

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



No Réf :.....

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf -Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: *Mathématiques*

Spécialité : *Mathématiques Appliquées*

Résolution numérique de quelques problèmes paraboliques linéaires et non linéaires

Préparé par :

ZOUAGHI Garmia

Soutenue devant le jury:

R. Bououden (M. C. B)

C. U. Abd Elhafid Boussouf

Président

M-S. Abdelouahab (M. C. A)

C. U. Abd Elhafid Boussouf

Rapporteur

B. Labeled (M. A. A)

C. U. Abd Elhafid Boussouf

Examineur

Année Universitaire : 2019/2020

REMERCIEMENT

Avant tout nous remercions *ALLAH* qui nous a orienté au chemin du savoir et aux portes de la science.

Un remerciement particulier à notre encadreur *Dr. ABDELOUAHAB MOHAMMED SALAH* pour la pertinence de ses remarques et sa patience pendant la réalisation de ce travail de recherche.

Nous remercions également *Dr. BOUOUDEN RABAH* pour avoir accepté de présider Notre jury et *Dr. LABED BOUDJEMAA* pour avoir accepté d'examiner notre travail.

Nous remercions aussi le corps professoral et administratif de l'institut des science et de la technologie pour la richesse et la qualité de leur enseignement, qui déploient de grandes efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

À mon cher père **ABD ELHAMID**, qui tient à réaliser toutes mes demandes et à les satisfaire.

Plus chères être dans la vie, la flamme qui éclairait ma vie ma mère **MALIKA** source de tendresse, d'amour, et de sacrifice.

Mes frères : **AMAR** et **ZAKARIA**.

Aux enfants de mon frère : **ISLAM** et **WALID**.

Toute ma famille avec tous mes sentiments de respect.

Mes chères amies **MARWA**, **SOUMIA**, **ROUBA** et **NASSIRA** .

A mes enseignants.

A tous qui occupe une place dans ma vie, dans mon cœur et surtout aux étudiants de master deux mathématiques Appliquées.

A tous les étudiants de la promotion 2019/ 2020.

À ma famille, passée, présent et future.

HADJER

RÉSUMÉ

L'objectif principal de ce mémoire est la résolution numérique des équations aux dérivées partielles particulièrement des problèmes paraboliques linéaires et non linéaires.

En premier lieu, nous donnons quelques définitions et des résultats de base sur les équations aux dérivées partielles, en suite nous présentons quelques méthodes numériques classiques pour la résolution des équations aux dérivées partielles (méthode des différences finies, méthode des volumes finies, méthode des éléments finies), et nous terminons par l'application d'une de ces méthode (méthode des différences finies) pour approximer la solution d'un problème parabolique bien défini (problème de la chaleur).

Mots-clés : Problèmes paraboliques, Equations paraboliques, méthode des différences finies, méthode des volumes finies, méthode des élément finies, développement de Taylor.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية ، وخاصة المشاكل الخطية وغير الخطية القطعي المكافئ.

أولاً نقدم بعض التعريفات والنتائج الأساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية ، ثم نقدم بعض الطرق العددية الكلاسيكية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية (طريقة الفروق المنتهية ، طريقة الاحجام المنتهية ، طريقة العناصر المنتهية) ، وننتهي بتطبيق إحدى هذه الطرق (طريقة الفروق المنتهية) لتقريب حل مشكلة مكافئ محددة جيداً (مشكلة الحرارة) .

الكلمات المفتاحية:

مشاكل القطع المكافئ ، المعادلات المكافئة ، طريقة الفروق المحدودة ، طريقة الحجم المحدود ، طريقة العناصر المنتهية ، نشر تايلور .

ABSTRACT

The main objective of this thesis is the numerical resolution of partial differential equations, particularly linear and nonlinear parabolic problems.

First, we give some definitions and basic results on partial differential equations, then we present some classical numerical methods for the resolution of partial differential equations (method of finite differences, finite volume method, finite element method), and we end by applying one of these methods (finite difference method) to approximate the solution of a well-defined parabolic problem (heat problem) .

Keywords : Parabolic problems, Parabolic equations, finite difference method, finite volume method, finite element method, Taylor expansion.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale	ix
1 Rappel sur Les équations aux dérivées partielles	1
1.1 Généralités	1
1.1.1 Définitions et Notations	1
1.2 Exemples des EDP	4
1.2.1 Équation de Laplace	4
1.2.2 Équation de Poisson	4
1.2.3 Équation des ondes	5
1.2.4 Équation de Burgers	5
1.2.5 Équation de Fourier	6
1.2.6 Équation d'advection	6
1.3 Classification des EDP	8
1.3.1 EDP elliptiques, paraboliques et hyperboliques	8
1.3.2 Ordre d'une EDP	9
1.3.3 EDP linéaire ou non linéaire	9
2 Les méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles	11
2.1 Méthode des différences finies	11
2.1.1 Principe de la méthode	12
2.1.2 Schémas aux différences finies	13

2.1.3	Schéma d'ordre supérieur	14
2.1.4	Dérivée d'ordre supérieur	14
2.1.5	Consistance, Stabilité et Convergence	15
2.2	Méthode des volumes finis	19
2.2.1	Volumes finis pour une loi de conservation	19
2.2.2	Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet	24
2.2.3	Comparaison avec un schéma aux différences finies	26
2.2.4	Exemple simple 1D avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann	27
2.3	Méthode des éléments finis	29
2.3.1	Les éléments finis en 1D	29
3	Résolution numérique d'un problème parabolique linéaire	32
3.1	Problèmes paraboliques	32
3.1.1	Le problème continu, et la discrétisation espace-temps	33
3.1.2	Discrétisation par Euler explicite en temps	34
3.2	Approximation d'un problème parabolique	
	Problème de la chaleur	38
3.2.1	Équation de la chaleur 1D et différences finies	38
3.2.2	Discrétisation de l'équation de la chaleur 2D stationnaire	41
	Conclusion Générale	46
	bibliography	48

TABLE DES FIGURES

2.1	Maillage 1D	21
2.2	Maillage 2D	23

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP dans la suite. c'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises.

Quand sont apparues les EDP ? elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17^{ème} siècle (Newton, Leibniz...). ensuite le "catalogue" des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. s'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagnétisme, de Schrodinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sur de Einstein pour les EDP de la théorie de la relativité.

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions.

L'apparition d'ordinateur extrêmement puissants permet néanmoins aujourd'hui d'obtenir des solutions approchées pour des équations aux dérivées partielles, même très compliquées. c'est ce qui s'est passé par exemple lorsque vous regardez les prévisions météorologiques, ou bien lorsque vous voyez les images animés d'une simulation d'écoulement d'air sur l'aile d'un avion.

Cependant l'étude systématique des EDP est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20^{ème} siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. un pas de géant à été accompli par **L. Schwartz** lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est du à **L. Hormander** pour la mise au point du calcul pseudodifférentielle (au début des années 1970). il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDP reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21^{ème} siècle. d'ailleurs ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-même, à la fois en géométrie et en analyse.

Aperçu du mémoire :

Le mémoire se compose d'une introduction et de trois chapitres.

On commence par :

une **introduction** où on a présenté un historique sur les problèmes non classiques étudiés, l'intérêt et l'objectif du thème abordé.

Le premier chapitre : est consacré aux rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires qui seront utilisés dans la suite.

Le deuxième chapitre : est réservé aux méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles.

Le troisième chapitre : est voué à la résolution numérique d'un problème parabolique.

A la fin de ce mémoire, nous présentons une **bibliographie** utilisée pour ce travail.

CHAPITRE 1

RAPPEL SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques définitions de base sur les équations aux dérivées partielles (EDP).

Dans une première partie nous intéressons aux notions générales des équations aux dérivées partielles.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous discutons quelques exemples d'équations aux dérivées partielles et dans la dernière partie nous présentons quelques classification des EDP.

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions et Notations

Définition 1.1.1. (*EDP*)

En mathématiques, en particulier dans le calcul différentiel, une équation aux dérivée partielle (ou équation différentielle partielle (également notée EDP,)) est une équation différentielle dont les solutions pour des fonctions inconnues sont basées sur plusieurs variables qui satisfont

certaines conditions liées à leurs dérivées partielles.

C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (u dans les cas suivants) des variables indépendantes $(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :

$$F(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots) = 0.$$

Définition 1.1.2. (EDO)

Une équation aux dérivée ordinaire (ou équation différentielle ordinaire), qui abrégée en EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ et ses dérivées $x', x'', \dots, x^{(n)}$ au point t définie par :

$$F(t, x, x'', \dots, x^{(n)}) = 0.$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de \mathbb{R} (I peut être \mathbb{R} tout entier).

La solution x en générale sera à valeurs dans \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}^*$ où N sera le plus souvent égal à 1, 2 ou 3. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans \mathbb{R} .

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont difficiles à étudier d'une manière générale complète comme cela peut être fait pour l'EDO.

le domaine étant trop vaste.

Nous avons l'équation différentielle partielle simple suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

où u est une fonction inconnue de x et y .

Les solutions de cette équation sont :

$$u(x, y) = f(y).$$

où f est une fonction de y .

Et on a l'équation aux dérivée ordinaire simple suivante :

$$\frac{du}{dx} = 0.$$

Les solutions de cette équation sont :

$$u(x) = c,$$

où c une valeur constante.

Ces deux exemples illustrent qu'en générale, la solution d'une équation différentielle ordinaire met en jeu une constante arbitraire, tandis que les équations aux dérivées partielles mettent en jeu des fonctions arbitraires.

1.2 Exemples des EDP

Les EDP apparaissent dans les domaines de la science et de l'ingénierie, et la plupart d'entre eux proviennent de la physique.

Voici quelques exemples :

1.2.1 Équation de Laplace

L'équation de Laplace est une EDP de base très importante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1)$$

Est une équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire et homogène, dont le nom est un hommage au physicien mathématicien **Laplace**.

L'équation de Laplace se retrouve dans diverses branches de la physique théorique : électricité statique, astronomie, mécanique des fluides, mouvement brownien, diffusion, mécanique quantique, diffusion de chaleur.

Les solutions de l'équation de Laplace sont des Fonctions appelées : **fonctions harmoniques**.

Ces fonctions peu être écrit analytiquement sous certaines conditions aux limites et avec une certaine géométrie, par exemple à l'aide de coordonnées sphériques.

En notation d'analyse vectorielle, en utilisant l'opérateur laplacien Δ :

L'équation de Laplace s'écrit :

$$\Delta\psi = 0. \quad (1.2)$$

où $\psi \equiv u(x, y, z, t)$ est une fonction des ondes.

1.2.2 Équation de Poisson

L'équation de Poisson est l'équation aux dérivées partielles du second ordre linéaire non homogène suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z). \quad (1.3)$$

où :

f est une distribution généralement donnée par : $f = -4\Pi\rho$.

En utilisant l'opérateur laplacien Δ :

L'équation de Poisson s'écrit :

$$\Delta\psi = -4\pi\rho. \quad (1.4)$$

où :

Δ est l'opérateur laplacien.

$\psi(x, y, z)$, fonction des ondes.

$\rho(x, y, z, t)$ densité de charge.

1.2.3 Équation des ondes

L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles d'évolution, du second ordre en temps t et en espace x . qui décrit la propagation d'une onde, qui peut être représentée par une grandeur scalaire ou vectorielle.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1.5)$$

où : c est un nombre réel positif.

Cette EDP apparait naturellement dans beaucoup de problèmes physique.

Soient $\psi(x, y, z, t)$, est une fonction des ondes.

$\rho(x, y, z, t)$, densité de charge.

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (1.6)$$

Cette équation décrit des ondes électriques longitudinales en propagation dans un plasma.

1.2.4 Équation de Burgers

L'équation de Burgers est donné par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.7)$$

où : u est la vitesse.

Est une équation aux dérivées partielles non-linéaire d'ordre 1 et homogène. issue de la mécanique des fluides. elle apparaît dans divers domaines des mathématiques appliquées, comme la modélisation de la dynamique des gaz, de l'acoustique ou du trafic routier.

1.2.5 Équation de Fourier

Cette EDP est également appelée équation de la chaleur.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Est une équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire non homogène.

La fonction u représente la température.

La dérivée d'ordre 1 par rapport au temps traduit l'irréversibilité du phénomène.

Le nombre α est appelé : **diffusivité thermique du milieu**.

En notation d'analyse vectorielle, en utilisant l'opérateur laplacien Δ :

L'équation de Fourier s'écrit :

$$\Delta \psi = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.9)$$

où : $\psi \equiv u(x, y, z, t)$, est une fonction des ondes de température.

1.2.6 Équation d'advection

L'équation d'advection en dimension 1 d'espace et de temps décrit le transport de la quantité $u(x, t)$ par la vitesse d'advection a .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.10)$$

Est une équation aux dérivées partielles d'ordre 1 homogène.

Les solutions de cette équation sont :

$$u(x, t) = \eta(x - at). \quad (1.11)$$

pour $t \geq 0$ où $\eta(x)$ est la condition initiale à $t = 0$.

L'équation d'advection joue un rôle fondamental dans l'étude des méthodes de résolution numérique par la méthode des volumes finis des systèmes hyperboliques de lois de conservation comme les équations d'Euler en dynamique des fluides compressibles.

1.3 Classification des EDP

Nous avons vu qu'il existe des types d'équations très différents avec des dérivées partielles qui peuvent être classées selon ce qui suit :

1.3.1 EDP elliptiques, paraboliques et hyperboliques

Si on considère la forme générale d'une EDP d'ordre 2 :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G.$$

Où A, B, C, D, E, F et G sont considérés constants pour simplifier.

Le type de l'EDP dépend du signe de $B^2 - 4AC$.

si : $B^2 - 4AC < 0$, Alors l'EDP est dite : Elliptique.

si : $B^2 - 4AC = 0$, Alors l'EDP est dite : Parabolique.

si : $B^2 - 4AC > 0$, Alors l'EDP est dite : hyperbolique.

Exemple :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$B^2 - 4AC = -4 < 0$, alors l'équation de Laplace est : **Elliptique**.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec $d > 0$.

$B^2 - 4AC = 0$, alors l'équation de diffusion est : **Parabolique**.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec $c > 0$.

$B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$, alors l'équation des ondes est : **hyperbolique**.

1.3.2 Ordre d'une EDP

Définition 1.3.1. On appelle l'ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé qui apparait dans l'équation.

Exemple :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Est une équation du 1^{er} ordre.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

est une équation du 2^{ème} ordre.

Soit L'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(1 + x).$$

Cette EDP est d'ordre 2. elle admet comme solution la fonction u définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$u(x, y) = x^2 + y^2.$$

1.3.3 EDP linéaire ou non linéaire

On dit que l'EDP est linéaire si elle se met sous la forme $Lu = f$, Où $u \rightarrow Lu$ est une application linéaire par rapport à u . sinon, elle est non linéaire.

Exemple :

- L'équation de **Laplace** : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$
- L'équation de **Poisson** : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$
- L'équation de **Fourier** : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}.$

► Sont des équations linéaires.

• L'équation de **Burgers** : $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

► Est une équation non-linéaire.

CHAPITRE 2

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Introduction :

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux méthodes numériques couramment utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles :

- méthodes des **différences finies**.
- Méthodes des **volumes finies**.
- méthodes des **éléments finies**.

2.1 Méthode des différences finies

Définition 2.1.1. *La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.*

Cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre car elle procède en deux

étapes : d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation, d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue.

Avantage :

- Grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénient :

- Limitation à des géométries simple, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type *Newman*

2.1.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode consiste à remplacer les dérivées figurant dans les équations aux dérivées partielles par des différences divisées que l'on obtient en faisant des développement limités en série de Taylor ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18 ème siècle (Euler, Taylor, Leib-niz...).

Cette technique permet de développer des schémas pour remplacer les dérivées dans les EDP pour pouvoir envisager une solution numérique.

Soit $u(x, t)$ une fonction de l'espace et du temps.

Selon la définition d'une dérivée, nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k}.$$

Si h et k sont des pas d'espace et de temps petits, alors le développement de Taylor de u au voisinage de x est le suivant :

$$u(x + h, t) = u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) + \theta(h^{n+1}). \quad (2.1)$$

$$u(x-h, t) = u(x, t) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) + \theta(h^{n+1}). \quad (2.2)$$

Le développement en série de Taylor au voisinage du temps t s'écrit :

$$u(x, t+k) = u(x, t) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x, t) + \dots + \frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x, t) + \theta(k^{n+1}). \quad (2.3)$$

$$u(x, t-k) = u(x, t) - k \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x, t) + \dots + \frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x, t) + \theta(k^{n+1}). \quad (2.4)$$

On a $\theta(h^{n+1})$ et $\theta(k^{n+1})$: est appelé **reste** ou **erreur de troncation** .

Grâce à ces développements, l'expression des première et seconde dérivées peut être obtenue.

En tronquant la série au premier ordre en h , on obtient :

$$\boxed{\frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \theta(h).}$$

L'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ est d'ordre 1 ce qui montre que l'erreur de troncature $\theta(h)$ s'approche de zéro car elle est considérée comme la puissance première de h .

On appelle la puissance de h avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro :

Ordre de méthode.

2.1.2 Schémas aux différences finies

Le principe des schémas aux différences finies est basé sur la formule de Taylor, permettant aux dérivées de la fonction inconnue d'approcher des "dérivées discrètes".

Notation : on note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i , soit $u_i = u(x_i)$. de même pour la dérivée de $u(x)$ au nœud x_i , on note :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u'_i.$$

Cette notation est utilisée de manière équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successives de la grandeur u . le schéma des différences finies de l'ordre 1 mentionné ci-dessus est écrit, en notation indicielle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \theta(h).$$

Ce schéma est dit **"avant"** ou **"décentré"**.

Nous pouvons également créer un autre schéma d'ordre 1 appelé **"arrière"** :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \theta(h).$$

2.1.3 Schéma d'ordre supérieur

En manipulant des développement de Taylor dans le voisinage de x_i , des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits.

On écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + h) = u_i + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \theta(h^3).$$

$$u_{i-1} = u(x_i - h) = u_i - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \theta(h^3).$$

Par soustraction on trouve :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \theta(h^3).$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \theta(h^2).$$

Appelé schéma d'ordre 2 : **"Centré"**.

Il est nécessaire d'utiliser plusieurs nœuds adjacents à x_i , pour obtenir des ordres supérieurs. le nombre de points nécessaire à l'écriture du schéma s'appelle le stencil.

Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit :

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6h} + \theta(h^3).$$

2.1.4 Dérivée d'ordre supérieur

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i . par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u , on écrit :

$$u_{i+1} = u_i + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \theta(h^4).$$

$$u_{i-1} = u_i - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \theta(h^4).$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à :

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \theta(h^4).$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \theta(h^2).$$

Il existe aussi une formulation "avant" et "arrière" pour la dérivée seconde, toute deux d'ordre 1 :

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2} + \theta(h)$	avant.
$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} + \theta(h)$	arrière.

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxième, troisième, etc...

2.1.5 Consistance, Stabilité et Convergence

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) au moyen de leurs équivalents discrétisés.

Les trois principales sont : **la convergence, la stabilité et la consistance.**

Ces trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue.

Dans la suite, on supposera une EDP définie par :

$$\phi(u) = 0.$$

où ϕ est un opérateur différentiel faisant intervenir une fonction u aussi régulière que nécessaire ainsi que ses dérivées (partielles).

Cette équation sera approchée par un schéma numérique aux différences finies noté :

$$\phi_{h,k}(u_i^j) = 0.$$

où ϕ_h^k est un opérateur faisant intervenir u pris aux différents points de maillage.

♣ Consistance :

Définition 2.1.2. *C'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque le pas de discrétisation (h et k) tendent vers zéro.*

Définition 2.1.3 (Erreur de consistance). *On appelle erreur de consistance R d'un schéma numérique la quantité obtenue en remplaçant, dans le schéma numérique l'inconnue par la solution exacte u .*

Définition 2.1.4. *Un schéma de formule $\phi_{h,k}(u_i^j) = 0$ est dit consistant avec l'équation qu'il discrétise si l'erreur de troncature vérifie : $\lim_{h,k \rightarrow 0} \phi_{h,k}(u(x_i, t_j)) = 0$. si et seulement si $u(x, t)$ est solution de l'équation. on dit que le schéma est précis à l'ordre p en x et à l'ordre q en t si l'erreur de troncature est $\theta(h^p) + \theta(k^q)$. [7]*

♣ Stabilité :

Définition 2.1.5. *C'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.*

Il y a plusieurs critères de stabilité :

Critère de Van Neumann et critère de stabilité au sens d'une norme.

1. Critère de Van Neumann-Fourier :

Dans ce critère, on ne prend pas en compte les effets de bords de la discrétisation (conditions limites) et on analyse seulement l'équation, ceci revient à considérer le problème non plus dans un intervalle borné mais dans R tout entier et ignorer les conditions limites. donc on cherche une solution sous la forme particulière suivante :

$$u_j^n = \xi^n e^{i\tau k j h} \text{ pour } k \text{ fixé, } (i^2 = -1).$$

puisque $|u_j^n| = |\xi|^n$ ce critère impose la condition $|\xi| \leq 1$ afin que la solution approchée soit bornée.

ξ s'appelle : **facteur d'amplification**.

2. Critère de stabilité au sens des normes :

introduisons la norme L^∞ discrète suivante :

Pour $v \in R^M$ on note :

$$\|v^n\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq M} |v_i|.$$

Définition 2.1.6. Un schéma aux différences finies est dit stable pour la norme $\|\cdot\|$; s'il existe une constante K indépendante de k et h telle que :

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Quelle que soit la donnée initiale u^0 , avec :

$$u^n = (u_j^n)_{0 \leq j \leq M}.$$

Si cette inégalité a lieu sous une condition entre k et h , on dit que le schéma est conditionnellement stable.

♣ **Convergence :**

Définition 2.1.7. C'est la propriété qui assure que la solution numérique tende vers la (ou une) solution exacte des équations continues. c'est évidemment la propriété la plus recherchée.

Soit e^j , le vecteur erreur au temps discret j et défini par :

$$e^j = (e_1^j, e_2^j, \dots, e_M^j)^T.$$

avec :

$$e_i^j = u_i^j - u(x_i, t_j), \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 0, \dots, N.$$

Définition 2.1.8. Un schéma numérique est convergent si :

$$|e_i^j| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } h \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow 0, \quad \forall i \in 1, \dots, M, \quad \forall j \in 0, \dots, N.$$

Pour étudier la convergence de la solution numérique u_i^j du schéma aux différences finies vers la solution exacte $u(x, t)$ on peut soit essayer d'étudier directement la convergence, ce qui peut

être compliqué et pas toujours possible, soit utiliser la consistance et la stabilité d'un schéma. Car ils sont en général beaucoup plus facile à étudier que sa convergence.

Théorème 2.1.1 (Le théorème de Lax). *Dans le cadre d'une EDP d'évolution linéaire, si un schéma numérique est consistant et stable alors la converge de la solution approchée vers la solution exacte est assurée.*[7]

Remarque 2.1.1. *Le théorème d'équivalence de Lax a été élargi en une équivalence ainsi qu'aux EDP d'évolution non linéaire.*

2.2 Méthode des volumes finis

La méthode intégrée, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous formes de loi de conservation elle fournit ainsi de manière naturelle des approximation discrètes conservative et est particulièrement bien adaptée aux équation de la mécanique des fluides. sa mise en ouvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles.

Avantage :

- Permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelque, détermination plus naturelle des conditions limites de type *Newman*

Inconvénient :

- Peut de résultats théorique de convergence.

2.2.1 Volumes finis pour une loi de conservation

Nous avons une loi de conservation d'une grandeur physique w dans une maille de volume Ω . impliquer le flux $F(w)$ et un terme source $S(w)$.

Nous exprimons sous la forme intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w d\Omega + \int_{\Omega} \text{div} F(w) d\Omega = \int_{\Omega} S(w) d\Omega.$$

Le théorème d'Ostrogradski [11] conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w d\Omega + \oint_{\Sigma} F \cdot n d\Sigma = \int_{\Omega} S d\Omega.$$

Telle que : Σ la surface de maille, de normale extérieure n .

dans lequel $\oint_{\Sigma} F \cdot n d\Sigma$, représente la somme des flux à travers chaque face de la maille.

Le flux est supposé constant sur chaque face, l'intégrale se ramène à une somme discrète

sur chaque face de la maille vient :

$$\oint_{\Sigma} F \cdot n d\Sigma = \sum_{\text{faces de la maille}} F_{\text{face}} \cdot n_{\text{face}} \cdot \Sigma_{\text{face}}.$$

La quantité $F_{\text{face}} = F(W_{\text{face}})$ est une approximation du flux F sur une face de la maille, c'est le **flux numérique** sur la face considérée.

La discrétisation spatiale revient à calculer le bilan des flux sur une maille élémentaire. ce bilan comprend la somme des contribution évaluées sur chaque face de la maille.

La manière dont on approche les flux numériques en fonction de l'inconnue discrète détermine le **schéma numérique**.

L'écriture du schéma numérique peut également utiliser des inconnues auxiliaires par exemple le gradient de l'inconnue par maille.

Explicitons maintenant le terme de dérivée temporelle. un élément fondamental de la discrétisation en volumes finis est de supposer que la grandeur w est constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de sa moyenne sur la maille ou bien à sa valeur au centre de la maille.

D'autre part, le terme de dérivation en temps est évalué au moyen d'une méthode numérique d'intégration d'équation différentielle (Runge-Kutta, Euler explicite ou implicite...) et fait intervenir un pas de temps d'intégration Δt . ce dernier peut être constant ou variable. pour fixer les idées, on écrira la formulation avec une méthode d'Euler explicite. notons Δw l'incrément de la grandeur w entre deux itérations temporelles successives.

On peut ainsi écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w d\Omega = \Omega \left(\frac{dw}{dt} \right)_{\text{maille}} = \Omega \frac{\Delta w}{\Delta t}.$$

Finalement la loi de conservation discrétisée avec la méthode des volumes finis peut s'écrire :

$$\boxed{\Omega \frac{\Delta w}{\Delta t} + \sum_{\text{faces}} F_{\text{face}} \cdot n_{\text{face}} \cdot \Sigma_{\text{face}} = \Omega S.}$$

La méthode des volumes finis consiste donc à :

- Décomposer la géométrie en mailles élémentaires (élaborer un maillage).
- Initialiser la grandeur w sur le domaine de calcul.
- Lancer le processus d'intégration temporelle jusqu'à la convergence avec :
1/ Calcul du bilan de flux par maille par un schéma numérique.

- 2/ Calcul du terme source.
- 3/ Calcul de l'incrément temporel par une méthode numérique d'intégration.
- 4/ Application des conditions aux limites.

2.2.1.1 Cas monodimensionnel

Nous avons la loi de conservation 1D suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u dx + \int \frac{\partial f(u)}{\partial x} dx = 0.$$

dans lequel u : est une grandeur physique fonction de la variable d'espace x et du temps t .

$f(u)$ est une fonction de u .

Le domaine de calcul est divisé en N mailles de centre x_i . Chaque maille a une taille $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$.

Les indices demi-entier désignent les interfaces de la maille avec les mailles voisines (voir Figure 2.1).

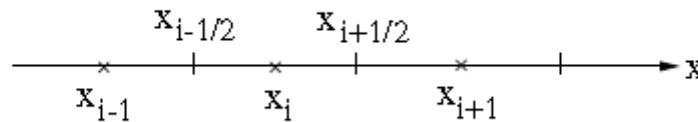


FIGURE 2.1 – Maillage 1D

Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt . La fonction u est supposée constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la moyenne. Notons un U_i^n cette valeur moyenne dans la i -ème maille de centre x_i , à l'instant $t = n\Delta t$. Ainsi :

$$\forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] , u(x, t) = u_i^n.$$

Souvent, cette valeur approchée de la moyenne est la valeur de la fonction u au centre x_i de la maille, on parle alors de Volumes Finis Cell-Centered (et dans ce cas, $u_i^n = u(x_i, t)$). Le discrétisation spatiale par les Volumes Finis consiste à intégrer maille par maille la

loi de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{maille}} u dx + \int_{\text{maille}} \frac{\partial f(u)}{\partial x} dx = 0.$$

Soit pour la i -ème maille de centre x_i , au temps $t = n\Delta t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0.$$

Ce qui s'intègre comme suit :

$$h_i \frac{\partial u_i^n}{\partial t} + f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n = 0.$$

La quantité $f_{i+1/2}^n$ désigne une approximation flux $f(u)$ à l'interface $x_{i+1/2}$ et au temps $n\Delta t$.

C'est le flux numérique au point $x_{i+1/2}$. Ce flux numérique s'évalue en fonction des valeurs moyennes de u dans les mailles voisines, ce qui détermine le schéma numérique. Une méthode d'Euler explicite est utilisée pour évaluer la dérivée en temps (d'autres schémas peuvent être utilisés, par exemple le schéma de Runge-Kutta).

La formulation discrétisée en Volumes Finis de la loi de conservation est ainsi :

$$\boxed{h_i \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n = 0.}$$

2.2.1.1 Cas bidimensionnel

Nous avons la loi de conservation d'une grandeur physique $u(x, y, t)$.

où x et y sont les deux directions d'espace.

Le domaine géométrique est divisé en mailles élémentaires, par exemple en mailles rectangulaires comme représenté sur la (Figure 2.2).

La grandeur u est supposée constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la moyenne sur la maille (ou encore à la valeur au centre de la maille).

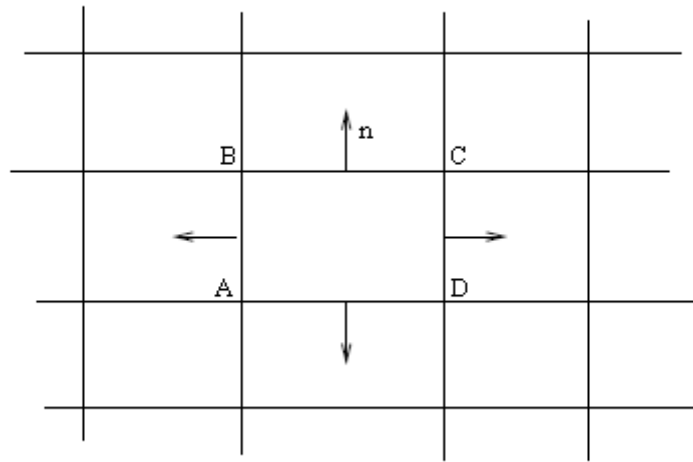


FIGURE 2.2 – Maillage 2D

dans ce cas, le terme intégral $\oint_{\Sigma} F.nd\Sigma$ représente la circulation sur un contour d'une maille élémentaire.

Plaçons-nous sur la maille de contour $ABCD$ comme indiqué sur la Figure. le flux F est supposé constant sur chaque arête de la maille AB, BC, CD et AD .

L'intégrale se ramène à une somme discrète sur chaque arête :

$$\oint_{\Sigma} F.nd\Sigma = \oint_{ABCD} F.ndl = \sum_{AB,BC,CD,AD} F_{arete}.n_{arete}.Longueur_{arete}.$$

Ceci revient à évaluer le bilan des flux à travers chaque facette de la maille.

2.2.2 Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u(1) = \beta. \end{cases}$$

où f est une fonction continue.

L'intervalle $]0, 1[$ est discrétisé en N mailles de centre x_i et de taille $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. la fonction $u(x)$ est supposé constante dans chaque maille et égale à une valeur approchée de la moyenne sur la maille considérée.

On notera u_i cette valeur dans la i -ème maille de centre x_i .

Ainsi, on a dans la i -ème maille :

$$\forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \quad u(x) = u_i.$$

La discrétisation spatiale par les volumes finis consiste à intégrer maille par maille l'équation différentielle du problème, soit pour la i -ème maille :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -u''(x)dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

Ce qui donne après intégration :

$$u'(x_{i-1/2}) - u'(x_{i+1/2}) = h_i f_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

où f_i désigne la valeur moyenne de f sur la i -ème maille :

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

Il reste maintenant à exprimer $u'(x_{i-1/2})$ en fonction des inconnues u_i . l'approximation la plus naturelle est de prendre la valeur moyenne de $u'(x)$ sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$, soit :

$$u'(x_{i-1/2}) = \frac{1}{\frac{h_{i-1}+h_i}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)dx = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-1/2}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}}.$$

avec :

$$h_{i-1/2} = \frac{h_{i-1} + h_i}{2}.$$

Cette dernière expression n'est pas valable au bord gauche, pour $i = 1$, en $x_{1/2} = 0$, car elle fait intervenir le point x_0 qui n'est pas défini. il se pose alors le problème du traitement des bords qui exige une formulation particulière. une possibilité est de définir une maille fictive à gauche de l'intervalle $[0, 1]$, et d'affecter une valeur moyenne de la fonction u dans cette maille. une autre possibilité est de considérer la valeur moyenne de $u'(x_{1/2})$ non plus sur le segment $[x_0, x_1]$ qui n'est pas défini mais sur le segment $[x_{1/2}, x_1]$, c'est ce que nous choisissons dans cet exemple.

Ainsi on écrit :

$$u'(x_{1/2}) = \frac{2}{h_1} \int_{x_{1/2}}^{x_1} u'(x) dx = \frac{2(u_1 - u(0))}{h_1} = \frac{2(u_1 - \alpha)}{h_1}.$$

Et de même pour le terme $u'(x_{i+1/2})$, on écrit que :

$$u'(x_{i+1/2}) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}.$$

Le même problème survient au bord droit, pour $i = N$, en $x_{N+1/2} = 1$. on considère la valeur moyenne de u' non plus sur le segment $[x_N, x_{N+1}]$ qui n'est pas défini mais sur le segment $[x_N, x_{N+\frac{1}{2}}]$, soit :

$$u'(x_{N+1/2}) = \frac{2}{h_N} \int_{x_N}^{x_{N+1/2}} u'(x) dx = \frac{2(u(1) - u_N)}{h_N} = \frac{2(\beta - u_N)}{h_N}.$$

La discrétisation en volumes finis est donc finalement :

$\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} = h_i \bar{f}_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 2 \text{ à } N-1$ $\frac{2(u_1 - \alpha)}{h_1} - \frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} = h_1 \bar{f}_1$ $\frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} - \frac{2(\beta - u_N)}{h_N} = h_N \bar{f}_N$
--

Dans le cas particulier d'un maillage régulier de pas h . la discrétisation en volumes

finis devient :

$$\frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N-1.$$

$$\frac{3u_1 - u_2}{h^2} = f_1 + \frac{2\alpha}{h^2}.$$

$$\frac{3u_N - u_{N-1}}{h^2} = f_N + \frac{2\beta}{h^2}.$$

Sous forme matricielle, ceci s'exprime :

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{2\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + \frac{2\beta}{h^2} \end{bmatrix}$$

2.2.3 Comparaison avec un schéma aux différences finies

Nous introduisons un schéma aux Différences Finies afin de comparer les deux méthodes de discrétisation.

On se place sur le même maillage construit pour les Volumes Finis. les points x_i seront considérés comme les nœuds du maillage pour les Différences Finies. et la quantité u_i désignera alors la valeur de la fonction u au nœud x_i .

L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque nœud x_i :

$$-\left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_i = f(x_i) = f_i.$$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma à l'ordre 2. on écrit les développements de Taylor de u_{i+1} et u_{i-1} au voisinage de x_i :

$$u_{i+1} = u(x_i + h_{i+1/2}) = u_i + h_{i+1/2} \left(\frac{du}{dx} \right)_i + \frac{h_{i+1/2}^2}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_i + \theta(h_{i+1/2}^3).$$

$$u_{i-1} = u(x_i - h_{i-1/2}) = u_i - h_{i-1/2} \left(\frac{du}{dx} \right)_i + \frac{h_{i-1/2}^2}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_i + \theta(h_{i-1/2}^3).$$

Ce qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} = \left(\frac{du}{dx} \right)_i + \frac{h_{i+1/2}}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_i + \theta(h_{i+1/2}^2).$$

$$\frac{u_{i-1} - u_i}{h_{i-1/2}} = - \left(\frac{du}{dx} \right)_i + \frac{h_{i-1/2}}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_i + \theta(h_{i-1/2}^2).$$

Par somme des deux égalités, on obtient une approximation à l'ordre 2 de la dérivée seconde de u . au final, la discrétisation par des Différences Finies est la suivante :

$$\boxed{\frac{2}{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \right) = f_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N}$$

Dans la cas particulier d'un maillage régulier de pas h , l'équation discrétisée s'écrit :

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} = f_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

2.2.4 Exemple simple 1D avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \quad u'(1) = \beta. \end{cases}$$

où l'on a cette fois une condition de Neumann en $x = 1$.

On se place sur le même maillage que précédemment et on adopte la même démarche.

L'équation intégrée sur une maille élémentaire est :

$$u'(x_{i-1/2}) - u'(x_{i+1/2}) = h_i f_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

Le calcul des termes de dérivée aux interfaces s'effectue de la même manière que précédemment.

Au bord droit, à l'interface $x_{N+1/2} = 1$, l'application de la condition $u'(1) = \beta$ s'applique très naturellement et l'on a : $u'(x_{N+1/2}) = \beta$.

La discrétisation en Volumes Finis est donc finalement :

CHAPITRE 2. LES MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DES
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} = h_i \bar{f}_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 2 \text{ à } N-1$$

$$\frac{2(u_1 - \alpha)}{h_1} - \frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} = h_1 \bar{f}_1$$

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} - \beta = h_N \bar{f}_N$$

$$\frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f_i \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N-1$$

$$\frac{3u_1 - u_2}{h^2} = f_1 + \frac{2\alpha}{h^2}.$$

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h^2} = f_N + \frac{\beta}{h^2}.$$

Sous forme matricielle, ceci s'exprime :

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{2\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}$$

2.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles.

Celles-ci peuvent par exemple représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques (mécaniques, thermodynamiques, acoustiques, etc).

Concrètement, cela permet par exemple de calculer numériquement le comportement d'objets même très complexes, à condition qu'ils soient continus et décrits par une équation aux dérivées partielles linéaire : mouvement d'une corde secouée par l'un de ses bouts, comportement d'un fluide arrivant à grande vitesse sur un obstacle, déformation d'une structure métallique, etc.

Avantage :

- Traitement possible de géométrie, complexe, nombreux résultats théoriques sur la convergence.

Inconvénient :

- Complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.

2.3.1 Les éléments finis en 1D

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

La présentation faite dans cet exemple simple vise à fournir les idées de base et n'est qu'une première introduction à la méthode des éléments finis. L'approche est basée sur la méthode de Galerkin par laquelle nous pouvons écrire le système différentiel sous une forme variable dans un espace de dimensions finies.

Soit une fonction $v(x) \in C^1([0, 1])$, nulle en 0 et 1. on peut écrire :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Par intégration par partie, nous trouvons :

$$-\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V. \quad (2.5)$$

avec : $V = \{v \in C^0([0, 1]); v(0) = v(1) = 0, v' \text{ continue par morceaux sur un sous-espace vectoriel de } C^1([0, 1])\}$.

La solution de la formule variationnelle (2.5) s'appeler :
solution faible au problème d'initiation différentielle.

• **Choix des fonctions ϕ_i : les éléments finis**

L'intervalle $]0,1[$ est discrétisé en N points de coordonnées x_i .

Les fonctions $\phi_i(x)$ sont sélectionnées en tant que polynômes de classe 1 définis par :

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{Si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{Si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Ces fonctions sont appelées :**éléments finis de degré 1**. avec elles, la matrice A est tridiagonale. on peut également sélectionner des fonctions de classe 2 ou plus pour les éléments finis.

Pour calculer la matrice A , nous utilisons les dérivées $\Phi'_i(x)$ simples :

nous avons :

$$\Phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & \text{Si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{x_i - x_{i+1}} & \text{Si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Ensuite, nous calculons les éléments de la matrice A , qui sont triangulaires et symétriques.

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME PARABOLIQUE LINÉAIRE

Introduction :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude la résolution numériques d'un problème parabolique linéaires .

Dans la première partie, on s'intéresse à l'approximation d'un problème parabolique par la méthodes des **Différence finies**.

Et dans la dernière partie de ce chapitre,nous présentons l'approximation du **problème de la chaleur**.

3.1 Problèmes paraboliques

On a un exemple type de problème parabolique :

$$u_t - \Delta u = f.$$

qui fait intervenir la dérivée en temps d'ordre 1, u_t , ainsi qu'un opérateur différentiel d'ordre 2 en espace. pour que ce problème soit bien posé, il faut spécifier des conditions aux limites sur la frontière de Ω , et une condition initiale en $t = 0$.

3.1.1 Le problème continu, et la discrétisation espace-temps

Actuellement, nous avons le même problème dans une dimension de l'espace. au temps $t = 0$, avec la condition initiale u_0 .

On a le problème unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \forall x \in]0, 1[, \quad \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \forall t \in]0, T[, \end{cases} \quad (3.1)$$

$u(x, t)$: représente la température au point x et au temps t .

u_t : la dérivée partielle première de u par rapport à t .

u_{xx} : la dérivée partielle seconde de u par rapport à x .

Théorème 3.1.1. (Résultat d'existence et unicité) Si $u_0 \in C(]0, 1[, R)$ alors il existe une unique fonction $u \in C^2(]0, 1[\times]0, T[, R) \cap C([0, 1] \times [0, T], R)$ qui vérifie (3.1).

On a même $u \in C^\infty(]0, 1[\times]0, T[, R)$. Ceci est appelé :

effet "régularisant" de l'équation de la chaleur.[8]

proposition 3.1.1. (Principe du maximum) Sous les hypothèses du théorème (3.1.1), soit u la solution du problème (3.1) :

1. si $u^0(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. alors $u(x, t) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$.
2. $\| u \|_{L^\infty([0, 1] \times [0, T])} \leq \| u \|_{L^\infty([0, 1])}$.

Pour calculer une solution approximative, nous donnons une discrétisation en espace et en temps, que nous noterons D . pour le moment nous choisissons de définir par les différences finies de temps et d'espace. Ainsi, la discrétisation consiste à donner un ensemble des points $t_n, n = 1, \dots, M$ de l'intervalle $]0, T[$, et un ensemble de points $x_i, i = 1, \dots, N$. Pour simplifier, nous considérons un pas fixe dans l'espace et dans le temps.

Soit $h = \frac{1}{N+1} = \Delta x$ le pas de discrétisation en espace.

$k = \frac{T}{M} = \Delta t$, le pas de discrétisation en temps.

On pose alors $t_n = nk$ pour $n = 0, \dots, M$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N + 1$. Nous essayons de calculer la solution U_D approximative du problème (3.1) ; plus précisément, on cherche

à déterminer $u_D(x_i, t_n)$ pour $i = 1, \dots, N$, et $n = 1, \dots, M$. les inconnues discrètes sont notées $u_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, N$ et $n = 1, \dots, M$.

3.1.2 Discrétisation par Euler explicite en temps

L'approximation du temps par la méthode d'Euler explicite est basée sur l'écriture de la première équation (3.1) à chaque instant t_n et point x_i . ceci afin d'approcher la dérivée en temps $u_t(x_i, t_n)$ via le produit différentiel :

$$\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k},$$

et la dérivée en espace $-u_{xx}(x_i, t_n)$ par le quotient différentiel :

$$\frac{1}{h^2}(2u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n) - u(x_{i+1}, t_n)).$$

Remarque 3.1.1. *On a choisi une discrétisation en espace de type différences finies, mais on aurait aussi bien pu prendre un schéma de volumes finis ou d'éléments finis.*

Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{k} + \frac{1}{h^2}(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}) = 0, & i = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, M, \\ u_i^0 = u_0(x_i), & i = 1, \dots, N, \\ u_0^{(n)} = u_{N+1}^{(n)} = 0, & \forall n = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (3.2)$$

le schéma est dit explicite, car la formule ci-dessus donne $u_i^{(n+1)}$ de manière explicite en fonction des $(u_i^{(n)})_{i=1, \dots, N}$.

En effet on a :

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \lambda(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}),$$

avec : $\lambda = \frac{k}{h^2}$.

• Consistance du schéma

Soit $\bar{u}_i^{(n)} = u(x_i, t_n)$ la valeur exacte de la solution en x_i et t_n : L'erreur de consistance R_i en (x_i, t_n) peut s'écrire comme la somme des erreurs de consistance en temps et en

espace : $R_i^{(n)} = \widetilde{R}_i^{(n)} + \widehat{R}_i^n$ avec :

$$\widetilde{R}_i^{(n)} = \frac{\bar{u}_i^{(n+1)} - \bar{u}_i^{(n)}}{k} - u_t(x_i, t_n) \quad \text{et} \quad \widehat{R}_i^{(n)} = \frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^{(n)} - \bar{u}_{i-1}^{(n)} - \bar{u}_{i+1}^{(n)}) - u_{xx}(x_i, t_n).$$

proposition 3.1.2. *Le schéma (3.2) est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace, c'est à dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que :[8]*

$$|R_i^{(n)}| \leq C(k + h^2). \quad (3.3)$$

• **Stabilité**

On a vu à la proposition (3.1.1) que la solution exacte vérifie :

$$\|u\|_{L^\infty(]0,1[\times]0,T])} \leq \|u_0\|_{L^\infty(]0,1])}.$$

Nous pouvons obtenir l'équivalent discret dans la solution approximative. Si nous choisissons correctement les pas de temps et d'espace.

Définition 3.1.1. *On dit qu'un schéma est L^∞ -stable si la solution approchée est bornée dans L^∞ indépendamment du pas du maillage.*

proposition 3.1.3. *Si la condition de stabilité :*

$$\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

est vérifiée, alors le schéma (3.2) est L^∞ -stable au sens où :

$$\sup_{i=1,\dots,N, n=1,\dots,M} |u_i^{(n)}| \leq \|u_0\|_\infty$$

Démonstration 3.1.1. *On peut écrire le schéma sous la forme :*

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \lambda(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}),$$

soit encore :

$$u_i^{(n+1)} = (1 - 2\lambda)u_i^{(n)} + \lambda u_{i-1}^{(n)} + \lambda u_{i+1}^{(n)}.$$

Si $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$, on a $\lambda \geq 0$ et $1 - 2\lambda \geq 0$, et la quantité $u_i^{(n+1)}$ est donc combinaison convexe de

$u_i^{(n)}, u_{i-1}^{(n)}$ et $u_{i+1}^{(n)}$. Soit $M^{(n)} = \max_{i=1, \dots, N} u_i^{(n)}$, on a alors :

$$u_i^{(n+1)} \leq (1 - 2\lambda)M^{(n)} + \lambda M^{(n)} + \lambda M^{(n)}, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

et donc $u_i^{(n+1)} \leq M^{(n)}$. On en déduit en passant au maximum que :

$$M^{(n+1)} \leq M^{(n)}.$$

• Convergence

Définition 3.1.2. Soit u la solution du problème (3.1) et $(u_i^{(n)})_{i=1, \dots, N, n=1, \dots, M}$ la solution de (3.2). On appelle erreur de discrétisation au point (x_i, t_n) la quantité $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$.

Théorème 3.1.2. Sous les hypothèses du théorème (3.1.1), et sous la condition de stabilité (3.4), il existe $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que :

$$\|e_i^{(n+1)}\|_{\infty} \leq \|e_i^{(0)}\|_{\infty} + TC(k + h^2), \text{ pour tout } i = 1, \dots, N \text{ et } n = 0, \dots, M - 1.$$

Ainsi, si $\|e_i^{(0)}\|_{\infty} = 0$, alors $\max_{i=1, \dots, N} \|e_i^{(n)}\|$ tend vers 0 lorsque k et h tendent vers 0, pour tout $n = 1, \dots, M$. Le schéma (3.2) est donc **convergent**.

Démonstration 3.1.2. On note $\bar{u}_i^{(n)} = u(x_i, t_n)$. On a donc, par définition de l'erreur de consistance :

$$\frac{\bar{u}_i^{(n+1)} - \bar{u}_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^{(n)} - \bar{u}_{i+1}^{(n)}) = R_i^{(n)}. \quad (3.5)$$

Nous avons également le schéma numérique écrit :

$$\frac{u_i^{(n+1)} - u_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}(2u_i^n - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}) = 0. \quad (3.6)$$

Retranchons (3.6) à (3.5), on obtient :

$$\frac{e_i^{(n+1)} - e_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}(2e_i^n - e_{i+1}^{(n)} - e_{i-1}^{(n)}) = R_i^{(n)}.$$

soit encore :

$$e_i^{(n+1)} = (1 - 2\lambda)e_i^{(n)} + \lambda e_{i-1}^{(n)} + \lambda e_{i+1}^{(n)} + kR_i^{(n)}$$

$(1 - 2\lambda)e_i^{(n)} + \lambda e_{i-1}^{(n)} + \lambda e_{i+1}^{(n)} \leq \|e^{(n)}\|_\infty$, Car $\lambda \leq \frac{1}{2}$, et donc comme le schéma est consistant, l'inégalité (3.3) entraîne que :

$$|e_i^{(n+1)}| \leq \|e^{(n)}\|_\infty + kC(k + h^2).$$

On a donc par récurrence :

$$\|e_i^{(n+1)}\|_\infty \leq \|e^{(0)}\|_\infty + MkC(k + h^2).$$

Ce qui démontre le théorème.

3.2 Approximation d'un problème parabolique

Problème de la chaleur

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique pour décrire le phénomène physique de conduction thermique.

On doit ces équations à Jean Baptiste Joseph Fourier qui en étudiant la propagation de la chaleur en 1811, modélisent l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis série de Fourier et transformées de Fourier.

Il a permis ainsi une grande amélioration de la modélisation mathématique des phénomènes physiques.

$$T = f(x, y, z, t).$$

Pour déterminer l'évolution de cette température, il faut résoudre les équations de conduction de chaleur correspondant en connaissant les conditions initiales.

3.2.1 Équation de la chaleur 1D et différences finies

La méthode d'approximation d'une solution EDP avec des différences finie consiste à aborder la solution en un certain nombre de points limité appelés : **points de discrétisation du maillage**.

Nous allons d'abord décrire la méthode dans un cas simple en dimension 1 avant de nous intéresser aux schémas d'Euler progressif et Rétrograde pour l'équation de la chaleur.

Nous avons l'équation suivante :

$$\rho C \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad \forall x \in]0, L[, \quad \forall t > 0 \quad (3.7)$$

Avec :

ρ : la densité volumique.

$C\rho$: la chaleur spécifique massique.

k : La conductivité thermique.

$u(x, t)$: la température du barreau au point x et à l'instant t .

$f(x, t)$: la puissance par unité de longueur.

A cette équation on adjoint **les conditions aux limites** :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (3.8)$$

et la condition initial :

$$u(x, 0) = w(x) \quad \forall x \in]0, L[\quad (3.9)$$

L'équation (3.7) est appelée :**équation de la chaleur** .

Pour alléger l'écriture nous prendrons les constantes ρ, C_ρ et L égales à 1 ce qui ne modifie pas fondamentalement le problème mathématique Ainsi nous cherchons la fonction u satisfait les relations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad \forall x \in]0, 1[\quad \forall t > 0 \quad (3.10)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (3.11)$$

$$u(x, 0) = w(x) \quad \forall x \in]0, 1[\quad (3.12)$$

Pour résoudre numériquement le problème (3.10) , (3.11) , (3.12) par la méthodes des différences finis, nous commençons par le discrétiser par rapport à la variable x .

Si N est un entier positif, nous posons $h = \frac{1}{N+1}$ et $x_i = ih$ avec $i = 0, 1, 2, \dots, N+1$.

Soit $u_i(t)$ une approximation de $u(x, t)$ au point $x = x_i$.

On note $u_i(t) \simeq u(x_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, il est naturel de considérer le schéma :

$$\frac{d}{dt} u_i(t) + \frac{k}{h^2} (-u_{i-1}(t) + 2u_i(t) - u_{i+1}(t)) = f(x_i, t). \quad i = 1, \dots, N \quad \forall t > 0 \quad (3.13)$$

$$U_0(t) = U_{N+1}(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (3.14)$$

$$U_i(0) = w(x_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (3.15)$$

Les fonctions $U_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, sont maintenant les inconnues du problème.

On dit que le schéma (3.13), (3.14), (3.15) est une **semi-discrétisation** en espace du problème (3.10), (3.11), (3.12) par la méthode des différences finies.

Si A est la $N \times N$ matrice tridiagonale définie par :

$$A = \frac{k}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Si $\vec{u}(t)$ est le N -vecteur de composantes $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$, si $\vec{f}(t)$ est le N -vecteur de composantes $f(x_1, t), f(x_2, t), \dots, f(x_N, t)$ et si \vec{w} est le N -vecteur de composantes $w(x_1), w(x_2), \dots, w(x_N)$ alors le schéma (3.13), (3.14), (3.15) est équivalent au système différentiel :

$$\dot{\vec{u}} = -A\vec{u}(t) + \vec{f}(t) \quad \forall t > 0, \quad (3.17)$$

$$\vec{u}(0) = \vec{w}, \quad (3.18)$$

où $\dot{\vec{u}}(t)$ est la dérivée de \vec{u} par rapport à t au temps t , soit le N -vecteur de composantes $du_1(t)/dt, du_2(t)/dt, \dots, du_N(t)/dt$.

La semi-discrétisation en espace du problème (3.10), (3.11), (3.12) conduit donc à la résolution d'un système différentiel du premier ordre avec une condition initiale, donc pour intégrer numériquement ce système différentiel, nous choisissons les deux schémas d'Euler progressif et rétrograde.

Schéma d'Euler progressif :

Soit $\tau > 0$ un pas de temps donné, soit $t_n = n\tau$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$, et soit \vec{u}^n une approximation de $\vec{u}(t)$ au temps $t = t_n$ nous mettons $\vec{u}^n \simeq \vec{u}(t_n)$

Nous avons le schéma suivant :

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^n + \vec{f}(t_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.19)$$

$$\vec{u}^0 = \vec{w} \quad (3.20)$$

De là, nous concluons que la valeur de \vec{u}^{n+1} est la suivante :

$$\vec{u}^{n+1} = (I - \tau A)\vec{u}^n + \tau \vec{f}(t_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.21)$$

où I est la $N \times N$ matrice identité; le vecteur \vec{u}^{n+1} peut être calculé à partir d'un vecteur \vec{u}^n . Alors, en fonction de $\vec{u}^0 = \vec{w}$, nous pouvons calculer étape par étape $\vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3, \dots$, en utilisant (3.21); la j -ème composante u_j^n de \vec{u}^n est une approximation de $u(x_j, t_n)$, $j = 1, \dots, N, n \geq 0$. Le schéma numérique (3.19), (3.20) est **une discrétisation** (complète) du problème (3.10), (3.11), (3.12) par la méthode des différences finies.

Schéma d'Euler rétrograde :

Dans le cas suivant, nous choisissons le schéma d'Euler rétrograde au lieu du schéma d'Euler progressif à notre discrétisation (3.17), (3.18), nous avons, à la place de (3.19) :

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^{n+1} + \vec{f}(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.22)$$

Simplifié à :

$$(I + \tau A)\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \tau \vec{f}(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.23)$$

Avec ce schéma, Nous devons résoudre un système linéaire de N équation à N inconnues pour obtenir \vec{u}^{n+1} à partir de \vec{u}^n , ce schéma est donc **implicite**, la matrice $(I + \tau A)$ étant définie positive et tridiagonale.

3.2.2 Discrétisation de l'équation de la chaleur 2D stationnaire

Nous avons le problème bidimensionnel stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y]. \\ T(0, y) = T_g \quad \text{et} \quad T(L_x, y) = T_d, & 0 < y < L_y. \\ T(x, 0) = T_b \quad \text{et} \quad T(x, L_y) = T_h, & 0 < x < L_x. \end{cases}$$

Avec :

$[0, L_x] \times [0, L_y]$ un domaine rectangulaire.

$T(x, y)$ champ de température vérifie l'équation de Laplace.

Le domaine de calcul est discrétisé en $(N + 1) \times (P + 1)$ nœuds (x_i, y_j) (i variant de 0 à N et j variant de 0 à P). On supposera que les pas d'espace Δx et Δy sont constants. Pour approcher les dérivées secondes dans l'espace nous utilisons un schéma centré à

2 ordres.

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{ij} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}.$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{ij} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}.$$

Avec :

$T_{ij} = T(x_i, y_j)$ représente la **température** discrète au nœud (x_i, y_j) .

La formulation discrétisée est alors, pour i variant de 1 à $N-1$ et j variant de 1 à $P-1$:

$$\Delta y^2(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + \Delta x^2(T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - 2(\Delta x^2 + \Delta y^2)T_{i,j} = 0.$$

Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 4$, en posant $A = \Delta x^2 + \Delta y^2$:

$$\begin{bmatrix} -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_b \\ \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_d \\ \Delta y^2 T_g \\ 0 \\ \Delta y^2 T_d \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_h \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_d \end{bmatrix}$$

Dans le cas $\Delta x = \Delta y$, Alors on trouve la formule :

$$T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j}.$$

pour i variant de 1 à $N-1$ et j variant de 1 à $P-1$:

Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 4$.

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_b + T_g \\ T_b \\ T_b + T_d \\ T_g \\ 0 \\ T_d \\ T_h + T_g \\ T_h \\ T_h + T_d \end{bmatrix}$$

Notons I la matrice identité d'ordre 3 et D la matrice de dimension 3 définie par :

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Notons T_1, T_2 et T_3 les vecteurs à 3 composantes définis par :

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix}$$

Le système peut s'écrire sous la forme matricielle bloc suivante :

$$\begin{bmatrix} D & I & 0 \\ I & D & I \\ 0 & I & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

La matrice obtenue est tridiagonale et chacun de ses blocs est tridiagonale.

Le système peut être résolu par la méthode de la matrice de Thomas.

Algorithme de Thomas matriciel

Cet algorithme est utilisé pour la résolution d'un système avec une matrice tridiagonale par bloc faisant intervenir un vecteur d'inconnues discrètes X_i , de la forme :

$$A_i X_{i-1} + B_i X_i + C_i X_{i+1} = D_i \quad i \text{ variant de } 1 \text{ à } N-1$$

où A_i, B_i, C_i sont des matrices et D_i un vecteur.

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 - A_1 X_0 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{N-2} \\ D_{N-1} - C_{N-1} X_n \end{bmatrix}$$

nous avons la matrice α_i et le vecteur β_i évalués à travers les relations de récurrence suivantes :

$$\alpha_i = (B_i + C_i \alpha_{i+1})^{-1} \text{ et } \beta_i = (B_i + C_i \alpha_{i+1})^{-1} \times (D_i - C_i \beta_{i+1}) \quad \text{pour } i \text{ variant de } N-1 \text{ à } 1.$$

avec $\alpha_N = 0$ et $\beta_N = X_N$ (où X_N exprime une condition aux limites).

La deuxième étape détermine les inconnues, pour i variant de 1 à $N-1$: $X_i = \alpha_i X_{i-1} + \beta_i$.

• **Remarque :**

Avec une condition de Neumann sur l'un des bords du domaine, par exemple en $y = 0$ un flux de chaleur égale à ϕ_b , il faudrait ajouter à la formulation précédente la discrétisation de cette condition au bord.

Ceci a pour conséquence l'ajout de $N-1$ inconnues supplémentaires à savoir les valeurs de la température au bord ($j = 0$ et i variant de 1 à $N-1$).

Par exemple utilisons un schéma d'ordre 1 pour évaluer le flux de chaleur :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,0} = \frac{T_{i,1} - T_{i,0}}{\Delta y} = \phi_b.$$

Soit sous forme matricielle, dans le cas où $\Delta x = \Delta y$ et pour $N = P = 4$:

$$\begin{bmatrix}
 -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_{10} \\
 T_{20} \\
 T_{30} \\
 T_{11} \\
 T_{21} \\
 T_{31} \\
 T_{12} \\
 T_{22} \\
 T_{32} \\
 T_{13} \\
 T_{23} \\
 T_{33}
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 \phi_b \Delta x / \lambda \\
 \phi_b \Delta x / \lambda \\
 \phi_b \Delta x / \lambda \\
 T_g \\
 0 \\
 T_d \\
 T_g \\
 0 \\
 T_d \\
 T_h + T_g \\
 T_h \\
 T_h + T_d
 \end{bmatrix}$$

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de ce travail est de trouver des solutions à des problèmes paraboliques linéaires et non linéaires.

trois chapitres ont été alors proposées :

dans le premier chapitre nous avons présenté les notions de base sur les équations aux dérivées partielles.

dans le deuxième chapitre nous avons présenté trois méthodes classiques pour la résolution des EDP (méthode des différences finis, méthode des volumes finies, méthode des éléments finies.)

Méthode des différences finis :

Avantage : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénient : limitation à des géométries simple, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type *Newman*.

Méthode des volumes finis :

Avantage : permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions limites de type *Newman*.

Inconvénient : peut de résultats théorique de convergence.

Méthode des éléments finis :

Avantage : traitement possible de géométrie, complexe, nombreux résultats théoriques sur la convergence.

Inconvénient : complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire .

Dans le troisième chapitre

Nous avons présenté des schémas numériques pour résoudre le problème parabolique (problème de la chaleur), avec des conditions linéaires.

L'avantage de l'approche de linéarisation basé sur le principe du développement de Taylor est qu'on obtient après la discrétisation (par la méthode des différences finies) des équations linéaires.

Les résultats numériques obtenus montrent l'efficacité de la technique utilisée (méthode des différences finies).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Champagnat. *Différences finies et analyse numérique matricielle*, 2010.
- [2] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson (1982).
- [3] P. Lascaux et R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 1*. Masson (1986).
- [4] B. Lucquin. *Equations aux dérivées partielles et leurs approximations*. Ellipse (2004).
- [5] S. Laurène Jouve. *Introduction aux méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP)*. Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie, 2017.
- [6] A. Bouziani. *Sur un problème parabolique avec des conditions intégrales*, *Annales de mathématiques*, 6 (1999), 55-66.
- [7] H. OUNIS. *Résolution numérique de quelques problèmes paraboliques avec des conditions aux limites non locales non linéaires*. Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques. Université d'Oum El Bouaghi, 2019.
- [8] R. Herbin. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. université Aix Marseille 1, 2011, cel-00637008.
- [9] P. G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique et matricielle*, Masson, 1988.
- [10] J. Rppaz, Marco. *Introduction à l'analyse numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- [11] E. Hairer. *Méthodes numériques*. Cours de l'université de Genève, 2004.