

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila



*Institut des Sciences et de la Technologie*

*Département des Sciences et Techniques*

*Filière: Génie Mécanique*

*Spécialité: Energétique*

## *Polycopié de Cours*

# Mécanique rationnelle

Ce polycopié de cours est destiné aux étudiants de la 2<sup>ème</sup> année  
Licence: Mécanique Energétique, Hydraulique et Génie civil

Auteur : Dr. Bensouici Moumtez

(Maître de Conférences A)

Année universitaire 2020/2021

## **Avant-propos**

Le présent polycopié concerne les cours de mécanique rationnelle est le fruit de trois années d'enseignement de 2012 à 2016. Ce cours est destiné aux étudiants de deuxième année licence mécanique énergétique, hydraulique et génie civil au sein du département des sciences et techniques du centre universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila.

Le cours de mécanique rationnelle comprend six chapitres, Le premier chapitre présente des rappels mathématiques sur le calcul vectoriel. Le deuxième chapitre est consacré aux généralités et définitions de base. Le troisième chapitre est réservé à la statique du solide rigide. Le quatrième chapitre traite la cinématique du solide rigide. Le cinquième chapitre présente la géométrie de masse. Le sixième et dernier chapitre est consacré à la dynamique du solide rigide.

De plus, le cours est enrichi par plusieurs applications corrigées, j'espère qu'il sera d'une grande utilité pour les étudiants.

## Table des matières

<b>Avant-propos</b>	
<b>Chapitre I : Rappels mathématiques (éléments de calcul vectoriel)</b>	<b>1</b>
I.1 Grandeurs scalaires et vectorielles	1
I.2 Vecteur	1
I.2.1 Composantes et module d'un vecteur	2
I.2.2 Types de Vecteurs	2
I.2.3 Opérations sur les vecteurs	2
I.3 Produit scalaire	3
I.3.1 Propriétés du produit scalaire	4
I.4 Produit vectoriel	4
I.4.1 Propriétés du produit vectoriel	5
I.5 Produit mixte	5
I.6 Applications avec solutions	6
<b>Chapitre II : Généralités et définitions de base</b>	<b>7</b>
II.1 Définition et sens physique de la force	7
II.2 Représentation mathématique de la force	7
II.3 Opérations sur la force (composition, décomposition, projection)	7
II.3.1 Composition de deux forces concourantes	7
II.3.2 Composition de plusieurs forces concourantes	8
II.3.2.1 Règle du parallélogramme des forces	8
II.3.1.2 Règle du polygone des forces	8
II.3.3 Décomposition géométrique d'une force	9

II.3.3.1 Décomposition suivant deux directions	9
II.3.3.2 Décomposition suivant trois directions	10
II.3.3.3 Décomposition d'une force si deux points sur la ligne d'action de la force sont connus	11
II.3.4 Projection d'une force	11
II.4 Types de forces: ponctuelle, linéique, surfacique, volumique	12
II.4.1 Forces ponctuelles	12
II.4.2 Forces linéiques	12
II.4.3 Forces surfaciques	12
II.4.4 Forces volumiques	12
II.5 Classification de forces : forces internes, forces externes	13
II.5.1 Les forces intérieures	13
II.5.2 Les forces extérieures	13
II.6 Modèles mécanique : le point matériel, le corps solide	13
II.6.1 le point matériel	13
II.6.2 le corps solide	13
II.7 Applications avec solutions	13
<b>Chapitre III : Statique du solide rigide</b>	16
III.1 Introduction	16
III.2 Axiomes de la statique	16
III.3 Liaisons, appuis et réactions	17
III.4 Axiome des liaisons	19
III.5 Moment d'une force	20
III.6 Couple	20

III.7 Conditions d'équilibre	21
III.7.1 Forces quelconques	21
III.7.2 Forces planes	22
III.7.3 Forces concourantes	22
III.7.4 Forces parallèles	22
III.8 Applications avec solutions	23
<b>Chapitre IV : Cinématique du solide rigide</b>	25
IV.1 Rappels succinct sur les quantités cinématiques pour un point matériel	25
IV.1.1 Trajectoire, vitesse et accélération d'un point	25
IV.1.1.1 Trajectoire	25
IV.1.1.2 Vecteur de vitesse	25
IV.1.1.3 Vecteur d'accélération	26
IV.1.2 Types de mouvements	26
IV.1.2.1 Mouvement rectiligne et curviligne	26
IV.1.2.2 Mouvement circulaire	26
IV.1.2.2.1 Accélération tangentielle et normale	27
IV.2 Cinématique du corps solide	27
IV.2.1 Mouvement de translation	28
IV.2.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe	28
IV.2.3 Mouvement plan	29
IV.2.4 Centre instantané de rotation (ou centre instantané des vitesses) « C.I.R »	30
IV.2.5 Mouvement composé	31
IV.2.5.1 Composition de vitesses	31

IV.2.5.2 Composition d'accélération	31
IV.3 Applications avec solutions	32
<b>Chapitre V : Géométrie de masse</b>	35
V.1 Introduction	35
V.2 Masse d'un système matériel	35
V.2.1 Système continu	35
V.2.2 Système discret	36
V.3 Formulation intégrale du centre de masse	36
V.3.1 Définitions (cas linéaire, surfacique et volumique)	37
V.3.2 Formulation discrète du centre de masse	37
V.3.3 Théorèmes de GULDIN	38
V.4 Moment et produit d'inertie de solides	39
V.4.1 Moment d'inertie	39
V.4.2 Produit d'inertie de solides	42
V.5 Tenseur d'inertie d'un solide	42
V.5.1 Cas particuliers	42
V.5.2 Axes Principaux d'inertie	43
V.6 Théorème d'Huyghens	44
V.7 Moment d'inertie de solides par rapport à un axe quelconque	44
V.8 Applications avec solutions	45
<b>Chapitre VI : Dynamique du solide rigide</b>	51
VI.1 Introduction	51
VI.2 Bref rappels sur les quantités dynamiques pour un point matériel	51
VI.3 Élément de cinétique du corps rigide	52
VI.3.1 Quantité de mouvement	52

VI.3.2 Moment cinétique	52
VI.3.3 Énergie cinétique	53
VI.4 Équation de la dynamique pour un corps solide	54
VI.5 Théorème du moment cinétique	54
VI.6 Théorème de l'énergie cinétique	54
VI.7 Applications	55
VI.7.1 Cas de translation pure	55
VI.7.2 Cas de rotation autour d'un axe fixe	55
VI.7.3 Cas combiné de translation et de rotation	55
VI.8 Applications avec solutions	
<b>Références</b>	60

# Chapitre I: Rappels mathématiques (éléments de calcul vectoriel)

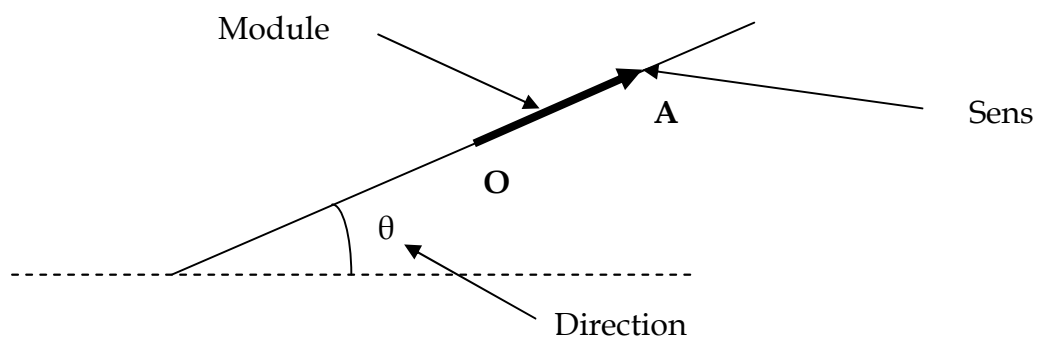
## I.1 Grandeurs scalaires et vectorielles

La mécanique opère avec deux types de quantités qui sont : les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles. Les grandeurs scalaires sont représentées par un nombre, positif, négatif ou nul comme la masse  $m$ , la température  $T$ , la longueur  $L$  ou le temps  $t$ . La seule connaissance de la valeur suffit à déterminer la grandeur. Mais il existe aussi des grandeurs physiques (grandeurs vectorielles) dont la valeur ne suffit pas à caractériser la grandeur. Par exemple, la connaissance de la valeur de la vitesse ne décrit pas tous les paramètres de la vitesse, car la vitesse a une direction, un sens et a aussi un point particulier appelé point d'application ou origine où elle est déterminée. Un vecteur est donc caractérisé par un ensemble de propriétés

## I.2 Vecteur

Un vecteur est un segment de droite  $OA$  sur lequel on a choisi une origine  $O$  et une extrémité  $A$ , il est défini par: son origine, sa direction, son sens, son module, (voir figure I.1).

- Son origine: le point d'application du vecteur
- Sa direction : L'orientation du support du vecteur.
- Son sens : Considéré par rapport aux axes de coordonnées : positif ou négatif.
- Son module : Sa valeur en unités de mesure utilisé



**Figure (I.1):** présentation graphique d'un vecteur

Par convention, on adopte la notation suivante : vecteur :  $\vec{V}$  ou  $\overrightarrow{OA}$



### I.2.1 Composantes et module d'un vecteur

Soit  $R (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormé directe de l'espace vectoriel  $R^3$ . Soit un vecteur

$\vec{V} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ . Le vecteur  $\vec{V}$  peut s'écrire sous la forme :  $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$  et son

module est :  $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

### I.2.2 Types de Vecteurs

Les vecteurs peuvent être classés comme suit :

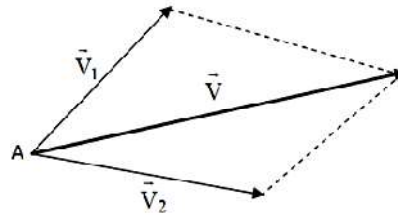
- **Vecteur libre** est défini par sa direction, son sens et sa valeur, son point d'application (origine) pouvant être quelconque dans l'espace. Exemple : le vecteur de l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  est un vecteur libre
- **Vecteur glissant** : est défini par sa droite d'action (support), son sens et sa valeur, son point d'application pouvant être quelconque sur la droite d'action. Exemple: Une force appliquée à un solide indéformable peut glisser sur sa droite d'action sans modifier l'effet qu'elle produit. On dira que la force est représentée par un vecteur glissant.
- **Vecteur lié** : est défini par sa droite d'action son sens, sa valeur et son point d'application. Exemple : Le poids d'un corps  $\vec{P}$  est un vecteur lié. C'est un vecteur qui a un point d'application bien défini qui est le barycentre ou le centre de gravité du corps.

### I.2.3 Opérations sur les vecteurs

#### ➤ Addition de deux vecteurs

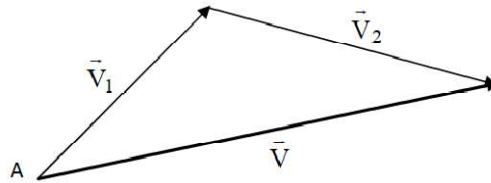
Des vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  peuvent être additionnés pour former un autre vecteur appelé vecteur somme ou résultante  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ . Deux règles principales sont utilisées pour déduire la résultante sont :

- Règle du parallélogramme, (voir figure I.2).



**Figure (I.2):** Présentation graphique de la règle du parallélogramme

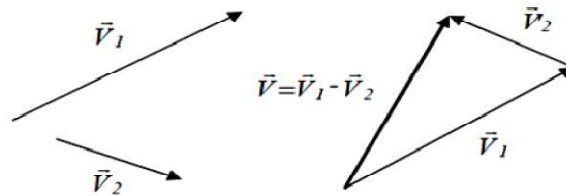
- Règle du triangle, (voir figure I.3).



**Figure (I.3):** présentation graphique de la règle du triangle

➤ **Soustraction de deux vecteurs**

La soustraction de deux vecteurs  $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$  est le vecteur  $\vec{V}$  défini comme l'addition du vecteur  $\vec{V}_1$  à un vecteur égal et opposé à  $\vec{V}_2$ , (voir figure I.4).



**Figure (I.4):** Soustraction de deux vecteurs

**I.3 Produit scalaire**

Soient deux vecteurs  $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ , leur produit scalaire est un produit qui donne comme résultat un scalaire.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \tag{I.1}$$

Ou

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{I.2}$$

Le produit scalaire est nul, si :

- Les deux vecteurs sont orthogonaux ;
- L'un des vecteurs est nul.

### I.3.1 Propriétés du produit scalaire

- Le produit scalaire est commutatif :  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$  (I.3)

- Distributivité par rapport à l'addition:  $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$  (I.4)

- Associatif par rapport à la multiplication:  $\lambda(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \cdot (\lambda \vec{V}_2)$  (I.5)

### I.4 Produit vectoriel

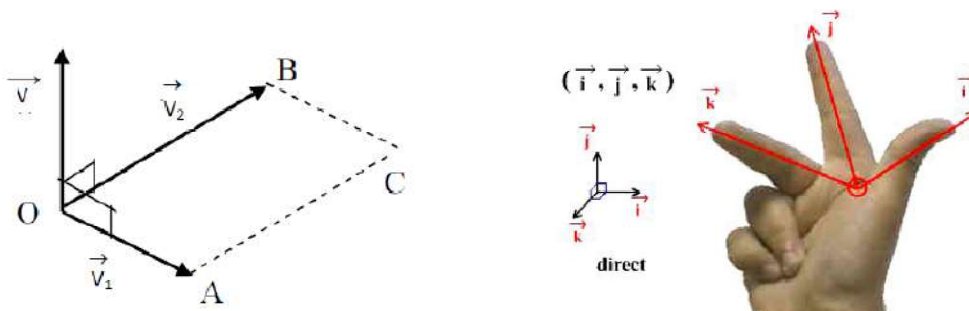
Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ , est un vecteur  $\vec{V}$ , noté :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \quad (I.6)$$

D'où :

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$$

La direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ . Le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite



**Figure (I.5):** direction et sens du vecteur obtenu du produit vectoriel

Son module vaut

$$\|\vec{V}\| = \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \quad (I.7)$$

Le produit vectoriel est nul si :

- Les deux vecteurs sont colinéaires ;
- L'un des vecteurs, est nul.

#### I.4.1 Propriétés du produit vectoriel

- le produit vectoriel est anticommutatif :  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = - \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$  (I.8)

- Distributivité par rapport à l'addition:

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 \quad (\text{I.9})$$

- Associatif par rapport à la multiplication:

$$\lambda(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \wedge (\lambda \vec{V}_2) = (\lambda \vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 \quad (\text{I.10})$$

#### I.5 Produit mixte

Soient trois vecteurs  $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{V}_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ , le produit mixte de ces trois vecteurs est le scalaire défini par :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - y_1(x_2 z_3 - x_3 z_2) + z_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) \quad (\text{I.11})$$

Le produit mixte est nul, si :

- les trois vecteurs sont dans le même plan ;
- deux des vecteurs sont colinéaires ;
- l'un des vecteurs, est nul.

## I.6 Applications avec solutions

### Application 1 :

Soient les vecteurs :  $\vec{V}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ ,  $\vec{V}_2 = -3\vec{i} + 1.5\vec{j} - 7.5\vec{k}$ ,  $\vec{V}_3 = -5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$

1- Calculer :  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ , que remarquez-vous ?

2- Calculer :  $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$  et  $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

### Solution :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 2(-3) + (-1)1.5 + 5(-7.5) = -45$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 &= \begin{vmatrix} 2 & -1.5 & 5 \\ -3 & 1.5 & -7.5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1.5 & 5 \\ 1.5 & -7.5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7.5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1.5 \\ -3 & 1.5 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= ((-1.5)(-7.5) - (5)(1.5))\vec{i} - (2(-7.5) - (-3)5)\vec{j} + (2 \cdot 1.5 - (-3)(-1.5))\vec{k} \end{aligned}$$

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \rightarrow \vec{V}_1 // \vec{V}_2$ , les deux vecteurs sont parallèles.

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1.5 & 5 \\ -3 & 1.5 & -7.5 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1.5 & -7.5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1.5) \begin{vmatrix} -3 & -7.5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -3 & 1.5 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = 6.75$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1.5 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -3 & 1.5 & -7.5 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1.5 & 5 \\ -31.5 & 40.5 & -4.5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = -195.75\vec{i} - 148.5\vec{j} + 33.75\vec{k}$$

### Application 2 :

Soient les vecteurs :  $\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{k}$ ,  $\vec{V} = 8\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\vec{P} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{Q} = -2\vec{i} + y\vec{j} + 12\vec{k}$

1- Calculer y et z pour que les vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  soient colinéaires

2- Calculer y pour que les vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{Q}$  soient perpendiculaires

$$\text{Solution : } \vec{U} // \vec{V} \rightarrow \vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 8 & y & z \end{vmatrix} = -6y\vec{i} + (-2z + 48)\vec{j} + 2y = \vec{0}$$

$$y=0 \text{ et } z=24. \vec{P} \perp \vec{Q} \rightarrow \vec{P} \cdot \vec{Q} = 0 \rightarrow 3(-2) + (4)y + 2(12) = 0 \rightarrow y = 9/2$$

## Chapitre II : Généralités et définitions de base

### II.1 Définition et sens physique de la force

La force est définie comme toute action extérieure capable de changer la mouvement ou l'état d'équilibre du corps solide exemple : tension d'un câble, (voir figure II.1). L'unité de la force est le Newton, N.

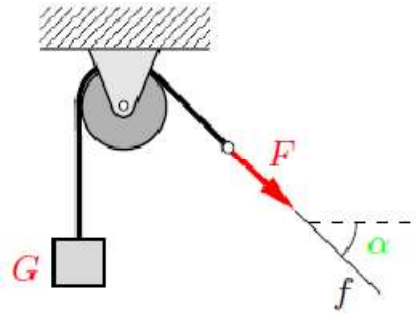


Figure (II.1): Tension d'un câble

### II.2 Représentation mathématique de la force

La force est une quantité vectorielle, elle est caractérisée par les propriétés suivantes, (voir figure II.2):

- le point d'application :  $A$  ;
- le sens :  $A \rightarrow B$  ;
- La direction où la ligne d'action :  $(\Delta)$  ;
- le module où la valeur numérique :  $F = AB$

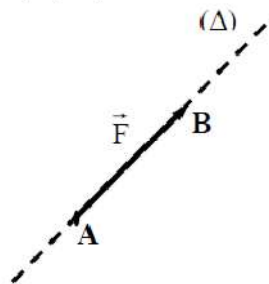
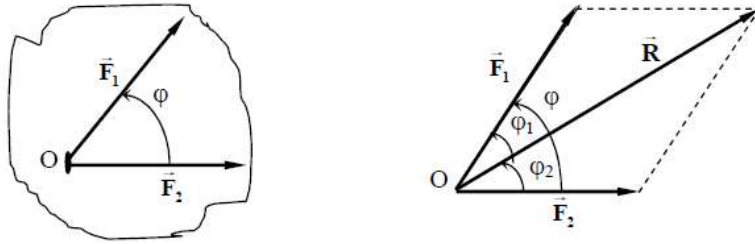


Figure (II.2): Représentation mathématique de la force

### II.3 Opérations sur la force (composition, décomposition, projection)

#### II.3.1 Composition de deux forces concourantes

Deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  concourantes appliquées à un point  $O$  du solide peuvent être additionnées en utilisant la règle du parallélogramme afin de trouver leur somme ou résultante  $\vec{R}$ , (voir figure II.3).



**Figure (II.3):** Résultante de deux forces concourantes (la règle du parallélogramme)

La résultante des deux forces s'écrit :  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  , son module est :

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \varphi)} \quad (\text{II.1})$$

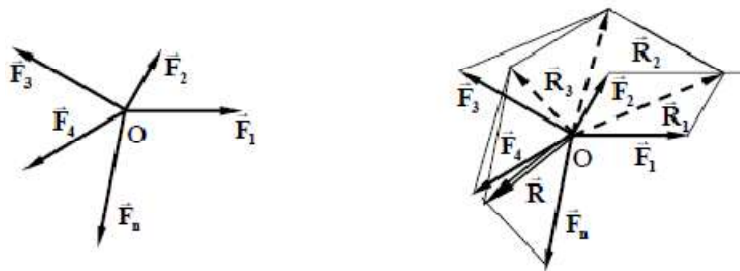
Et sa direction se détermine :

$$\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{F_1}{\sin \varphi} \quad (\text{II.2})$$

## II.3.2 Composition de plusieurs forces concourantes

### II.3.2.1 Règle du parallélogramme des forces

La résultante  $\vec{R}$  de plusieurs forces concourantes par la règle du parallélogramme en composant les deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  pour trouver la résultante  $\vec{R}_1$  . Ensuite en composant cette dernière avec  $\vec{F}_3$  pour déduire la résultante  $\vec{R}_2$  et ainsi de suite jusqu'à obtenir la résultante finale de toutes les forces  $\vec{R}$ , (voir figure II.4).

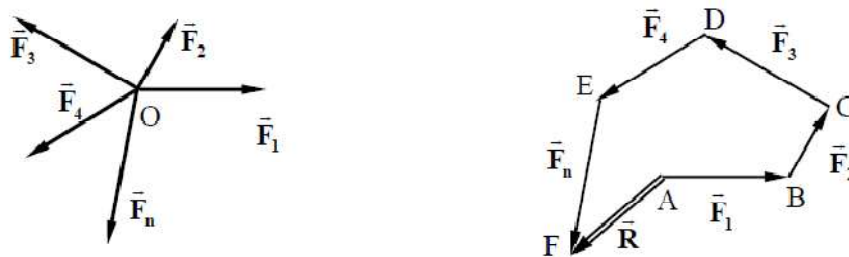


**Figure (II.4):** Résultante de plusieurs forces concourantes (la règle du parallélogramme)

### II.3.1.2 Règle du polygone des forces

La résultante  $\vec{R}$  de plusieurs forces concourantes par la règle du polygone en respectant tout à d'abord le sens et la direction de chaque force. On place l'origine de la force  $\vec{F}_2$  à l'extrémité B de la force  $\vec{F}_1$  puis placer l'origine de la force  $\vec{F}_3$  à

l'extrémité C de la force  $\vec{F}_2$  etc. en joignant le point A d'application des forces et l'extrémité de  $\vec{F}_n$ , on obtient la résultante finale de toutes les forces  $\vec{R}$ , (voir figure II.5).



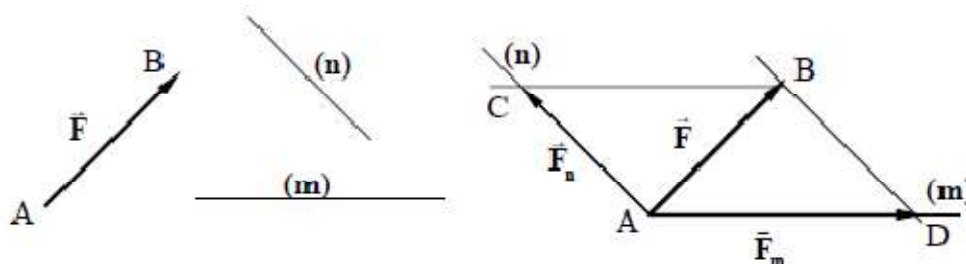
**Figure (II.5):** Résultante de plusieurs forces concourantes (la règle du polygone)

La résultante des forces s'écrit :  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  (II.3)

### II.3.3 Décomposition géométrique d'une force

#### II.3.3.1 Décomposition suivant deux directions

La décomposition d'une force  $\vec{F}$  a pour objectif de trouver les forces composantes  $\vec{F}_n$  et  $\vec{F}_m$  appliquées au même point, (voir figure II.6).



**Figure (II.6):** Décomposition d'une force suivant deux directions

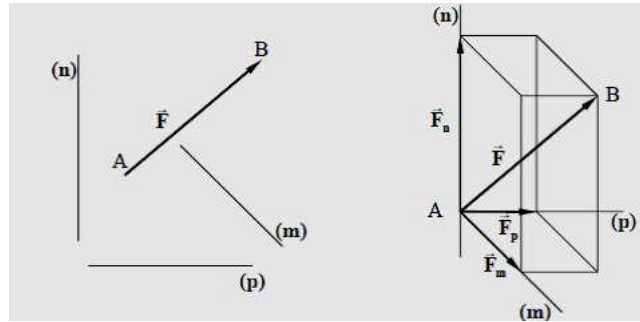
Pour déterminer les composantes de la force  $\vec{F}$ , il suffit de mener par le point A de la force  $\vec{F}$  et par l'extrémité B de  $\vec{F}$  deux droites parallèles à (m) et (n) : les points d'intersections définissent un parallélogramme.

La force  $\vec{F}$  s'écrit :  $\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_m$  (II.4)



### II.3.3.2 Décomposition suivant trois directions

La décomposition d'une force  $\vec{F}$  suivant les trois directions conduit à construire un parallélépipède dont les arêtes ont les directions données et dont la diagonale AB est constituée par la force décomposée, (voir figure II.7)



**Figure (II.7):** Décomposition d'une force suivant trois directions

La force  $\vec{F}$  s'écrit :  $\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_n + \vec{F}_p$  (II.5)

La force  $\vec{F}$  fait des angles  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  respectivement avec les axes x, y et z du système de coordonnées cartésiennes orthogonal Oxyz.

Le vecteur de force  $\vec{F}$  s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \quad (II.6)$$

Avec le module :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (II.7)$$

Tels que :

$$F_x = \|\vec{F}\| \cos\theta_x, F_y = \|\vec{F}\| \cos\theta_y, F_z = \|\vec{F}\| \cos\theta_z \quad (II.8)$$

Ainsi, les cosinus directeurs s'obtiennent comme suit :

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{\|\vec{F}\|}, \cos\theta_y = \frac{F_y}{\|\vec{F}\|}, \cos\theta_z = \frac{F_z}{\|\vec{F}\|} \quad (II.9)$$

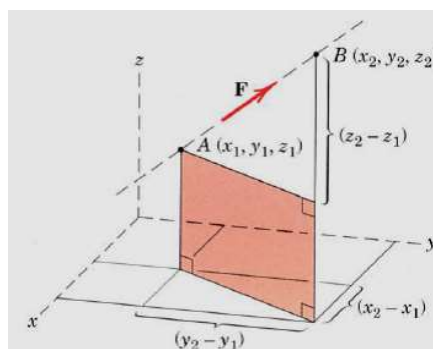
### II.3.3.3 Décomposition d'une force si deux points sur la ligne d'action de la force sont connus

Si les coordonnées de A et B sont connues, (voir figure II.8), on écrit  $\vec{F}$  ainsi:

$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \vec{U}_F = \|\vec{F}\| \frac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|} \quad (\text{II.10})$$

La force  $\vec{F}$  s'écrit finalement comme suit :

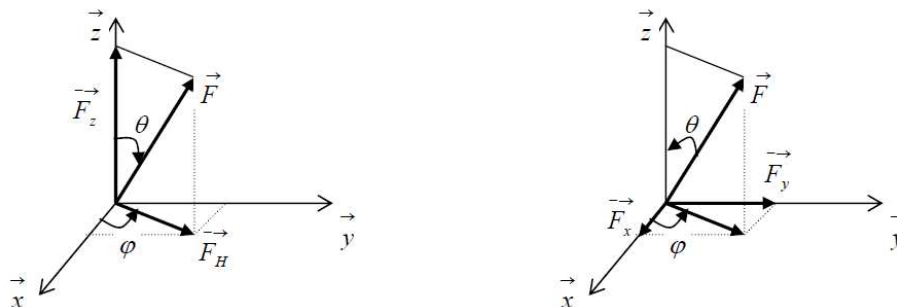
$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \frac{(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \quad (\text{II.11})$$



**Figure (II.8):** Décomposition d'une force si deux points sur la ligne d'action de la force sont connus

### II.3.4 Projection d'une force

Soit une force  $\vec{F}$  appliquée à l'origine O d'un repère orthonormé R (O,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ ), (voir figure II.9).



**Figure (II.9):** Représentation mathématique de la force

Les composantes de cette force sont définies par :

$$\vec{F} = \vec{F}_H + \vec{F}_z = \vec{F} \sin\theta + \vec{F} \cos\theta = \vec{F} \sin\theta \cos\varphi + \vec{F} \sin\theta \sin\varphi + \vec{F} \cos\theta \quad (\text{II.12})$$

$$\vec{F} = F \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + F \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + F \cos\theta \vec{k}$$

Avec :  $F_x = F \sin\theta \cos\varphi$  ,  $F_y = F \sin\theta \sin\varphi$  et  $F_z = F \cos\theta$

Le module de la force  $\vec{F}$  est :  $\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

## II.4 Types de forces

### II.4.1 Forces ponctuelles

On peut considérer que l'action de la force ponctuelle s'effectue en un point sur le corps, exemple : force exercée par une corde attachée  $T_c$  par une barre rigide sur un objet suspendu, (voir figure II.10.a)

### II.4.2 Forces linéiques

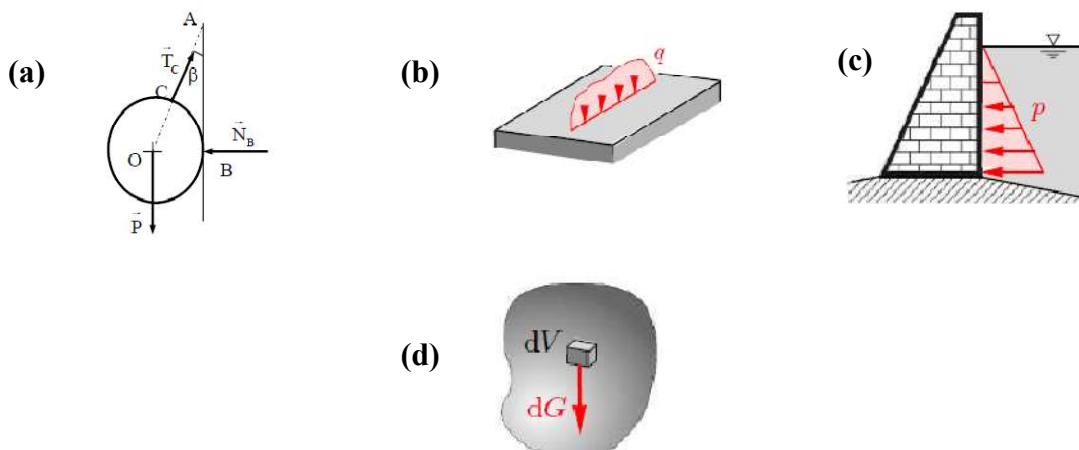
La force linéique est répartie le long d'une ligne, (voir figure II.10.b)

### II.4.3 Forces surfaciques

La force est dite force surfacique Lorsqu'elle s'exerce sur une surface, exemple : l'action de l'eau sur la surface du barrage, (voir figure II.10.c)

### II.4.4 Forces volumiques

Une force volumique est une force répartie sur tout le volume d'un corps, exemple : le poids (voir figure II.10.d)



**Figure (II.10):** Types de forces : (a) : force ponctuelle, (b) : force linéique, (c) : force surfacique, (d) : force volumique.

## II.5 Classification de forces : forces internes, forces externes

Les forces qui agissent sur un corps rigide peuvent être divisées en deux groupes: Forces intérieures et forces extérieures.

### II.5.1 Les forces intérieures

Représentent l'interaction entre l'ensemble des points matériels constituant le corps rigide

### II.5.2 Les forces extérieures

Représentent l'action des autres corps sur le corps étudié. Les forces extérieures sont de deux types : Forces actives et forces réactives (Réaction).

## II.6 Modèles mécanique : le point matériel, le corps solide

### II.6.1 le point matériel

On appelle un point matériel, une particule matérielle dont les dimensions sont négligeables dans les conditions du problème considéré

### II.6.2 le corps solide

Un corps est appelé un corps solide s'il ne se déforme pas sous l'influence des forces; les distances entre différents points du corps restent constante.

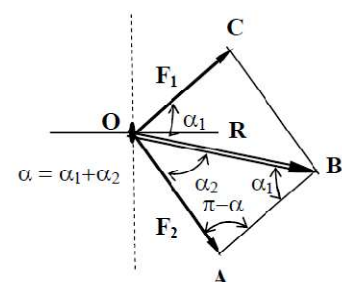
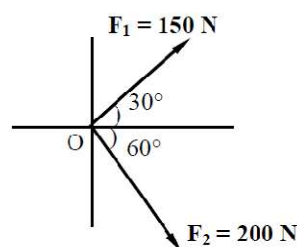
## II.7 Applications avec solutions

### Application 1 :

Déterminer la résultante des deux forces concourantes appliquées sur le corps solide en utilisant les deux méthodes suivantes :

a- La règle du parallélogramme

b- la méthode de projection des forces sur les axes



### Solution :

a- La diagonale OB représente la résultante des deux forces ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ )

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \alpha)} = 250 \text{ N}$$

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)}$$

D'où :  $\alpha_1 = 53.13^\circ$  et  $\alpha_2 = 36.87^\circ$

b- La projection des composantes des deux forces ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ) sur les axes x et y au point O, s'écrit :

$$R_x = F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 60^\circ = 229.9 \text{ N}$$

$$R_y = F_1 \sin 30^\circ - F_2 \sin 60^\circ = -98.21 \text{ N}$$

Le module de La résultante  $\vec{R}$  est :

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(229.9)^2 + (-98.21)^2} = 250 \text{ N}$$

La direction de  $\vec{R}$  est déterminée par :

$$\text{tg } \beta = \frac{R_x}{R_y} = -2.34 \rightarrow \beta = -66.7^\circ$$

### Application 2 :

La ligne d'action d'une force F de 100 N, passe par les points O (0, 0, 0) et A (3, 4, 5) et dans un repère orthonormé. Déterminer les composantes de cette force

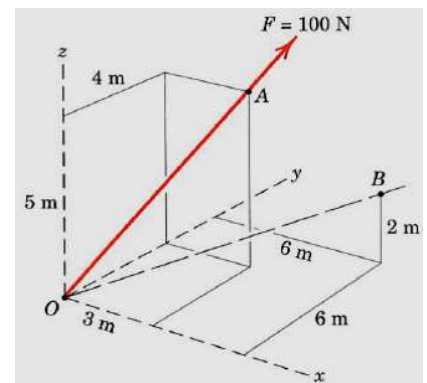
### Solution :

Nous avons :

$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \vec{U}_F = \|\vec{F}\| \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}$$

$$\vec{F} = 100 \frac{3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = 42.4\vec{i} + 56.6\vec{j} + 70.7\vec{k}$$

Les composantes de la force  $\vec{F}$  sont :  $F_x=42.4 \text{ N}$ ,  $F_y=56.6 \text{ N}$  et  $F_z=70.7 \text{ N}$



### Application 3 :

L'angle entre le hauban du tribord AB et le mât du bateau est de  $150^\circ$ . La tension dans le hauban est égale à 6 kN, calculer:

a- les composantes de la force exercée par le hauban au point A,

b- les angles  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ , et  $\theta_z$  qui définissent la direction de cette force

### Solution :

a- Les projections de la tension  $\vec{T}_B$  appliquée au point A sont :

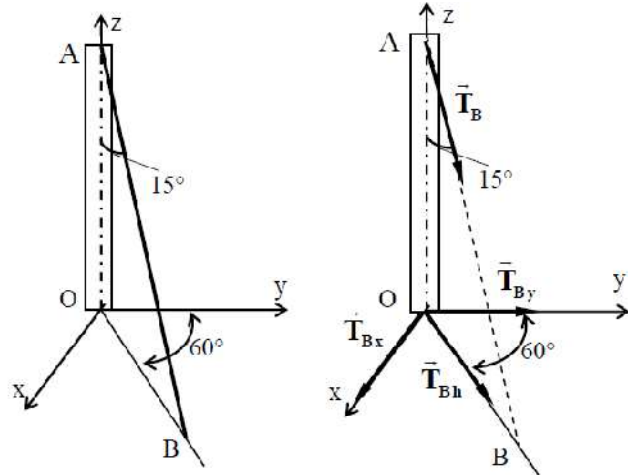
$$T_{Bz} = -T_B \cos 15^\circ$$

$$T_{Bh} = T_B \sin 15^\circ$$

En projetons  $T_{Bh}$  dans le plan  $(x,y)$ , on trouve :

$$T_{Bx} = T_{Bh} \sin 60^\circ = T_B \sin 15^\circ \sin 60^\circ$$

$$T_{By} = T_{Bh} \cos 60^\circ = T_B \sin 15^\circ \cos 60^\circ$$



Les composantes de la tension  $\vec{T}_B$  sont :

$$T_{Bx} = 1.34 \text{ N}$$

$$T_{By} = 0.78 \text{ N}$$

$$T_{Bz} = -5.79 \text{ N}$$

b- Les angles  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ , et  $\theta_z$  qui définissent la direction de cette force

$$\cos \theta_x = \frac{T_{Bx}}{\|\vec{T}_B\|} = 0.23 \rightarrow \theta_x = 77^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{T_{By}}{\|\vec{T}_B\|} = 0.129 \rightarrow \theta_y = 82.6^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{T_{Bz}}{\|\vec{T}_B\|} = -0.97 \rightarrow \theta_z = 165^\circ$$

## Chapitre III : Statique du solide rigide

### III.1 Introduction

La statique est une branche de la mécanique, son principal objectif est d'établir les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'état d'équilibre d'un corps solide ou un ensemble de corps solides par rapport à un système de référence supposé fixe.

### III.2 Axiomes de la statique

#### Axiome 1

Pour deux forces appliquées à un solide parfait se trouve en équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient de module égal, de sens contraire et soient portées par la droite joignant leurs points d'application, (voir figure III.1).

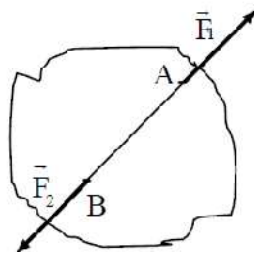


Figure (III.1): L'équilibre de deux forces

#### Axiome 2

Au système de forces appliqué à un solide parfait, on peut ajouter ou retrancher n'importe quel système de forces équilibré sans que l'effet du premier système s'en trouve modifié.

#### Axiome 3

Les forces exercées par deux solides l'un sur l'autre sont toujours de même module, de même direction et de sens opposé (Principe de l'action et de la réaction).

#### Axiome 4

Si un système de forces donné est équilibré sur un solide, il reste équilibré aussi sur tout autre solide. (Les dimensions et la forme du solide ne jouent aucun rôle dans la statique du solide parfait).

#### Axiome 5

Si un corps déformable se trouve en équilibre, il le reste aussi après la solidification (Principe de solidification).

#### Axiome 6

La résultante de deux forces appliquées à un même point du solide a son point d'application en ce même point ; son module et sa direction sont déterminés par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces (Règle du parallélogramme).

### III.3 Liaisons, appuis et réactions

L'appui est un élément extérieur en contact avec la structure étudiée (corps solide) et la réaction d'appui dépend de la nature appui- structure. Les appuis sont utilisés pour supporter les structures ou à les lier entre elles. Ils existent plusieurs types d'appuis dont on cite quelques-uns:

#### a) Appui simple

Ce type d'appui laisse à la structure toute la liberté de pivoter autour de A et de se déplacer horizontalement, (voir figure III.2).

La réaction de cet appui est:  $\vec{R}_A \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Ay} \end{pmatrix}$

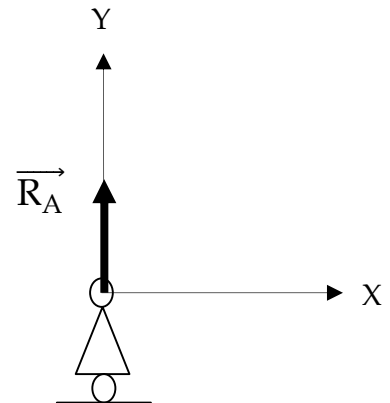


Figure (III.2): Appui simple



### b) Appui double (ou articulation)

Ce type d'appui laisse la rotation de la structure. Ce type d'appui ne permet pas le mouvement de translation de la structure, (voir figure III.3).

La réaction de cet appui est:  $\vec{R}_A \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{pmatrix}$

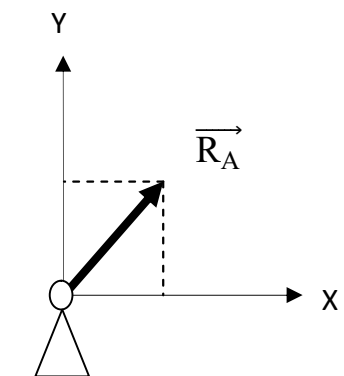


Figure (III.3): Appui double

### c) Encastrement

Ce type d'appui empêche la translation et la rotation de la structure, (voir figure III.4).

La réaction de cet appui est:  $\vec{R}_A \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{pmatrix}$  et un moment  $\vec{M}_{AZ}$

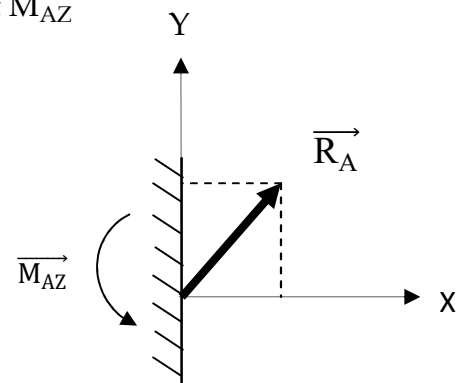


Figure (III.4): Encastrement

### d) Articulation cylindrique

Permet une translation suivant l'axe Az, et une rotation autour de l'articulation, (voir figure III.5). La réaction de cet appui est:

$$\vec{R}_A \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix}$$

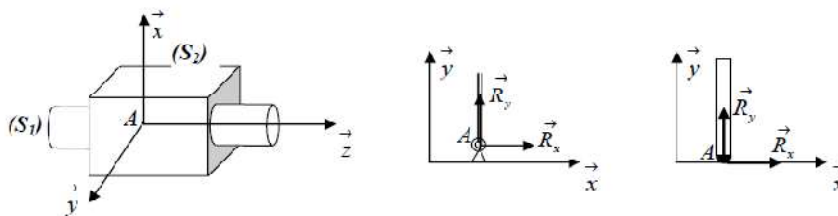


Figure (III.5): Articulation cylindrique

#### d) Articulation sphérique

Permet uniquement la rotation (voir figure III.6). La réaction de cet appui est:

$$\vec{R}_A \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix}$$

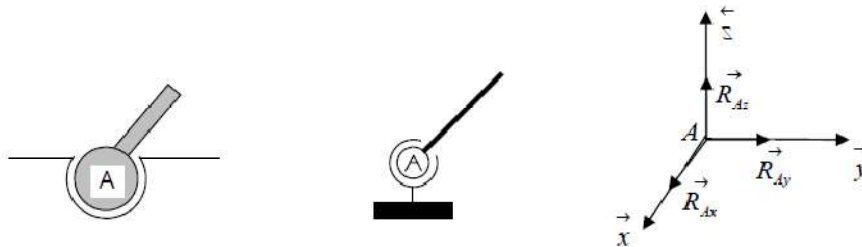


Figure (III.6): Articulation sphérique

#### III.4 Axiome des liaisons

Pour tout corps solide lié, il est possible de supprimer les liaisons en les remplaçant par les réactions et, de le considérer comme un corps solide libre soumis à l'action des forces données et des réactions de liaisons, (voir figure III.5).

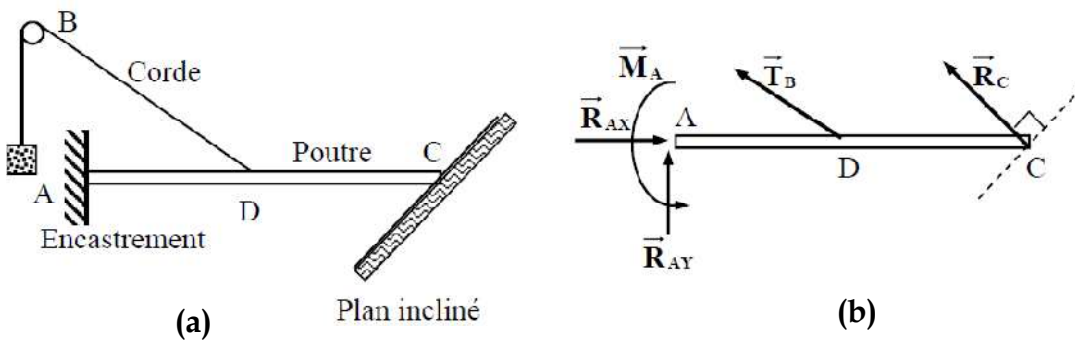
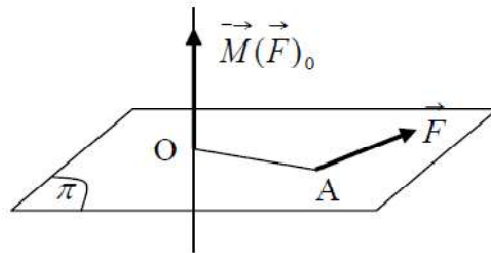


Figure (III.5): (a) Corps solide lié et (b) corps solide libre

### III.5 Moment d'une force

Le moment  $\vec{M}(\vec{F})$  d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un centre de rotation  $O$ , d'une force appliquée au point  $A$  est égale à, (voir figure III.6):

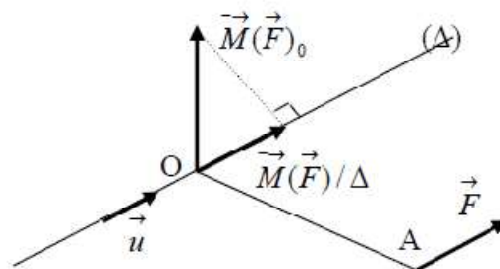
$$\vec{M}(\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F} \quad (\text{III.1})$$



**Figure (III.6):** Moment d'une force par rapport à un centre de rotation

Le moment  $\vec{M}(\vec{F})$  d'une force  $\vec{F}$  appliquée au point  $A$  par rapport à un axe  $(\Delta)$  défini par un point  $O$  et un vecteur unitaire  $\vec{u}$ , (voir figure III.7), est égale à:

$$\vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = (\vec{M}_{/O}(\vec{F}) \cdot \vec{u}) \vec{u} \quad (\text{III.2})$$



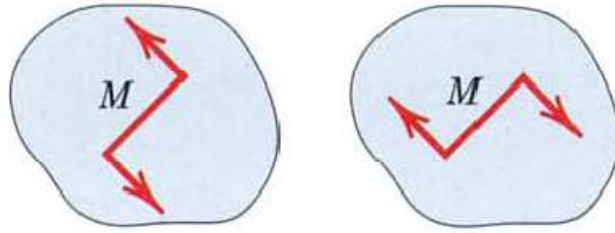
**Figure (III.7):** Moment d'une force par rapport à un axe de rotation

Remarque :

- Un moment de sens positif (+) est un moment antihoraire
- Un moment de sens positif (-) est un moment horaire

### III.6 Couple

On appelle couple un ensemble de forces appliquées à un solide dont la résultante est nulle, mais dont le moment total est non nul. Le moment est produit par deux forces égales, parallèles et de sens opposé, (voir figure III.8).



**Figure (III.7):** Moment d'une force par rapport à un axe de rotation

### III.7 Conditions d'équilibre

#### III.7.1 Forces quelconques

Pour que le solide soit en équilibre statique il faut et il suffit que:

- La résultante de toutes les forces extérieures appliquées au solide, soit nulle
- Le moment résultant de toutes ces forces en un point O, soit nul.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad (\text{III.1})$$

$$\vec{M}/_O = \sum \vec{M}/_O = \vec{0} \quad (\text{III.2})$$

Les équations (III.1) et (III.2) sont deux équations vectorielles qui donnent six équations scalaires en 3D:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} R_X = \sum F_X = 0 \\ R_Y = \sum F_Y = 0 \\ R_Z = \sum F_Z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.3})$$

$$\vec{M}/_O = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} M_X = \sum M_X = 0 \\ M_Y = \sum M_Y = 0 \\ M_Z = \sum M_Z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.4})$$

### III.7.2 Forces planes

Dans le cas d'un problème plan (par exemple X et Y), on aura trois équations d'équilibre : - Deux équations liées à la résultante statique;

- Et une équation pour le moment des forces par rapport au centre O

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} R_X = \sum F_X = 0 \\ R_Y = \sum F_Y = 0 \end{array} \right. \quad (III.5)$$

$$\vec{M}/_O = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad M_Z = \sum M_Z = 0 \quad (III.6)$$

### III.7.3 Forces concourantes

Dans le cas d'un système de forces concourantes au centre O, le moment sera nul par rapport à O (le bras de levier est nul). Il reste seulement trois équations pour la projection de la résultante:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} R_X = \sum F_X = 0 \\ R_Y = \sum F_Y = 0 \\ R_Z = \sum F_Z = 0 \end{array} \right. \quad (III.7)$$

### III.7.4 Forces parallèles

La condition d'équilibre pour les forces parallèles à l'axe (OX) est exprimée comme suit :

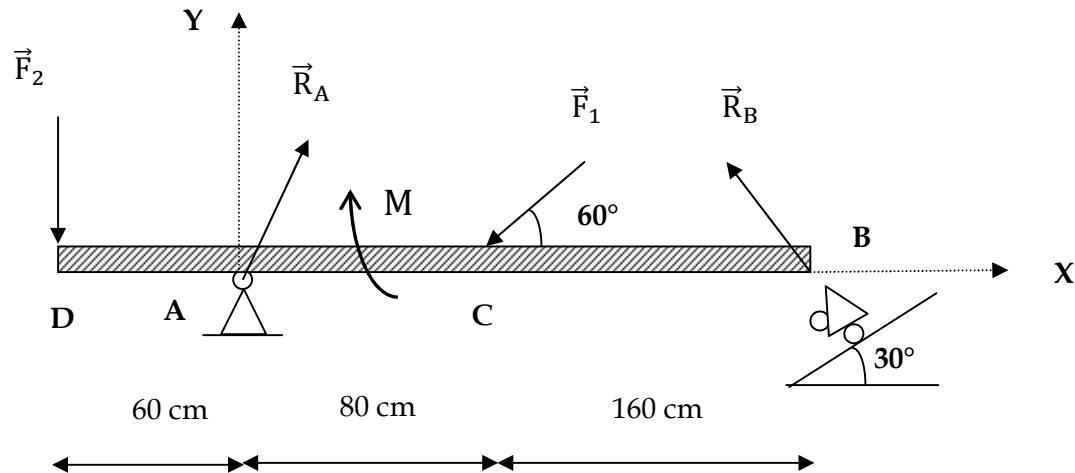
$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad R_X = \sum F_X = 0 \quad (III.8)$$

$$\vec{M}/_O = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad M_Z = \sum M_Z = 0 \quad (III.9)$$

### III.8 Applications avec solutions

#### Application 1 :

Une poutre est sollicitée par un couple M et par deux force F1 et F2 est maintenue en équilibre grâce à deux appuis l'un double en A et l'autre simple en B. Déterminer les réactions des appuis A et B. on donne: M=600 N.m, F1=1200 N, F2=800 N.



#### Solution :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_2 + \vec{R}_A + \vec{F}_1 + \vec{R}_B = \vec{0} \quad (\text{I})$$

$$\sum \vec{M}/_A = \vec{0} \rightarrow \overline{AD} \wedge \vec{F}_2 + \overline{AC} \wedge \vec{F}_1 + \overline{AB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0} \quad (\text{II})$$

En projetons (I) sur les axes (AX) et (AY) :

$$R_{AX} - F_1 \cos 60 - R_B \cos 60 = 0 \quad (1)$$

$$R_{AY} - F_2 - F_1 \sin 60 + R_B \sin 60 = 0 \quad (2)$$

De (II) :

$$\begin{pmatrix} -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F_1 \cos 60 \\ -F_1 \sin 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R_B \cos 60 \\ R_B \sin 60 \end{pmatrix} + \vec{M} = \vec{0} \rightarrow$$

$$0.6F_2 - 0.8 F_1 + 2.4 R_B \sin 60 - M = 0 \quad (3)$$

$$\text{De (3) : } R_B = \frac{M + 0.8 F_1 \sin 60 - 0.6 F_2}{2.4 \sin 60} \rightarrow R_B = 457.8 \text{ N}$$

En substituant  $R_B$  dans (1) et (2) :  $R_{AX} = F_1 \cos 60 + R_B \cos 60 = 828.9 \text{ N}$

$$R_{AY} = F_2 + F_1 \sin 60 - R_B \sin 60 = 1442 \text{ N, Donc : } R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = 1663.26 \text{ N}$$

### Application 2 :

Une plaque carrée de coté  $a$ , de poids  $P$  est fixée à un mur à l'aide d'une articulation sphérique au point A et d'une articulation cylindrique au point B. Un câble CD inextensible et de masse négligeable maintient la plaque en position horizontale. Une charge  $Q = 2P$  est suspendue au point E de la plaque. Les données sont :  $\alpha=30^\circ$ ,  $b=a/3$ . Déterminer les réactions des articulations en A et B ainsi que la tension dans le câble en fonction de  $a$  et  $P$ .

### Solution :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \rightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{P} = \vec{0} \quad (\text{I})$$

$$\sum \vec{M}/_A = \vec{0} \rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AC} \wedge \vec{T} + \vec{AE} \wedge \vec{Q} + \vec{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \quad (\text{II})$$

En projetons (I) sur les axes (AX) et (AY) :

$$R_{AX} + R_{BX} - T \cos 60 \cos 45 = 0 \quad (1)$$

$$R_{AY} - T \cos 60 \sin 45 = 0 \quad (2)$$

$$R_{AZ} + R_{BZ} - T \sin 60 - P - Q = 0 \quad (3)$$

De (II) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{BX} \\ 0 \\ R_{BZ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T \cos 60 \cos 45 \\ -T \cos 60 \sin 45 \\ T \sin 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow$$

$$\frac{2a}{3} R_{BZ} + a T \sin 60 - \frac{2a}{3} Q - \frac{Pa}{2} = 0 \quad (4)$$

$$-a T \sin 60 + a Q + \frac{Pa}{2} = 0 \quad (5)$$

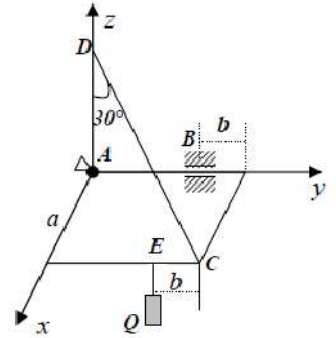
$$\frac{-2a}{3} R_{BX} - a T \cos 60 \sin 45 + T \cos 60 \cos 45 = 0 \quad (6)$$

La résolution de ce système d'équations donne :

$$\text{De : (6) : } R_{BX} = 0, \quad (5) : T = \frac{5\sqrt{3}}{3} P, \quad (4) : R_{BZ} = -P, \quad (3) : R_{AZ} = \frac{3}{2} P$$

$$(2) : R_{AY} = \frac{5\sqrt{6}}{12} P, \quad (1) : R_{AX} = \frac{5\sqrt{6}}{12} P, \quad \text{Donc : } R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = 17.39 P \quad \text{et}$$

$$R_B = \sqrt{R_{BX}^2 + R_{BY}^2} = P$$



## Chapitre IV : Cinématique du solide rigide

### IV.1 Rappels succinct sur les quantités cinématiques pour un point matériel

#### IV.1.1 Trajectoire, vitesse et accélération d'un point

##### IV.1.1.1 Trajectoire

Soit un point M repéré dans un référentiel R (O,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ) fixe, (voir figure IV.1). Sa position est déterminée par le vecteur de position à l'instant t,  $\overrightarrow{OM}(x(t), y(t), z(t))$ . Le déplacement du point M dans l'espace est donné par les équations paramétriques des coordonnées (x(t), y(t) et z(t)) en fonction du temps. En éliminant le paramètre temps entre elles, on obtient la trajectoire décrite par ce point dans l'espace.

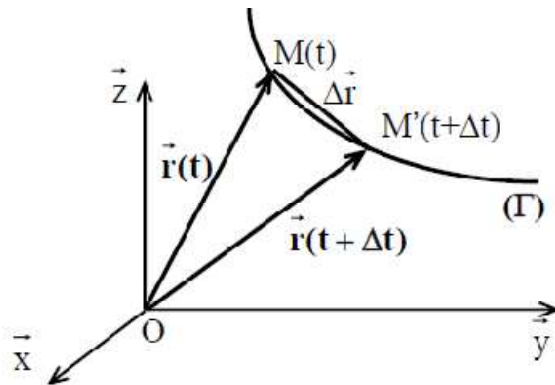


Figure (IV.1): Trajectoire

##### IV.1.1.2 Vecteur de vitesse

Le point matériel se déplace de la position M(t) à la position M(t+Δt) pendant la durée de temps Δt à la vitesse moyenne.

$$\vec{V}_{\text{moy}}(t) = \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} \quad (\text{IV.1})$$

Le vecteur de vitesse instantanée est obtenu lorsque :  $\Delta t \rightarrow 0$  elle est définie par :

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{\text{moy}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}, \text{ on a ainsi la vitesse instantanée :}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \quad (\text{IV.2})$$



### IV.1.1.3 Vecteur d'accélération

Le vecteur accélération moyenne du mobile entre  $t$  et  $t+\Delta t$  est défini par :

$$\vec{\gamma}_{\text{moy}}(t) = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (\text{IV.3})$$

L'accélération instantanée est :

$\vec{\gamma}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\gamma}_{\text{moy}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t}$ , on ainsi l'accélération instantanée :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \overline{OM}(t)}{dt^2} \quad (\text{IV.4})$$

## IV.1.2 Types de mouvements

### IV.1.2.1 Mouvement rectiligne et curviligne

On dit un mouvement rectiligne si sa trajectoire est une droite, et curviligne si c'est une courbe. Ces deux mouvements représentent le mouvement de translation.

#### a) Mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement est dit rectiligne uniforme si la trajectoire est une droite, et si la vitesse est constante  $V(t) = V_0 = \text{constante}$ . L'équation horaire du mouvement rectiligne uniforme est donnée par :

$$x(t) = V_0 t + x_0 \quad (\text{IV.5})$$

#### b) Mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement d'un point matériel est rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son accélération est constante  $\gamma(t) = \text{constante}$ . L'équation horaire du mouvement rectiligne uniformément varié est donnée par :

$$x(t) = \frac{1}{2} \gamma t^2 + V_0 t + x_0 \quad (\text{IV.6})$$

### IV.1.2.2 Mouvement circulaire

On dit un mouvement circulaire si sa trajectoire est un cercle ou portion de cercle.

### a) Mouvement circulaire uniforme

Un mouvement est dit circulaire uniforme si la trajectoire est un cercle, et si la vitesse angulaire est constante  $\omega(t) = \omega_0 = \text{constante}$ . L'équation horaire du mouvement rectiligne uniforme est donnée par :

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 \quad (\text{IV.7})$$

### b) Mouvement circulaire uniformément varié

Le mouvement d'un point matériel est circulaire uniformément varié si sa trajectoire est un cercle et son accélération angulaire est constante  $\varepsilon(t) = \text{constante}$ . L'équation horaire du mouvement rectiligne uniformément varié est donnée par :

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad (\text{IV.8})$$

#### IV.1.2.2.1 Accélération tangentielle et normale

Le vecteur accélération peut être alors défini à l'aide d'une composante dite normale pointant vers le centre du cercle et d'une composante tangentielle colinéaire au vecteur vitesse :

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N \quad (\text{IV.9})$$

#### L'accélération tangentielle

Cette composante du vecteur accélération est tangente au cercle de la trajectoire et donc colinéaire avec le vecteur vitesse. Sa valeur peut être calculée, à l'aide de la relation :

$$\gamma_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R \quad (\text{IV.10})$$

#### L'accélération normale

Cette composante du vecteur accélération est normale (perpendiculaire) au cercle de la trajectoire, elle est donc orientée vers le centre du cercle, tout comme l'accélération du mouvement circulaire uniforme. Sa valeur peut être calculée à l'aide de la relation suivante:

$$\gamma_N = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R \quad (\text{IV.11})$$

## IV.2 Cinématique du corps solide

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements des corps dans leurs rapports avec le temps, indépendamment des causes de ces mouvements.

La cinématique étudie le changement de position géométrique des corps dans le temps. Or, cela ne peut être fait que par rapport à un référentiel où l'on pourrait déterminer la position du corps mobile.

#### IV.2.1 Mouvement de translation

Pour un mouvement de translation, à un instant donné, tous les points du corps solide forment des lignes parallèles. Les vecteurs vitesses de tous les points du solide sont égaux et le vecteur taux de rotation est nul. Il existe deux types de translation : rectiligne et curviligne, (voir figure IV.1).

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B, \quad \vec{\omega} = \vec{0} \quad \forall (A, B) \in \text{Solide} \quad (\text{IV.12})$$



Figure (IV.2): (a) : Mouvement de translation rectiligne, (b) : mouvement de translation curviligne

#### IV.2.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Un solide est en rotation si la trajectoire de tous ses points sont des cercles dont le centre est une même droite ; cette droite est appelée « axe de rotation », (voir figure IV.2).

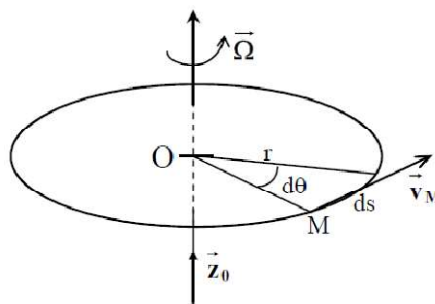


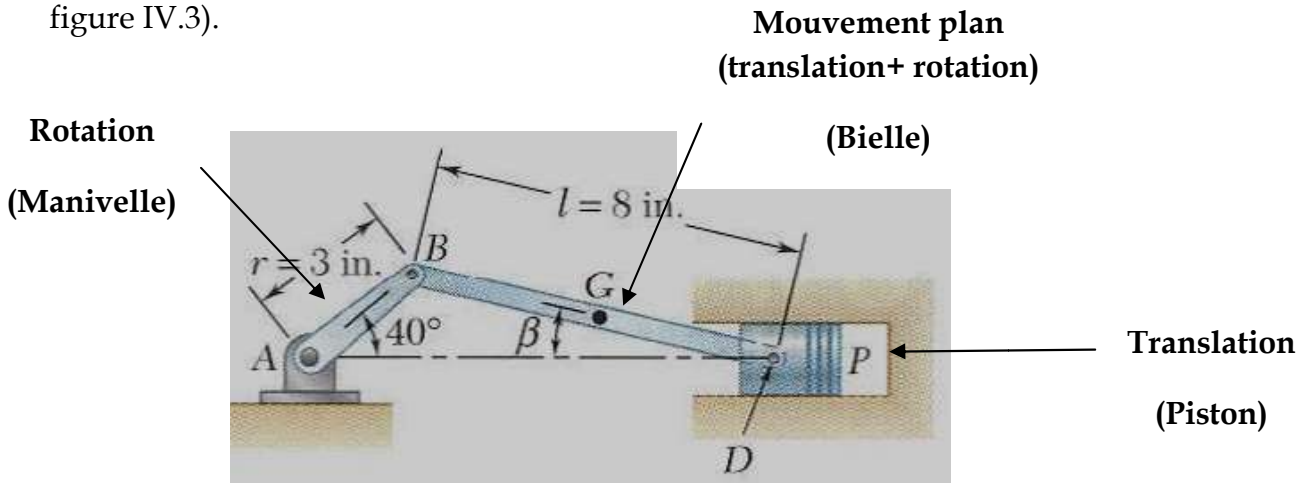
Figure (IV.3): Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Si O appartient à l'axe fixe du vecteur  $\vec{z}_0$ , la vitesse en M est donnée par la formule suivante :

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} \quad (IV.13)$$

### IV.2.3 Mouvement plan

Un mouvement plan est la combinaison d'une rotation autour d'un axe de rotation et une translation suivant ce même axe, exemple : système bielle-manivelle, (voir figure IV.3).



**Figure (IV.3):** Système bielle-manivelle

D'après la figure IV.3, Tout mouvement plan peut être remplacé par une translation d'un point de référence arbitraire A et une rotation simultanée autour de A. donc, le vecteur de vitesse du point B s'écrit :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB} \quad (IV.14)$$

La relation (IV.14) est importante parce qu'elle permet de calculer la vitesse dans chaque point du solide.

Pour trouver l'accélération du point B, on dérive l'équation (IV.3) par rapport au temps , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}_B}{dt} &= \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{V}_{B/A}}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{AB})}{dt} \rightarrow \vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \wedge \vec{AB} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB}) \rightarrow \\ \vec{\gamma}_B &= \vec{\gamma}_A + \vec{\gamma}_{B/A}^T + \vec{\gamma}_{B/A}^N \end{aligned} \quad (IV.15)$$

Avec :

$\vec{\gamma}_A$  : Vecteur de l'accélération du point A

$\vec{Y}_{B/A}^T = \vec{\varepsilon}_{AB} \wedge \overline{AB}$  : Vecteur de l'accélération tangentielle du point B par rapport à A

$\vec{Y}_{B/A}^N = \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge \overline{AB})$  : Vecteur de l'accélération normale du point B par rapport à A

#### IV.2.4 Centre instantané de rotation (ou centre instantané des vitesses) « C.I.R »

Pour tout solide en mouvement plan, il existe un seul point « P » à un instant déterminé « t » où la vitesse est nulle  $\vec{V}_P = \vec{0}$  appelé le centre instantané de rotation ou centre instantané des vitesses « C.I.R ». Le point « C.I.R » est déterminé par l'intersection des droites perpendiculaires aux vitesses des points du solide, (voir figures IV.4-6).

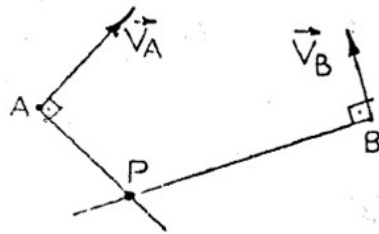


Figure (IV.4): Centre instantané de rotation « C.I.R »

#### Cas particuliers de détermination du C.I.R :

- Vecteurs de vitesse parallèles, (voir figure IV.5).



Figure (IV.5): Vitesses parallèles

- Roulement sans glissement d'une roue, (voir figure IV.6).

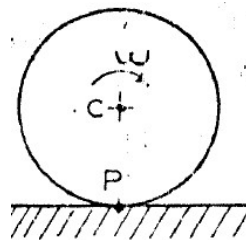


Figure (IV.6): Roulement sans glissement d'une roue

## IV.2.5 Mouvement composé.

### IV.2.5.1 Composition de vitesses

Nous allons étudier dans ce passage la méthode qui permet de passer d'un repère à un autre, ce qui est souvent nécessaire lorsque l'on s'intéresse à des mécanismes qui comportent plusieurs solides en mouvement.

Soit R le repère absolu et R<sub>1</sub> le repère relatif. Le vecteur vitesse absolue d'un point M quelconque s'écrit :

$$\vec{V}_{M/R} = \left[ \frac{d\overline{OM}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d(\overline{OO_1} + \overline{O_1M})}{dt} \right]_R = \vec{V}_{O_1/R} + \left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_R \quad (\text{IV.16})$$

Or on sait en utilisant la règle de dérivation dans deux repères différents

$$\left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \overline{O_1M} \quad (\text{IV.17})$$

Donc :

$$\vec{V}_{M/R} = \vec{V}_{O_1/R} + \left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \overline{O_1M} = \vec{V}_{O_1/R} + \vec{V}_{M/R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \overline{O_1M} \quad (\text{IV.18})$$

$$\vec{V}_{M/R} = \vec{V}_{M/R_1} + \vec{V}_{O_1/R} + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \overline{O_1M} \quad (\text{IV.19})$$

$$\vec{V}_{M/R} = \vec{V}_{r(M)} + \vec{V}_{e(M)} \quad (\text{IV.20})$$

Le premier terme est appelé vitesse absolue ( $\vec{V}_{M/R}$ ), le deuxième terme est appelé vitesse relative ( $\vec{V}_{r(M)} = \vec{V}_{M/R_1}$ ) et le troisième terme est appelé vitesse d'entraînement ( $\vec{V}_{e(M)} = \vec{V}_{O_1/R} + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \overline{O_1M}$ ).

### IV.2.5.2 Composition d'accélération

Le vecteur d'accélération absolue s'écrit :

$$\vec{Y}_{M/R} = \left[ \frac{d^2(\overline{OM})}{dt^2} \right]_R = \left[ \frac{d(\vec{V}_{M/R})}{dt} \right]_R \quad (\text{IV.21})$$

$$\vec{Y}_{M/R} = \left[ \frac{d(\vec{V}_{O_1/R})}{dt} \right]_R + \left[ \frac{d(\vec{V}_{M/R_1})}{dt} \right]_{R_1} + \left[ \frac{d(\vec{\omega}_{R_1/R})}{dt} \right]_R \wedge \overline{O_1M} + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_R \quad (\text{IV.22})$$

$$\vec{Y}_{M/R} = \vec{Y}_{O_1/R} + \vec{Y}_{M/R_1} + \left[ \frac{d(\vec{\omega}_{R_1/R})}{dt} \right]_R \wedge \overline{O_1M} + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \left[ \left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \overline{O_1M} \right] \quad (IV.23)$$

Nous pouvons donc le réécrire sous la forme :

$$\vec{Y}_{M/R} = \vec{Y}_{M/R_1} + 2(\vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \vec{V}_{M/R_1}) + \vec{Y}_{O_1/R} + \left[ \frac{d(\vec{\omega}_{R_1/R})}{dt} \right]_R \wedge \overline{O_1M} + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge [\vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \overline{O_1M}] \quad (IV.24)$$

Ou bien :

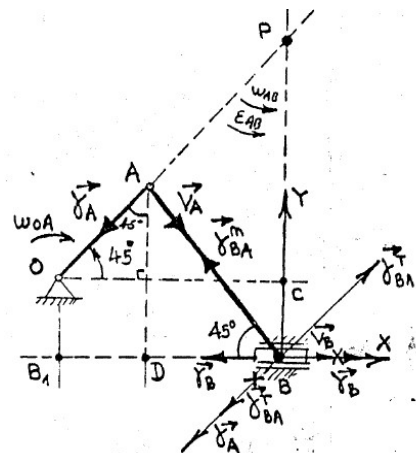
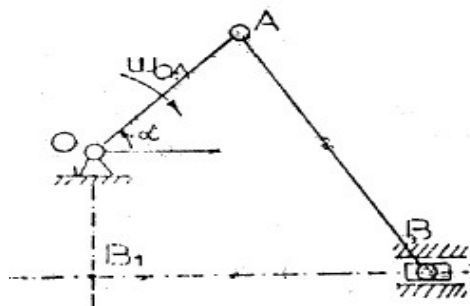
$$\vec{Y}_{M/R} = \vec{Y}_{r(M)} + \vec{Y}_{c(M)} + \vec{Y}_{e(M)} \quad (IV.25)$$

Le premier terme est appelé accélération absolue ( $\vec{Y}_{M/R}$ ), le deuxième terme est appelé est l'accélération relative ( $\vec{Y}_{r(M)} = \vec{Y}_{M/R_1}$ ), le troisième terme est l'accélération de Coriolis ( $\vec{Y}_{c(M)} = 2(\vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \vec{V}_{M/R_1})$ ) et le quatrième terme est appelé l'accélération d'entraînement ( $\vec{Y}_{e(M)} = \vec{Y}_{O_1/R} + \left[ \frac{d(\vec{\omega}_{R_1/R})}{dt} \right]_R \wedge \overline{O_1M} + \vec{\omega}_{R_1/R} \wedge [\vec{\omega}_{R_1/R} \wedge \overline{O_1M}]$ ).

### IV.3 Applications avec solutions

#### Application 1:

Un bras OA tourne avec une vitesse angulaire constante  $\omega_{OA}=5\text{rd/s}$ . Déterminer la vitesse et l'accélération angulaire de la barre AB, ainsi, l'accélération du point B. On donne:  $OA=15\text{cm}$ ,  $OB=5\sqrt{2}\text{ cm}$ ,  $AB=25\text{cm}$ ,  $\alpha=45^\circ$ .



**Solution :**

Pour trouver la valeur de  $\omega_{AB}$ , il faut déduire l'une des valeurs  $V_A$  et  $V_B$ , donc :

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overline{OA}$$

$$\begin{pmatrix} V_A \cos 45 \\ -V_A \sin 45 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{OA} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} OA \cos 45 \\ OA \sin 45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} V_A \cos 45 = -\omega_{OA} OA \sin 45 & (1) \\ -V_A \sin 45 = \omega_{OA} OA \cos 45 & (2) \end{cases}$$

$$\text{De (1) : } V_A = \frac{-\omega_{OA} OA \sin 45}{\cos 45} = \frac{-(-5) \cdot 15 \cdot \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 75 \text{ cm/s}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{PA} \rightarrow \begin{pmatrix} V_A \cos 45 \\ -V_A \sin 45 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -PA \cos 45 \\ -PA \sin 45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} V_A \cos 45 = \omega_{AB} PA \sin 45 & (3) \\ -V_A \sin 45 = -\omega_{AB} PA \cos 45 & (4) \end{cases}$$

$$\text{De (3) : } \omega_{AB} = \frac{V_A \cos 45}{PA \sin 45} = \frac{75 \cdot \sqrt{2}/2}{25 \sqrt{2}/2} = 3 \text{ rd/s}$$

$$\text{On a : } \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \wedge \vec{AB} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB}) \quad (*)$$

Seulement dans l'équation (\*),  $V_A$  est inconnue, pour cela on fait intervenir le mouvement du bras OA :

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\varepsilon}_{OA} \wedge \vec{OA} + \vec{\omega}_{OA} \wedge (\vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{OA}) = \vec{\omega}_{OA} \wedge (\vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{OA})$$

En substituant  $\vec{V}_A$  dans (\*), on trouve :

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_{OA} \wedge (\vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{OA}) + \vec{\varepsilon}_{AB} \wedge \vec{AB} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB})$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ V_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{OA} \end{pmatrix} \wedge \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{OA} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} OA \cos 45 \\ OA \sin 45 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{AB} \end{pmatrix} \wedge \left[ \begin{pmatrix} AB \cos 45 \\ -AB \sin 45 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \right] \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \wedge \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} AB \cos 45 \\ -AB \sin 45 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_B = -\omega_{OA}^2 OA \cos 45 + \varepsilon_{AB} AB \sin 45 - \omega_{AB}^2 AB \cos 45 \quad (5)$$

$$0 = -\omega_{OA}^2 OA \sin 45 + \varepsilon_{AB} AB \cos 45 + \omega_{AB}^2 AB \sin 45 \quad (6)$$

$$\text{De (6) : } \varepsilon_{AB} = \frac{\omega_{OA}^2 OA \sin 45 - \omega_{AB}^2 AB \sin 45}{AB \cos 45} = \frac{(-5)^2 \sqrt{2}/2 - (3)^2 25 \sqrt{2}/2}{25 \sqrt{2}/2} = 6 \text{ rd/s}^2$$

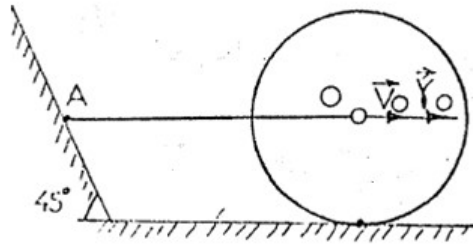


En substituant la valeur de  $\varepsilon_{AB}$  dans (5), on trouve :

$$\gamma_B = (-5)^2 \frac{15\sqrt{2}}{2} + 6 \cdot 25 \frac{\sqrt{2}}{2} - (3)^2 \cdot 25 \frac{\sqrt{2}}{2} = -317.25 \text{ cm/s}^2 \quad (\gamma_B < 0 \text{ donc on fait changer le sens du vecteur } \overrightarrow{\gamma_B})$$

### Application 2:

Une roue roule sans glissement. Déterminer la vitesse et l'accélération angulaire de la barre OA et l'accélération du point A. On donne:  $OA=2\text{m}, \gamma_O=1\text{m/s}^2, V_O=2\text{m/s}$ .



**Solution :**

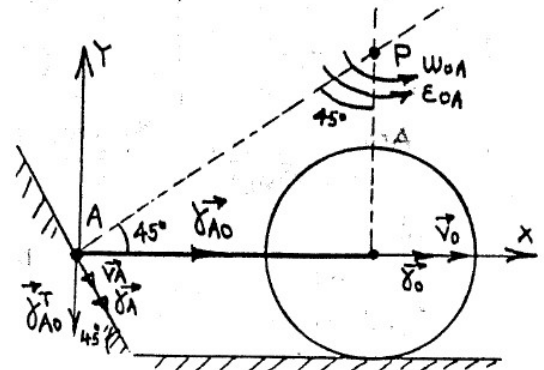
$$\text{On a : } \overrightarrow{V}_O = \overrightarrow{V}_P + \overrightarrow{\omega}_{OA} \wedge \overrightarrow{PO} \rightarrow \begin{pmatrix} V_O \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{OA} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -PO \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_O = \omega_{OA} PO \rightarrow \omega_{OA} = \frac{V_O}{PO}$$

$$PO = OA \tan 45 \rightarrow PO = OA = 2\text{m}$$

$$\omega_{OA} = \frac{2}{2} = 1 \text{ rd/s}$$



$$\text{On a : } \overrightarrow{\gamma}_B = \overrightarrow{\gamma}_O + \varepsilon_{OA} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\omega}_{OA} \wedge (\overrightarrow{\omega}_{OA} \wedge \overrightarrow{OA})$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_A \cos 45 \\ -\gamma_A \sin 45 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_O \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{OA} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -OA \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{OA} \end{pmatrix} \wedge \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{OA} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -OA \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\gamma_A \cos 45 = \gamma_O + \omega_{OA}^2 OA \quad (1)$$

$$-\gamma_A \sin 45 = -\varepsilon_{OA} OA \quad (2)$$

$$\text{De (1) : } \gamma_A = \frac{\gamma_O + \omega_{OA}^2 OA}{\cos 45} = \frac{1 + (1)^2 (2)}{\sqrt{2}/2} = 4.24 \text{ m/s}^2$$

$$\text{En substituant } \gamma_A \text{ dans (2) : } \varepsilon_{OA} = \frac{\gamma_A \sin 45}{OA} = \frac{4.24 \sqrt{2}/2}{2} = 1.5 \text{ rd/s}^2$$

## Chapitre V : Géométrie des masses

### V.1 Introduction

La géométrie des masses regroupe deux paramètres essentiels caractérisant le système matériel qui sont :

- Centre de masse ou de gravité
- Moment d'inertie

Ces deux paramètres donnent la répartition des masses d'un solide. La géométrie des masses joue un rôle important dans l'étude dynamique du solide.

### V.2 Masse d'un système matériel

Un système matériel est un ensemble discret ou continu de points matériels. La masse mesure la quantité de matière contenue dans un corps donné. Elle est une grandeur scalaire positive, (voir figure V.1).

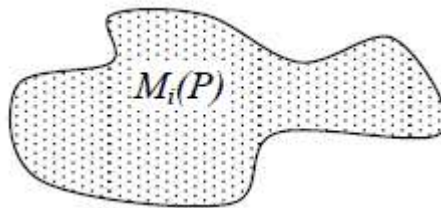


Figure (V.1): Masse d'un système matériel

#### V.2.1 Système continu

On appelle masse d'un système matériel continu, la grandeur scalaire:

$$m = \int_{P \in (S)} dm(P) \quad (V.1)$$

L'élément  $dm(p)$  est la mesure de la masse au voisinage du point (P).

- Si le corps (S) a un volume V :

$$m = \int_V \rho(P) dv \quad (V.2)$$

Où  $dv$  est un élément de volume et  $\rho(P)$  est la masse volumique du corps au point P.

Pour un système homogène, la masse volumique est constante et  $m = \rho V$

- Si le corps (S) est une surface :

$$m = \int_S \sigma(P) \, ds \quad (V.3)$$

Où  $ds$  est un élément de surface et  $\sigma(P)$  est la densité surfacique au point P.

- Si le corps (S) est une ligne :

$$m = \int_L \lambda(P) \, dl \quad (V.4)$$

Où  $dl$  est un élément de longueur et  $\lambda(P)$  est la densité linéique au point P.

### V.1.2 Système discret

La masse d'un système discret est la somme des  $n$  points matériels discrets de masses  $m_i$  :

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (V.5)$$

### V.3 Formulation intégrale du centre de masse

On appelle centre de masse ou centre d'inertie G du solide le barycentre des différentes centres P des éléments de masses élémentaires  $dm$  :

$$\int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} \, dm = \vec{0} \quad (V.6)$$

Où P est un point du solide avec :  $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $\overrightarrow{OG} = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}$ .

Soit O le centre d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on peut écrire dans ce repère :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP} \rightarrow \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} \, dm = \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OG} \, dm + \int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} \, dm, \text{ on obtient :}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\int_{P \in (S)} dm} \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} \, dm = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} \, dm \quad (V.7)$$

Les coordonnées du centre de masse G d'un système homogène sont déterminées par des calculs utilisant les éléments infinitésimaux tel que:  $dl$  pour les éléments linéaires,  $ds$  pour les éléments surfaciques et  $dv$  pour les éléments volumiques. Ainsi nous pouvons écrire :

$$x_G = \frac{\int_{P \in (S)} x \, dm}{m}, y_G = \frac{\int_{P \in (S)} y \, dm}{m}, z_G = \frac{\int_{P \in (S)} z \, dm}{m} \quad (V.8)$$

### V.3.1 Définitions (cas linéaire, surfacique et volumique)

- **Cas linéaire**

Les coordonnées du centre de masse sont déterminées comme suit :

$$x_G = \frac{\int \lambda x dl}{\lambda L}, y_G = \frac{\int \lambda y dl}{\lambda L}, z_G = \frac{\int \lambda z dl}{\lambda L} \quad (\text{V.9})$$

Si le solide est homogène ( $\lambda=\text{cte}$ ), la relation (V.9) devienne :

$$x_G = \frac{\int x dl}{l}, y_G = \frac{\int y dl}{l}, z_G = \frac{\int z dl}{l} \quad (\text{V.10})$$

- **Cas surfacique**

$$x_G = \frac{\int \sigma x ds}{\sigma S}, y_G = \frac{\int \sigma y ds}{\sigma S}, z_G = \frac{\int \sigma z ds}{\sigma S} \quad (\text{V.11})$$

Si le solide est homogène ( $\sigma=\text{cte}$ ), la relation (V.11) devienne :

$$x_G = \frac{\int x ds}{S}, y_G = \frac{\int y ds}{S}, z_G = \frac{\int z ds}{S} \quad (\text{V.12})$$

- **Cas volumique**

$$x_G = \frac{\int \rho x dv}{\rho V}, y_G = \frac{\int \rho y dv}{\rho V}, z_G = \frac{\int \rho z dv}{\rho V} \quad (\text{V.11})$$

Si le solide est homogène ( $\rho=\text{cte}$ ), la relation (V.11) devienne :

$$x_G = \frac{\int x dv}{V}, y_G = \frac{\int y dv}{V}, z_G = \frac{\int z dv}{V} \quad (\text{V.12})$$

### V.3.2 Formulation discrète du centre de masse

Les coordonnées du centre de masse d'un système composé d'un ensemble de systèmes matériels ayant chacun un centre de masse  $G_i$  et une masse  $m_i$  sont déterminées comme suit :

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{m}, y_G = \frac{\sum m_i y_i}{m}, z_G = \frac{\sum m_i z_i}{m} \quad (\text{V.13})$$

**Remarque :** Il ne faut pas confondre le centre d'inertie avec le centre de gravité. Le centre de gravité C est, par définition, le point d'application du poids du solide. Le centre de gravité C coïncide avec le centre d'inertie G si et seulement si le champ de pesanteur est uniforme.

### V.3.3 Théorèmes de GULDIN

Il existe deux théorèmes de Guldin pour la détermination du centre de gravité.

#### Premier Théorème de Guldin : le centre d'inertie d'une courbe plane

La surface  $S$  engendrée par la rotation d'un arc de courbe de longueur  $L$  autour d'un axe  $(\Delta)$  sans l'intercepter dans son plan est égale au produit de la longueur  $L$  de l'arc par la longueur de la circonférence  $2 \pi R_G$  décrite par le centre d'inertie  $G$  de l'arc de courbe, (voir figure V.2).

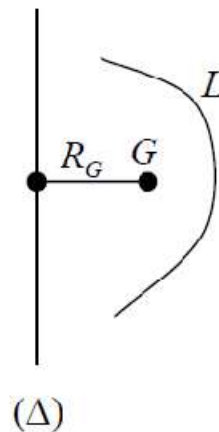


Figure (V.2): Premier théorème de Guldin

Soit  $L$  la longueur de l'arc et  $R_G$  sont centre d'inertie. La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie  $G$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$  est donnée par :  $2\pi R_G$ , alors la surface décrite par cet élément est égale à :

$$S_{/\Delta} = 2 \pi R_G L \quad \text{d'où:} \quad R_G = \frac{S_{/\Delta}}{2 \pi L} \quad (\text{V.14})$$

Dans le cas d'un système homogène de plusieurs éléments, on aura :

$$R_G = \frac{S_{\text{totale}/\Delta}}{2 \pi L_{\text{totale}}} \quad (\text{V.15})$$

Si les deux axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  représentent l'axe  $(\Delta)$ , les coordonnées seront déterminées comme suit :

$$x_G = \frac{S_{/Oy}}{2 \pi L}, \quad y_G = \frac{S_{/Ox}}{2 \pi L} \quad (\text{V.16})$$

## Deuxième Théorème de Guldin : le centre d'inertie d'une surface plane

Une surface plane homogène  $S$ , limitée par une courbe fermée simple et tournant autour d'un axe sans le rencontrer ( $\Delta$ ) engendre un volume  $V$ . Le volume  $V$  engendré est égal au produit de la surface  $S$  par la longueur du périmètre  $2\pi R_G$  décrit par le centre d'inertie  $G$  de cette surface autour de l'axe ( $\Delta$ ). (voir figure V.3).

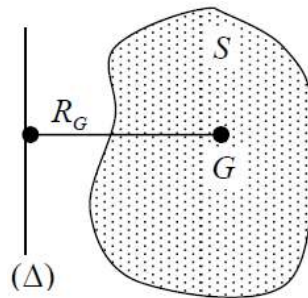


Figure (V.3): Deuxième théorème de Guldin

Soit  $S$  la surface et  $R_G$  la distance de son centre d'inertie à ( $\Delta$ ). La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie  $G$  par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) est donnée par :  $2\pi R_G$ , alors le volume décrit par cette surface est égal à :

$$V_{/\Delta} = 2\pi R_G S \quad \text{d'où:} \quad R_G = \frac{V_{/\Delta}}{2\pi S} \quad (\text{V.17})$$

Dans le cas d'un système homogène de plusieurs surfaces, on aura :

$$R_G = \frac{V_{\text{totale}/\Delta}}{2\pi S_{\text{totale}}} \quad (\text{V.18})$$

Si les deux axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ) représentent l'axe ( $\Delta$ ), les coordonnées seront déterminées comme suit :

$$x_G = \frac{V_{/Oy}}{2\pi S}, \quad y_G = \frac{V_{/Ox}}{2\pi S} \quad (\text{V.19})$$

## V.4 Moment et produit d'inertie de solides

### V.4.1 Moment d'inertie

Le centre de masse permet de réduire un solide (surface ou ligne) en un point. Cependant, la répartition des masses (surfaces, lignes) autour de ce centre de masse à aussi son importance. Le moment d'inertie par rapport à un point, caractérise la répartition de la masse autour du point. Plus il est grand, plus la matière est éloignée

du point, et plus il sera difficile de mettre le solide en rotation autour de ce point. Il en est de même pour des moments d'inertie par rapport à un axe ou un plan.

**a) Moment d'inertie par rapport au point O**

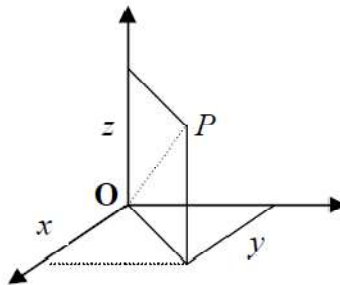
Il est donné par :

$$I_0 = \int r^2 \, dm \tag{V.20}$$

Ou :  $r^2$  : représente la distance  $OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , (voir figure V.4)

Alors :

$$I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2) \, dm \tag{V.21}$$



**Figure (V.4):** Moment d'inertie par rapport à O

**b) Moment d'inertie par rapport à un axe**

Les moments d'inertie par rapport aux axes (Ox), (Oy) et (Oz) sont déterminés comme suit, (voir figure (V.5)) :

**b.1) Axe  $\overline{OX}$**

il est donné par :

$$I_{xx} = \int r^2 \, dm \tag{V.22}$$

Ou :  $r^2$  : représente la distance du point P à l'axe Ox.

$$OP^2 = y^2 + z^2$$

Alors :

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \, dm \tag{V.23}$$

**b.2) Axe  $\vec{OY}$**

il est donné par :

$$I_{yy} = \int r^2 \, dm \quad (\text{V.24})$$

Ou :  $r^2$  : représente la distance du point P à l'axe Oy.

$$OP^2 = x^2 + z^2$$

Alors :

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) \, dm \quad (\text{V.25})$$

**b.3) Axe  $\vec{OZ}$**

Il est donné par :

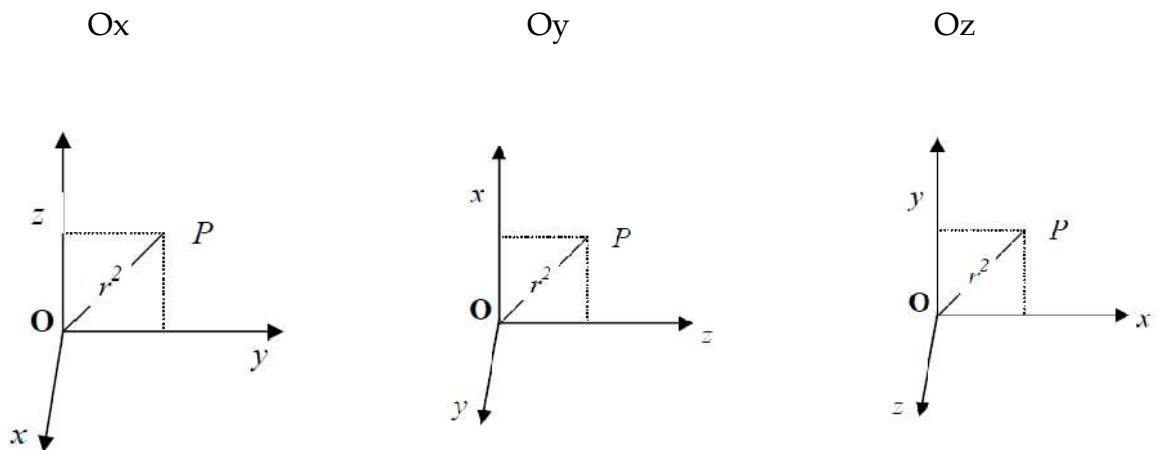
$$I_{zz} = \int r^2 \, dm \quad (\text{V.26})$$

Ou :  $r^2$  : représente la distance du point P à l'axe Oz.

$$OP^2 = x^2 + y^2$$

Alors :

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) \, dm \quad (\text{V.27})$$



**Figure (V.5):** Moment d'inertie par rapport à Ox, Oy et Oz.



#### V.4.2 Produit d'inertie de solides

Les produits d'inertie par rapport aux axes ou les moments d'inertie par rapport aux plans (xOy), (xOz), (yOz) sont donnés par les équations suivantes:

$$I_{xOy} = \int xy \, dm, \quad I_{xOz} = \int xz \, dm, \quad I_{yOz} = \int yz \, dm \quad (\text{V.28})$$

#### V.5 Tenseur d'inertie d'un solide

Pour un solide (S) donné, un point O appartenant à (S) et un repère orthonormé R (O, x, y, z), on appelle tenseur d'inertie de (S), en O, relativement au repère considéré, noté  $I_O$ , la matrice symétrique :

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{V.29})$$

##### V.5.1 Cas particuliers

###### a) Le système présente certains plans de symétrie

- Si Oxy est un plan de symétrie : à tout point  $M_1$  de côté z, on peut associer le point  $M_2$  de côté -z, (voir figure (V.6)) :

$$I_{xz} = \int xz \, dm = 0 \quad \text{et} \quad I_{yz} = \int yz \, dm = 0 \quad \text{car} \quad z_G = 0 \quad (\text{V.30})$$

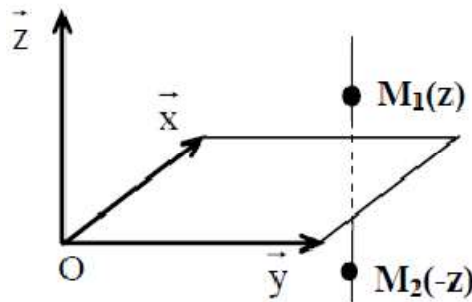


Figure (V.6): Plan de symétrie (xOy)

- Si Oyz est plan de symétrie : à tout point  $M_1$  de côté x, on peut associer le point  $M_2$  de côté -x, (voir figure (V.7)) :

$$I_{yx} = \int yx \, dm = 0 \quad \text{et} \quad I_{zx} = \int zx \, dm = 0 \quad \text{car} \quad x_G = 0 \quad (\text{V.31})$$

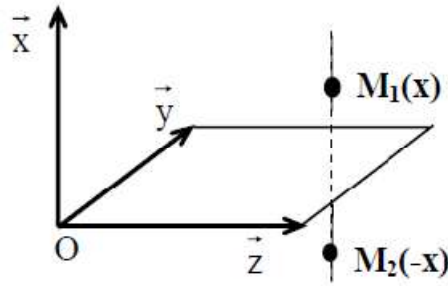


Figure (V.7): Plan de symétrie (yOz)

-De même, Si Oxz est plan de symétrie : à tout point M1 de côté y, on peut associer le point M2 de côté -y, (voir figure (V.8) :

$$I_{yz} = \int yz \, dm = 0 \text{ et } I_{xy} = \int xy \, dm = 0 \text{ car } y_G = 0 \quad (\text{V.32})$$

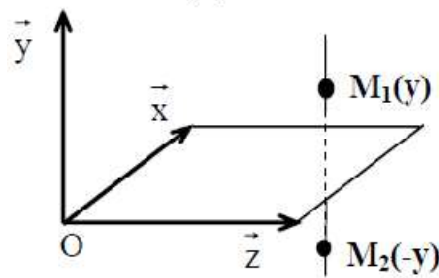


Figure (V.8): Plan de symétrie (xOz)

### b) Le système est un corps de révolution autour de l'axe Oz

Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie ; en particulier les plans Oxz et Oyz, donc :

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0, I_{xx} = I_{yy} \quad (\text{V.33})$$

### V.5.2 Axes Principaux d'inertie

La matrice d'inertie  $I_0$  est diagonalisable, il existe une base orthonormée  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  dans laquelle elle est diagonale :

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{OX_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{OY_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{OZ_1} \end{bmatrix} \quad (V.34)$$

Les termes de la diagonale sont les moments d'inertie principaux ou moments d'inertie autour des axes principaux  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . Corrélativement, les produits d'inertie sont nuls.

Pour un solide quelconque, la recherche de ses axes principaux conduit à une équation du troisième degré (équation aux valeurs propres de la matrice d'inertie).

### V.6 Théorème d'Huyghens

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe  $A\vec{u}$  est égal au moment d'inertie de ce corps par rapport à un axe parallèle à  $O\vec{u}$  passant par le centre de masse du solide augmenté du produit de la masse de ce solide par le carré de la distance du centre de masse à  $OX$ , (voir figure V.3)..

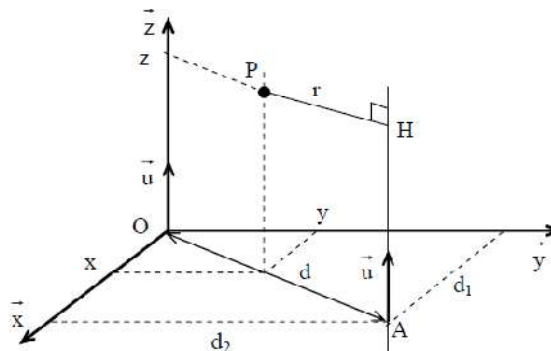


Figure (V.9): Théorème d'Huyghens

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe  $A\vec{u}$  est donc calculé comme suit :

$$I_{A\vec{u}} = I_{O\vec{u}} + md^2 \quad (V.35)$$

### V.7 Moment d'inertie de solides par rapport à un axe quelconque

Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, (voir figure V.10) est défini par :

- Pour un système continu :  $I_\Delta = \int r^2 dm \quad (V.36)$

- Pour un système discret :  $I_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$  (V.37)

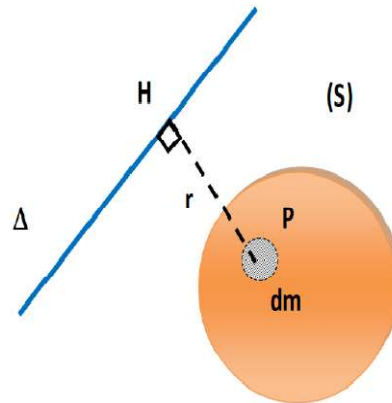


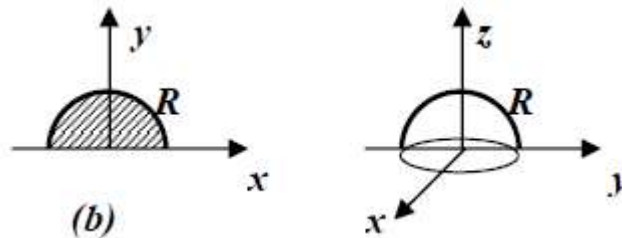
Figure (V.10): Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

## V.8 Applications avec solutions

### Application 1 :

Déterminer le centre d'inertie des corps solides homogènes suivants :

- Un demi disque matériel de rayon R ;
- Une demi sphère matérielle creuse de rayon R



**Solution :**

#### a) Demi-disque

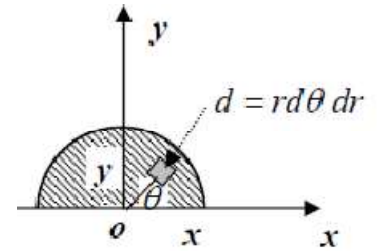
L'axe (Oy) est un axe de symétrie donc :  $x_G=0$ , le centre de masse du solide est situé :

Sur l'axe de symétrie. On a :  $y_G = \frac{1}{m} \int_S y \, dm$  . Le solide est un demi-disque. Sa masse est donnée par:  $m = \int_S \sigma \, ds$  ou :  $\sigma$  est la densité surfacique et  $ds$  un élément de

surface. L'élément de surface  $ds$  a pour coordonnées :  $ds = \begin{cases} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{cases}$   
avec :  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

La masse du solide est donnée par :

$$m = \int_S \sigma ds = \int_0^R \int_0^\pi \sigma r d\theta dr = \sigma \int_0^R r dr \int_0^\pi d\theta = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$$



$$y_G = \frac{1}{m} \int_S y dm = \frac{1}{m} \int_S y \sigma ds$$

$$= \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta r d\theta dr = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 0$$

Donc :

$$G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{4R}{3\pi} \end{cases}$$

### b) Demi-sphère

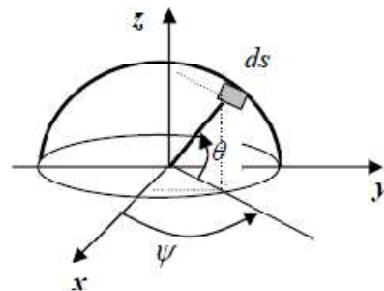
Les plans (xOz) et (yOz) sont des de symétrie donc :  $x_G = y_G = 0$ , le centre de masse du solide est situé sur l'axe de symétrie. On a :  $z_G = \frac{1}{m} \int_S z dm$ . Le solide est un demi-disque. Le solide est une demi-sphère creuse, sa masse est donnée par:  $m = \int_S \sigma ds$  ou :  $\sigma$  est la densité surfacique et  $ds$  un élément de surface. L'élément de surface  $ds$

est donné par :  $ds = R d\theta R \psi \cos \theta$  et a pour coordonnées :  $ds = \begin{cases} R \cos \theta \cos \psi \\ R \cos \theta \sin \psi \\ R \sin \theta \end{cases}$

avec :  $R = \text{Cte}$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  et  $0 \leq \psi \leq 2\pi$

La masse du solide est donnée par :

$$m = \int_S \sigma ds = \sigma R^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \sigma 2\pi R^2$$



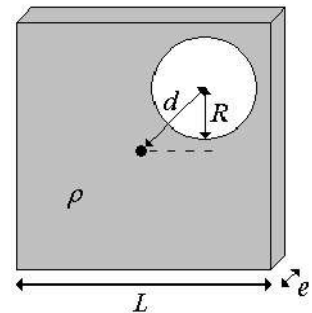
$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{m} \int_S z dm = \frac{1}{m} \int_S z \sigma ds = \\
&= \frac{\sigma R^3}{\sigma 2\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{R}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) \int_0^{2\pi} d\psi \\
&= \frac{R}{2\pi} \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \frac{R}{2} \text{ Donc : } G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \frac{R}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

### Application 2 :

La plaque d'aluminium trouée. Une plaque carrée en aluminium (masse volumique  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ) est percée d'un cylindre de rayon  $R = 0,6 \text{ m}$  à une distance égale à  $1 \text{ m}$  du centre de la plaque à  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale (voir schéma ci-contre). Évaluez le centre de masse ( $x_G, y_G$ ) de la plaque par rapport au coin inférieur gauche de la plaque si celle-ci possède une largeur  $L$  égale à  $4 \text{ m}$  et une épaisseur  $e$  égale à  $0,1 \text{ m}$ .

### Solution :

Pour résoudre ce problème, on peut considérer la masse d'un trou comme étant une masse négative.



### Plaque sans trou : (masse positive)

$$m_{\text{plaque sans trou}} = \rho L L e = \rho L^2 e = 2700 \cdot 4^2 = 4320 \text{ kg}$$

Centre de masse de la plaque sans trou

$$x_{\text{plaque sans trou}} = \frac{L}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$$

$$y_{\text{plaque sans trou}} = \frac{L}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$$

### Le trou de la plaque: (masse négative)

$$m_{\text{trou}} = -\rho \pi R^2 e = -2700 \pi (0.6)^2 0.1 = -305.4 \text{ kg}$$

Centre de masse de la plaque sans trou

$$x_{\text{trou}} = \frac{L}{2} + d \cos 45^\circ = \frac{4}{2} + 1 \cos 45^\circ = 2.71 \text{ m}$$

$$x_{\text{trou}} = \frac{L}{2} + d \sin 45^\circ = \frac{4}{2} + 1 \sin 45^\circ = 2.71 \text{ m}$$

Plaque avec trou :

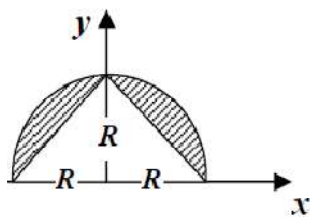
$$m_{\text{tot}} = m_{\text{plaque sans trou}} + m_{\text{trou}} = 4320 + (-305.) = 4014.6 \text{ kg}$$

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{m} = \frac{4320 \cdot 2 + (-305.4) \cdot 2.71}{4014.6} = 1.946 \text{ m}$$

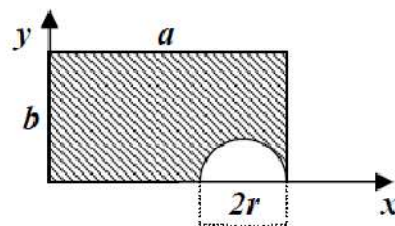
$$y_G = \frac{\sum m_i y_i}{m} = \frac{4320 \cdot 2 + (-305.4) \cdot 2.71}{4014.6} = 1.946 \text{ m}$$

### Application 3 :

Déterminer les coordonnées du centre d'inertie, par le théorème de Guldin, des solides homogènes suivants :



*Figure 01*



*Figure 02*

**Solution :**

**a) figure 01 :**

Le solide est constitué d'un demi-disque évidé d'un triangle isocèle dont la base est le diamètre du disque et la hauteur le rayon du disque.

Par raison de symétrie le solide a son centre d'inertie sur l'axe des y , d'où  $x_G = 0$

$$y_G = \frac{V_{\text{tot}/x}}{2 \pi S_{\text{tot}}} = \frac{\text{Vol (sphere)} - \text{Vol (2 cônes)}}{2 \pi (S_{\text{disque}} - S_{\text{triangle}})} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 - 2 \frac{1}{3} \pi R^3}{2 \pi (\frac{\pi R^2}{2} - R^2)} = \frac{2}{3} \frac{R}{\pi - 2}$$

**b) figure 02 :**

Le solide est constitué d'une plaque rectangulaire évidée d'un demi-disque.

$$x_G = \frac{V_{\text{tot}/y}}{2 \pi S_{\text{tot}}} = \frac{\text{Vol (cylindre)} - \text{Vol (demi - torse)}}{2 \pi (S_{\text{disque}} - S_{\text{triangle}})} = \frac{\pi a^2 - \frac{1}{2} \pi R^2 \quad 2\pi(a - r)}{2 \pi (ab - \frac{\pi r^2}{2})}$$

$$= \frac{a^2 b - \pi r^2 (a - r)}{6ab - \pi r^2}$$

$$x_G = \frac{V_{\text{tot}/x}}{2 \pi S_{\text{tot}}} = \frac{\text{Vol (cylindre)} - \text{Vol (sphere)}}{2 \pi (S_{\text{disque}} - S_{\text{triangle}})} = \frac{\pi b^2 a - \frac{4}{3} \pi R^3}{2 \pi (ab - \frac{\pi r^2}{2})} = \frac{3 a b^2 - 4 r^3}{6ab - 3\pi r^2}$$

**Application 4 :**

Déterminer les tenseurs d'inertie en O relativement au repère orthonormé R (O, x, y, z) des solides homogènes (S) suivants :

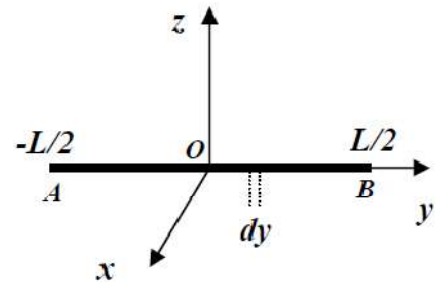
1. (S) est une barre AB de longueur L, de milieu O, portée par l'axe Oy
2. (S) est un cercle de centre O, de rayon R, d'axe Oz

**Solution :**

1. Le solide est une barre de longueur L

Nous avons un solide AB=L de masse m et de densité linéaire  $\lambda$  tel que :

$$m = \int_S dm = \int_S \lambda dy = \lambda L \rightarrow \lambda = \frac{m}{L}$$



On choisit une élément de longueur dy ayant pour coordonnées : (0, y, 0) tel que :

$-L \leq y \leq L$  . Les moments d'inertie sont données par :  $I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm$ ,

$I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2) dm$  ,  $I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$ . Les produits d'inertie sont données par :

$I_{xy} = \int_S xy dm$ ,  $I_{xz} = \int_S xz dm$  ,  $I_{yz} = \int_S yz dm$ . On remarque que les axes Oy et Oz

jouent le même rôle vis-à-vis du solide, alors :  $I_{xx}=I_{zz}$ . L'élément choisi a pour

coordonnées  $x=0$  et  $z=0$  alors  $I_{yy}=0$  et tous les produits d'inertie sont nuls :  $I_{xy}= I_{xz}=$

$I_{yz}=0$ .



$$I_{xx} = \int_S y^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 \lambda dy = \lambda \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda L^3}{12} = \frac{m L^2}{12}$$

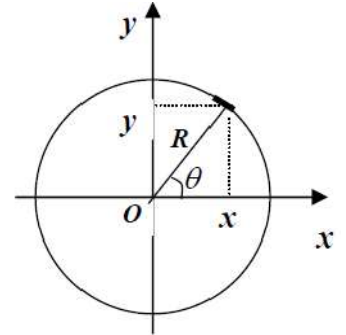
Le tenseur d'inertie de la barre au point O est :  $I_O = \begin{bmatrix} \frac{m L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m L^2}{12} \end{bmatrix}$

2. Le solide est un cercle de rayon R de centre O et d'axe Oz

Le périmètre du cercle est égal à :  $L=2\pi R$

La masse du solide est donnée par :  $m=\lambda L=\lambda 2\pi R$

Les plans (xOz) et (y Oz) sont des plans de symétrie alors tous les produits d'inertie sont nuls :  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz}=0$ .



On voit aussi que les axes Ox et Oy jouent le meme role par

rapport au solide alors les moments d'inertie suivant ces axes sont égaux :  $I_{xx}=I_{yy}$ .

Nous avons un solide dans la plan (xOy) , alors quel que soit l'élément de masse dm choisi il aura pour coordonnées : (x, y, 0), et nous avons aussi le cercle :  $x^2+y^2=R^2$

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S R^2 dm = m R^2$$

$I_{xx} = \int_S y^2 dm$  et  $I_{yy} = \int_S x^2 dm$  , en faisant la somme des deux moments d'inertie nous obtenons :  $I_{xx} + I_{yy} = \int_S (x^2 + y^2) dm = I_{zz}$  , or nous avons l'égalité :  $I_{xx}= I_{yy}$

Alors :  $2 I_{xx}= I_{zz} \rightarrow I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2}$  alors :  $I_{xx} = I_{yy} = \frac{m R^2}{2}$

Dans un solide plan, le moment d'inertie suivant l'axe perpendiculaire au plan est égal à la somme des moments suivant les deux axes du plan.

Le tenseur d'inertie d'un cercle au point O est :

$$I_O = \begin{bmatrix} \frac{m R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m R^2}{2} \end{bmatrix}$$

## Chapitre VI : Dynamique du solide

### VI.1 Introduction

La dynamique est l'étude du mouvement des corps matériels en liaison avec les forces qui s'exercent sur ces corps. L'objectif de ce chapitre est l'étude des théorèmes généraux régissant la dynamique.

### VI.2 Bref rappels sur les quantités dynamiques pour un point matériel

La dynamique des particules est régie par des principes basés sur les lois de Newton.

#### - Première loi de Newton

Dans un repère absolu, une particule (M) de masse  $m$  totalement isolée reste au repos si elle est initialement au repos, ou bien est animée d'un mouvement de translation rectiligne uniforme si elle était en mouvement. Cette particule possède une quantité de mouvement constante. On écrit :

$$\vec{P} = m \vec{v}_M \quad (\text{VI.1})$$

#### - Deuxième loi de Newton

Une particule (M) est soumise à des actions de la part d'une autre particule. À l'instant  $t$ , ces actions sont représentées par le vecteur force  $\vec{F}$  s'exerçant sur cette particule. On écrit :

$$\vec{P} = \frac{d m \vec{v}_M}{dt} = \vec{F} \rightarrow \vec{F} = m \vec{\gamma}_M \quad (\text{VI.2})$$

$\vec{\gamma}_M$  : est le vecteur d'accélération de la particule (M)

#### - Troisième loi de Newton

Une particule (M) est soumise à des actions de la part d'une autre particule. À l'instant  $t$ , ces actions sont représentées par le vecteur force  $\vec{F}$  s'exerçant sur cette particule. On écrit :

$$\vec{P} = \frac{d m \vec{v}_M}{dt} = \vec{F} \rightarrow \vec{F} = m \vec{\gamma}_M \quad (\text{VI.3})$$

$\vec{\gamma}_M$  : est le vecteur d'accélération de la particule (M)

S'il ya action d'une particule  $M_1$  à l'instant  $t$ , la force exercée par  $M_1$  sur  $M_2$  et la force exercée par  $M_2$  sur  $M_1$  sont de meme intensité, parallele mais de direction opposée. C'est le principe d'action et de réaction.

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \quad (\text{VI.4})$$

### VI.3 Élément de cinétique du corps rigide

On peut définir les éléments cinétiques du solide par:

- Sa quantité de mouvement
- Son moment cinétique
- Son énergie cinétique

#### VI.3.1 Quantité de mouvement

Le moment cinétique est une quantité importante en physique, son rôle est tout aussi important que celui de la quantité de mouvement, il est son analogue en rotation. Le moment cinétique d'un point matériel  $M$  par rapport à un point  $O$  est le moment de la quantité de mouvement par rapport à ce meme point  $O$ , ce qui donne le prduit vectoriel :

La quantité de mouvement  $\vec{P}$  est une grandeur vectorielle. Cette une notion très importante car elle introduit deux éléments qui caractérisent l'état de mouvement de la particule : sa masse et sa vitesse. La quantité de mouvement d'un point matériel  $M$  est le produit de sa masse par sa vitesse (le vecteur  $\vec{v}_M$ ):

$$\vec{P} = m \vec{v}_M \quad (\text{VI.5})$$

Pour un système matériel discret, la quantité de mouvement s'écrit comme suit :

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_{M_i} \quad (\text{VI.6})$$

Pour un système matériel continu, la quantité de mouvement s'écrit comme suit :

$$\vec{P} = \int_V \vec{v}_M dm \quad (\text{VI.7})$$

#### VI.3.2 Moment cinétique

Le moment cinétique est une quantité importante en physique, son rôle est tout aussi important que celui de la quantité de mouvement, il est son analogue en rotation. Le

moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O est le moment de la quantité de mouvement  $\vec{P}$  par rapport à ce même point O, ce qui donne le produit vectoriel :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}_M \quad (\text{VI.8})$$

Pour un système matériel discret, le moment cinétique s'écrit comme suit :

$$\vec{L}_O = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \sum \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_{M_i} \quad (\text{VI.9})$$

Pour un système matériel continu, le moment cinétique s'écrit comme suit :

$$\vec{L}_O = \int_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \int_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_M \, dm \quad (\text{VI.10})$$

### VI.3.3 Énergie cinétique

C'est l'énergie accumulée par un solide lorsqu'il se déplace. Elle dépend de sa vitesse de déplacement.

- **Solide en translation rectiligne**

A chaque instant, tous les points du solide ont le même vecteur vitesse  $\vec{v}$ . L'énergie cinétique de ce solide, de masse m, est alors donnée par :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{VI.11})$$

- **Solide en rotation par rapport à un axe fixe**

Pour un solide de masse totale m, tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  par rapport à un axe fixe ( $\Delta$ ), et de moment d'inertie  $I_\Delta$  par rapport à cet axe, l'énergie cinétique est donné par :

$$T = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 \quad (\text{VI.12})$$

- **Solide en mouvement plan quelconque**

Tout mouvement plan d'un solide (masse m) peut se décomposer en la somme d'une translation (vitesse V) de son centre gravité G et d'une rotation (vitesse angulaire  $\omega$ ) autour d'un axe perpendiculaire au plan du mouvement. Son énergie cinétique s'écrit alors :

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 \quad (\text{VI.13})$$

Où  $I_{\Delta}$  est le moment d'inertie du solide autour d'un axe perpendiculaire au plan du mouvement et passant par G.

#### VI.4 Équation de la dynamique pour un corps solide

Le principe fondamental de la dynamique correspond à la généralisation des lois de Newton pour un système matériel possédant une dimension. Il en résulte deux équations vectorielles :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{\gamma}_G \quad (\text{VI.14})$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad (\text{VI.15})$$

#### VI.5 Théorème du moment cinétique

Ce théorème s'énonce que la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en un point O fixe dans un référentiel galiléen est égale au moment des forces extérieures appliquées au système:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad (\text{VI.16})$$

Pour un Solide mobile autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ). On considère l'axe  $\Delta$  comme axe principal d'inertie, passant par un point O. Le théorème du moment cinétique en O permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}}) \rightarrow I_{\Delta} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum \vec{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad (\text{VI.17})$$

#### VI.6 Théorème de l'énergie cinétique

Dans de nombreux cas, pour déterminer l'équation du mouvement d'un solide ou d'un système de solide, il est plus judicieux d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique afin d'aboutir à la solution du problème mécanique. Le théorème de l'énergie cinétique stipule que la variation de l'énergie cinétique entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  est à la somme des travaux de toutes les forces extérieures appliquées au solide entre ces mêmes instants. Il est donné par la formule suivante :

$$\Delta T = T_2 - T_1 = [W(\sum \vec{F}_{\text{ext}})]_1^2 \quad (\text{VI.18})$$

## VI.7 Applications

### VI.7.1 Cas de translation pure

Pour le cas de translation pure, le théorème de l'énergie cinétique est donné par :

$$\frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = [W(\sum \vec{F}_{\text{ext}})]_1^2 \quad (\text{VI.19})$$

### VI.7.2 Cas de rotation autour d'un axe fixe

Pour le cas de rotation autour d'un axe fixe, le théorème de l'énergie cinétique est donné par :

$$\frac{1}{2} I(\omega_2^2 - \omega_1^2) = [W(\sum \vec{F}_{\text{ext}})]_1^2 \quad (\text{VI.20})$$

### VI.7.3 Cas combiné de translation et de rotation

Pour le cas combiné de translation et de rotation, le théorème de l'énergie cinétique est donné par :

$$\frac{1}{2} m(v_{G2}^2 - v_{G1}^2) + \frac{1}{2} I_G(\omega_2^2 - \omega_1^2) = [W(\sum \vec{F}_{\text{ext}})]_1^2 \quad (\text{VI.21})$$

## VI.8 Applications avec solutions

### Application 1 :

Soit un système mécanique placé sur un plan incliné d'angle  $\alpha$ , constitué d'un corps A de poids P et de quatre roues, le poids de chacune égal à  $P_1$ . On pousse ce système vers le haut avec une force constante Q. Les roues roulent sans glissement sur le plan incliné. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse V du corps A quand il se déplace avec une distance S. Le frottement et la vitesse initiale sont nuls On considère les roues comme disques homogènes

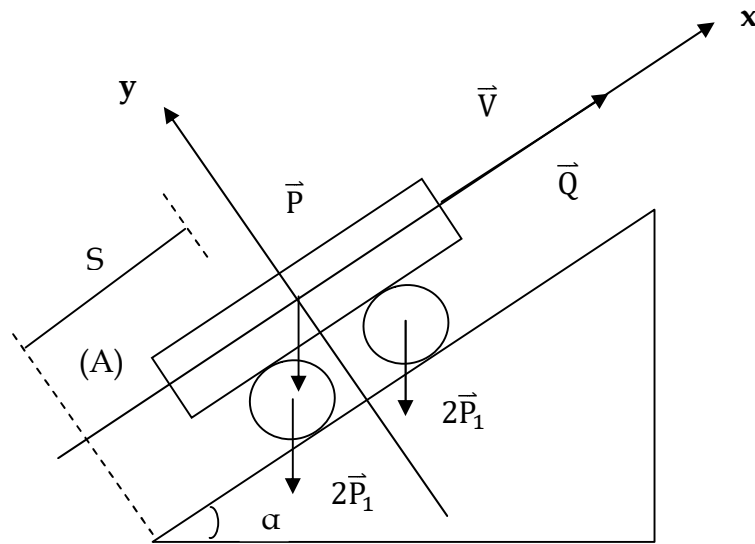
**Solution :**

**Détermination de la vitesse du corps (A) en en fonction de la distance parcourue**

**S:**

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au système :\*

$$T - T_0 = \sum A^{\text{ext}}$$



$T_0 = 0$  (le système démarre du repos), on aura donc :

$$T = \sum A^{\text{ext}} \quad (*)$$

### 1- Calcul de l'énergie cinétique totale du système

L'énergie du système « T » est calculée comme suit :

$$T = T_A + 4 T_{\text{roue}}$$

$$\text{Avec : } T_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{P v_A^2}{2g}$$

$$T_{\text{roue}} = \frac{1}{2} m_r v_r^2 + \frac{1}{2} I_r \omega^2 \text{ avec } v_r = v_A$$

On a :  $\omega = \frac{v_r}{r} = \frac{v_A}{r}$  (le C.I.R est le point de contact roue-plan incliné)

$$\text{La roue est un disque homogène : } I_r = \frac{1}{2} m_r r^2 = \frac{P_1 r^2}{2g}$$

$$T_{\text{roue}} = \frac{P_1 v_A^2}{2g} + \frac{1}{2} \frac{P_1 r^2}{2g} \left(\frac{v_A}{r}\right)^2 = \frac{3 P_1 v_A^2}{4g}$$

$$\text{En substituant } T_A \text{ et } T_{\text{roue}} \text{ dans } T, \text{ on trouve : } T = \frac{P v_A^2}{2g} + 4 \frac{3 P_1 v_A^2}{4g} = \frac{(P+6P_1) v_A^2}{2g}$$

### 2- Calcul du travail total des forces extérieures

$$\sum A^{\text{ext}} = A(\vec{P}) + 2 A(2\vec{P}_1) + A(\vec{Q})$$

$$A(\vec{P}) = \vec{P} \vec{S} = \begin{pmatrix} -P \sin \alpha \\ P \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} = -P S \sin \alpha$$

$$A(2\vec{P}_1) = \vec{P} \vec{S} = \begin{pmatrix} -2 P_1 \sin \alpha \\ -2 P_1 \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} = -2 P_1 S \sin \alpha$$

$$A(\vec{Q}) = \vec{Q} \vec{S} = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} = Q S$$

$$\sum A^{\text{ext}} = -P S \sin \alpha + 2(-2 P_1 S \sin \alpha) + Q S = -(P + 4P_1) S \sin \alpha + Q S$$

En substituant T et  $\sum A^{\text{ext}}$  dans (\*), on trouve :

$$\frac{(P + 6P_1) v_A^2}{2g} = -(P + 4P_1) S \sin \alpha + Q S$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2gS [Q - (P + 4P_1) S \sin \alpha]}{P + 6P_1}}$$

### Application 2 :

Un corps A de poids  $P_1$  se repose sur un plan incliné d'angle  $\alpha$  est lié à une poulie fixe D. cette poulie de poids  $P_2$  est liée à un corps B de poids  $P_3$  qui se repose sur un plan incliné d'angle  $\beta$  (voir figure 1). La liaison (corps A+poulie D+ corps B) se fait avec un câble inextensible et de masse négligeable. Durant le mouvement du corps A vers le bas, la poulie se met à tourner tandis que le corps B roule vers le haut sans glissement. Déterminer la vitesse du corps A en fonction de la distance parcourue en sachant que le système était au repos à l'instant initial. Ensuite, Déterminer l'accélération du corps A On considère la poulie D et le corps B comme des disques homogènes.

### Solution :

#### Détermination de la vitesse du corps (A) en en fonction de la distance parcourue

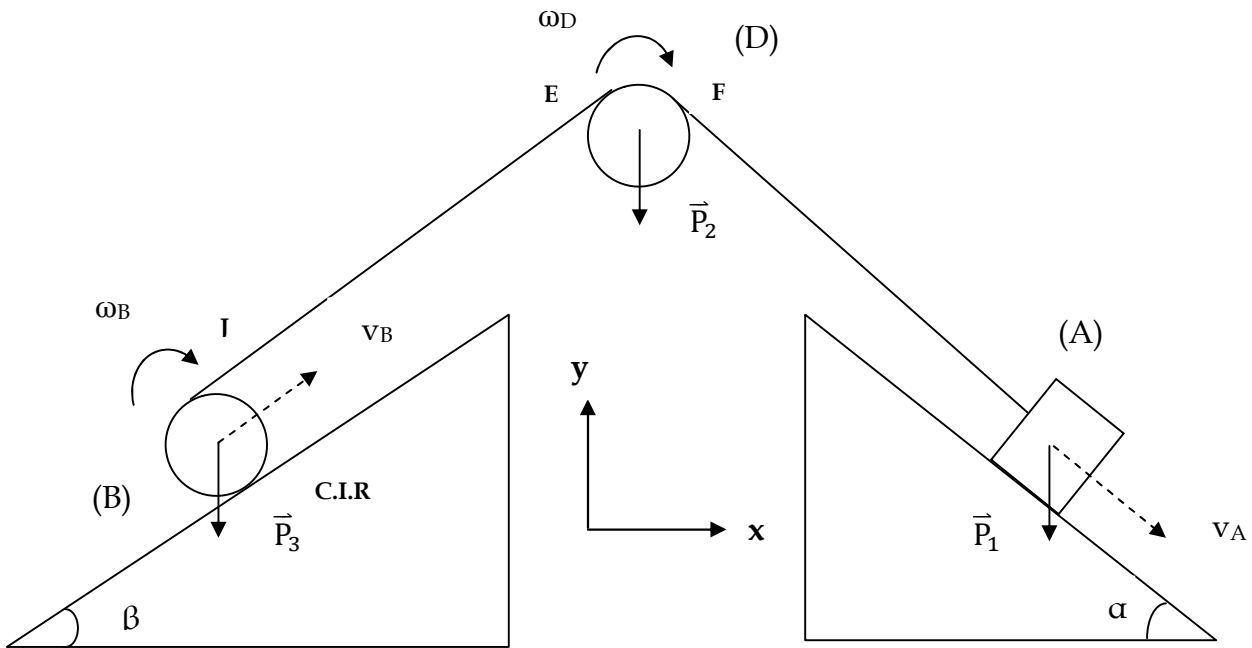
S : En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au système :\*

$$T - T_0 = \sum A^{\text{ext}}$$

$T_0 = 0$  (Le système démarre du repos), on aura donc :

$$T = \sum A^{\text{ext}} \quad (*)$$





### 1- Calcul de l'énergie cinétique totale du système

L'énergie du système « T » est calculée comme suit :

$$T = T_A + T_D + T_B$$

$$\text{Avec : } T_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{P_1 v_A^2}{2g}$$

$$T_D = \frac{1}{2} I_D \omega_D^2$$

$$\text{On a : } \omega_D = \frac{v_E}{r} = \frac{v_F}{r} \rightarrow v_E = v_F = v_A \rightarrow \omega_D = \frac{v_A}{r}$$

$$\text{La poulie est un disque homogène : } I_D = \frac{1}{2} m_D r^2 = \frac{P_2 r^2}{2g}$$

$$T_D = \frac{1}{2} \frac{P_2 r^2}{2g} \left(\frac{v_A}{r}\right)^2 = \frac{P_2 r^2}{2g} \frac{v_A^2}{r^2} = \frac{P_2 v_A^2}{4g}$$

$$T_B = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} I_r \omega_B^2$$

$$\text{La Roue est un disque homogène : } I_B = \frac{1}{2} m_B r^2 = \frac{P_3 r^2}{2g}$$

$$T_B = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_B^2$$

$$\text{On a : } \omega_B = \frac{v_J}{2r} = \frac{v_B}{r} \rightarrow \frac{v_J}{2} = v_B \text{ avec } v_J = v_E = v_A \rightarrow v_B = \frac{v_A}{2} \rightarrow \omega_B = \frac{v_A}{2r}$$

$$T_B = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} \left(\frac{v_A}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{P_3 r^2}{2g} \left(\frac{v_A}{2r}\right)^2 = \frac{3 P_3 v_A^2}{16 g}$$

En substituant  $T_A$ ,  $T_D$  et  $T_B$  dans  $T$ , on trouve :

$$T = \frac{v_A^2}{2g} \left( \frac{8P_1 + 4P_2 + 3P_3}{8} \right)$$

## 2- Calcul du travail total des forces extérieures

$$\sum A^{\text{ext}} = A(\vec{P}_1) + 2A(2\vec{P}_1) + A(\vec{Q})$$

$$A(\vec{P}_1) = \vec{P}_1 \vec{S}_1 = \begin{pmatrix} P_1 \sin \alpha \\ -P_1 \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_A \\ 0 \end{pmatrix} = P_1 S \sin \alpha$$

$$A(\vec{P}_2) = \vec{P}_2 \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ (poulie fixe)}$$

$$A(\vec{P}_3) = \vec{P}_3 \vec{S}_3 = \begin{pmatrix} -P_3 \sin \beta \\ -P_3 \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_B \\ 0 \end{pmatrix} = -P_3 S_B \sin \beta \text{ avec : } v_B = \frac{v_A}{2} \rightarrow S_B = \frac{S_A}{2} = \frac{S}{2}$$

$$A(\vec{P}_3) = -P_3 \frac{S}{2} \sin \beta$$

$$\sum A^{\text{ext}} = P_1 S \sin \alpha - P_3 \frac{S}{2} \sin \beta$$

En substituant  $T$  et  $\sum A^{\text{ext}}$  dans (\*), on trouve :

$$\frac{v_A^2}{2g} \left( \frac{8P_1 + 4P_2 + 3P_3}{8} \right) = P_1 S \sin \alpha - P_3 \frac{S}{2} \sin \beta$$

$$v_A = \sqrt{\frac{8gS[2P_1 \sin \alpha - P_3 \sin \beta]}{8P_1 + 4P_2 + 3P_3}}$$

## Détermination de l'accélération du corps (A)

$$\text{On a : } \frac{v_A^2}{2g} \left( \frac{8P_1 + 4P_2 + 3P_3}{8} \right) = \left( P_1 \sin \alpha - P_3 \frac{1}{2} \sin \beta \right) S$$

En dérivant cette équation par rapport au temps « t », on trouve :

$$\left( \frac{8P_1 + 4P_2 + 3P_3}{8} \right) \frac{2 v_A \gamma_A}{2g} = \left( P_1 \sin \alpha - P_3 \frac{1}{2} \sin \beta \right) v_A$$

$$\gamma_A = g \left[ \frac{8P_1 \sin \alpha - 4P_3 \sin \beta}{8P_1 + 4P_2 + 3P_3} \right]$$

## Références

- 1) Kadi A., *Mécanique Rationnelle, cours & exercices Résolus*, 2008.
- 2) Kassoul A., *Introduction à la mécanique rationnelle*, 2017.
- 3) Zarza T., *Mécanique Rationnelle, polycopié de cours*, Université des frères Mentouri, Constantine1.
- 4) Gross D., Hauger W., Schroder J., Wolfgang A., Rajapakse W.N., *Engineering Mechanics 1*, Springer, 2009.
- 5) Meriam J.L., Kraige L.G., *Engineering Mechanics, Statics*, fifth edition, Wiley, 2002.
- 6) Fizazi A., *Mécanique du point matériel, rappels de cours & exercices corrigés*, Office des publications universitaires, 2011.
- 7) Mebrek M., *Mécanique Rationnelle, cours et exercices, polycopié de cours*, Centre universitaire Nour Elbachir, El Bayadh, 2020.
- 8) Bouzidi M.A., *Mécanique Rationnelle, polycopié de cours*, Université Abderrahmane Mira de Bejaia, 2016.