'équilibre qui est stable.
  - si  $\mu = 0$  : l'origine est l'unique point d'équilibre et est stable.
  - si  $\mu > 0$  : on a trois points d'équilibres, l'origine qu'est instable et deux autres points d'équilibres  $x_+^* = +\sqrt{\mu}$  et  $x_-^* = -\sqrt{\mu}$  qui sont instables.
- ## 3. Bifurcation transcritique (échange de stabilité)

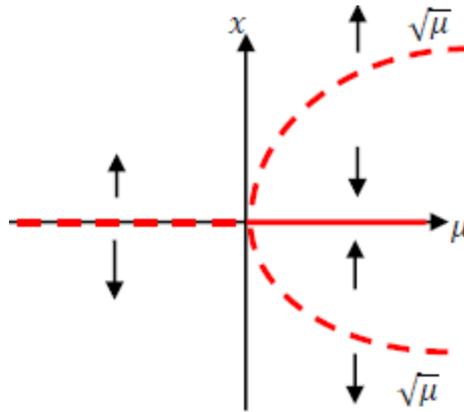


FIGURE 1.6 – Bifurcation fourche.

Soit l'équation différentielle :

$$f(x, \mu) = \mu x + x^2$$

$\mu$  est un paramètre réel, on a toujours deux équilibres  $0$  et  $x^* = -\mu$ .

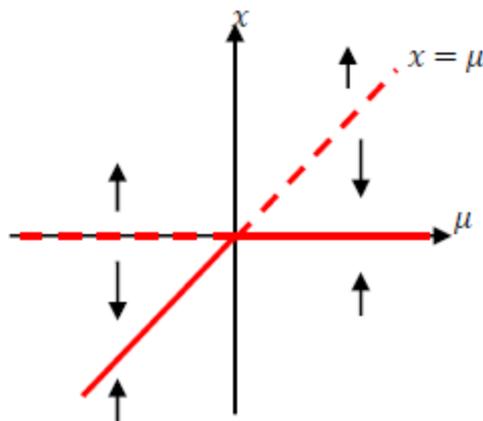


FIGURE 1.7 – Bifurcation transcritique.

On a trois cas :

- si  $\mu < 0$  : alors  $0$  est stable mais  $x^* = -\mu$  est instable.

- si  $\mu = 0$  : les deux points sont confondus en un seul point qui est semi stable.
- si  $\mu > 0$  : alors 0 est instable mais  $x^*$  est stable.

#### 4. Bifurcation de Hopf

C'est la bifurcation associée à l'équation dans le plans complexe :

$$z'(t) = f(z(t)) = (\mu + i\omega)z(t) - |z|^2z(t)$$

Pour étudier cette équation, on écrit la variable  $z$  sous la forme  $z(t) = x(t) \exp^{i\theta(t)}$ . L'équation s'exprime sous la forme d'un système :

$$\begin{cases} x' = \mu x - x^3 \\ \theta' = \omega \end{cases}$$

La première équation n'est autre qu'une la bifurcation de fourche de paramètre

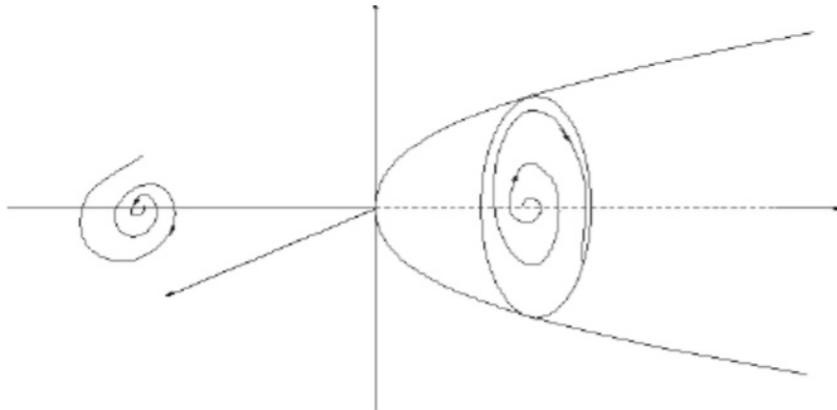


FIGURE 1.8 – Bifurcation de Hopf sous-critique.

de contrôle  $\mu$ .

Nous partons d'un système où le paramètre  $\mu$  est négatif. Le système possède un point d'équilibre stable qui correspond ici à un point puits : les trajectoires s'enroulent en spirale vers l'origine. Lorsque  $\mu = 0$  ce point d'équilibre perd sa stabilité. Puis lorsque  $\mu > 0$ , il se forme une trajectoire périodique stable ou **cycle limite**

La bifurcation de Hopf correspond à une instabilité oscillatoire.

---

---

## CHAPITRE 2

---

# SYSTÈME CHAOTIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons que-ce-qu'un chaos et leurs propriétés ,scénarios chaotiques par :Doublement de période,l'intermittence vers le chaos et le scénario via la quasi- périodique,enfin nous présentons les identification du chaos(exposant de Lyapounov,dimensions fractal des attracteurs étrangés)et donnons quelques exemples sur le systèmes chaotique.

### 2.1 Introduction

Le chaos tel que le scientifique le comprend ne signifie pas absence d'ordre ; il se rattache plutôt à une notion imprévisibilité, d'impossibilité de prévoir une évolution à long terme du fait que l'état final dépend de manière sensible de l'état initial. On appelle un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètres et caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ils ne sont pas déterminés ou modélisés par des systèmes d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique, pourtant, ils ne sont pas nécessairement aléatoires, relevant du seul calcul des probabilités. On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos, avant de donner la définition du chaos, due à Devaney ; quelques définitions de base sont nécessaires.

**Définition 2.1.1.** *Le phénomène du chaos est un phénomène complexe non linéaire,qui dépend de plusieurs paramètres et qui est caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes chaotiques sont des systèmes dont les trajectoires évoluent dans une région bornée présentant un caractère stable mais sans toute fois converge vers un point fixe ou un cycle*

limite. Ces trajectoires qui restent denses dans cette région sont très sensibles aux conditions initiales. Les solutions des équations différentielles non linéaires ne peuvent pas être calculées avec exactitude analytiquement car il n'existe pas de méthode de résolution analytique pour ces équations, sauf pour certaines classes particulières. Elles sont alors déterminées numériquement et le comportement du système analysé par simulation. Le terme chaos associé à une application itérée a été formellement introduit par Li et Yorke en 1975, où ils ont établi un critère simple pour le chaos dans les équations aux différences unidimensionnelles.

## 2.2 propriétés du système chaotique

Parmi les caractéristiques principales permettant d'évoquer un comportement chaotique, on peut retenir les propriétés suivantes :

### 1. La non-linéarité

Un système linéaire admet toujours des solutions, les effets sont prévisibles et proportionnels aux causes qui les ont engendrés. On peut le décomposer en sous-ensembles ou le composer avec d'autres systèmes sans qu'il perde ses propriétés. Mais un système non-linéaire, n'est en général pas soluble, plus on tente de le décomposer, plus la complexité interne se révèle.

### 2. Déterminisme et imprévisibilité

Dans le cas des systèmes déterministes, théoriquement la connaissance de l'état initial de l'entrée, et du modèle permet de prédire l'état futur du système. Cependant il est difficile de calculer la solution analytique théorique de certains systèmes non linéaires, qui est le cas pour les systèmes chaotiques déterministes, car ils sont caractérisés par une sensibilité aux conditions initiales, dont une simple erreur de mesure ou un simple arrondi conduit à des solutions différentes, ce qui les rendent imprévisibles, en conséquence la prévisibilité n'est plus liée au déterminisme.

### 3. Sensibilité aux conditions initiales

Une autre propriété des phénomènes chaotiques est qu'ils sont très sensibles aux perturbations. Eduard Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes. Lorenz a illustré ce fait par l'effet papillon. Pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondant à ces données initiales divergent exponentiellement. Par la suite, les deux trajectoires sont incomparables. Une des propriétés essentielles du chaos est donc bien cette sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant les taux de divergence des trajectoires.

D'un point de vue mathématique, on dit que  $f$  montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \exists (y, p) \in D; \|x - y\| < \varepsilon \Rightarrow \|f^p(x) - f^q(y)\| > \delta$$

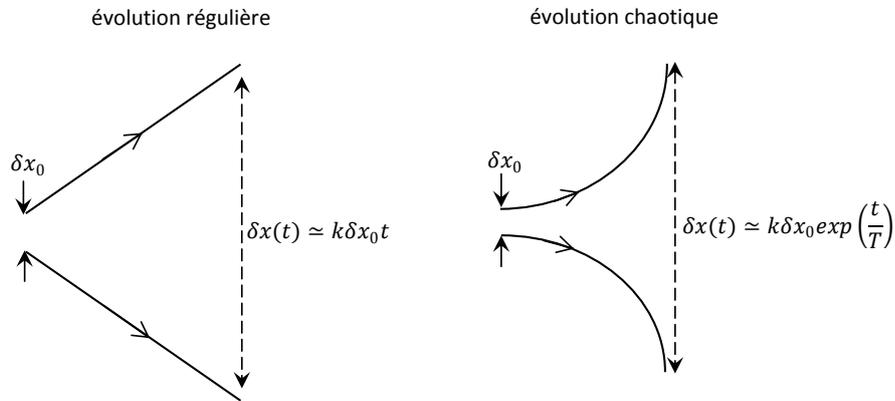


FIGURE 2.1 – Sensibilité aux conditions initiales.

## 5. L'attracteur étrange

Bien imprévisibles et infiniment complexes à toutes les échelles, les systèmes chaotiques ne suivent pas des trajectoires privilégiées. La courbe d'un tel système, sans jamais repasser par les mêmes points évolue toujours dans un espace délimité dans lequel elle finit par décrire une figure géométrique particulière qui représente son attracteur, appelé étrange en raison de l'étrangeté de ce comportement

## 2.3 Scénarios chaotiques

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre :

### 2.3.1 Doublements de période

Qui est caractérisé par une succession de bifurcation fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, par huit, etc... ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique.

### 2.3.2 L'intermittence vers le chaos

Qui se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotiques dans un système qui oscille de manière régulière.

### 2.3.3 Le scénario via la quasi-périodicité

Dans lequel un comportement devient chaotique par l'apparition successive de trois fréquences incommensurables

## 2.4 Identification du chaos

Comme il est difficile de calculer la solution analytique des systèmes chaotiques, des méthodes numériques sont utilisées.

Dans cette section, nous présentons quelques outils qui permettent d'identifier le comportement chaotique d'un système dynamique et ses caractéristiques.

### 2.4.1 Exposants de Lyapunov

L'évolution d'un flot chaotique est difficile à appréhender, parce que la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide, C'est pourquoi on essaye d'estimer ou même de mesurer la vitesse de divergence ou convergence, Cette vitesse s'appelle l'exposant de Lyapunov. L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique.

Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases et ils sont généralement indexés du plus grand au plus petit  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ . L'apparition du chaos exige que les exposants de Lyapunov doivent remplir trois conditions :

1. Au moins l'un deux est positif pour expliquer la divergence des trajectoires.
2. Au moins l'un deux est négatif pour justifier le repliement des trajectoires.
3. A somme de tous les exposants est négative pour expliquer qu'un système chaotique et dissipatif, c'est-à-dire qu'il perd de l'énergie.

La valeur du plus grand exposant de Lyapunov quantifie le degré de chaos du système.

## Calcul de l'exposant de Lyapunov

### – cas d'une application unidimensionnelle

Considérons un système dynamique discret par une application suivant :

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.1)$$

et soient les deux points initiaux  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$ . Il existe un réel  $\lambda$  tel qu'après  $n$  itérations l'exposant de Lyapounov  $\lambda(x_0)$  est défini par l'équation :

$$\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} = |f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|,$$

d'où

$$n\lambda(x_0) = \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}.$$

À limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $n \rightarrow \infty$ , on obtient l'expression suivante pour  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df^n(x_i)}{dx_i} \right|. \end{aligned}$$

Alors

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

$\lambda$  est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence.

– Si  $\lambda > 0$  alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.

– Si  $\lambda < 0$  les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

### – cas d'une application à $m$ dimensions

Pour avoir du chaos il est nécessaire qu'il existe au moins un exposant de

Lyapunov positif et leurs somme est négative. Un attracteur étrange possède toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont un au moins doit être positif.

Considérons une application itérée à  $m$  dimensions :

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Soient  $J(x)$  la matrice jacobienne de  $f$  ;  $\Lambda_1(f^n(x)), \dots, \Lambda_m(f^n(x))$ , les valeurs propres de  $J(f^n(x))$  ordonnées dans l'ordre décroissant suivant leur module. Alors les  $m$  exposants de Lyapunov d'une orbite  $f^n(x), n = 0, 1, 2, \dots$ , sont définies par :

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \ln |\Lambda_i(f^N(x))| \right); \quad i = 1, \dots, m.$$

### Types d'attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov sont une généralisation des valeurs propres pour le points fixe et des multiplieurs caractéristique pour les solutions périodiques.

Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieur ou égaux à 0 et leurs somme est négative. Un attracteur étrange possédera toujours au moins trois exposants de Lyapunov. Dont un au moins doit être positive (voir le tableau ci-dessus )

Etat stable	Attracteur	Dimension	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	Cercle	1	$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Période d'ordre 1	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Période d'ordre K	K-Tore	K	$\lambda_1 = \dots \lambda_K = 0, \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{K+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

TABLE 2.1 – Exposants de Lyapunov et Dimensions.

## 2.5 Exemples de systèmes chaotiques

Les exemples les plus connus et les plus étudiés des systèmes chaotiques sont les suivants :

1. **Systèmes chaotiques à temps continu** : C'est un système dont les variables évoluent de manière continue. On peut alors déterminer les valeurs de différentes coordonnées à tout moment et cela en fonction des autres valeurs. Pour les systèmes chaotiques à temps continu, on peut considérer : le système de Lorenz, le système de Rössler et l'oscillateur de Chua :

a. **Système de Lorenz** :

En 1963, Lorenz a étudié numériquement un système de trois équations différentielles censés présenter grossièrement la convection thermique dans l'atmosphère (obtenu à partir des équations de Navier-Stokes). C'est un exemple célèbre de système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs des paramètres. Ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -rx - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xz \end{cases}$$

a. **Système de Rössler** :

Ce système semblable à celui de Lorenz, a été proposé par le biochimiste Allemand Otto Rössler en 1976, il découle des équations de Navier Stokes, ainsi il est lié à l'étude de l'écoulement des fluides.

Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + x) \\ \dot{y} = x + \alpha y \\ \dot{z} = \beta + \gamma z + xz \end{cases}$$

Avec  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  des constantes (paramètres de bifurcation).

2. **Système chaotique à temps discret**

a. **Système de Hénon** :

Ce système est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien Michel Hénon. L'intérêt de ce modèle est l'étude de certaines propriétés d'une section de

Poincaré de l'attracteur de Lorenz par l'introduction d'itérations dans le plan.

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases}$$

Avec  $k$ , le nombre d'itérations.

a. **Système de Lozi :**

Le système de Lozi qui consiste en le système de Henon pour lequel la non-linéarité  $x_k^2$  est remplacée par  $|x_k^2|$ .

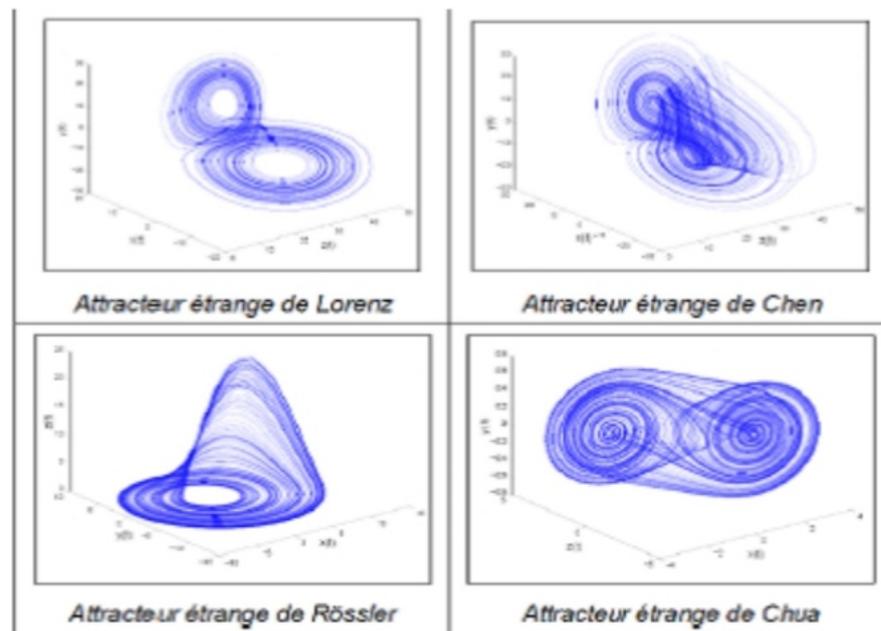


FIGURE 2.2 – Les attracteurs étranges de quelque système chaotique.

---

---

## CHAPITRE 3

---

# COMPORTEMENT DYNAMIQUE DU CIRCUIT BASÉ SUR UN MEMRISTOR

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à l'étude d'un niveau système memristive en remplaçant la diode dans le circuit de Chua avec un memristor contrôlé par flux.

C'est le circuit qui a montré que le circuit le plus simple capable de générer un comportement chaotique.

Nous avons performé des simulations numériques pour confirmer l'étude théorique.

### 3.1 Présentation du circuit de Chua

Le circuit de Chua est un circuit autonome fabriqué à partir de composants standards [résistance, condensateur, inductance] doit satisfaire trois critères avant de pouvoir afficher un comportement chaotique.

Le circuit doit contenir :

- 1- il doit contenir un ou plusieurs éléments non linéaires.
- 2- une ou plusieurs résistances actives localement.
- 3- trois ou plusieurs éléments de stockage d'énergie.

Le circuit électronique simple qui répond à ces critères est le circuit de Chua.

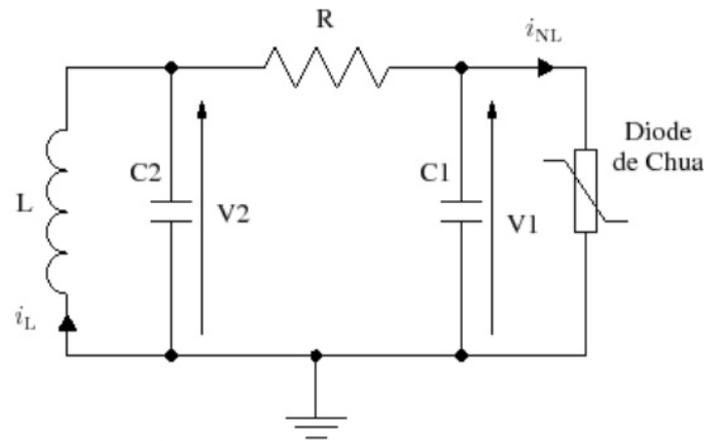


FIGURE 3.1 – circuit de Chua .

## 3.2 Circuit de Chua basé sur un memristor

Le memristor a été postulé comme le quatrième circuitment par Leon.o.Chua en 1971. En remplaçant la diode de Chua par un memristor caractérisé par une fonction linéaire augmentant par morceaux . Il a donc pris sa place à côté du reste de circuit plus familier des éléments tel que la résistance, le condensateur et l'inducteur le fil conducteur qui relie ces quatre éléments

### 3.2.1 Memristor

#### En électronique

Le memristor est un composant électronique passif. Il a été décrit comme le quatrième composant passif élémentaire, aux côtés du condensateur, de la résistance et de la bobine. Le nom est formé à partir des deux mots anglais memory et resistor.

Un memristor soit un memristor contrôlé par flux, soit à charge memristor commandé en charge est une résistance variable à deux bornes caractérisé par une relation de type  $f(\phi, q) = 0$ . Le memristor a été prédit et décrit en 1971 par Leon Chua [12], Depuis 1971, le memristor était un composant hypothétique, aucun exemple physique n'étant connu ainsi difficile la réalisation physique du memristor . En avril 2008 soit 37 ans plus tard, une implémentation physique du memristor a été reportée dans le journal Nature par une équipe de chercheurs des laboratoires HP conduite par R. Stanley Williams [13].

**En physique :** Le memristor est un élément dans lequel le flux électrique (ou densité de champ électrique et de courant électrique)  $\phi_e$  est une fonction de la charge électrique  $q$  qui traverse le composant. Soit  $\phi_e = \phi_e(q)$  le taux de changement de flux avec la charge  $M(q) = \frac{d\phi_e}{dq}$  est connu comme memristance ceci est identique aux autres trois éléments fondamentaux des circuits ;

. Résistance  $R(I) = \frac{dv}{dI}$

. Condensateur  $\frac{1}{c(q)} = \frac{dv}{dq} \Rightarrow c(q) = \frac{dq}{dv}$

. Inductance  $L(I) = \frac{d\phi_B}{dI}$

ici  $q$  est la charge électrique,  $I$  est le courant électrique,  $v$  est le potentiel électrique et  $\phi_B$  est le flux magnétique.

Comme d'autre par :

$$v = \frac{d\phi_B}{dt} \text{ et } I = \frac{dq}{dt}$$

il en résulte la tension  $v$  aux limite du memristor est liée au courant  $I$  par la valeur instantanée de la memristance :

$$v = M(q(t))I(t)$$

Ainsi à chaque instant donnée un memristor se comporte comme une résistance ordinaire, cependant sa résistance  $M(q)$  dépend de l'histoire du courant.

### 3.2.2 système memristif

Comme le quatre éléments de base de la théorie des circuit est le fait que les caractéristiques de ces éléments concernant les quatre variables en génie électrique (tension, courant, flux, charge) intimement la figure montre cette relation graphiquement. Pour affirmer cela, Chua dresse la liste des doublets réalisables avec les deux grandeurs utilisées pour l'électronique : la tension ( $v$ ), le courant ( $i$ ), ainsi que leur intégrale temporelle, le flux  $\phi$  et la charge ( $q$ ). Il remarque que les doublets  $(\phi, v)$  et  $(q, i)$  forment deux des lois de l'électromagnétisme et que les doublets  $(v, i)$ ,  $(q, v)$  et  $(\phi, i)$  définissent respectivement la résistance, la capacité et l'inductance. Le dernier doublet  $(\phi, q)$  n'a pas de correspondance. C'est ce doublet qui engendre la définition du memristor qu'il sépare en deux cas. Le cas du memristor contrôlé en charge qui donne

$$v(t) = M(q(t))i(t)$$

avec

$$M(q) = \frac{d\phi}{dq}$$

Le cas du memristor contrôlé en flux :

La relation entre la tension ( $v(t)$ ) et le courant traversant le memristor  $i(t)$  est donc donné par

$$i(t) = W(\phi(t))v(t)$$

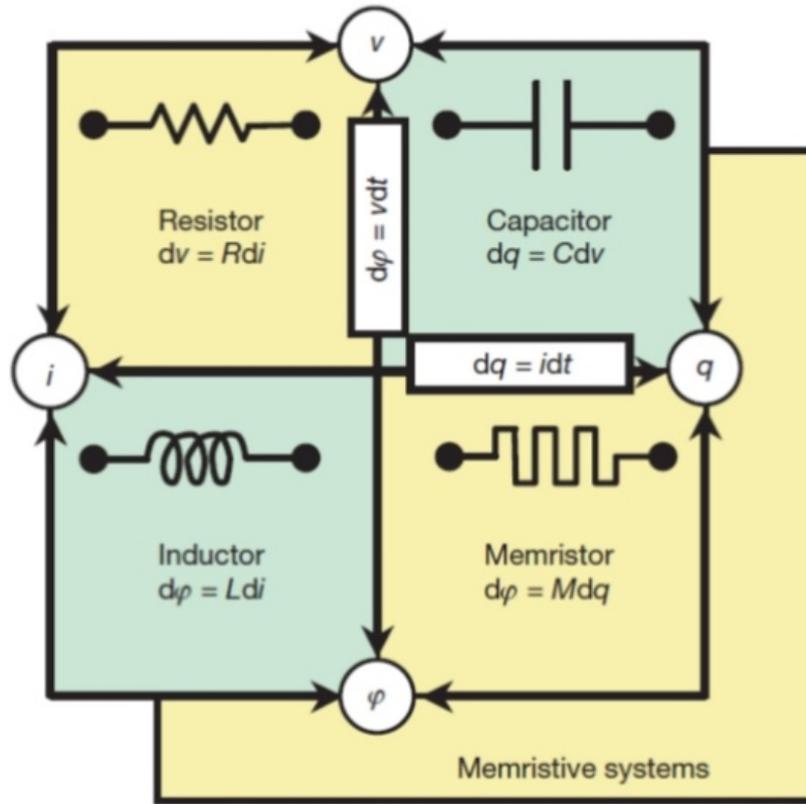


FIGURE 3.2 – système memristifs.

Avec une fonction de memductance  $W(\phi)$ , le taux de variation de la charge dépendant du flux

$$W(\phi) = \frac{dq(\phi)}{d\phi}$$

Le memristor  $M$  utilisé dans cette cas est un memristor actif à deux terminaux contrôlés par flux qui ce caractérisé par une fonction quadratique non-linéaire continue comme suivant :

$$q(\phi) = -a\phi + 0,5b\phi^2 \operatorname{sgn}(\phi) \quad (3.1)$$

où  $a, b > 0$ , et la fonction memductance donné par

$$W(\phi) = \frac{dq(\phi)}{d\phi} = -a + b|\phi|$$

### 3.3 La dynamique du circuit basé sur un memristor

Dans cette partie ,en remplaçant la diode de chua dans le circuit de chua par un memristor contrôlé en flux décrit par l'équation (3.1) .Un nouveau circuit chaotique basé sur le memristor peut être conçu,suivant les indications de figure (3.3).

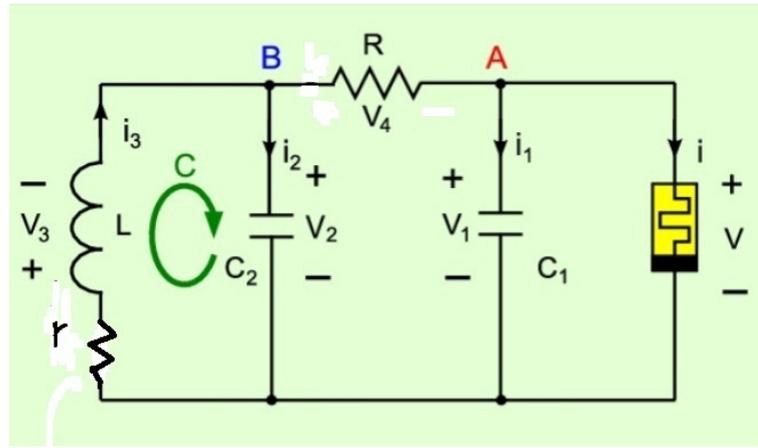


FIGURE 3.3 – circuit de Chua basé sur un memristor.

### 3.3.1 Les équation du système

On applique la lois de Kirchhoff pour obtenir les équations du système :

$$\sum I_{\text{entre}} = \sum I_{\text{sortie}}$$

**Noeud A :**

On a  $i_R + i_1 + i = 0$

et

$$\begin{cases} i_R = \frac{v_4}{R} & \text{comme } v_4 = v_1 - v_2 \Rightarrow i_R = \frac{v_1 - v_2}{R} \\ i_1 = c_1 \frac{dv_1}{dt} \\ i = W(\phi)v_1 \end{cases}$$

Donc  $\frac{v_1 - v_2}{R} + c_1 \frac{dv_1}{dt} + W(\phi)v_1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{c_1} \left[ \frac{v_2}{R} - \frac{v_1}{R} - W(\phi)v_1 \right] \dots(1)$$

**Noeud : B**

On a  $i_2 = i_3 + i_R$

et comme  $i_2 = c_2 \frac{dv_2}{dt}$ ,  $i_4 = \frac{v_1 - v_2}{R}$

Donc

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{c_2} \left[ i_3 + \frac{v_1}{R} - \frac{v_2}{R} \right] \dots(2)$$

**Maille c :**

on a  $v_2 + v_r + v_L = 0$

et comme  $v_r = r \cdot i_3$ ,  $v_L = L \frac{di_3}{dt}$

On remplace  $v_r$  et  $v_L$  on obtient

$$L \frac{di_3}{dt} + v_2 + ri_3 = 0 \Rightarrow \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L}[-v_2 - r \cdot i_3]$$

Donc

$$\Rightarrow \frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L}v_2 - \frac{r}{L}i_3 \quad \dots(3)$$

D'après (1), (2) et (3) on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{c_1} \left[ \frac{v_2}{R} - \frac{v_1}{R} - W(\phi)v_1 \right] \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{c_2} \left[ i_3 + \frac{v_1}{R} - \frac{v_2}{R} \right] \\ \frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L}v_2 - \frac{r}{L}i_3 \\ \frac{d\phi}{dt} = v_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

On utilise un changement de variable et les paramètres suivant :

$$v_1 = x, v_2 = y, i_3 = z, w = \phi, \frac{1}{c_1} = \alpha, \frac{1}{L} = \beta, \frac{r}{L} = \gamma, \xi = G, c_2 = 1, R = 1$$

avec  $W(w) = \frac{dq(w)}{dw} = -a + b|w|$

On peut obtenir un système d'équation non linéaire, (3.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - W(w)x) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y - \gamma z \\ \dot{w} = x \end{cases} \quad (3.3)$$

Où  $W(w)$  est définit comme  $W(x) = -a + b|w|$  avec  $a = 1,5$  et  $b = 1$ .

## 3.4 Étude théorique

Nous allons étudier la stabilité du système dynamique (3.3) dans l'équilibre ,l'espace de phase est en quatre dimensions.

### 3.4.1 L'équilibre du système (3.3)

On cherche les points d'équilibre :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \\ \dot{w} = 0 \end{cases}$$

c-à d :

$$\begin{cases} \alpha(y - x - W(w)x) = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -\beta y - \gamma z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

On trouve  $x = y = z = 0$ ,  $w = c$

Donc l'ensemble d'équilibre du système donné par :

$$A = \{(x, y, z, w) \mid x = y = z = 0, \quad w = c\}$$

### 3.4.2 Stabilité du système

Pour étudier la stabilité ,en utilisant la méthode indirecte de Lyapunouv qui est basé sur la linéarisation du système autour de l'équilibre, donc la stabilité de l'équilibre dépend le signe des parties réelles du valeurs propres de la matrice jacobienne.

L'expression de la matrice jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} & \frac{\partial f_4}{\partial w} \end{pmatrix}$$

La matrice jacobienne dans chaque point d'équilibre est donné par :

$$J_A = \begin{pmatrix} \alpha(-1 - W(w)) & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{J_A} = \det(J_A - \lambda) = \begin{vmatrix} \alpha(-1 - W(w)) - \lambda & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_{J_A} = (\alpha(-1 - W(w)) - \lambda)[(-1 - \lambda)(-\gamma - \lambda)(-\lambda)] - \alpha[(-\gamma - \lambda)(-\lambda)] \quad (3.4)$$

Si nous considérons les paramètres suivants :

$$\alpha = 7; \quad \beta = 10; \quad \gamma = 0; \quad a = 1,5; \quad b = 1; \quad w(c) = -a + b|c|$$

Alors l'équation caractéristique (3.4) peut être simplifier comme :

$$\begin{aligned}
 P_{JA} &= (7(0,5 - |c|) - \lambda)(-\lambda^2 - \lambda^3 - 10\lambda) - 7\lambda^2 \\
 &= (3,5 - 7|c| - \lambda)(-\lambda^2 - \lambda^3 - 10\lambda) - 7\lambda^2 \\
 &= -3,5\lambda^2 + 7|c|\lambda^2 + \lambda^3 - 3,5\lambda^3 + 7|c|\lambda^3 + \lambda^4 - 35\lambda + 70|c|\lambda + 10\lambda^2 - 7\lambda^2 \\
 &= \lambda^2 + (-2,5 + 7|c|)\lambda^3 + (7|c| - 0,5)\lambda^2 + (70|c| - 35)\lambda \\
 &= \lambda \underbrace{[\lambda^3 + (7|c| - 2,5)\lambda^2 + (7|c| - 0,5)\lambda + 70|c| - 35]}_{(*)} = 0
 \end{aligned}$$

Pour déterminer l'intervalle de c qui s'assure que le système (3.3) est stable ,le critère de Routh est appliqué à l'équation (\*) indépendant de l'influence de la valeur propre zéro.

On note :

$a_3 = 1$ ;  $a_2 = 7|c| - 2,5$ ;  $a_1 = 7|c| - 0,5$ ;  $a_0 = 70|c| - 35$  On va former la colonne de Routh comme suite :

$\lambda^3$	1	$7 c  - 0,5$
$\lambda^2$	$7 c  - 2,5$	0
$\lambda^1$	$\frac{(7 c  - 2,5)(7 c  - 0,5) - (70 c  - 35)}{(7 c  - 2,5)}$	0
$\lambda^0$	$(70 c  - 35)$	0

TABLE 3.1 – Tableau de Routh du système (3.3)

Alors selon le condition nécessaire et suffisante de Routh-Hurwitz pour la stabilité les paires des racines de l'équation entre parenthèse sont négatives si est seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} 7|c| - 2,5 > 0 \Rightarrow |c| > 0,3571 \\ 7|c| - 0,5 > 0 \Rightarrow |c| > 0,7142 \\ 70|c| - 35 > 0 \Rightarrow |c| > 0,5 \\ (7|c| - 2,5)((7|c| - 0,5) - (70|c| - 35)) > 0 \Rightarrow \begin{cases} |c| > 1,2765 \\ |c| < 0,5186 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7|c| - 2,5 > 0 \\ \frac{(7|c| - 2,5)(7|c| - 0,5) - (70|c| - 35)}{(7|c| - 2,5)} > 0 \\ (70|c| - 35) > 0 \end{array} \right.$$

Donc

$$\begin{cases} |c| > 0,3571 \\ |c| > 1,2765, |c| < 0,5186 \\ |c| > 0,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0,5 < |c| < 0,5186 \quad \text{et} \quad |c| > 1,2765$$

Nous avons calculé les valeurs propres non nuls  $\lambda_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) correspondants aux points fixes de l'ensemble  $A$  pour différentes valeurs de  $c$  compris entre 0 et 1,5. Ceci explique le comportement du système dynamique (3.3) dépend de l'état initial de la variable d'état  $w$ . Les résultats sont représentés dans le tableau (3.4.2)

Si les conditions de stabilité via le Critère de Routh-Hurwitz qui sont données par  $0,5 < |c| < 0,5786, |c| > 1,2785$  sont satisfaites, l'équilibre de  $A$  est **stable** c'est-à-dire toutes les racines de l'équation caractéristique sont à partie réelle négative

**Remarque 3.4.1.** *Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un  $\lambda_i$  soit positif. Mais aussi que la somme  $\lambda_i$  soit négative, puisque dans le cas contraire le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est émergé et on aurait plus un attracteur de faible dimension ce qui signifie qu'on n'aura pas de chaos déterministe.*

Dans le cas inverse, ces conditions ou bien l'une de ces conditions n'est pas satisfaites, et pour donner la possibilité que le chaos se produise, l'intervalle de  $c$  pour lequel le polynôme caractéristique a une ou plusieurs racines avec des parties réelles positives est le suivant :

$$\begin{cases} 0,5 < |c| \\ 0,5186 < |c| < 1,2785 \end{cases}$$

L'équilibre de l'ensemble  $A$  est **instable**, ce qui peut induire l'émergence de comportements périodiques et chaotiques dans le système (3.3).

Les trois valeurs propres non nulles (resp. une valeur propre de zéro) caractérisées par un **foyer stable et instable**

Suivant des valeurs choisies du constant  $c$  le polynôme caractéristique entre parenthèses devient :

Pour  $|c| = 0$

$$\lambda^3 - 2,5\lambda^2 - 0,5\lambda - 35 = 0$$

$$(\lambda - 4,4117)(\lambda^2 + 1,19117\lambda + 7,93) = 0 \text{ Pour } |c| = 0,5$$

$$\lambda(\lambda^2 + 1,5\lambda + 2,5) = 0$$

Pour  $|c| = 0,54$

$$(\lambda + 0,9449)(\lambda^2 + 0,3551\lambda + 2,963) = 0$$

Pour  $|c| = 0,5786$

$$(\lambda + 1,5506)(\lambda^2 + 0,0012\lambda + 3,5483) = 0$$

Pour  $|c| = 1$

$$(\lambda + 4,701)(\lambda^2 - 0,2011\lambda + 7,4452) = 0$$

Pour  $|c| = 1,2785$

$$(\lambda + 6,4495)(\lambda^2 + 8,4495) = 0$$

Pour  $|c| = 1,5$

$$(\lambda + 7,8607)(\lambda^2 + 0,1393\lambda + 8,9051) = 0$$

$ c $	$\lambda_1$	$\lambda_{2,3}$
0	4,4117	$-0,9559 \pm i2,6489$
0,5	0	$-0,75 \pm i1,3919$
0,54	-0,9449	$-0,1675 \pm 1,7132i$
0,5786	-1,5506	$-0,0006 \pm i2,3456$
1	-4,701	$0,1005 \pm i2,7267$
1,2785	-6,4495	$\pm i1,2698$
1,5	-7,8607	$-0,0697 \pm i2,9833$

TABLE 3.2 – Les valeurs propre  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  dans l'équilibre

## 3.5 Étude numérique

Pour la résolution numérique du système (3.3) on utilise le MATLEB avec les valeurs des des paramètres :

$$\alpha = 7, \beta = 10, \gamma = 0, a = 1,5, b = 1. \quad (3.5)$$

et les conditions initiaux :

$$(x, y, z, w) = (0, 10^{-10}, 0, c) \quad (3.6)$$

### 3.5.1 Les attracteurs

Nous simulons le système (3.3) avec les paramètres (3.5) et les conditions initiaux (3.6), on obtient les attracteurs chaotiques qui sont représentés à les figures suivants tandis que chaque figure est exposé à chaque valeur de l'état initial  $c$ .

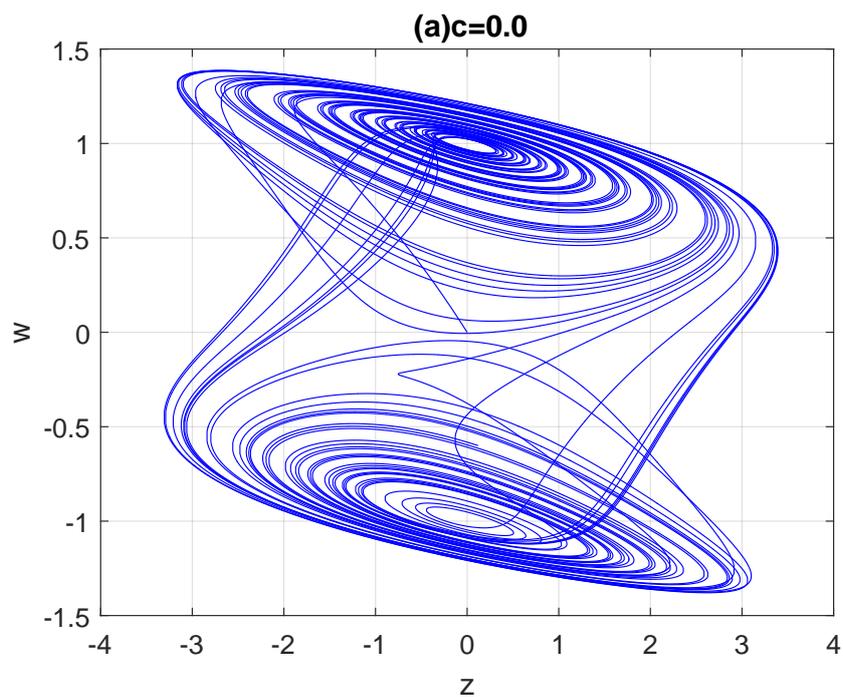


FIGURE 3.4 – Attracteurs étrange à 2-scroll avec  $c = 0$ .

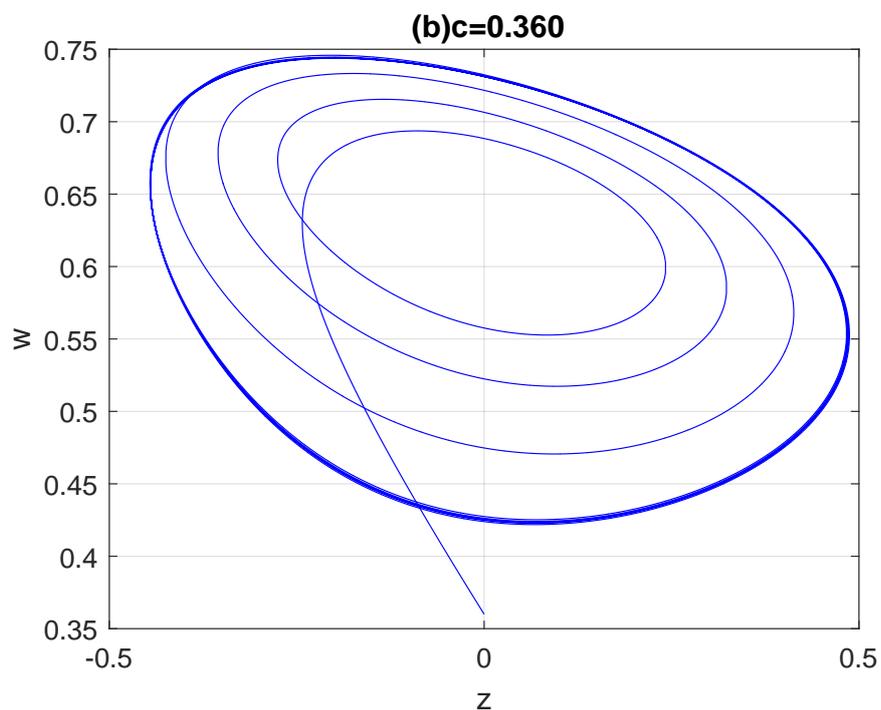


FIGURE 3.5 – Cycle limite à 4-période avec ( $c = 0,36$ )

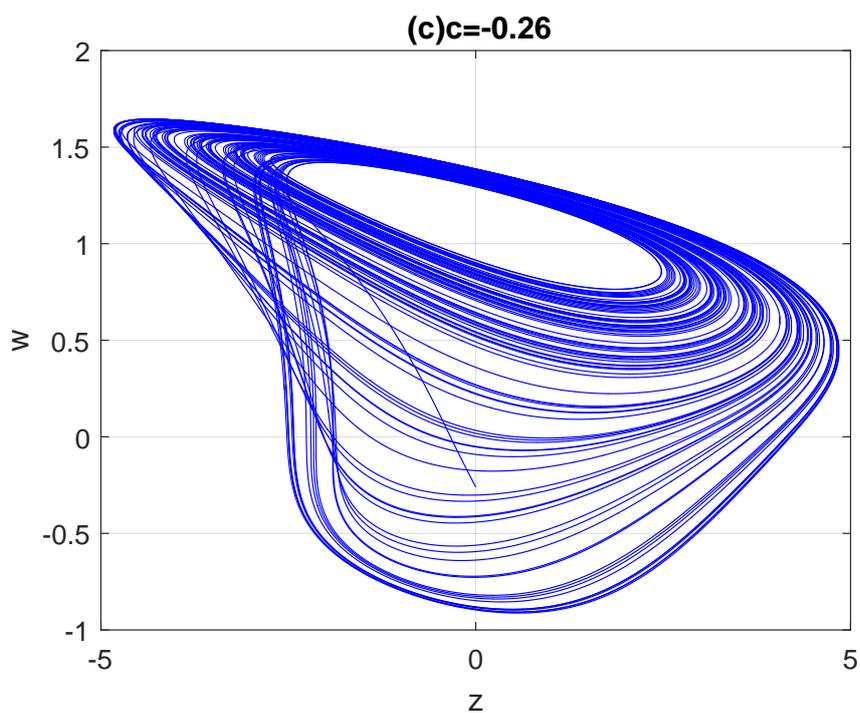


FIGURE 3.6 – Attracteur étrange à 1-scroll avec ( $c = 0,26$ )

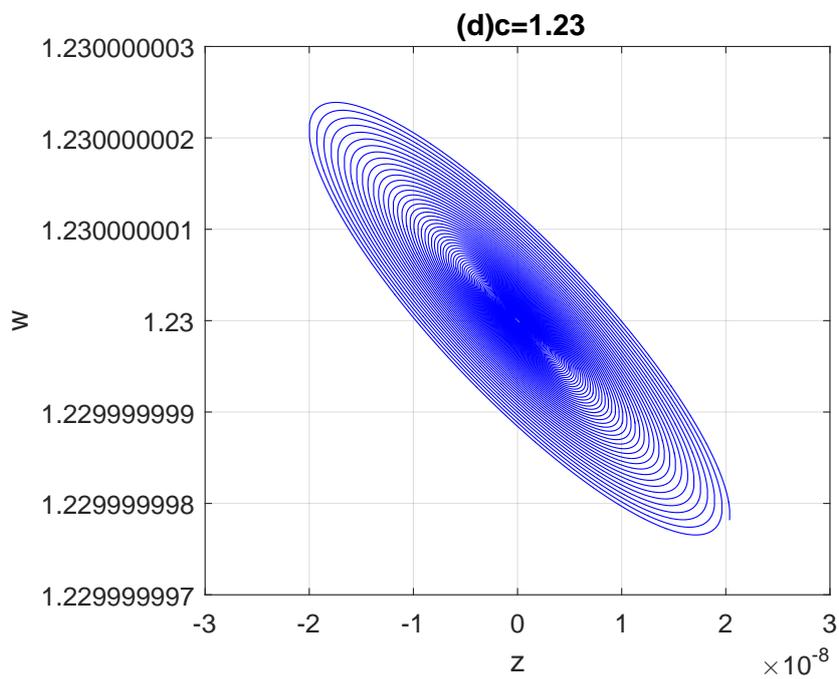


FIGURE 3.7 – Un sink avec  $c = 1,23$

A partir des figures (3.4) ,(3.5) ,(3.6) et (3.7) ,on observe qu'il existe une grande variation pour les attracteurs du système (3.3) sous différentes valeurs initiales.

### 3.5.2 Exposant de Lyapunov

Nous supposons que les paramètres (3.5) sont fixés ,et on prend  $c$  est varié dans l'intervalle  $[-1, 5; 1, 5]$  .En utilisant MATLAB .Les exposants de Lyapunov de système (3.3) sont présenté dans le figure (3.8) .

Le système (3.3) a des comportements dynamiques abondants et complexes dans trois régions  $(-1, 23; -0, 58)$ ,  $(-0, 5; 0, 42)$  et  $(0, 58; 1, 23)$  de l'état initial  $w(0) = c$ .

En particulier ,si on prend  $C = 0, 65$  ,les valeurs des exposant de Lyapunov de système sont :

$$L_1 = L_2 = 0, 1288; L_3 = -0, 008, L_4 = -2, 286. \quad (3.7)$$

A partir du figure (3.8) on a :

Le spectre de Lyapounov (3.3) a deux termes positives  $L_1, L_2$ , et la somme des exposants de Lyapounov est négative  $\sum_{i=1}^4 L_i = -2, 165 < 0$ ). Ce qui montre que le système est (3.3) **hyper chaotique dissipatif**.

D'autre part , le nombre des exposants de Lyapunov est : 4, donc la dimension de l'espace des phase est : 4 .

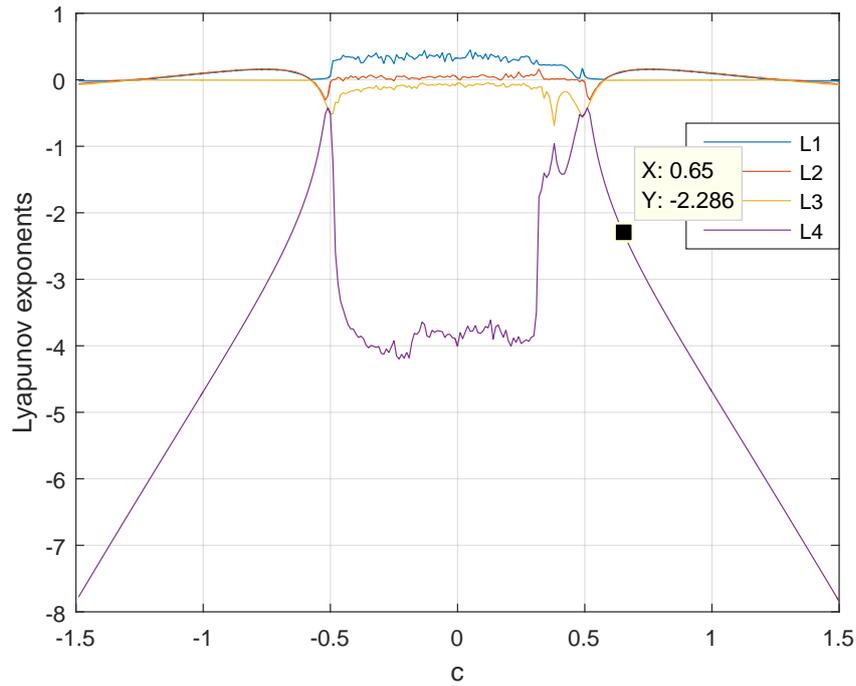


FIGURE 3.8 – Le spectre de Lyapunov.

**Par conséquent**

On remarque que par rapport a des systèmes chaotiques conventionnels, le circuit chaotique basé sur le memristor a des routes plus compliquée vers le chaos en fonction des états initiaux.

---

## CONCLUSION

Dans ce travail nous avons utiliser les concepts et les généralités du système dynamique chaotique pour étudier le comportement dynamique d'un circuit chaotique basé sur un memristor, en remplaçant la diode de chaos par un memristor a deux bornes actif.

A partir d'étudier la circuit de Chua basé sur le memristor ,on peut obtenue un système différentielles de quatre dimension avec un non-linéaire fonction s'appelle memductance, ce qui peut générer un attracteur chaotique a double spirale, a une seule spirale et a une dynamique non linéaire complexe sous différents états initiaux.

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bao Bo-Cheng,Xu Jian-Ping, Liu Zhong ,Initial State Dependent Dynamical Behaaviors in a Memristor Based Chaotic Circuit.
- [2] S,Cherafa.K,Djoudi,Stabilité et bifurcation d'un modèle électrique .
- [3] Tayeb,Hamaizia,ystème dynamique et chaos.
- [4] Eric Goncalvès da Silva,Introduction aux système dynamique et chaos,Engineering school .Institut polytechnique de Grenoble,2004,pp.23.
- [5] Menacer Tijani ,Synchronisation des systèmes dynamique chaotique à Dérivées fractionnaires, mémoire Magistère, Université de Mentouri,Constantine.
- [6] Gasri Ahlem ,Chaos et synchronisation (généralisé) dans les système dynamique,Thèse de Doctorat, université de Mentouri,Constantine,2018.
- [7] Siar Nadjoua, La stabilité des système dynamique et la théorie de bifurcations :application au modèle de Goodwin,Mémoire de la Licence,Université Sidi Mohamed Ben Abdellah ,2014.
- [8] Aurélien Pallavisini,Système d'interférences radiofréquences pour la cryptographie par chaos appliquée au transmissions hertziennes,Université de Franche-Comté,2007.

- [9] ,Benhabib Choiaib,Etude d'un système chaotique pour la securisation des communications optiques,Mémoire de Master,Université Abou Beker Belkaid,Telemcen,Algérie,2014.
- [10] Théo Carabet, Etude,realisation et caractérisations de memristors organiques électro-greffés en tant que nanosynapses de circuits neuro-inspirés,Thèse de doctorat,Université Paris-Sud.
- [11] Ning Wang,Bocheng Bao,Tao Jiang,Mo Chen,and Quan Xu,Parameter Independent Dynamical Behaviors in Memristor Based Wien Bridge Oscillator,Research Article.
- [12] Chua Leon O, Memristor—The Missing Circuit Element, vol. CT-18, 507-519 (1971).
- [13] Strukov Dmitri B, Snider Gregory S, Stewart Duncan R, Williams Stanley R, The missing memristor found, vol. 453, 80-83 (2008).
- [14] Lorenz, E.N. : Deterministic non-periodic flow. J. Atmos. Sci. 20, 130–141 (1963).
- [15] Rössler, O.E. : An equation for continuous chaos. Phys. Lett. A 57, 397–398 (1976).
- [16] Rössler, O.E. : Continuous chaos ; four prototype equations. Ann. N.Y. Acad. Sci. 316, 376–392 (1979).
- [17] Chua, L.O. Kouro, M. Matsumoto, T. : The double scroll family. Parts I and II. IEEE Trans. Circuits Syst. 33, 1073–1118 (1986).
- [18] Zeraoulia Elhadj, Etude de quelques types de système chaotique : généralisation d'un modèle issu du modèle de Chen, Thèse de Dctorat,Université Mentouri de Constantine,2006.

---

# RÉSUMÉ

Dans ce travail on va proposer un nouveau système memristive ,en remplaçant la diode dans la circuit de chua avec un memristor .Contrairement aux système chaotique conventionnels,le système chaotique basé sur le memristor a un ensemble d'équilibre dont la stabilité est dépend de l'état initial de la memristor. Ensuite le comportement dynamique de ce système est étudié théoriquement et numériquement .

## **mots clés**

Systeme chaotique , memristor ,circuit, exposant de Lyapounov.

---

# ABSTRACT

In this work, we will propose a new system by replacing the diode in the Chua circuit with a memristor. Unlike conventional chaotic systems, the chaotic system based on the memristor has an equilibrium set whose stability is dependent on the initial state of the memristor. Then the behavior of this system is studied theoretically and numerically.

## **Keywords**

chaotic system, memristor, circuit, Lyapunov exponents.

