الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques appliquées

Thème

Les polynômes orthogonaux de Laguerre et Tchebychev

Préparé par :-Bouzeraa Manal
-Bellour Roufia

Devant le jury

-Abdelouaheb Mohamed Salah(MCA)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Président
-Boudjedaa Badredine(MCA)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Encadreur
-Kaouache Smail(MCB)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

ملخص

في هذا العمل للماستر 2,تخصص الرياضيات التطبيقية ,قدمنا كثيرات الحدود المتعامدة لاغار و تشيبيشاف ,مع بعض التطبيقات قي مجال الفزياء.
أولا ,قدمنا تعريفات و خصائص أساسية نستخدمها خلال هذا العمل , ثم درسنا بعمق كثيرات الحدود المتعامدة لاغار و تشيبيشاف و التي هي حلول المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية لاغار وتشيبيشاف حيث اعطينا علاقات تراجع , صيغة رودريجز و دوال توليد.
اخيرا , الفصل الأخير من هذه الأطروحة يتعلق بتطبيقات متعددات الحدود في لاغار و تشيبيشاف.

الكلمات المفتاحية

متعدد الحدود لاغار,متعدد الحدود تشيبيشاف,علاقات التراجع ,دوال التوليد,صيغة رودريغز,

Résume

Dans ce travail de Master 2, spécialité Mathématiques Appliquées, nous avons présenté les
polynômes orthogonaux de Laguerre et de Tchebychev, avec quelques applications dans le domaine de
la physique.
D' abord, nous avons donné des définitions et des propriétés essentielles que nous utilisons dans
notre travail.
Ensuite, nous avons étudié profondément les polynômes orthogonaux de Laguerre et de Tchebychev qui
sont les solutions de l'équation Différentielle de Laguerre et de Tchebychev de second ordre, où nous
avons donné des relations de récurrence, une formule de Rodrigues et une fonction génératrice.

Enfin, le dernier chapitre de ce mémoire concerne les applications des polynômes de Laguerre et Tchebychev.

Mots-clés :

Polynômes de Laguerre, polynômes de Tchebychev, Relations de Récurrence, Formule de Rodrigues,
Fonction génératrice.

Abstract

In this work of Master 2, specialty Applied Mathematics, we have presented the orthogonal
polynomials of Lageurre and Tchebychev, with some applications in the field of physics.

First, we have given definitions and essential properties that we use in our work.

Then we studied deeply the orthogonal polynomials of Lageurre and Tchebychev which are the
solutions
of the equation second- order differential of Lageurre and Tchebychev, where we gave recursive
relations, a Rodrigues formula and a function generator.

The last chapter of this thesis concerns the applications of Legendre polynomials and Hermite
Polynomials.

Keywords:

Lageurre Polynomials, Tchebychev Polynomials ,Récursions relations, Rodrigues Formula, Generator
Functions.

Remerciements

Ce travail est le résultat d'efforts continus et de travail acharné tout long de cette année.

Tout d'abord nous remercions au créateur de l'univers qui nous a donné de la force et nous a gardé en bonne santé pour terminer ce mémoire et cette année d'étude difficile.

Un remerciement particulier à monsieur **Boudjedaa Badredine** pour tout le soutient et l'encadrement qu'il nous a donné .

Nous remercions les membres de jury **Abdelouaheb Mohamed Salah** pour avoir accepté de présider et **Kaouache Smail** pour avoir accepté d'examiner notre travail.

Nous remercions le corps enseignant et administratif du département de mathématiques et informatique .

Nous tenons à remercier également tous ceux qui nous ont aidé de prés et de loin pour l'élaboration de ce mémoire.

A tous ceux dont le soutient nous a été utile et nécessaire,nous disons :Qu'Allah récompense.

Roufia et Manal

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire...

À mes chères parents **Mohammed** et **Houria**

Aucune dédicace ne saurait exprime mon respect , mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien etre .Que Dieu prolonge votre vie avec santé et Bonheur.

À mes chères frères **Adlane** , **Karim** et **Lotfi** .

À ma chère sœur **Asmaa** , son mari **Abdelmalek** et leurs chers fils **Djawd** et **Djoud** .

À ma deuxième sœur **Fatima** .

À tous mes amies surtout **Marwa, Amira, Rania, Manal** ma binôme de ce travail, mes collègues et tous ceux qui m'aiment.

À tous ceux qui m'ont appris une lettre.

Roufia

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire…

A mon chère père"ABDELSLAM"

Qui m'a toujours transmis l'amour du travail et le sens du perfectionnisme et Qui m'a toujours encadré avec beaucoup d'amour et d'attention, Que dieu lui réserve bonne santé.

A ma chérie mère "RABIAA"

Ma raison d'être, ma raison de vivre, la lanterne qui éclaire mon chemin et m'illumine de douceur et d'amour, qui par ses sacrifices consentis et son affection profonde m'a toujours guidé sur la voie du succès, Que dieu la réserve bonne santé.

A mes chère frères MOUHAMED , CHOUAB et SA FEMME MARWA.

A mes chères sœurs FATIMA et AYA.

A toute ma famille BOUZERAA et GENNIFI

A mes amies 'Randa,Djihan,Fatiha,Nada ,Amina,Imane,Leyla, Mariem, Aicha, sara, Rania , Amira ' et tous les amies ,et ma binôme de ce travail 'Roufia'.

A tous mes enseignants depuis mes premiers années d'études

A ma promotion de Master M.A 2020.

MANAL

Table des matières

Table des figures

Notations

les ensembles

- $\mathbb{C}$ L'ensemble des nombres complexes .
- $\mathbb{R}$ L'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}^+$ L'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{Z}$ L'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{N}$ L'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^*$ L'ensemble des entiers naturels non nuls.

les Symboles

- $\dfrac{dz}{dx}$ La dérivée d'une fonction $x \mapsto z(x)$.
- $< .|. >$ Le produit scalaire.
- $\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = m \\ 0 & \text{si} \quad n \neq m \end{cases}$ Symbole de Kronecker.
- $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ La dérivée partielle par rapport à t d'une fonction $(x,t) \mapsto z(x,t)$.
- Δ Le Laplacien.
- $\hbar$ La constante de Planck.

les polynômes et les fonctions

- $L_n(x)$ Les polynômes de Laguerre d'ordre n.
- $L_n^k(x)$ Les fonctions de Laguerre associées d'ordre $n+k$.
- $T_n(x)$ Les polynômes de Tchebychev du première espèce d'ordre n.
- $U_n(x)$Les polynômes de Tchebychev du deuxième espèce d'ordre n.
- $\Gamma(x)$ La fonction gamma.
- $\Upsilon_n^m(x)$ Les harmoniques sphériques.

Historique

FIGURE 1 – Edmond Nicolas Laguerre

Edmond Nicolas Laguerre

Edmond Nicolas Laguerre, né le 9 avril 1834 à Bar-le-Duc où il est mort le 14 août 1886, est un mathématicien français, connu surtout pour l'introduction des polynômes qui portent son nom.

FIGURE 2 – Pafnuti Lvovitch Chebyshev

Pafnuti Lvovitch Chebychev

Pafnuti Lvovitch Chebychev, né le 4 mai 1821 Ã Okatovo et mort le 26 novembre 1894 Ã Saint-Pétersbourg, est un mathématicien russe. Il est connu pour ses travaux dans les domaines des probabilités, des statistiques, et de la théorie des nombres.

INTRODUCTION

Les polynômes orthogonaux sont un sujet d'étude pour les mathématiciens depuis longtemps. En 1939, ils ont reçu leur premier traitement détaillé par *Gábor Szegö*.

Les suites de polynômes orthogonaux apparaissent fréquemment en physique mathématique en particulier au cours de la résolution d'équation aux dérivées partielles. Les polynômes orthogonaux de "*Jacobi*, *Tchebychev*, *Legendre*, *Hermite*, *Laguerre*,..." sont connus par "polynômes orthogonaux classiques" (P.O.C. en abrégé).

Les polynômes de *Laguerre* apparaissent en mécanique quantique, dans la partie radiale de la solution de l'équation de Schrödinger pour un atome à un électron. Ils décrivent également les fonctions statiques de *Wigner* des systèmes d'oscillateur en mécanique quantique dans l'espace des phases. Ils entrent en outre dans la mécanique quantique du potentiel *Morse* et de l'oscillateur harmonique isotrope 3D.

Les polynôme de *Tchebychev* sont nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Chebycheve. Les polynôme de Tchebychev n'ont pratiquement pas d'application directe en physique. Ils sont particulliérement utiles en analyse numérique pour l'interpolation polynomaile de fonction.

Dans ce mémoire nous étudierons les polynômes orthogonaux de *Lageurre* et de *Tchebychev* qui sont des solutions des équations différentielles du second ordre, qui ont une grande importance en analyse numérique et en physique mathématique, ils ont été utilisés et étudiés beaucoup plus ces derniers années à cause de leur importance dans les applications .

Ce mémoire est composé principalement de trois chapitres :

Le premier chapitre, nous donnons des notions essentielles que nous utiliserons tout le long de ce mémoire.

Deuxième chapitre, il est divisé en deux parties, dans la première partie les polynômes de *Lageurre* et ainsi quelques-unes de leur propriétés : fonction génératrice, relations de récurrence, l'orthogonalité... etc. La deuxième partie est réservée aux polynômes de *Tchebychev* et leur propriétés.

Dans le troisième chapitre on donne des applications des polynômes de *Lageurre* et de *Tchebychev*.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et notions essentielles de base que nous allons utiliser dans toute la suite de ce mémoire.

1.1 Équations différentielles ordinaires

Définition 1.1.1

On appelle équation différentielle ordinaire notée "EDO", une équation établissant une relation entre la fonction inconnue y, la varaible indépendante x, et ses dérivées $y', y'', ..., y^{(n)}$ donnée par :

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad \forall x \in I, \tag{1.1}$$

où I est un ouvert de $\mathbb{R}$.

***L'ordre** d'une équation différentielle ordinaire, est l'ordre de la dérivée la plus élevée dans cette équation.*

Définition 1.1.2

*On appelle **solution** ou **intégrale d'une équation différentielle ordinaires** toute fonction $y = g(x)$ vérifiant cette équation.*

1.2 Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre n

Une équation différentielle linéaire ordinaire d'ordre n est une équation du type :

$$a_0(x)y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)y^{(n-i)} = f(x) \qquad \forall x \in I, \tag{1.2}$$

où $a_0 \neq 0$ et $a_i,\ i = \overline{1, n}$, et f sont des fonctions continues de $I \longrightarrow \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

L'équation différentielle linéaire (1.2) est dite **homogène**, ou sans second membre, si la fonction $f(x) = 0$, sinon elle est dite équation **non homogène** ou avec second membre.

Théorème 1.2.1

Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est une quation de la forme :

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y(x) = 0 \qquad \forall x \in I, \tag{1.3}$$

Si $y_1(x),\ y_2(x), \cdots,\ y_n(x)$ sont des solutions linéairement indépendantes de (1.3), alors la solution homogéne, i.e. la solution générale de l'équation (1.3) est donnée par :

$$y_h = \sum_{i=0}^{n} c_i y_i(x), \tag{1.4}$$

où $c_1, c_2, \cdots, c_n$ sont des constantes.

1.3 Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 2

Définition 1.3.1

Une équation différentielle ordinaire linéaires d'ordre 2 est une équation de la forme :

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{1.5}$$

où $a_0 \neq 0,\ a_1,\ a_2$ et f sont des fonctions continues sur I.

Si on pose :

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \tag{1.6}$$

$$Q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}, \tag{1.7}$$

$$F(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}, \tag{1.8}$$

l'équation précédente devient

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x). \tag{1.9}$$

Si le seconde membre de l'équation différentielle (1.9) est nulle (i.e $F(x) = 0$) :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{1.10}$$

Si y_1, y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.10), alors la solution homogène est donnée par :

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2, \tag{1.11}$$

où c_1, c_2, étant des constants.

Si on impose à la solution de l'équation (1.9) les conditions :

$$y = y_0, \quad y' = y'_0 \quad pour \quad x = x_0 \qquad , \quad x_0 \in I, \tag{1.12}$$

qu' on appelle conditions initiales.

proposition 1.3.1
La solution générale de l'équation (1.9) est donnée par :

$$y_G = y_h + y_p, \tag{1.13}$$

où y_h est la solution homogène et y_p est une solution particulière de l'équation (1.9) .

Le théorème suivant donne l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle.

Théorème 1.3.1
Si P, Q et F dans l'équation (1.9) sont des fonctions continues sur l'intervalle ouvert I, alors il existe une seule et une seule solution $y = \varphi(x)$, de l'equation différentielle (1.9), qui satisfait aux conditions initiales (1.12), cette solution existe dans tout l'intervalle ouvert I.

1.4 Méthode de Frobenius

En théorie des équations différentielles ordinaire la méthode de *Frobenius*, portant le nom du mathématicien Allemand "**Ferdinand George Frobenius**", est une méthode qui permet de trouver des solutions d'une équation différentielle ordinaire sous forme d'une série de puissances de x.
De nombreuses fonctions spéciales sont données comme solutions d'équations différentielles ordinaire de la forme :

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0. \tag{1.14}$$

Nous nous limitons aux équations différentelles du type :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xq(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = 0, \tag{1.15}$$

où $q(x)$ et $r(x)$ sont donnés sous forme de série de puissance de x.

$$q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m, \tag{1.16}$$

$$r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} r_m x^m. \tag{1.17}$$

La base de la méthode de Frobenius est d'essayer de chercher une solution de l'équation (1.15) sous la forme :

$$z(x,s) = x^s(a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots + a_nx^n \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+s}, \tag{1.18}$$

où $a_0 \neq 0$ et $s \in \mathbb{R}$.

De la relation précédente (1.18) on a :

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1}, \tag{1.19}$$

et

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2}. \tag{1.20}$$

En remplaçant (1.18), (1.19) et (1.20) dans l'équation (1.15), et en utilisant (1.16) et (1.17) on trouve :

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} + xq(x)\frac{dz}{dx} + r(x)z = 0.$$

Alors

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2} + xq(x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1} + r(x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s} = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}q_ma_n(n+s)x^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}r_ma_nx^{n+m} = 0. \tag{1.21}$$

Le premier membre de l'équation (1.21), qui est une séries de puissances de x convergente dans un certain domaine, et qui doit être nuls. Ce qui nécessite que tous les coefficients des puissances de x sont nuls.

Le coefficient de x^0 doit être nul et notons que x^0 apparaît seulement si $m = 0$, $n = 0$ on a :

$$a_0s(s-1) + a_0q_0s + a_0r_0 = 0. \tag{1.22}$$

Et le coefficient de x^1 doit être nul et notons que x^1 découle de l'équation (1.21) en choisissant dans le premier terme $n = 1$ et dans le second et les troisièmes termes $n + m = 1$, on a alors :

$$a_1(s+1)s + (a_1q_0(s+1) + a_0q_1s) + (a_1r_0 + a_0r_1) = 0. \tag{1.23}$$

Nous pouvons maintenant écrire une équation générale pour le coefficient de x^i qui doit être nul. Dans le premier terme de l'équation (1.21) choisissons $n = i$ et dans le deuxième et le trosième terme en choisissant $n + m = i$ (ie., $n = i,\ m = 0$ ou $n = i-1, m = 1$ ou $n = i-2, m = 2, \ldots,\ n = 0, m = i$)

$$a_i(s+i)(s+i-1)+(a_iq_0(s+i)+a_{i-1}q_1(s+i-1)+a_{i-1}q_2(s+i-2)+\cdots+a_0q_is)+(a_ir_0+a_{i-1}r_1+a_{i-2}r_2+\cdots+a_0r_i) = 0\,; \tag{1.24}$$

C'est-à-dire

$$a_i[(s+i)(s+i-1)+q_0(s+i)+r_0]+(a_{i-1}q_1(s+i-1)+a_{i-1}q_2(s+i-2)+\cdots+a_0q_is)+(a_{i-1}r_1+a_{i-2}r_2+\cdots+a_0r_i)=0. \tag{1.25}$$

Donc

$$a_if(s+i)+(a_{i-1}q_1(s+i-1)+a_{i-1}q_2(s+i-2)+\cdots+a_0q_is)+(a_{i-1}r_1+a_{i-2}r_2+\cdots+a_0r_i)=0 \qquad (i\geq 1) \tag{1.26}$$

où nous avons rassemblé tous les termes qui contiennent a_i et on a noté le coefficient de a_i par

$$f(s+i)\equiv(s+i)(s+i-1)+q_0(s+i)+r_0. \tag{1.27}$$

De l'équation (1.21) avec l'hypothèseè $a_0\neq 0$, on obtient :

$$s^2+(q_0-1)(s+r_0)=0, \tag{1.28}$$

qui s'appelle l'équation indicielle, qui est du second degré en s et qui nous donnera deux racines s_1 et s_2. Dans le cas où ces racines sont réelles, on suppose que $s_2\geq s_1$.
Notons que l'équation (1.28) n'est autre que $f(s)=0$, et on a immédiatement :

$$f(s)=(s-s_1)(s-s_2). \tag{1.29}$$

On peut donc s'attendre à ce que ces deux racines s_1 et s_2 conduisent aux deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle d'origine. On peut montrer facilement que cela est vrai en dehors de certains cas exceptionnels, à savoir :

i) les deux racines de l'équation indicielle sont égales.

ii) les deux racines de l'équation indicielle différentes d'un nombre entier.

Par l'utilisation de l'équation (1.25) et les calcules on obtient la formule généraéral des coefficients a_i :

pour $i=1$ on trouve :

$$a_1f(s+1)+a_0q_1s+a_0r_1=0.$$

donc

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-a_0(q_1s+r_1)}{f(s+1)}. \\ &= \frac{a_0h_1(s)}{f(s+1)}. \end{aligned}$$

Tel que :

$$h_1(s)=-(q_1s+r_1).$$

Pour $i=2$:

$$a_2f(s+2)+[a_1q_1(s+1)+a_0q_2s]+[a_1r_1+a_0r_2]=0,$$

donc

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{[a_1q_1(s+1)+a_0q_2s]+[a_1r_1+a_0r_2]}{f(s+2)}. \\ &= \frac{a_0h_2(s)}{f(s+1)f(s+2)}. \end{aligned}$$

Tel que :

$$h_2(s) = -[h_1(s)(s+r_1+1)+f(s+1)(q_2s+r_2)].$$

Et donc on déduit que :

$$a_i = a_0\frac{h_i(s)}{f(s+1)f(s+2)\cdots f(s+i)}, \tag{1.30}$$

où $h_i(s)$ est un polynôme de s.
Si nous utilisons la relation (1.30), on obtient la séries

$$z(x,s) = a_0x^s\{1+\frac{h_1(s)}{f(s+1)}x+\frac{h_2(s)}{f(s+1)f(s+2)}x^2+\cdots+\frac{h_i(s)}{f(s+1)f(s+2)\cdots f(s+i)}x^i+\cdots\}. \tag{1.31}$$

Il ne reste maintenant qu'à trouver deux solutions linéairement indépendantes, de l'équation différentielle (1.15).

En utilisant la série précédente $z(x,s)$ (1.31) et la relation (1.26) on peut dédruire quatre différents cas :

1) Si les racines s_1 et s_2 de l'équation indicative sont distinet et ne diffèrent pas d'un entier alors les deux solutions indépendantes sont données par :

$$z(x,s_1) \quad \text{et} \quad z(x,s_2). \tag{1.32}$$

2) Si les racines s_1 et s_2, $s_2 > s_1$ diffèrent par un entier et l'un des coeefficients de la série pour $z(x,s)$ est infini lorsque $s = s_2$, les deux solutions indépendantes sont données par :

$$[(s-s_1)z(x,s)]_{s=s_1} \qquad \text{et} \qquad [\frac{d}{ds}(s-s_1)z(x,s)]_{s=s_1}. \tag{1.33}$$

3) Si les racines s_1 et s_2, $s_2 > s_1$ diffèrent par un entier et l'un des enefficients de la série pour $z(x,s)$, disons a_r, est indéterminée lorsque les deux solutions indépendantes sont obtenues entre $z(x,s_2)$, en gardant a_o et a_r comme constantes arbitraires.

4) Si les racines de l'équation indicielle sont égaux, disons $s = s_1$, alors les deux solutions indépendantes sont données par :

$$z(x,s_1) \qquad \text{et} \qquad [\frac{d}{ds}z(x,s)]_{s=s_1} \quad . \tag{1.34}$$

1.5 Les polynômes orthogonaux

Soit une fonction $\rho(x)$ de la varaible réelle x, définie et intégrable sur (a, b). On suppose que $\rho(x)$ est positive ou nulle et continue par morceaux. Bien sûr on admet que ρ n'est pas nulle partout. Dans le cas d'un intervalle infini, on suppose que toutes les intégrales $\int_a^b \rho(x)x^m dx$ où $m \in \mathbb{N}$, sont convergentes. Etant donnés deux polynômes réels de x, $P(x)$ et $Q(x)$ on notera :

$$< P|Q >= \int_a^b P(x)Q(x)\rho(x)dx. \tag{1.35}$$

L'intégrale $< P|Q >$ existe toujours compte tenu des hypothèses précédentes ; elle posséde toutes les propriétés d'un produit scalaire :

$$< P|Q >=< Q|P > . \tag{1.36}$$

$$< P|P >= \int_a^b P^2 \rho dx \begin{cases} > 0 & si \quad P(x) \neq 0 \\ = 0 & si \quad P(x) = 0 \end{cases} \tag{1.37}$$

Les polynômes P et Q sont dits orthognaux, si :

$$< P|Q >= 0$$

La famille de polynômes $\{P_n(x)\}$, où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n est dite famille ou suite de polynômes orthogonaux par rapport au poids $\rho(x)$ sur l'intervalle (a, b) si :

$$< P_n|P_m >= 0, \qquad \text{pour} \qquad n \neq m. \tag{1.38}$$

La suite des P_n est dite orthonormale si :

$$< P_n|P_m >= \delta_{mn},$$

où δ_{mn} est le symbole de Kronecker.

Si $P(x)$ est un polynôme de degré m et $P_n(x)$ une suite de polynômes orthogonaux on peut écrire :

$$P(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n P_n(x), \qquad \text{avec} \qquad c_n = \frac{< P_n|P >}{< P_n|P_n >}, \tag{1.39}$$

En effet

$$< P_k|P >= \sum_n c_n < P_k|P_n >= c_k < P_k|P_k > . \tag{1.40}$$

1.5.1 Formule de récurrence

Si $\{P_n(x)\}$ est une famille de polynômes orthogonaux, il existe trois nombres A_n, B_n et C_n tel que pour $n \geq 1$:

$$xP_n = A_n P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), \tag{1.41}$$

et $A_n,\ C_n \neq 0$.
En effet, xP_n est un polynôme de degré $n+1$ qui s'écrit :

$$xP_n = \sum_{k=0}^{n+1} c_k P_k(x), \qquad \text{avec} \qquad c_k = \frac{< P_k|xP_n >}{< P_k|P_k >}, \tag{1.42}$$

or $< P_k|xP_n >=< P_n|xP_k >= 0$ si $k > n+1$ et $n > k+1$ c'est-à-dire si $k < n-1$ et $k > n+1$
Seuls les coefficients C_{n-1}, C_n et C_{n+1} interviennent dans (1.39) et s'identifient à A_n, B_n et C_n, respectivement, dans(1.41)
posons

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k, \tag{1.43}$$

La composition des termes de même degré dans (1.41) conduit à :

$$A_n = a_n^{(n)}/a_{n+1}^{(n+1)}, \qquad \text{et} \qquad A_n a_n^{(n+1)} + B_n a_n^{(n)} = a_{n-1}^{(n)}, \tag{1.44}$$

d'où

$$B_n = \frac{a_{n-1}^{(n)}}{a_n^{(n)}} - \frac{a_n^{(n+1)}}{a_{n+1}^{(n+1)}}, \tag{1.45}$$

donc

$$xP_{n-1}(x) = \frac{a_{n-1}^{(n-1)}}{a_n^{(n)}} P_n(x) + xP_n = \sum_{k=0}^{n+1} c_k P_k(x), \tag{1.46}$$

et

$$C_n = \frac{< xP_n|P_{n-1} >}{< P_{n-1}|P_{n-1} >} = \frac{< P_n|xP_{n-1} >}{< P_{n-1}|P_{n-1} >} = \frac{a_{n-1}^{(n-1)}}{a_n^{(n)}} \frac{< P_n|P_n >}{< P_{n-1}|P_{n-1} >}. \tag{1.47}$$

si la famille de polynômes $P_n(x)$ et orthonormale, on voit que $C_n = A_{n-1} \neq 0$

1.5.2 Fonction génératrice

Soit une fonction $G(x,t)$ développable en série entiére de t dans un certain domaine D :

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) t^n.$$

On dit que $G(x,t)$ est la fonction génératrice des fonctions $\phi_n(x)$. Si les fonctions $\phi_n(x)$ sont des polyômes de degré n $P_n(x)$ on a alors :

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \tag{1.48}$$

<u>Théorème</u> 1.5.1

La condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes $P_n(x)$ définit par le développement (1.48) soient orthogonaux sur un intervalle (a, b) relativement au poids $\rho(x)$ est que l'intégrale :

$$I = \int_a^b G(x,t)G(x,t')\rho(x)dx. \tag{1.49}$$

ne dépende que du produit tt'.

En effet :

$$I = \int_a^b \sum_{n,m=0}^{\infty} P_n(x)P_m(x)t^n t'^m \rho(x)dx = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n t'^m < P_n|P_m > . \tag{1.50}$$

Si la famille $P_n(x)$ est orthogonale, I ne dépend que du produit tt' :

$$I = \sum_{n,m=0}^{\infty} (tt')^n < P_n|P_n > = I(tt'). \tag{1.51}$$

Réciproquement si

$$I(tt') = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_n(tt')^n, \qquad on\ a \qquad c_n =< P_n|P_n > . \tag{1.52}$$

1.5.3 Formule de Rodrigues

Considérons le problème suivant :

$$R(x)y'' + Q(x)y' + \lambda y = 0, \tag{1.53}$$

avec $P(x)$ est un polynôme de deg ≤ 2, $Q(x)$ est un polynôme de deg ≤ 1 et que λ est une constante. Alors la suite des polynômes orthogonaux, qui sont les solutions de l'équation (1.53), est données par la formule de *Rodrigues* :

$$P(x) = \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^n}{dx^n}(\psi(x)[R(x)]^n). \tag{1.54}$$

Avec

$$\psi(x) = \exp(\int_{x_0}^{x} \frac{Q(t)}{R(t)}dt). \tag{1.55}$$

1.6 La fonction Gamma

Définition 1.6.1

On définit la fonction gamma par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad (\textit{pour} \;\; x > 0). \tag{1.56}$$

L'intégrale ci-dessus est convergente si et seulement si $x > 0$.

de l'équation (1.56) on peut déduit que :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x} dt, \qquad (\text{pour} \;\; x > -1). \tag{1.57}$$

l'intégrale ci-dessus est convergente si et seulement si $x > -1$.

La fonction gamma a plusieurs propriétés, en particulier la propriété suivante :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{1.58}$$

qui n'est autre que la fonction factorielle.
Pour plus de détails concernant toutes les notions données dans ce chapitre voir [2, 3, 4, 5]

Chapitre 2

LES POLYNÔMES ORTHOGONAUX DE LAGUERRE ET TCHEBYCHEV

Dans ce chapitre, Nous étudions quelques familles de polynômes orthogonaux. La première partie est réservée à l'étude des polynômes de *Laguerre* où on donne leur définition ainsi qu'un certain nombre de leurs propriétés principales. Dans la deuxième partie on s'intéresse aux polynômes de *Tchebychev* et de même on donne leur définition ainsi que certaines de leur propriétés.

2.1 Polynômes de Laguerre

En mathématiques, Les polynômes de *Laguerre* sont des suites des polynômes orthogonaux qui sont les solutions d'une certaine équation différentielle, appelé équation de *Laguerre*, d'après le mathématicien francais"**Edmond Laguerre**".

2.1.1 Équation différentielle de Laguerre et ses solutions

L'équation differntielle de Laguerre s'écrit sous la forme :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0, \tag{2.1}$$

Dans les applications on cherche une solution de cette équation qui est finis pour toutes le valeurs finies de x et telle que cette solution tend vers l'infini moins vite que $\exp(\frac{x}{2})$ quand x tend à l'infini.

Donc si on multiplie les deux membres de l'équation (2.1) par $x \neq 0$ elle devient alors

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x(1-x)\frac{dy}{dx} + nxy = 0, \tag{2.2}$$

c'est-à-dire du type

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xq(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \tag{2.3}$$

où $q(x) = 1 - x$ et $R(x) = nx$.

Par application de la méthode de Frobenius (Chapitre 1) on peut chercher une solution de l'équation (2.2), i.e une solution de l'équation (2.3), sous la forme :

$$z(x,k) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+k},$$

où k est une racine de l'équation indicielle de l'équation (2.3)

$$k^2 + (q_0 - 1)(k + r_0) = 0, \tag{2.4}$$

et la relation de récurrence pour les coefficients a_r est

$$a_{r+1} = a_r \frac{k+r-n}{(k+r+1)^2}. \tag{2.5}$$

En utilisant cette relation de récurrence il est facile de voir que $z(x,k)$ prend la forme

$$z(x,k) = a_0 x^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n-k)!}{((k+r)!)^2 (n-k-r)!} x^r. \tag{2.6}$$

Puisque dans notre cas $q_0 = 1$ et $r_0 = 0$ alors l'équation indicielle admet une racine double $k = 0$ et alors l'équation (2.1) admet deux solutions linéairement indépendantes données par :

$$z(x,0) = a_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} x^r, \qquad [\frac{\partial z(x,k)}{\partial k}]_{k=0}. \tag{2.7}$$

Calculons $[\frac{\partial z(x,k)}{\partial k}]_{k=0}$, alors d'après la relation (2.6) on a :

$$\frac{\partial}{\partial k} z(x,k) = a_0 (\ln x) x^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n-k)!}{((k+r)!)^2 (n-k-r)!} x^r + a_0 x^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{d}{dk} [\frac{(-1)^r (n-k)!}{((k+r)!)^2 (n-k-r)!}] x^r. \tag{2.8}$$

Notons par

$$f_r(k) = \frac{(n-k)!}{((k+r)!)^2 (n-k-r)!}, \tag{2.9}$$

alors

$$\frac{d}{dk} f_r(k) = f_r(k) \frac{d \ln f_r(k)}{dk}. \tag{2.10}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\ln f_r(k) &= \ln \frac{(n-k)!}{((k+r)!)^2(n-k-r)!} \\
&= \ln(n-k)! - \ln((k+r)!)^2 - \ln(n-k-r)! \\
&= \ln(n-k)(n-k-1)\cdots\times 1 - 2\ln(k+r)(k+r-1)\cdots\times 1 - \ln(n-k-r)(n-k-r-1)\cdots\times 1 \\
&= \sum_{i=0}^{r} \ln(n-k-i) - 2\sum_{i=0}^{r} \ln(k+r-i) - \sum_{i=1}^{r} \ln(n-k-r-i) \\
&= \sum_{i=0}^{r} \ln(n-k-i) - 2\ln(k+r-i) - \ln(n-k-r-i).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d\ln f_r(k)}{dk} &= \frac{d}{dk}\left[\sum_{i=0}^{r} \ln(n-k-i) - 2\ln(k+r-i) - \ln(n-k-r-i)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{r} -\frac{1}{(n-k-i)} - \frac{2}{(k+r-i)} + \frac{1}{(n-k-r-i)} \ .
\end{aligned} \tag{2.12}$$

D'où

$$\frac{d}{dk} f_r(k) = \frac{(n-k)!}{((k+r)!)^2(n-k-r)!} \sum_{i=0}^{r} -\frac{1}{(n-k-i)} - \frac{2}{(k+r-i)} + \frac{1}{(n-k-r-i)}, \tag{2.13}$$

et donc

$$[\frac{d}{dk} f_r(k)]_{k=0} = \frac{n!}{(r!)^2(n-r)!} \sum_{i=0}^{r} -\frac{1}{(n-i)} - \frac{2}{(r-i)} + \frac{1}{(n-r-i)}, \tag{2.14}$$

Alors

$$[\frac{\partial}{\partial k} z(x,k)]_{k=0} = a_0(\ln x) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2(n-r)!} x^r + a_0 \sum_{i=0}^{r} [-\frac{1}{(n-i)} - \frac{2}{(r-i)} + \frac{1}{(n-r-i)}](-1)^r x^r, \tag{2.15}$$

c'est-à-dire

$$[\frac{\partial}{\partial k} z(x,k)]_{k=0} = (\ln x) z(x,0) + \sum_{r=0}^{\infty} C_r x^r, \tag{2.16}$$

où $\quad C_r = (-1)^r[-\frac{1}{(n-i)} - \frac{2}{(r-i)} + \frac{1}{(n-r-i)}]$.

Cette solution n'est pas acceptée car elle n'est pas finie pour $x = 0$, à cause du terme qui contient $\ln(x)$.

Alors on obtient la solution de l'équation (2.1)

$$z(x,0) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2(n-r)!} x^r. \tag{2.17}$$

Il faut remarquer ici que si n est un entier naturel alors cette série est une somme finie de termes, car pour $r \geq n+1$ on a $a_r = 0$.

Pour $a_0 = 1$, on définit la solution standard qui est le polynôme de *Laguerre* d'ordre n, noté $L_n(x)$, par :

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2(n-r)!} x^r. \tag{2.18}$$

2.1.2 La fonction génératrice

Théorème 2.1.1
Les polynômes de Laguerre $L_n(x)$ admettent la fonction génératrice suivante :

$$\omega(x,t) = \frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t}, \tag{2.19}$$

c'est-à-dire

$$\omega(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n. \tag{2.20}$$

Preuve 2.1.1
En utilisant le Développement de Taylor, on aura :

$$\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} = \frac{1}{1-t}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r t^r}{r!}(\frac{1}{1-t})^r, \tag{2.21}$$

donc

$$\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r t^r}{r!}(\frac{1}{1-t})^{r+1}. \tag{2.22}$$

$$(\frac{1}{1-t})^{r+1} = \frac{1}{0!} + \frac{(r+1)t}{1!} + \frac{(r+1)(r+2)t^2}{2!} + \frac{(r+1)(r+2)(r+3)t^3}{i!} \cdots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!}t^s, \tag{2.23}$$

alors

$$\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r t^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!t^s}{r!s!}. \tag{2.24}$$

on pose $n = r+s \Rightarrow s = n-r \quad et\ r = n-s$

$$\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n! x^r}{(r!)^2(n-r!)})t^n \tag{2.25}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n. \tag{2.26}$$

d'òu le resultat.

Théorème 2.1.2 *(**Formule de Rodrigues**) Pour $n \in \mathbb{N}$ on peut définir les polynômes de Lageurre par la relation*

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n). \tag{2.27}$$

Preuve 2.1.2
On utilisant la formule de Leibniz :

$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) = \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}x^n\frac{d^r e^{-x}}{dx^r}, \tag{2.28}$$

$$\frac{d^p}{dx^p}(x^q) = q(q-1)(q-2)\cdots(q-p+1)x^{q-p} = \frac{q!}{(q-p)!}x^{q-p}, \tag{2.29}$$

alors

$$\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}x^n = \frac{n!}{r!}x^r, \tag{2.30}$$

$$\frac{d^r e^{-x}}{dx^r} = (-1)^r e^{-x}, \tag{2.31}$$

et donc

$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) = \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{n!}{r!}x^r(-1)^r e^{-x} = \sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r n!}{(r!)^2(n-r)!}x^r = L_n(x). \tag{2.32}$$

2.1.3 Quelques Expressions explicites de polynômes de Laguerre

a) Nous avons une série explicite pour $L_n(x)$ donné par la relation (2.18). Pour les premiers polynômes de *Laguerre*, cela donne :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1.\\
L_1(x) &= -x+1.\\
L_2(x) &= \frac{1}{2!}(x^2-4x+2).\\
L_3(x) &= \frac{1}{3!}(-x^3+9x^2-18x+6).\\
L_4(x) &= \frac{1}{4!}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

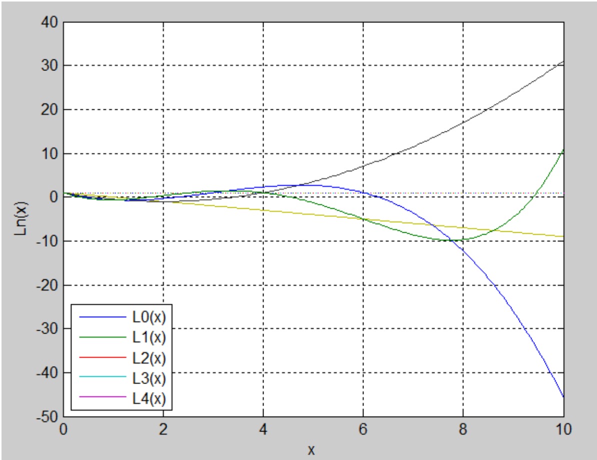

FIGURE 2.1 – Les premiers polynômes de Laguerre

b)Maintenant on donne quelques expressions de polynôme de *Laguerre* pour des valeurs spéciales.

Théorème 2.1.3

01) $L_n(0) = 1.$

02) $L'_n(0) = -n.$

03) $\int_0^\infty e^{-tx} L_n(x)dx = \frac{1}{t}[1 - \frac{1}{t}]^n.$

04) $L''_n(0) = \frac{1}{2}n(n-1).$

Preuve 2.1.3
1) Montrons que : $L_n(0) = 1.$

Pour $x = 0$*, on remplace dans l'expression de la fonction génératrice* (2.19) *:*

$$\frac{e^0}{1-t} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(0)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \tag{2.34}$$

d'après le théorème de Binomial on trouve :

$$L_n(0) = 1.$$

2) Montrons que : $L'_n(0) = -n.$
L'expression de $L_n(x)$ *vérifie l'équation de Laguerre* (2.1)*, nous avons alors :*

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_n(x) + (1-x)\frac{d}{dx}L_n(x) + nL_n(x) = 0, \tag{2.35}$$

on pose $x = 0$ dans cette équation on trouve :

$$L_n'(0) + nL_n(0) = 0,$$

et d'après 01) on a :

$$L_n(0) = 1,$$

donc l'équation devient :

$$L_n'(0) + n = 0,$$

alors

$$L_n'(0) = -n.$$

3) Montrons que : $\int_0^\infty e^{-tx} L_n(x)dx = \frac{1}{t}[1 - \frac{1}{t}]^n.$

Remplaçons l'expression de $L_n(x)$ définie par (2.18) dans l'intégrale on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-tx} L_n(x)dx &= \int_0^\infty e^{-tx} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} x^r dx \\ &= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} \int_0^\infty x^r e^{-tx} dx. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Si on pose $tx = z \Rightarrow dz = tdx$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-tx} L_n(x)dx &= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} \int_0^\infty (\frac{z}{t})^r e^{-z} \frac{dz}{t} \\ &= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} . \frac{1}{t^{r+1}} \int_0^\infty z^r e^{-z} dz \\ &= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!} . \frac{1}{t^{r+1}} . \Gamma(r+1) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{(r!)(n-r)!} . (\frac{1}{t})^r \qquad (\Gamma(r+1) = r!) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{r=0}^{n} C_n^r (\frac{-1}{t})^r \\ &= \frac{1}{t}[C_n^0 + C_n^1(\frac{-1}{t})^1 + C_n^2(\frac{-1}{t})^2 + \cdots + C_n^n(\frac{-1}{t})^n] \\ &= \frac{1}{t}[1 - \frac{1}{t}]^n. \end{aligned} \tag{2.37}$$

4) Montrons que : $L''_n(0) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Dans l'expression de $L_n(x)$ *définie par la relation* (2.18)*, seul le terme en* x^2 *continue à* $L''_n(0)$.
on a donc :

$$L''_n(0) = \frac{n!}{4(n-2)!}2 = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{2.38}$$

2.1.4 Orthogonalités des polynômes de Laguerre

Théorème 2.1.4

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}. \tag{2.39}$$

Preuve 2.1.4

D'aprés le théorème de la fonction génératrice, nous avons :

$$\frac{\exp(\frac{-xt}{(1-t)})}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n, \tag{2.40}$$

et

$$\frac{\exp(\frac{-xs}{(1-s)})}{1-s} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) s^m. \tag{2.41}$$

De (2.40) *et* (2.41) *on peut déduire que :*

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) t^n s^m = e^{-x}.\frac{\exp(\frac{-xt}{(1-t)})}{1-t}.\frac{\exp(\frac{-xs}{(1-s)})}{1-s},$$

donc
$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx$*, est le coefficient de* $t^n s^m$ *dans l'expression de :*

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x}.\frac{\exp(\frac{-xt}{(1-t)})}{1-t}.\frac{\exp(\frac{-xs}{(1-s)})}{1-s} dx,$$

on pose

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^\infty e^{-x(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s})} dx \\
&= \frac{1}{(1-t)(1-s)} [-\frac{1}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}} . e^{-x(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s})}]_0^\infty \\
&= \frac{1}{(1-t)(1-s)} . \frac{1}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}} \\
&= \frac{1}{(1-t)(1-s)+t(1-s)+s(1-t)} \\
&= \frac{1}{1-st} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n.
\end{aligned}$$

Ainsi, le coefficient de $t^n s^m$ *est* 1 *si* $n = m$ *et* 0 *si* $n \neq m$*, c'est-à-dire qu'il est* δ_{nm}.

Par conséquent

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}. \tag{2.42}$$

2.1.5 Relations de récurrence.

Théorème 2.1.5

i) $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$.

ii) $xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$.

iii) $L'_n(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_r(x)$.

Preuve 2.1.5
i) Montrons que : $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$.

Si nous dérivons la fonction génératrice définie par l'expression (2.19)*, par rapport à la variable t et en utilisant le fait que :*

$$\frac{d}{dt}\frac{t}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2}, \tag{2.43}$$

On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x).nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}\exp(\frac{-xt}{(1-t}) - \frac{x}{(1-t)^2}.\frac{\exp(\frac{-xt}{(1-t)})}{1-t}. \tag{2.44}$$

Utilisons la relation (2.19) *on aura :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x).nt^{n-1} = \frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - \frac{x}{(1-t)^2}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n, \tag{2.45}$$

la multiplication de l'équation précédente par $(1-t)^2$ nous donne :

$$(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x).nt^{n-1} = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n, \tag{2.46}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x).nt^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)nt^n + \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x).nt^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^{n-1} - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n, \tag{2.47}$$

En réécrivant toutes les séries en puissance de t^n ce qui donne pour la relation précédente :

$$\sum_{n=-1}^{\infty} L_{n+1}(x).(n+1)t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)nt^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x).(n-1)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - \sum_{n=-1}^{\infty} L_{n-1}(x)t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n, \tag{2.48}$$

puis égaliser les coefficients de t^n des deux cotés de l'équation ci-dessus donne :

$$(n+1)L_{n+1}(x) - 2nL_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x) = L_n(x) - L_{n-1}(x) - xL_n(x) \qquad (n \geq 1),$$

se qui se réduit à :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

ii) Montrons que : $xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$.

Si nous dérivons la fonction génératrice définie par l'expression (2.19)*, par rapport à la variable x on obtient :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^n = -\frac{t}{(1-t)^2}.\exp(\frac{-xt}{(1-t)}) \tag{2.49}$$

$$= -\frac{t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n,$$

On multiplie l'équation précédente par $(1-t)$ *on obtient :*

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^n = -t\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^{n+1},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}'(x)t^n = -\sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x)t^n,$$

D'après (2.1.3) on a :

$$L_0(x) = 1,$$

Donc on peut déduit que :

$$L_0'(x) = 0,$$

et alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}[L_n'(x) - L_{n-1}'(x)]t^n = \sum_{n=1}^{\infty} -L_{n-1}(x)t^n,$$

donc

$$L_n'(x) - L_{n-1}'(x) = -L_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1), \tag{2.50}$$

et Si nous dérivons la relation (2.50), par rapport à la variable x *on obtient :*

$$(n+1)L_{n+1}'(x) = (2n+1-x)L_n'(x) - L_n(x) - nL_{n-1}'(x). \tag{2.51}$$

Par dérivation de la relation (i) et le changement d'indice n *en* $n+1$ *on obtient :*

$$L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x). \tag{2.52}$$

De (2.50) on a :

$$L_{n-1}'(x) = L_n'(x) + L_{n-1}(x). \tag{2.53}$$

Remplaçons (2.52) et (2.53) dans (2.51) on trouve :

$$(n+1)[L_n'(x) - L_n(x)] = (2n+1-x)L_n'(x) - L_n(x) - n[L_n'(x) + L_{n-1}(x)], \tag{2.54}$$

i.e

$$-nL_n(x) = -xL_n'(x) - nL_{n-1}(x), \tag{2.55}$$

alors

$$xL_n'(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x). \tag{2.56}$$

iii) Montrons que : $L'_n(x) = -\sum\limits_{r=0}^{n-1} L_r(x).$

En utilisant l'expression de la fonction génératrice (2.19) *et en dérivant par rapport à la variable* x *on obtient :*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^n &= \frac{1}{1-t}.\exp(\frac{-xt}{1-t}).\frac{-t}{1-t}, \\
&= \frac{-t}{1-t}\sum_{r=0}^{\infty} L_r(x)t^r, \\
&= -t\sum_{s=0}^{\infty} t^s \sum_{r=0}^{\infty} L_r(x)t^r, \\
&= -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} L_n(x)t^{r+s+1}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Il est clair que les coefficients de t^n *sur le côté gauche de (2.57)* $L'_n(x)$*, on obtient maintenant les coefficients de* t^n *sur le côté droit.*
On pose $s+r+1 = n \Rightarrow s = n-r-1$*, par conséquent pour une valeur fixe de* r *le coefficient de* t^n *sur le côté droit est* $-L_n(x)$*, mais* $s \geq 0 \Rightarrow n-r-1 \geq 0 \Rightarrow r \leq n-1$ *qui donne toute les valeurs de* r *pour lesquelles* $-L'_n(x)$ *est le coefficient de* t^n*. D'où les coefficients de* t^n *sur le côté droit (2.57) sont donnés par :*

$$-\sum_{r=0}^{n-1} L_r(x). \tag{2.58}$$

Ainsi en égalisant les coefficients de t^n *des deux côté de (2.57), nous obtenons :*

$$L'_n(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_r(x). \tag{2.59}$$

2.2 Polynôme de Laguerre associés

L'équation de *Laguerre* associée est :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (k+1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0. \tag{2.60}$$

Théorème 2.2.1

Si z est une solution de L'équation de Laguerre d'ordre $n+k$ alors $\frac{d^kz}{dx^k}$ satisfait l'équation de Laguerre associée.

Preuve 2.2.1

Puisque z est une solution de L'équation de Laguerre (2.1) d'ordre $n+k$, nous avons :

$$x\frac{d^2z}{dx^2} + (1-x)\frac{dz}{dx} + (n+k)z = 0. \tag{2.61}$$

Dérivons cette équation k fois et en utilisant la règle de Leibniz pour la k^{ieme} dérivation d'un produit, on a :

$$x\frac{d^{k+2}z}{dx^{k+2}} + k\frac{d^{k+1}z}{dx^{k+1}} + (1-x)\frac{d^{k+1}z}{dx^{k+1}} + k.(-1).\frac{d^kz}{dx^k} + (n+k)\frac{d^kz}{dx^k} = 0. \tag{2.62}$$

Donc

$$x\frac{d^2}{dx^2}\frac{d^kz}{dx^k} + (k+1-x)\frac{d}{dx}\frac{d^kz}{dx^k} + n\frac{d^kz}{dx^k} = 0. \tag{2.63}$$

Ce qui indique simplement que $\frac{d^kz}{dx^k}$ satisfait L'équation (2.60).

D'après le théorème précédent et le fait que les polynômes de Laguerre $L_n(x)$ satisfont L'équation de Laguerre, il s'ensuit que $\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x)$ satisfait L'équation des polynômes de Laguerre associés.

Nous définissons les polynômes de Laguerre associés par cette solution avec le facteur constant $(-1)^k$:

$$L_n^k(x) = (-1)^k\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x) \tag{2.64}$$

Théorème 2.2.2

$$L_n^k(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{(n+k)!}{(n+k-r)!(r!)^2}x^r. \tag{2.65}$$

Preuve 2.2.2

D'après la relation (2.18) on a :

$$L_{n+k}(x) = \sum_{r=0}^{n+k}\frac{(-1)^r(n+k)!}{(r!)^2(n+k-r)!}x^r. \tag{2.66}$$

de sorte que, par l'équation (2.64),

$$\begin{aligned} L_n^k(x) &= (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \sum_{r=0}^{n+k} \frac{(-1)^r (n+k)!}{(r!)^2 (n+k-r)!} x^r \\ &= (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \sum_{r=k}^{n+k} \frac{(-1)^r (n+k)!}{(r!)^2 (n+k-r)!} x^r \end{aligned} \tag{2.67}$$

puisque la dérivée$(\frac{d^k}{dx^k})$ *appliquée pour des puissances de* x *inférieures à* k *donne zéro :*

$$\begin{aligned} L_n^k(x) &= (-1)^k \sum_{r=k}^{n+k} \frac{(-1)^r (n+k)!}{(r!)^2 (n+k-r)!} \frac{r!}{(r-k)!} x^{r-k} \quad , \ (\frac{d^k}{dx^k} x^r = \frac{r!}{(r-k)!} x^{r-k}) \\ &= (-1)^k \sum_{s=0}^{n} (-1)^{k+s} \frac{(n+k)!}{(n+k-k-s)!(k+s)!s!} x^s \qquad (s = r-k). \\ &= \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \frac{(n+k)!}{(n-s)!(k+s)!s!} x^s. \end{aligned} \tag{2.68}$$

d'où le résultat.

2.2.1 La fonction génératrice

Théorème 2.2.3
Il est commode de représenter la suite des $L_n^k(x)$ *au moyen de la série :*

$$\omega(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) t^n. \tag{2.69}$$

où

$$\omega(x,t) = \frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{(1-t)^{k+1}}. \tag{2.70}$$

Preuve 2.2.3
on a

$$\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \tag{2.71}$$

en dérivant des deux côtés k *fois par rapport à* x, *on aura :*

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} \right) = \frac{d^k}{dx^k} \left(\sum_{n=k}^{\infty} L_n(x) t^n \right), \tag{2.72}$$

puisque $L_n(x)$ est un polynôme de degré n donc, si $n < k$, on a $\frac{d^k}{dx^k}L_n(x) = 0$, et par suite :

$$(\frac{-t}{1-t})^k \frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+k}(x)t^{n+k} \tag{2.73}$$

d'après l'équation (2.64) on a :

$$\frac{(-1)^k t^k}{(1-t)^k}\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k L_n^k(x)t^{n+k} \tag{2.74}$$

alors :

$$\frac{\exp(\frac{-xt}{1-t})}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x)t^n \tag{2.75}$$

2.2.2 Relation d'orthogonalité des polynômes de Laguerre associés

Théorème 2.2.4
Soient L_n^k, L_m^k deux polynômes de Laguerre associés de degré n, m respectivement

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^k L_n^k(x)L_m^k(x)dx = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{nm}$$

Théorème 2.2.5 *(**Formule de Rodrigues**) Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut définir les polynômes de Laguerre associés*

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+k})$$

2.2.3 Relations de récurrence.

Théorème 2.2.6

01) $L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1} = L_n^k(x)$.

02) $(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x)$.

03) $xL_n^{k'}(x) = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x)$.

04) $L_n^{k'}(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x)$.

05) $L_n^{k'}(x) = -L_{n-1}^{k+1}(x)$.

06) $L_n^{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} L_r^k(x)$.

<u>Preuve</u> 2.2.4

1) Montrons que : $L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1} = L_n^k(x)$.

En utilisant le théorème (2.2.2) on trouve :

$$\begin{aligned}
L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1}(x) &= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n-1+k)!}{(n-1-r)!(k+r)!r!}x^r + \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r)!(k-1+r)!r!}x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r-1)!(k+r)!r!}x^r + \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r)!(k-1+r)!r!}x^r \\
&+ (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(n-n)!(k-1+n)!n!}x^n \\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r-1)!(k+r-1)!r!}(\frac{1}{(k+r)} + \frac{1}{(n-r)})x^r + (-1)^n \frac{1}{n!}x^n \\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r-1)!(k+r-1)!r!}.\frac{(n-r)+(k+r)}{(k+r)(n-r)}x^r + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!}x^r + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!}x^r \\
&= L_n^k(x).
\end{aligned}$$

2) Montrons que : $(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x)$.

Différencier k fois le résultat du théorème (2.1.5) (i), avec n remplacé par $n+k$, et on obtient :

$$(n+k+1)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k+1}(x) = (2n+2k+1)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x) - \frac{d^k}{dx^k}(xL_{n+k}(x)) - (n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k-1}(x) \quad (2.76)$$

Et donc en utilisant le théorème de Leibniz pour la k^{ieme} dérivée du produit

$$(n+k+1)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+1+k}(x) = (2n+2k+1)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x) - x\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x) - k\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}L_{n+k}(x) - (n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n-1+k}(x). \quad (2.77)$$

En utilisant la relation (2.64) *que nous avons maintenant :*

$$(n+1+k)(-1)^k L_{n+1}^k(x) = (2n+2k+1)(-1)^k L_n^k(x) - x(-1)^k L_n^k(x) - k(-1)^{k-1}L_{n+1}^{k-1}(x) - (n+k)(-1)^k L_{n-1}^k(x), \quad (2.78)$$

compte tenu de la partie " 1)" ci-dessus et si on remplace n par $n+1$, on obtient :

$$(n+1+k)L_{n+1}^k(x) = (2n+2k+1)L_n^k(x) - xL_n^k(x) + k(L_{n+1}^k(x) - L_n^k(x)) - (n+k)L_{n-1}^k(x), \quad (2.79)$$

ce qui donne :

$$(n+1)L_{n+1}^{k}(x) = (2n+k+1-x)L_{n}^{k}(x) - (n+k)L_{n-1}^{k}(x). \tag{2.80}$$

3) Montrons que : $xL_n^{k'}(x) = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x)$.

Si nous Dérivons k fois par rapport à x le résultat du théorème (2.1.5) partie (ii), avec n remplacé par $n+k$*, nous obtenons :*

$$\frac{d^k}{dx^k}(xL'_{n-k}(x)) = (n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x) - (n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k-1}(x) \tag{2.81}$$

en utilisant le théorème de Leibniz pour la k^{ieme} *dérivée d'un produit, la relation devient :*

$$x\frac{d^k}{dx^k}L'_{n-k}(x) + k\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x) = (n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x) - (n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k-1}(x). \tag{2.82}$$

Ensuite, d'après l'équation (2.64)*, nous avons :*

$$xL_n^{k'}(x) + kL_n^k(x) = (n+k)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x) \tag{2.83}$$

et donc

$$xL_n^{k'}(x) = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x). \tag{2.84}$$

4) Montrons que : $L_n^{k'}(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x)$.

Si nous Dérivons k fois par rapport à x le résultat du théorème (2.1.5) partie (iii), avec n remplacé par $n+k$*, nous obtenons :*

$$\frac{d^k}{dx^k}L'_{n+k}(x) = \sum_{r=0}^{n+k-1}\frac{d^k}{dx^k}L_r(x), \tag{2.85}$$

donc

$$(-1)^k L_n^{k'}(x) = -\sum_{r=k}^{n+k-1}\frac{d^k}{dx^k}L_r(x) \tag{2.86}$$

puisque pour $r < k$*,* $L_r(x)$ *est un polynôme de degré inférieur à k et donc la dérivation k fois de* $L_r(x)$ *donne zéro.*

$$\begin{aligned}
(-1)^k L_n^{k'}(x) &= -\sum_{s=0}^{n-1}\frac{d^k}{dx^k}L_{s+k}(x) \qquad (s=r-k)\\
(-1)^k L_n^{k'}(x) &= -\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^k L_s^k(x) \qquad (2.87)\\
L_n^{k'}(x) &= -\sum_{r=0}^{n-1}L_r^k(x).
\end{aligned}$$

5) Montrons que : $L_n^{k'}(x) = -L_{n-1}^{k+1}(x)$.

On a

$$L_n^k = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!}x^r, \tag{2.88}$$

alors :

$$\begin{aligned} L_n^{k'}(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!}x^r \\ &= \sum_{r=1}^{n}(-1)^r \frac{r(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!}x^{r-1} \end{aligned} \tag{2.89}$$

par le changement de varaible $(s = r-1)$ *on trouve :*

$$\begin{aligned} L_n^{k'}(x) &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^{s+1} \frac{(n+k)!}{(n-1-s)!(k+1+s)!s!}x^s \\ &= -\sum_{r=0}^{n}(-1)^s \frac{(n-1+k+1)!}{(n-1-s)!(k+1+s)!s!}x^s. \end{aligned} \tag{2.90}$$

Alors :

$$L_n^{k'}(x) = -L_{n-1}^{k+1}(x).$$

6) Montrons que : $L_n^{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} L_r^k(x)$.

De 4) et 5) on trouve :

$$-L_{n-1}^{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x).$$

Lorsque on remplace n *par* $n+1$*on trouve :*

$$L_n^{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} L_r^k(x).$$

2.3 Polynôme de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev sont aussi des suites des polynômes orthogonaux qui ont été nommés ainsi en l'honneur du matématicien russe "**Pafnuti Lvovitch Chebyshev**".

Définition 2.3.1
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme de Tchebychev du première espèce noté $T_n(x)$, et du deuxième espèce noté $U_n(x)$ par :

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x), \tag{2.91}$$

et

$$U_n(x) = \sin(n \cos^{-1} x). \tag{2.92}$$

Théorème 2.3.1

(i) $T_n(x) = \frac{1}{2}[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n]$.
(ii) $U_n(x) = -\frac{1}{2}i[(x + i\sqrt{1-x^2})^n - (x - i\sqrt{1-x^2})^n]$.

Preuve 2.3.1
(i) Montrons que : $T_n(x) = \frac{1}{2}[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n]$.
On pose $x = \cos\theta$ *et on obtient :*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n\cos^{-1}\cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}[e^{in\theta} + e^{-in\theta}] \\ &= \frac{1}{2}[(e^{i\theta})^n + (e^{-i\theta})^n] \\ &= \frac{1}{2}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n)] \\ &= \frac{1}{2}[(\cos\theta + i\sqrt{(1-\cos^2\theta)})^n + (\cos\theta - i\sqrt{(1-\cos^2\theta)})^n] \\ &= \frac{1}{2}[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n]. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Et de la même manière nous prouvons (ii).

<u>Théorème</u> 2.3.2

(1) $T_n(x) = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^r \frac{n!}{(2r)!(n-2r)!} (1-x^2)^r x^{n-2r}.$

(2) $U_n(x) = \sum_{r=0}^{\frac{(n-1)}{2}} (-1)^r \frac{n!}{(2r+1)!(n-2r-1)!} (1-x^2)^{r+\frac{1}{2}} x^{n-2r-1}.$

<u>Preuve</u> 2.3.2

(1) Montrons que : $T_n(x) = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^r \frac{n!}{(2r)!(n-2r)!} (1-x^2)^r x^{n-2r}.$

D'après le théorème (2.3.1) on a :

$$T_n(x) = \frac{1}{2}[(x+i\sqrt{1-x^2})^n + (x-i\sqrt{1-x^2})^n], \tag{2.94}$$

par utilisation du théorème Binomial :

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2}[\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k}(i\sqrt{1-x^2})^k + \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k}(-i\sqrt{1-x^2})^k] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} i^k (1-x^2)^{\frac{k}{2}} (1+(-1)^k). \end{aligned} \tag{2.95}$$

Si $k = 2r+1$, *alors* $(-1)^k + 1 = 0$, *et donc :*

$$T_n(x) = 0. \tag{2.96}$$

Si $k = 2r$, *alors* $(-1)^k + 1 = 2$, *donc* $r = \frac{k}{2}$, *alors si* $k = 0 \Rightarrow r = 0$ *et si* $k = n \Rightarrow r = \frac{n}{2}$ *donc*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2}[\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} C_{2r}^n x^{n-2r} (i)^{2r} (\sqrt{1-x^2})^{2r} \times 2] \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{(2r!)(n-2r)!} (-1)^r x^{n-2r} (1-x^2)^r, \end{aligned} \tag{2.97}$$

d'où le résultat.

(2) Montrons que : $U_n(x) = \sum_{r=0}^{\frac{(n-1)}{2}} (-1)^r \frac{n!}{(2r+1)!(n-2r-1)!}(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}} x^{n-2r-1}.$

D'après le théorème (2.3.1) on a :

$$U_n(x) = \frac{-i}{2}[(x+i\sqrt{1-x^2})^n - (x-i\sqrt{1-x^2})^n], \tag{2.98}$$

par utilisation du théorème Binomial :

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{-i}{2}[\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k}(i\sqrt{1-x^2})^k - \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k}(-i\sqrt{1-x^2})^k] \\ &= \frac{-i}{2}\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} i^k x^{n-k}(1-x^2)^{\frac{k}{2}}(1-(-1)^k). \end{aligned} \tag{2.99}$$

Si $k = 2r,$ *alors* $1-(-1)^k = 0,$ *Donc :*

$$U_n(x) = 0. \tag{2.100}$$

Si $k = 2r+1,$ *alors* $1-(-1)^k = 2,$ *donc* $r = \frac{k-1}{2}$, *alors si* $k = 0 \Rightarrow r = 0$ *et* $k = n,$ *alors* $r = \frac{n-1}{2}$ *donc*

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{1}{2}[\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} -(i)^2 C_{2r+1}^n x^{n-2r-1}(i)^{2r}(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}} \times 2] \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{(2r+1)!(n-2r-1)!}(-1)^r x^{n-2r-1}(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Nous pouvons utiliser le théorème (2.3.2) et les définitions (2.3.1) pour noter les premiers polynômes de Tchebychev.

2.3.1 le polynôme de Tchebychev du première espèce

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1. \\ T_1(x) &= x. \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1. \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x. \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned}$$

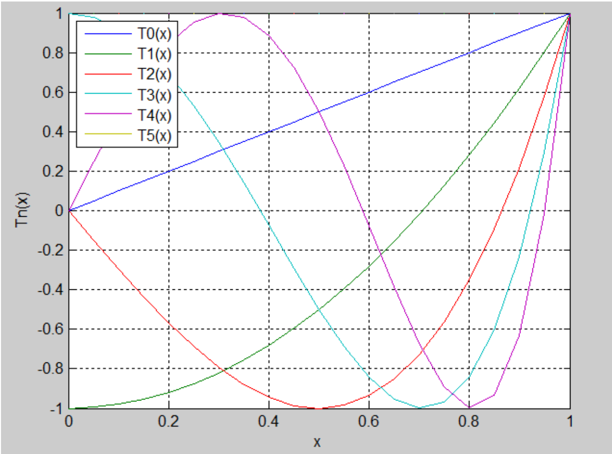

FIGURE 2.2 – Les premiers polynômes de Tchebychev du première espèce

2.3.2 le polynôme de Tchebychev du deuxième espèce

$$
\begin{array}{rcl}
U_0(x) & = & 0. \\
U_1(x) & = & \sqrt{(1-x^2)}. \\
U_2(x) & = & \sqrt{(1-x^2)}2x. \\
U_3(x) & = & \sqrt{(1-x^2)}(4x^2-1). \\
U_4(x) & = & \sqrt{(1-x^2)}(8x^3-4x). \\
U_5(x) & = & \sqrt{(1-x^2)}(16x^4-12x^2+1).
\end{array}
$$

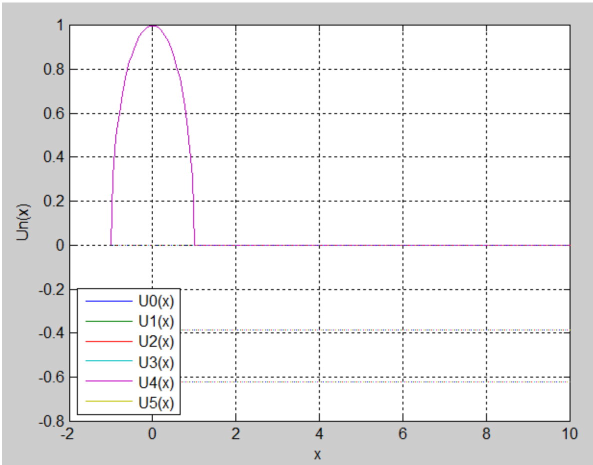

FIGURE 2.3 – Les premiers polynômes de Tchebychev du deuxième espèce

Théorème 2.3.3
$T_n(x)$ et $U_n(x)$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation de Tchebychev :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0. \tag{2.102}$$

Preuve 2.3.3
(a) D'après la relation (2.91) et par l'utilisation du $(\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}})$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}T_n(x) &= \frac{d}{dx}\cos(n\cos^{-1}x) \\ &= -\sin(n\cos^{-1}x).n.\frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{(1-x^2)}}\sin(n\cos^{-1}x). \end{aligned} \tag{2.103}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}T_n(x) &= \frac{d}{dx}(\frac{n}{\sqrt{(1-x^2)}}\sin(n\cos^{-1}x)) \\ &= \frac{nx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(n\cos^{-1}x) + \frac{n}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cos(n\cos^{-1}x).\frac{-n}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{nx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(n\cos^{-1}x) - \frac{n^2}{(1-x^2)}\cos(n\cos^{-1}x). \end{aligned} \tag{2.104}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (1-x^2)\frac{d^2T_n(x)}{dx^2} - x\frac{dT_n(x)}{dx} + n^2T_n(x) &= \frac{nx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\sin(n\cos^{-1}x) - n^2\cos(n\cos^{-1}x) - \frac{nx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\sin(n\cos^{-1}x) \\ &+ n^2\cos(n\cos^{-1}x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat reécherché.

(b) D'après la relation (2.92) et par l'utilisation du ($\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$), on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}U_n(x) &= \frac{d}{dx}\sin(n\cos^{-1}x) \\ &= \cos(n\cos^{-1}x).n.\frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}} \\ &= \frac{-n}{\sqrt{(1-x^2)}}\cos(n\cos^{-1}x). \end{aligned} \tag{2.105}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}U_n(x) &= \frac{d}{dx}(\frac{-n}{\sqrt{(1-x^2)}}\cos(n\cos^{-1}x)) \\ &= \frac{-nx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cos(n\cos^{-1}x) + \frac{-n}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}.(-\sin(n\cos^{-1}x)).\frac{-n}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-nx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cos(n\cos^{-1}x) - \frac{-n^2}{(1-x^2)}\sin(n\cos^{-1}x). \end{aligned} \tag{2.106}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (1-x^2)\frac{d^2U_n(x)}{dx^2} - x\frac{dU_n(x)}{dx} + n^2U_n(x) &= \frac{-nx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cos(n\cos^{-1}x) - \frac{-n^2}{(1-x^2)}\sin(n\cos^{-1}x) \\ &+ \frac{nx^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cos(n\cos^{-1}x) + \frac{n^2x^2}{(1-x^2)}\sin(n\cos^{-1}x) \\ &+ \frac{nx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cos(n\cos^{-1}x) + n^2\sin(n\cos^{-1}x) \\ &= \frac{-nx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cos(n\cos^{-1}x) - n^2\sin(n\cos^{-1}x) + \frac{nx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cos(n\cos^{-1}x) \\ &+ n^2\sin(n\cos^{-1}x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat cherché.

Le fait que $T_n(x)$ et $U_n(x)$ soient des solutions indépendantes découle de l'obsevation que $T_n(1) = 1$ tandis que $U_n(1) = 0$ donc $U_n(x)$ ne peut pas être un multiple constant de $T_n(x)$.

2.3.3 La fonction génératrice

Théorème 2.3.4

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)t^n. \tag{2.107}$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(x)t^n. \tag{2.108}$$

Preuve 2.3.4

a) Écrivons $x = \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$*, pour que nous ayons :*

$$\begin{aligned} \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} &= \frac{1-t^2}{1-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})t+t^2} \\ &= \frac{1-t^2}{(1-e^{i\theta}t)(1-e^{-i\theta}t)} \\ &= (1-t^2)\sum_{r=0}^{\infty}(e^{i\theta}t)^r \sum_{s=0}^{\infty}(e^{-i\theta}t)^s \\ &= (1-t^2)\sum_{r,s=0}^{\infty} e^{i(r-s)\theta}t^{r+s} \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} e^{i(r-s)\theta}t^{r+s} - \sum_{r,s=0}^{\infty} e^{i(r-s)\theta}t^{r+s+2}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Nous souhaitons déterminer le coefficient de t^n *dans cette sommation et montrer que c'est* $T_0(x)$ *lorsque* $n = 0$ *et* $2T_n(x)$ *autrement.*
Nous considérons les cas : $n = 0$ *et* $n = 1$ *sépaérément, puisque pour ces valeurs de* n *nous obtenons* t^n *de la première sommation seulement, tandis que pour* $n \geq 2$ *nous obtenons* t^n *des deux sommations.*
$n = 0$ *est obtenu uniquement en prenant* $r = 0$ *et* $s = 0$ *de sorte que le coefficient de* t^0 *est :*

$$e^{i(0-0)\theta} = 1 = T_0(x) \tag{2.110}$$

$n = 1$ *est obtenu en prenant soit* $r = 1$ *et* $s = 0$ *ou* $r = 0$ *et* $s = 1$ *de sorte que le coefficient de* t^1 *est :*

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta = 2T_1(x), \tag{2.111}$$

(on sait que $T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$*.)*
Pour $n \geq 2$ *nous obtenons le coiffcient de* t^n *en prenant* $r + s = n$ *(i.e,* $s = n - r$*) dans la première sommation et* $r+s+2 = n$ *(i.e,* $s = n-r-2$*) dans la deuxième sommation.Le coefficient de* t^n *est pour cela :*

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n} e^{i(r-(n-r))\theta} - \sum_{r=0}^{n-2} e^{i(r-(n-r-2))\theta} &= e^{-in\theta}\sum_{r=0}^{n} e^{i2r\theta} - e^{-i(n-2)\theta}\sum_{r=0}^{n-2} e^{i2r\theta} \\ &= e^{-in\theta}.\frac{1-(e^{i2\theta})^{n+1}}{1-e^{i2\theta}} - e^{-i(n-2)\theta}.\frac{1-(e^{i2\theta})^{n-1}}{1-e^{i2\theta}}. \end{aligned} \tag{2.112}$$

(sommant à $n + 1$ *et* $n - 1$ *termes, respectivement, les deux séries géométriques qui ont toutes deux le rapport commun* $\exp(i2\theta)$*).*

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-in\theta} - e^{i(n+2)\theta}}{1 - e^{i2\theta}} - \frac{e^{-i(n-2)\theta} - e^{in\theta}}{1 - e^{i2\theta}} \\
&= \frac{e^{-in\theta}(1 - e^{i2\theta})}{1 - e^{i2\theta}} + \frac{e^{in\theta}(1 - e^{i2\theta})}{1 - e^{i2\theta}} \\
&= \exp(in\theta) + \exp(-in\theta) \\
&= 2\cos n\theta \\
&= 2T_n(x).
\end{aligned}
\tag{2.113}
$$

ce qui prouve :

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n. \tag{2.114}$$

b) Écrivons $x = \cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$,
d'où
$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta$. *avec* $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.
pour que nous ayons :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2tx+t^2} &= \frac{\sin\theta}{1-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})t+t^2} \\
&= \frac{\sin\theta}{(1-e^{i\theta}t)(1-e^{-i\theta}t)} \\
&= \sin\theta \sum_{r=0}^{\infty}(e^{i\theta}t)^r \sum_{s=0}^{\infty}(e^{-i\theta}t)^s \qquad (2.115) \\
&= \frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}) \sum_{r,s=0}^{\infty} e^{i(r-s)\theta}t^{r+s} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{r,s=0}^{\infty}(e^{i(r-s+1)\theta}-e^{i(r-s-1)\theta})t^{r+s}.
\end{aligned}$$

on pose $r+s=n \Rightarrow s=n-r$, *alors*

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2tx+t^2} = \frac{1}{2i}\sum_{r=0}^{n}(e^{i(2r-n+1)\theta}-e^{i(2r-n-1)\theta})t^n.$$

Nous souhaitons déterminer le coefficient de t^n *dans cette sommation, et par un calcul simple on a :*

$$\frac{1}{2i}\sum_{r=0}^{n}e^{i(2r-n+1)\theta} - \frac{1}{2i}\sum_{r=0}^{n}e^{i(r-s-1)\theta} = \frac{e^{i\theta(-n+1)}}{2i}\sum_{r=0}^{n}(e^{i2\theta})^r - \frac{e^{i\theta(-n-1)}}{2i}\sum_{r=0}^{n}(e^{i2\theta})^r.$$

(sommant à $n+1$ *termes, respectivement, les deux séries géométriques qui ont toutes deux le rapport commun* $\exp(i2\theta)$*).*

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta(-n+1)}}{2i}\sum_{r=0}^{n}(e^{i2\theta})^r-\frac{e^{i\theta(-n-1)}}{2i}\sum_{r=0}^{n}(e^{i2\theta})^r &= \frac{e^{i(-n+1)\theta}}{2i}.\frac{1-(e^{i2\theta})^{n+1}}{1-e^{i2\theta}}-\frac{e^{i(-n-1)\theta}}{2i}.\frac{1-(e^{i2\theta})^{n+1}}{1-e^{i2\theta}}\\
&= \frac{1}{2i}[\frac{e^{i(-n+1)\theta}-e^{i(n+3)\theta}-e^{i(-n-1)\theta}+e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i2\theta}}]\\
&= \frac{1}{2i}[\frac{e^{i(n+1)\theta}(1-e^{i2\theta})-e^{i(-n-1)\theta}(1-e^{i2\theta})}{1-e^{i2\theta}}]\\
&= \frac{e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta}}{2i}\\
&= \sin(n+1)\theta\\
&= U_{n+1}(\cos\theta)\\
&= U_{n+1}(x).
\end{aligned} \tag{2.116}$$

ce qui prouve que :

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}(x)t^n.$$

2.3.4 Quelques Expressions explicites de polynôme de Tchebychev

Théorème 2.3.5

(i)

$$\begin{aligned}
T_n(1) &= 1.\\
T_n(-1) &= (-1)^n.\\
T_{2n}(0) &= (-1)^n.\\
T_{2n+1}(0) &= 0.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
U_n(1) &= 0.\\
U_n(-1) &= 0.\\
U_{2n}(0) &= 0.\\
U_{2n+1}(0) &= (-1)^n.
\end{aligned}$$

Preuve 2.3.5
(i)
**Posons* $x = 1$ *dans la relation* (2.91) *on obtient :*

$$T_n(1) = \cos(n\cos^{-1} 1) = \cos(n\cos^{-1} \cos 0) = \cos n.0 = \cos 0 = 1$$

.
**Posons* $x = -1$ *on obtient :*

$$T_n(-1) = \cos(n\cos^{-1} -1) = \cos(n\cos^{-1} \cos \pi) = \cos n\pi = (-1)^n$$

.
**Posons* $x = 0$ *on obtient :*

$$T_n(0) = \cos(n\cos^{-1} 0) = \cos(n\cos^{-1} \cos \frac{\pi}{2}) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & si \quad n \qquad impaire \\ (-1)^n & si \quad n \qquad paire \end{cases}$$

(ii)

**Posons* $x = 1$ *dans la relation* (2.92) *on obtient :*

$$U_n(1) = \sin(n\cos^{-1} 1) = \sin(n\cos^{-1} \cos 0) = \sin n.0 = 0$$

.
**Posons* $x = -1$ *on obtient :*

$$U_n(-1) = \sin(n\cos^{-1} -1) = \sin(n\cos^{-1} \cos \pi) = \sin n\pi = 0$$

.
**Posons* $x = 0$ *on obtient :*

$$U_n(0) = \sin(n\cos^{-1} 0) = \sin(n\cos^{-1} \cos \frac{\pi}{2}) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & si \quad n \qquad paire \\ (-1)^n & si \quad n \qquad impaire \end{cases}$$

2.3.5 Orthogonalités de polynômes de Tchebychev

Théorème 2.3.6

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & n = m \neq 0 \\ \pi & n = m = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & n = m \neq 0 \\ 0 & n = m = 0. \end{cases}$$

Preuve 2.3.6

On va démontrer (1)

On pose $x = \cos\theta$ *alors* $dx = -\sin\theta d\theta$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_{\pi}^{0} \frac{T_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-\sin\theta d\theta) \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}[(\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta)d\theta]. \end{aligned} \tag{2.117}$$

Si $n \neq m$ *alors*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}[(\cos(n+m)\theta + \cos(n+m)\theta)d\theta] \\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{n+m}\sin(n+m)\theta + \frac{1}{n-m}\sin(n-m)\theta]_0^{\pi} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Si $n = m \neq 0$ alors

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}[1+\cos 2n\theta]d\theta \\
&= \frac{1}{2}[\theta + \tfrac{1}{2n}\sin 2n\theta]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned} \tag{2.119}$$

si $n = m = 0$ alors

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_0(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi} 1 d\theta = \pi. \tag{2.120}$$

D'où le résultat.

On va démontrer (2) :

On pose $x = \cos\theta$ alors $dx = -\sin\theta d\theta$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_{\pi}^{0} \frac{U_m(\cos\theta)U_n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-\sin\theta d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -\frac{1}{2}(\cos(n+m)\theta - \cos(n-m)\theta)d\theta.
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Si $n \neq m$ alors

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_0^{\pi} -\frac{1}{2}(\cos(n+m)\theta - \cos(n+m)\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}[\frac{1}{n+m}\sin(n+m)\theta - \frac{1}{n-m}\sin(n-m)\theta]_0^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Si $n = m \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_0^{\pi} \sin^2 n\theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -\frac{1}{2}(\cos(2n)\theta - 1) \\
&= -\frac{1}{2}[-\frac{1}{2n}\sin 2n\theta - \theta]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Si $n = m = 0$ alors :

$$\int_{-1}^{1} \frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi} 0 d\theta = 0. \tag{2.124}$$

D'où le résultat.

2.3.6 Relation de récurrences

Théorème 2.3.7

1) $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0.$

2) $(1-x^2)T'_n(x) = -nxT_n(x) + nT_n(x).$

3) $U_{n+1}(x) - 2xU_n + U_{n-1} = 0.$

4) $(1-x^2)U'_n(x) = -nxU_n(x) + nU_n(x).$

Preuve 2.3.7
1) Montrons que : $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$.
On pose $x = \cos\theta$

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(\cos\theta) &= \cos(n+1)\theta \\
&= \cos(n\theta + \theta) \\
&= \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta \\
&= [2\cos n\theta\cos\theta - \cos n\theta\cos\theta] - \sin n\theta\sin\theta \\
&= 2\cos\theta\cos n\theta - [\cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta] \\
&= 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta \\
&= 2\cos\theta T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta),
\end{aligned} \tag{2.125}$$

alors

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{2.126}$$

2) Montrons que : $(1-x^2)T'_n(x) = -nxT_n - nT_{n-1}$.

On pose $x = \cos\theta$, *on a* $T'_n(x) = \dfrac{n\sin(n\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$,*et donc*

$$(1-x^2)T'_n(x) = (1-x^2)\frac{n\sin(n\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.127}$$

alors

$$\begin{aligned}(1-\cos^2\theta)T'_n(x) &= (1-\cos^2\theta)\frac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta}\\ &= n\sin\theta\sin n\theta\\ &= -\frac{n}{2}[\cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta]\\ &= -\frac{n}{2}[T_{n+1}(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta)]\\ &= -\frac{n}{2}[2xT_n(\cos\theta) - 2T_{n-1}(\cos\theta)]\\ &= -nxT_n(\cos\theta) - nT_{n-1}(\cos\theta)].\end{aligned} \tag{2.128}$$

alors

$$(1-x^2)T'_n(x) = -nxT_n(x) - nT_{n-1}(x).$$

3) Montrons que $U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$.

On pose $x = \cos\theta$

$$\begin{aligned}U_{n+1}(\cos\theta) &= \sin(n+1)\theta\\ &= \sin(n\theta+\theta)\\ &= \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\\ &= 2\sin n\theta\cos\theta - [\sin n\theta\cos\theta - \cos n\theta\sin]\\ &= 2\sin n\theta\cos\theta - \sin(n-1)\theta\\ &= 2\cos\theta U_n(\cos\theta) - U_{n-1}(\cos\theta),\end{aligned} \tag{2.129}$$

alors

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0. \tag{2.130}$$

4) Montrons que : $(1-x^2)U'_n(x) = -nxU_n - nU_{n-1}$.

On sait que

$$(1-x^2)U'_n(x) = (1-x^2)n\frac{d\cos^{-1}x}{dx}\cos(n\cos^{-1}x), \tag{2.131}$$

et que

$$\frac{d\cos^{-1}x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.132}$$

alors

$$(1-x^2)U_n'(x) = (1-x^2)\frac{-n}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n\cos^{-1}x),$$

On pose $x = \cos\theta$,*alors on a* $U_n(x) = \sin n\theta$ *et donc :*

$$\begin{aligned}
(1-x^2)U_n'(\cos\theta) &= (1-\cos^2\theta)\frac{-n}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\cos(n\theta) \\
&= \frac{-n\sin\theta}{\sin^2\theta}\cos(n\theta) \\
&= n\sin\cos n\theta \\
&= \frac{n}{2}[\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta] \qquad (2.133) \\
&= \frac{n}{2}[U_{n+1}(\cos\theta) - U_{n-1}(\cos\theta)] \\
&= \frac{-n}{2}[2xU_n(\cos\theta) - 2U_{n-1}(\cos\theta)] \\
&= -nxU_n(\cos\theta) + nU_{n-1}(\cos\theta).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(1-x^2)U_n'(x) = -nxU_n - nU_{n-1}. \qquad (2.134)$$

2.3.7 Propriétés

1) $\sqrt{1-x^2}T_n(x) = U_{n+1}(x) - xU_n(x)$.

2) $\sqrt{1-x^2}U_n(x) = xT_{n+1}(x) - T_{n+1}(x)$.

3) $T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x) = 2T_m(x)T_n(x)$.

4) $T_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}U_n(x)$.

5) $2\{T_n(x)\}^2 = 1 + T_{2n}(x)$.

6) $\{T_n(x)\}^2 - T_{n+1}(x)T_{n-1} = 1 - x^2$.

7) $T_m\{T_n(x)\} = T_{mn}(x)$.

<u>Preuve</u> 2.3.8

On pose $x = \cos\theta$

1) Montrons que : $\sqrt{1-x^2}T_n(x) = U_{n+1}(x) - xU_n(x)$.

$$\begin{aligned}(\sqrt{1-\cos^2\theta})T_n(\cos\theta) &= \sin\theta\cos n\theta \\ &= \sin(n+1)\theta - \cos\theta\sin n\theta \\ &= U_{n+1}(\cos\theta) - \cos\theta U_n(\cos\theta),\end{aligned} \tag{2.135}$$

alors

$$\sqrt{1-x^2}T_n(x) = U_{n+1}(x) - xU_n(x). \tag{2.136}$$

2) Montrons que : $\sqrt{1-x^2}U_n(x) = xT_{n+1}(x) - T_{n+1}(x)$.

$$\begin{aligned}(\sqrt{1-\cos^2\theta})U_n(\cos\theta) &= \sin\theta\sin n\theta \\ &= \cos\theta\cos n\theta - \cos(n+1)\theta \\ &= \cos\theta T_n(\cos\theta) - T_{n+1}(\cos\theta),\end{aligned} \tag{2.137}$$

alors

$$\sqrt{1-x^2}U_n(x) = xT_{n+1}(x) - T_{n+1}(x). \tag{2.138}$$

3) Montrons que : $T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x) = 2T_m(x)T_n(x)$.
on a

$$\begin{aligned}T_{m+n}(\cos\theta) &= \cos(m+n)\theta, \\ T_{m-n}(\cos\theta) &= \cos(m-n)\theta.\end{aligned} \tag{2.139}$$

et donc

$$\begin{aligned}T_{m+n}(\cos\theta) + T_{m-n}(\cos\theta) &= \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta \\ &= 2\cos m\theta\cos n\theta \\ &= 2T_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta).\end{aligned} \tag{2.140}$$

Alors

$$T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x) = 2T_m(x)T_n(x). \tag{2.141}$$

4) Montrons que : $T'_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{1-x^2}}U_n(x)$.

$$T'_n(x) = -n\frac{d\cos^{-1}x}{dx}\sin(n\cos^{-1}x), \tag{2.142}$$

On sait que

$$\frac{d\cos^{-1}x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.143}$$

Alors

$$T'_n(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\cos^{-1}x), \tag{2.144}$$

donc

$$T'_n(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} U_n(x). \tag{2.145}$$

5) Montrons que : $2\{T_n(x)\}^2 = 1 + T_{2n}(x)$.

$$\begin{aligned} 2\left[T_n(\cos\theta)\right]^2 &= 2\cos^2 n\theta \\ &= 2[\frac{1}{2}(1+\cos 2n\theta)] \\ &= 1+\cos 2n\theta \\ &= 1+T_{2n}(\cos\theta). \end{aligned} \tag{2.146}$$

Alors

$$2\{T_n(x)\}^2 = 1 + T_{2n}(x). \tag{2.147}$$

6) Montrons que : $[T_n(x)]^2 - T_{n+1}(x)T_{n-1}(x) = 1 - x^2$.

$$\begin{aligned} \left[T_n(\cos\theta)\right]^2 - T_{n+1}(\cos\theta)T_{n-1}(\cos\theta) &= \cos^2 n\theta - \cos(n+1)\theta\cos(n-1)\theta \\ &= \frac{1}{2}(1+\cos 2n\theta) - \frac{1}{2}(\cos 2n\theta + \cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \\ &= \sin^2\theta \\ &= 1-\cos^2\theta. \end{aligned} \tag{2.148}$$

Alors

$$[T_n(x)]^2 - T_{n+1}(x)T_{n-1}(x) = 1 - x^2. \tag{2.149}$$

7) Montrons que : $T_m\{T_n(x)\} = T_{mn}(x)$.

$$\begin{aligned} T_m\{T_n(\cos\theta)\} &= T_m\{\cos n\theta\} \\ &= \cos(mn\theta) \\ &= T_{mn}(\cos\theta). \end{aligned} \tag{2.150}$$

Alors

$$T_m\{T_n(x)\} = T_{mn}(x). \tag{2.151}$$

Les références essentielles pour toutes les notions utilisées dans ce chapitre sont [2] et [3].

Chapitre 3

Applications

3.1 L'équation de Schrödinger pour le potentiel coulombien

Un problème de base dans la théorie quantique de l'atome est le problème du mouvement d'un électron dans un champ de force d'attraction central. C'est en partie parce qu'une description du mouvement des électrons de l'atome s'avére trés fructueuse pour le calcul des différentes propriétés des structures atomiques.

Pour définir la fonction d'onde $\psi(x)$ d'une particule mobile dans un champ à symétrie centrale $U(r)$, on doit résourdre l'équation de *Schrodinger* stationnaire

$$\Delta\psi(x) + \frac{2M}{\hbar^2}(E - U(r))\psi(x) = 0 \ ; \tag{3.1}$$

où $\hbar$ est la constant de planck, M est la masse de la particule et $U(r)$ est l'énergie potentielle.

Pour étudier cette équation on utilise le laplacien en coordonnes sphériques (r, θ, φ) qui est de la forme :

$$\Delta\psi = \Delta_r\psi + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\psi \tag{3.2}$$

où

$$\Delta_r\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) \tag{3.3}$$

et

$$\Delta_{\theta,\varphi}\psi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{3.4}$$

On va chercher des solutions de l'équation (3.1) par séparation des variables en coordonnées sphériques en posant :

$$\psi(x) = F(r)\Phi(\theta, \varphi) \tag{3.5}$$

Nous remplaçons l'expression de $\Delta\psi$ et ψ dans l'équation (3.1) et on multiplie par $\frac{1}{F\Phi}$, on obtient :

$$\frac{1}{F\Phi}\left[\frac{\Phi}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dF}{dr})+\frac{1}{r^2}F\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{2M}{\hbar^2}(E-U(r))F\Phi\right]=0\ , \tag{3.6}$$

donc

$$\frac{1}{r^2F}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dF}{dr})+\frac{1}{r^2\Phi}\Delta_{\theta,\varphi}\Phi+\frac{2M}{\hbar^2}(E-U(r))=0\ \ , \tag{3.7}$$

i.e.

$$\frac{1}{F}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dF}{dr})+\frac{2Mr^2}{\hbar^2}(E-U(r))=-\frac{1}{\Phi}\Delta_{\theta,\varphi}\Phi=\lambda\ . \tag{3.8}$$

Il faut remarquer que λ est une constante car le première membre de l'égalité est indépendant de θ et φ et le second membre est aussi indépendant de r. On obtient alors les équations suivantes pour Φ et $F(r)$:

$$-\Delta_{\theta,\varphi}\Phi=\lambda\Phi\ \ , \tag{3.9}$$

et

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dF}{dr})+\left[\frac{2M}{\hbar^2}(E-U(r))-\frac{\lambda}{r^2}\right]F=0\ . \tag{3.10}$$

On sait que l'équation (3.9) admet des solutions bornées et univoque sur la sphère unité (i.e. $0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$) que si $\lambda=l(l+1)$ avec l entier naturel , $\Phi(\theta,\varphi)=\Upsilon_l^m(\theta,\varphi)$, qui sont appelées les harmoniques sphériques, données par :

$$\Upsilon_l^m(\theta,\varphi)=(-1)^m\left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}e^{im\varphi}P_l^m(\cos\theta),\quad 0\leq l<\infty,\quad -l\leq m\leq l\ , \tag{3.11}$$

où les P_l^m sont les fonctions de *Legendre* associées d'ordre m.

Alors l'équation (3.10) devient :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dF(r)}{dr})+\left[\frac{2M}{h^2}(E-U(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]F(r)=0 \tag{3.12}$$

Puisque

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dF}{dr})=\frac{1}{r}\frac{d^2\,(r\ F)}{dr^2},$$

par le changement de variable $R(r)=rF(r)$, on peut réduire l'équation (3.12) à l'équation :

$$R''(r)+[\frac{2m}{\hbar^2}(E-U(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}]R(r)=0. \tag{3.13}$$

Pour les états du spectre discret, la fonction d'onde $\psi(r)$ doit satisfaire la condition normalisation

$$\int\mid\psi\mid^2 drd\Omega=1. \tag{3.14}$$

Puisque

$$\int \mid Y_l^m(\theta,\varphi) \mid^2 d\Omega = 1,$$

la condition de normalisation pour $R(r)$ s'écrira :

$$\int_0^\infty R^2(r)dr = 1 \tag{3.15}$$

Nous supposons que $F(r) = \frac{1}{r}R(r)$ est supposée bornée pour $r \to 0$.

Étudions l'équation Schrödinger dans le champ Coulombien i.e. : $U(r) = \frac{-ze^2}{r}$, où z est le numéro atomique et e est la charge, alors l'équation (3.1) devient :

$$\Delta\psi + \frac{2M}{h}(E + \frac{ze^2}{r})\psi = 0 \tag{3.16}$$

Puisque l'énergie potentielle $U(r)$ est négative et tend vers zéro à l'infini, il résulte de considérations physiques que les états du spectre discret n'auront lieu que pour $E < 0$.

Passant en coordonnées sphériques, nous obtenons l'équation pour la fonction $R(r)$:

$$R''(r) + [\frac{2M}{\hbar^2}(E + \frac{ze^2}{r}) - \frac{l(l+1)}{r^2}]R(r) = 0\ . \tag{3.17}$$

Il est bon de passer dans l'équation (3.17) aux variables sans dimension : en utilisant le système d'unités atomique dans lequel les unités de charge, de longueur et d'énergie sont respectivement la charge de l'électron e ($e > 0$) et les quantités

$$a_0 = \hbar^2/(Me^2), \qquad E_0 = e^2/a_0.$$

L'équation (3.17) devient alors :

$$R''(r) + [2(E + \frac{z}{r}) - \frac{l(l+1)}{r^2}]R(r) = 0 \tag{3.18}$$

Alors la solution de cette équation pour $E_{nl} = -\frac{z^2}{2(n+l+1)^2}$, $n = 0,\ 1, ...,$ est donnée sous la forme :

$$R_{nl}(r) = C_{nl}e^{-\frac{x}{2}}x^{l+1}L_n^{2l+1}(x) \tag{3.19}$$

où $L_n^{2l+1}(x)$ sont les polynômes de *Laguerre* associés.

On s'assure aisément que les fonctions $R_{nl}(r)$ satisfont à la condition

$$\int_0^\infty R_{nl}^2(r)dr < \infty$$

La constante C_{nl} est déterminée par la condition de normalisation (3.15) , et alors

$$\frac{n+l+1}{2z}C_{nl}^2\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{2l+2}[L_n^{2l+1}(x)]^2dx = 1 \tag{3.20}$$

L'integrale dans (3.20) peut être évaluée en utilisant la relation de récurrence pour les polynome de *Laguerre*. Nous avons :

$$xL_n^{2l+1} = 2(n+l+1)L_n^{2l+1} - (n+1)L_{n+1}^{2l+1} - (n+2l+1)L_{n-1}^{2l+1}. \tag{3.21}$$

En vertu de l'orthogonalité des polynôme de *Laguerre*, on obtient :

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{2l+2}[L_n^{2l+1}(x)]^2dx &= \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{2l+1}L_n^{2l+1}(x)[2(n+l+1)L_n^{2l+1}(x)+\cdots]dx \\ &= 2(n+l+1)\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{2l+1}[L_n^{2l+1}(x)]^2dx \\ &= 2(n+l+1)d_n^2,\end{aligned} \tag{3.22}$$

où d_n^2 est le carré de la norme de $L_n^{2l+1}(x)$, par conséquent :

$$C_{nl}^2 = \frac{z}{(n+l+1)^2d_n^2} = \frac{zn!}{(n+l+1)^2(n+2l+1)!}. \tag{3.23}$$

Pour plus de détail concernant le problème traité voir [7] et toutes les notions données dans cette partie du chapitre voir [3]

3.2 Le Premier Théorème de Weierstrass

Théorème 3.2.1 (*Weierstrass* **1885**)

Pour toute fonction f continue sur le segment $[a,b]$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme algébrique P tel que :

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P(x)| < \varepsilon. \tag{3.24}$$

Nous donnons une preuve de ce théorème basé sur l'utilisation des noyaux polynomiaux K_n obtenus pour les polynômes de Tchebychev T_n cette preuve n'est pas plus simple que les autres preuves mais nous souhaitons qu'on peut se familiariser avec les noyaux polynomiaux K_n qui ont un rôle très important dans divers problèmes de la théorie de l'approximation.

Preuve 3.2.1

Soit $T_{2n+1}(x) = \cos(2n+1)\arccos x$, *un polynôme de Tchebychev de degré* $2n+1$.
Puisque

$$T_{2n+1}(0) = 0$$

le polynôme $T_{2n+1}(x)$ *divisible par* x. *Donc, considèrons un polynôme* $K_n(x)$ *de degré* $4n$ *de la forme :*

$$K_n(x) = \frac{1}{\Upsilon_n}\left[\frac{\cos(2n+1)\arccos x}{x}\right]^2, \tag{3.25}$$

où

$$\Upsilon_n = \int_{-1}^{1}\left[\frac{\cos(2n+1)\arccos x}{x}\right]^2 dx. \tag{3.26}$$

Ce polynôme a le rôle d'un noyau et possède les propriétés suivantes :
1)

$$\int_{-1}^{1} K_n(x)dx = 1, \tag{3.27}$$

Cette propriété découle directement des relations (3.25) et (3.26).

2) Puisque

$$\begin{aligned} T_{2n+1}(-x) &= \cos(2n+1)\arccos(-x) \\ &= \cos(2n+1)(\pi - \arccos x) \\ &= -\cos(2n+1)\arccos x \\ &= -T_{2n+1}(x), \end{aligned} \tag{3.28}$$

le polynôme T_{2n+1} *est impair alors* K_n *est un polynôme paire de degré* $4n$.
3)

$$\Upsilon_n > n, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{3.29}$$

En effet, d'après la relation (3.26), la propriété 2, et des inégalités :

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi}t \quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad et \quad \sin t \leq t \quad \forall t \geq 0, \tag{3.30}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
\Upsilon_n &= 2\int\limits_0^1 \left[\frac{\cos(2n+1)(\frac{\pi}{2}-\arcsin x)}{x}\right]^2 dx \\
&= 2\int\limits_0^1 \left[\frac{\sin(2n+1)\arcsin x}{x}\right]^2 dx \\
&= \int\limits_0^{\pi} \left[\frac{\sin(\frac{t(2n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right]^2 \cos\frac{t}{2}dt > \int\limits_0^{\frac{\pi}{(2n+1)}} \left[\frac{\sin(\frac{t(2n+1)}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right]^2 \cos\frac{t}{2}dt > \int\limits_0^{\frac{\pi}{(2n+1)}} \frac{(\frac{t(\frac{2}{\pi})(2n+1)}{2})^2}{t^2}.4.\frac{1}{2}dt \\
&= 2.\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\frac{\pi}{2n+1} \\
&= 2\frac{2n+1}{\pi} > n
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Il est possible de montrer que la valeur exacte de Υ_n est égale à :

$$2\left\{2n+1+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2n-k-1/2)(2n-k+3/2)}\right\}. \tag{3.32}$$

4)- Pour toute $\delta \in [0,1]$, $n = 1, 2, \cdots$, on a :

$$\int\limits_{\delta}^{1} K_n(x)dx = \frac{1}{\Upsilon_n}\int\limits_{\delta}^{1}\left[\frac{\cos(2n+1)\arccos x}{x}\right]^2 \leq \frac{1}{n}\int\limits_{\delta}^{1}\frac{dx}{x^2} < \frac{1}{n\delta}. \tag{3.33}$$

Tout d'abord, nous allons prouver le théorème de weierstrass pour le cas $a = -1$ et $b = 1$. La fonction f peut être prolongée par continuité sur l'intervalle $[-2\ ,\ 2]$ en posant :

$$f(x) = \begin{cases} f(-1) & pour \quad x \in [-2,-1], \\ f(1) & pour \quad x \in [1,2]. \end{cases} \tag{3.34}$$

La fonction f est continue et donc uniformément continue sur $[-2,2]$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$, $0 < \delta < 1$, tel que l'inégalité suivante est vraie pour deux points quelconques x' et x'' de l'intervalle $[-2\ ,\ 2]$ tel que $|x' - x''| < \delta$:

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.35}$$

Pour tout $n = 1, 2, \cdots$, on définit un polynôme P de degré $\leq 4n$ en posant :

$$P_n(x) = \frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{2} f(t)K_n(\frac{t-x}{3})dt. \tag{3.36}$$

Par le changement de variable $\dfrac{(t-x)}{3} = \eta$, *on obtient :*

$$P_n(x) = \int\limits_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} f(3\eta + x)K_n(\eta)d\eta. \tag{3.37}$$

Puisque, en vertu de la relation (3.27),

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)K_n(\eta)d\eta, \tag{3.38}$$

on peut déduire que, pour $x \in [-1, 1]$,
$|f(x)-P_n(x)| < \int\limits_{\frac{-\delta}{3}}^{\frac{\delta}{3}} |f(x)-f(3\eta+x)|K_n(\eta)d\eta + \left(\int\limits_{-1}^{\frac{-\delta}{3}} + \int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{1}\right)|f(x)|K_n(\eta)d\eta + \left(\int\limits_{\frac{(-2-x)}{3}}^{\frac{-\delta}{3}} + \int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{(2-x)}{3}}\right)|f(3\eta + x)|K_n(\eta)d\eta.$

d'où, en utilisant les propriétés du polynôme K_n, *et en désignant par* $M = \max\limits_{[-2\ ,\ 2]} |f(x)|$, *on obtient :*

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{-1}^{1} K_n(\eta)d\eta + 2M\int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{1} K_n(\eta)d\eta + 2M\int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{1} K_n(\eta)d\eta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 4M\frac{3}{n\delta}. \end{aligned}$$

De plus, si n *est assez grand, alors pour tout* $x \in [-1\ ,\ 1]$ *on peut écrire :*

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \tag{3.39}$$

Cela prouve le théorème de weierstrass dans le cas où $a = -1$ *et* $b = 1$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème pour a *et* b *quelconques. Pour cela nous effectuons le changement de variables :*

$$x = a + \frac{b-a}{2}(u+1), \tag{3.40}$$

par conséquent

$$u = \frac{2x-a-b}{b-a}. \tag{3.41}$$

Cela nous permet de construire une fonction

$$\varphi(u) = f\left[a + \frac{b-a}{2}(u+1)\right] \tag{3.42}$$

continue sur $[-1\ ,\ 1]$. *De plus, comme on l'a déjà démontré, nous pouvons trouver un polynôme* π_n

pour cette fonction tel que :

$$|\varphi(u) - \pi_n(u)| < \varepsilon \tag{3.43}$$

Ainsi, nous définissons

$$P_n(x) = \pi_n \left[\frac{2x - a - b}{b - a} \right] \tag{3.44}$$

et, en vertus des relations (3.40) et (3.41) on peut conclure que

$$|f(x) - P_n(x)| = |\varphi(u) - \pi_n(u)| < \varepsilon. \tag{3.45}$$

Ceci complète la démonstration du théorème de weierstrass.

Pour plus de détails concernant ce théorème ainsi que toutes les notions utilisées dans cette partie voir [5]

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons présenté quelques polynômes orthogonaux important, polynômes de *Laguerre* et polynômes de Tchebychev, ces polynômes considérés comme des solutions particuliéres des équations différentielles de *Laguerre* et *Tchebychev*.

De part, leurs propriétés (Relation de récurrences, fonction génératrice, formule de Rodrigues,...), ces polynômes permettent de données plus de souplesse et de clarté dans la résolution et l'étude des problémes en physique et en particulier mécanique quantique et en générale dans les sciences modèrnes.

Bibliographie

[1] Fatine.Aliouane : Fonction spéciales pour les équation différentielle, UniversitéMohammed Seddik Benyahia-Jijel-Faculté des Sciences Exactes et Informatique Département de Mathématiques.

[2] W.W. Bell : Special functions for scientists and engineers, D.Van nostrand company LTD, 1967.

[3] Elie Belorizky : Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs, EDP sciences, 2007.

[4] W. E. Boyce, R. C.Diprima : Equations différentielles, Cheneliére Inc, 2015.

[5] V. K. Dzyadyk - I. A. Shevchuk : "Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials", Walter de Gruyter - Berlin - 2008.

[6] M.Lavoie : Polynômes orthogonaux, pp 20-21, 2015.

[7] A. Nikiforov - V.Ouvarov : Fonctions spéciales de la physique mathématique, Office des publications universitaires, (Traducction Française Editions Mir), 1983.

[8] Trench, William F : Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems, (2013). Faculty Authored and Edited Books & CDs. 9. https ://digitalcommons.trinity.edu/mono/9