

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

**Modèles GARCH à seuil « structure et
estimation »**

Préparé par :

**Ferikha Roumaissa
Tirelil Samar**

Soutenu devant le jury

Zerari Amel	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinatrice
Ghezal Ahmed	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Laib Hafida	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président

Année universitaire :2019/2020

Remerciement

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui nous voudrions témoigner toute notre gratitude. Nous voudrions tout d'abord et d'une façon particulière à remercier notre encadreur 'Monsieur Ahmed Ghezal' pour l'aide et les conseils qui ont contribué à la réalisation de ce travail. Nous adressons également nos vifs remerciements à 'Madame Laïb Hafida' et 'Madame Zerari Amel' les membres de jury qui ont bien voulu et accepté d'examiner ce modeste travail. Nous désirons aussi remercier les professeurs de l'université de Mila 'Monsieur Boudjdaa Bader Edine', 'Madame Talai' et 'Madame Aouag'. Nos remerciements sont également adressés à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Dédicace

Je rend mes profondes gratitudees à ALLAH qui m'a aidé à réaliser de modeste travail. A mes chers parents aucune dédicace serait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être je vous remercier pour tout le soutien et l'amour que vous me porter depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours. Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tout formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez. Puisse dieu, le plus haut, vous accorder santé, bonheur, et longue vie, et faire en sorte que je ne vous déçoive.

*Une spéciale dédicace à mes frères 'Ayoub' et 'Haithem'
Mes sœurs 'YaYa' et 'Zineb'sans oublier 'Ayhem', 'Leith' et
'kinene'*

A tous les membres de la famille 'Ferikha' et 'Derradj'

A mon binôme 'Samar'

A tous mes enseignants depuis mes premières années d'étude

A ma promotion de Master M.A 2020.

** Roumaïssa **

Dédicace

Merci ALLAH tout puissant sur lui et son aide pour compléter cette recherche. A celui qui m'a donné tout ce qu'il avait pour réaliser ses espoirs, à ceux qui me poussait vers l'avant pour obtenir. A l'homme qui a si fortement possédé l'humanité à celui qui m'a appris de grands sacrifices, mon chère père mon cœur, dieu a prolongé sa vie. A celui qui lui a donné le plaisir de son foie, toute tendresse, à ceux qui étaient soulagés chaque fois que je me souvenais de son sourire dans mon visage, ma mère était l'ange le plus cher sur le cœur. Je dédie cette humble œuvre à lui

A mes tantes 'Oussila', 'Souad', 'Mehdia', 'Lwiza' et 'Fadila'

A mes sœurs 'Zineb' et 'Amel'

A mes frères 'Ismail', 'Mohamed' et 'Youcef'

La famille 'Tirelil' et la famille 'Bougherira'

A mon fiancé 'Islam' et la famille 'Benyassaad'

A mes amies 'Khawla B', 'Khawla G', 'Khadidja',

'Roumaisa', 'Yamina', 'loudjayn' et 'Walaa'

A mon binôme 'Roumaissa'

A ma promotion de Master M.A 2020, merci beaucoup pour tous.

** Samar **

Table des matières

Introduction	1
1 Propriétés probabilistes d'un modèle TGARCH(p,q)	5
1.1 Stationnarité stricte	6
1.2 Stationnarité au second-ordre	12
1.3 Moments d'ordre supérieur	15
1.3.1 Kurtosis	18
2 Estimation d'un modèle TGARCH(p,q)	22
2.1 Les propriétés asymptotiques de QMV	22
2.1.1 La consistance forte de QMV	25
2.1.2 La normalité asymptotique de QMV	30
3 Application numérique	32
3.1 Simulation d'un modèle GARCH(1,1)	33
3.2 Simulation d'un modèle TGARCH(1,1)	36
4 Annexe	40
4.1 Processus stochastique	40
4.2 Matrices	41
4.3 Notions générales	42
Conclusion	43
Bibliographie	45

Introduction

Une série chronologique (ou temporelles) est une suite formée d'observation au cours du temps, l'analyse des séries chronologiques est un outil utilisé de nos jours pour la prédiction de données futurs, ce domaine a beaucoup d'applications en finance, économie, médecine et démographie. L'idée c'est de prendre une réalisation de données et de construire le meilleur modèle qui ajuste ces données. Ce modèle permet de faire n'importe quelle conclusion sur la série. La théorie des séries chronologiques abordée dans ce travail est appliquée pour n'en citer qu'une petite partie. On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un phénomène, dans le but de décrire, expliquer puis prévoir ce phénomène dans le futur. On dispose ainsi d'observations à des dates différentes, c'est à dire d'une suite de valeurs numériques indicées par le temps. Cette suite d'observation d'une famille de variables aléatoires réelles notées $(X_t)_{t \in \Theta}$ est appelée série chronologique, dans toute la suite de ce travail, nous la noterons $(X_t)_{t \in \Theta}$ ou $(X_t, t \in \Theta)$ tel que Θ est appelé espace des temps qui peut être discret, dans ce cas $\Theta \in \mathbb{Z}$ ou continue, l'indice de temps est à valeurs dans un intervalle de \mathbb{R} . On spécifie deux types de modèles pour représenter les séries chronologiques : les modèles linéaires et les modèles non linéaires.

Les processus Auto-Régressive $AR(p)$ sont introduits par George Undy Yule, ce modèle est utilisé pour modéliser la série chronologique du nombre de taches solaires plutôt que la méthode de période gramme de Shuster, il s'écrit l'observation au temps t comme une combinaison linéaire des observations passées plus le bruit blanc :

$X_t = \phi_0 + \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\varepsilon_t \sim b.b(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et ϕ_k ($k = \overline{0, p}$) sont des réelles. En 1927 Slutsky qui a introduit les processus à Moyenne Mobile $MA(q)$ sous la forme : $X_t = \phi_0 + \sum_{k=1}^q \theta_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$ et θ_k ($k = \overline{1, q}$) sont des réelles. Les modèles AR et MA sont parfait dans le cas général, mais on a besoin d'estimer un grand nombre de paramètres pour ajuster ce modèle. Si un modèle contient p paramètres, la situation n'est pas bonne pour plus de paramètre p . Les modèles $ARMA$ de Herman Wold a montré

Introduction

qu'ils pouvaient être utilisés pour modéliser n'importe quelle série statistique (p et q bien choisis) et elles s'écrivent sous la forme :

$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}$ et comme suit un exemple sur la représentation graphique de $ARMA(1, 1)$ avec les paramètres $\phi_1 = 0.4$, $\phi_0 = 0$ et $\theta_1 = -0.2$.

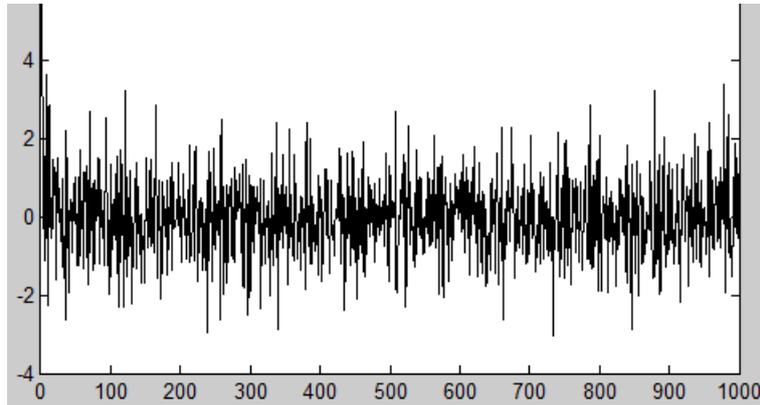


FIGURE 1 – Représentation de la série $ARMA(1,1)$.

On remarque dans la Figure 1 qu'il ya des périodes avec une variance plus grande ou plus petite à la variance passée. Après quelques rappels sur les processus stochastique et la représentation de la série temporelle (Figure 1) par les modelés linéaires qui sont très importants, mais le problème trouvé c'est que la variance est toujours constante à longue temps et elles sont pas convenables pour la prévision des réelles phénomènes volatils (par exemple : problèmes des bourses New-York 1984). Ce problème a causé l'apparition des modèles non linéaires (ARCH par Engle voir l'article Wu [27]). Qui s'écrit sous la forme :

$$X_t = h_t e_t,$$

dans lequel X_t représente les innovations de la série, et e_t est i.i.d(0,1), h_t vaut alors

$$h_t^2 = \phi_0 + \sum_{i=1}^q \phi_i X_{t-i}^2, t \in \mathbb{Z}$$

et ϕ_i ($i = \overline{0, q}$) sont des réelles, ce modèle a été largement appliqué dans la modélisation des 'rendements boursiers' et 'les taux de change', le modèle ARCH a été généralisé par Bollerslev dans l'article Wu [28] (étudiant de Engle) en 1986, est appelé GARCH(p,q)

Introduction

qui écrit sous la forme :

$$\begin{cases} X_t = h_t e_t \\ h_t^2 = \phi_0 + \sum_{i=1}^q \phi_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \xi_j h_{t-j}^2, \forall t \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (0.1)$$

$\phi_0 > 0$, $\phi_i \geq 0$ ($i = \overline{1, q}$) et $\xi_j \geq 0$ ($j = \overline{1, p}$). Ce modèle non linéaire a été plus utilisé dans les données financières telles que les taux d'intérêt, les taux d'inflation et les cours boursiers, le modèle GARCH(1,1) est une restriction du modèle GARCH(p,q), le modèle est le plus simple et le plus robuste de la famille de la volatilité des modèles. De plus, il est devenu le bourreau de travail de l'industrie, avec le plus grand nombre d'applications voir par exemple Hansen et Lurole (2005), le principe est de calculer l'autocorrélation passé et présente puis le modéliser à partir de la variance conditionnelle. Malgré que le modèle GARCH(p,q) est très important en domaine de prévision, mais il a été reçu plusieurs critiques car ce modèle ne peut pas calculer la réaction asymétrique des choses passés sur la volatilité. Pour résoudre ce problème **Zakoïan** (1994) [5] a été proposé **GARCH à seuil** (TGARCH).

L'idée de (TGARCH) asymétrique est consistée à déviser la distribution des innovations intervalles disjoints puis approximer une fonction linéaire par morceaux par la variance conditionnelle (ou l'écart type conditionnel), ce modèle s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} X_t = h_t e_t \\ h_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^q \phi_i X_{t-i}^+ + \psi_i X_{t-i}^- + \sum_{j=1}^p \xi_j h_{t-j}, \forall t \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (0.2)$$

telle que $(e_t) \sim \text{i.i.d}(0,1)$ et (h_t) est la variance conditionnelle, où $X_t^+ = \max(X_t, 0)$, $X_t^- = \min(X_t, 0)$, $\phi_0 > 0$, $\phi_i \geq 0$, $\psi_i \geq 0$ ($i = \overline{1, q}$) et $\xi_j \geq 0$ ($j = \overline{1, p}$).

Notre travail est résumé dans ce mémoire qui contient une introduction et quatre chapitres, le premier chapitre intitulé les propriétés probabilistes de modèle TGARCH et quelques sections concernant la stationnarité (stricte et second-ordre) et les moments d'ordre supérieur. Dans le deuxième chapitre, nous examinons les propriétés asymptotiques de l'estimateur de quasi maximum de vraisemblance (la consistance forte et la normalité asymptotique). Enfin, nous faisons une application numérique du modèle TGARCH (simulation) et quelques notions qui ont utilisés dans notre travail dans Annexe.

Notations

Notations générales

$\log^+ x$	$\max\{0, \log x\}$, pour tout $x > 0$,
$:=$	est définie comme,
$\mathbb{I}_{\{\cdot\}}$	indicatrice,
\otimes	produit de Kronecker,

Matrices

$I_{(m)}$	matrice identité de taille $(m \times m)$,
$O_{(n,m)}$	ensemble des matrices nulles de taille $(n \times m)$,
$B^{\otimes s}$	$\underbrace{B \otimes B \otimes \cdots \otimes B}_{s \text{ fois}}$,

Processus

i.i.d	indépendant identiquement distribué,
i.i.d(0, 1)	indépendant identiquement distribué centré et de variance unité,
h_t^2	variance conditionnelle ou volatilité,
$\sigma\{X_s, s < t\}$	tribu engendrée par le passé de X_t ,

Probabilité

p.s	presque sûrement,
$\xrightarrow{p.s}$	convergence presque sûre,
$\mathcal{N}(0, 1)$	loi normale de moyenne nulle et de variance 1,

Estimation

Φ	espace des paramètres,
θ	élément de l'espace des paramètres,
θ_0	vraie valeur du paramètre,
$\hat{\theta}_n$	estimateur de θ_0 ,
L_n	fonction de vraisemblance,
$l_n = l_n(\theta)$	vraisemblance conditionnelle de X_t ,
$\tilde{l}_n = \tilde{l}_n(\theta)$	comme l_n mais avec des valeurs initiales,
$h_t^2 = h_t^2(\theta)$	volatilité construite avec la valeur θ ,
$\tilde{h}_t^2 = \tilde{h}_t^2(\theta)$	comme h_t^2 mais avec des valeurs initiales,

Quelques abréviations

QMV	Quasi-Maximum de Vraisemblance.
-----	---------------------------------

Propriétés probabilistes d'un modèle TGARCH(p,q)

La stationnarité est très importante dans la science des processus, elle se caractérise par une série temporelle qui implique que le comportement de cette série ne dépend seulement pas du temps, mais il dépend aussi de type de stationnarité (forte et faible). Dans cette section nous proposons de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la stationnarité au sens strict et au second-ordre, Francq et Zakoïan [10] ont proposé de mettre l'équation (0.2) sous une représentation Markovienne tel que on va associer le modèle TGARCH(p,q) à un processus Auto-régressif vectoriel (VAR(1)) qui définie par l'équation :

$$\underline{X}_t = B(e_t)\underline{X}_{t-1} + \underline{\eta}(e_t), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

plus précisément, d'après Francq et Zakoïan [16] en utilisant :

$X_t^+ = h_t e_t^+$, $X_t^- = h_t e_t^-$ telle que $\underline{\eta}(e_t) \in \mathbb{R}^{2q+p}$ où $\underline{\eta}'(x) = (\phi_0 x^+, \phi_0 x^-, \underline{Q}_{(2q-2)}, \phi_0, \underline{Q}_{(p-1)})$,
 $\underline{X}'_t = (X_t^+, X_t^-, \dots, X_{t-q+1}^+, X_{t-q+1}^-, h_t, \dots, h_{t-p+1}) \in \mathbb{R}^{2q+p}$ et

$$B(e_t) = \begin{pmatrix} \underline{\alpha}_{(1:q-1)} e_t^+ & \phi_q e_t^+ & \psi_q e_t^+ & \underline{\xi}_{(1:p-1)} e_t^+ & \xi_p e_t^+ \\ \underline{\alpha}_{(1:q-1)} e_t^- & \phi_q e_t^- & \psi_q e_t^- & \underline{\xi}_{(1:p-1)} e_t^- & \xi_p e_t^- \\ I_{(2q-2)} & \underline{Q}_{(2q-2)} & \underline{Q}_{(2q-2)} & O_{(2q-2,p-1)} & \underline{Q}_{(2q-2)} \\ \underline{\alpha}_{(1:q-1)} & \phi_q & \psi_q & \underline{\xi}_{(1:p-1)} & \xi_p \\ O_{(2q-2,p-1)} & \underline{Q}_{(p-1)} & \underline{Q}_{(p-1)} & I_{(p-1)} & \underline{Q}_{(p-1)} \end{pmatrix},$$

la matrice $B(e_t)$ est de dimension $(p + 2q) \times (p + 2q)$,

$\underline{\alpha}_{(1:q-1)} = (\phi_1, \psi_1, \dots, \phi_{q-1}, \psi_{q-1}) \in \mathbb{R}^{2q-2}$ et $\underline{\xi}_{(1:p-1)} = (\xi_1, \dots, \xi_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$,

maintenant nous commençant par la stationnarité stricte de ce modèle.

1.1 Stationnarité stricte

Pour étudier ce type de stationnarité on utilise l'exposant de Lyapunov, ce dernier est défini par Bougerol et Picard en 1992 (voir Francq et al [8]) comme suit :

Définition 1.1 Soit $(B(e_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ une suite strictement stationnaire et ergodique de matrice i.i.d de modèle TGARCH(p,q) définie par (0.2), tel que $E(\log^+ \|B(e_t)\|) < \infty$.

On a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E(\log \|B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_1)\|) = \gamma_B = \inf_{t \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{1}{t} E(\log \|B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_1)\|) \right\}$$

γ_B est appelé l'exposant de lyapunov, et d'après Francq et al [7] nous écrivons aussi

$$\gamma_B = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_1)\| \text{ p.s.}$$

Remarque 1.1 Francq et Zakoïan [12] ont donné que γ_B est indépendant de choix de la norme.

Nous présentons maintenant un théorème qui donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution strictement stationnaire de modèle (0.2) (Francq et al [9]), d'après Brand cette solution s'écrit sous la forme (voir Francq et Zakoïan [11]) :

$$\underline{X}_t = \underline{\eta}(e_t) + \sum_{k=1}^{\infty} B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_{t-k+1})\underline{\eta}(e_{t-k}), \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

et converge absolument presque sur.

Théoreme 1.1 Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ le processus défini par l'équation (0.2) et $\{\underline{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sa représentation vectoriel défini par l'équation (1.1), le modèle (0.2) admet une solution strictement stationnaire si et seulement si γ_B est strictement négatif. De plus, si $\gamma_B < 0$ alors la solution stationnaire est unique, ergodique et non-anticipative.

Preuve : Francq et Zakoïan [16] montrer comme suit : supposons que la norme de B est définie par $\|B\| = \sum_{i,j} |b_{ij}|$ cette norme est bien définie quelque soit la dimension de B , en appliquant la propriété : $\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \forall A, B$ avec le produit AB existe. Remarquant $Var(e_t) < +\infty$, les composantes de $B(e_t)$ sont intégrables donc :

$E\{\log^+ \|B(e_t)\|\} \leq E\{\|B(e_t)\|\} < \infty$. Supposons : $\gamma_B < 0$, d'après (1.2) on a :

$$\tilde{X}_t(N) = \underline{\eta}(e_t) + \sum_{n=0}^N B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_{t-n})\underline{\eta}(e_{t-n-1}),$$

qui converge presque sure lorsque $N \rightarrow +\infty$. Par l'implication de la norme :

$$\|\tilde{X}_t(N)\| \leq \|\underline{\eta}(e_t)\| + \sum_{n=0}^{+\infty} \|B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_{t-n})\| \|\underline{\eta}(e_{t-n-1})\| \text{ et}$$

$$\begin{aligned} & \|B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_{t-n})\|^{\frac{1}{n}} \|\underline{\eta}(e_{t-n-1})\|^{\frac{1}{n}} = \\ & \exp\left[\frac{1}{n} \log \|B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_{t-n})\| + \frac{1}{n} \log \|\underline{\eta}(e_{t-n-1})\|\right] \xrightarrow{p.s.} e^{\gamma_B} < 1, \\ & \text{on choisit que : } \frac{1}{n} \log \|\underline{\eta}(e_{t-n-1})\| \xrightarrow{p.s.} 0 \text{ puisque} \end{aligned}$$

$$E\{|\log \|\underline{\eta}(e_{t-n-1})\|\|\}\} \leq |\log \phi_0| + E\{\log^+ \|\underline{\eta}(e_{t-n-1})\|\|\}\} \leq |\log \phi_0| + E\{\|\underline{\eta}(e_{t-n-1})\|\|\}\} < \infty,$$

la preuve de l'unicité est parallèle que le cas $p = q = 1$, soit X_t une solution strictement stationnaire de modèle (0.2), ou équivalent que supposer qu'il existe une solution strictement stationnaire de (1.1), pour $N \geq 0$:

$$\underline{X}_t = \tilde{X}_t(N) + B(e_t) \cdots B(e_{t-N})\underline{X}_{t-N-1},$$

de plus

$$\|\underline{X}_t - \tilde{X}_t\| \leq \|\tilde{X}_t(N) - \tilde{X}_t\| + \|B(e_t) \cdots B(e_{t-N})\| \|\underline{X}_{t-N-1}\|,$$

lorsque $N \rightarrow +\infty$ de plus la série \tilde{X}_t p.s, donc $\underline{X}_t - \tilde{X}_t \rightarrow 0$ en probabiliste alors :
 $\underline{X}_t = \tilde{X}_t$. □

Enonçons maintenant un corollaire et des remarques sur la stationnarité strict du processus GARCH(1,1), d'après Francq et Zakoïan [16] on a :

Corollaire 1.1 *Soit X_t est un processus GARCH(1,1), si*

$$-\infty \leq \gamma_B := E\{\log(\phi e_t^2 + \xi)\} < 0, \tag{1.3}$$

puis la somme infini

$$h_t = \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^i a(e_{t-j}) \right) \right] \phi_0, \tag{1.4}$$

tel que $a(z) = \phi z^2 + \xi$, converge presque sur et le processus X_t défini par $X_t = \sqrt{h_t}e_t$ est l'unique solution strictement stationnaire, cette solution est non-anticipative et ergodique,

Chapitre 1. Propriétés probabilistes d'un modèle TGARCH(p,q)

si $\gamma_B \geq 0$ et $\phi_0 > 0$ n'existe pas une solution strictement stationnaire.

Remarque 1.2 1) Si $\phi_0 = 0$ et $\gamma_B < 0$ il est clair pour (1.4) l'unique solution strictement stationnaire c'est $X_t = 0$, c'est pour ça supposer $\phi_0 > 0$.

2) La condition (1.3) implique $\xi < 1$, maintenant si :

$$\phi + \xi < 1,$$

ensuite (1.3) est satisfait depuis, par application de l'inégalité de Jensen :

$$E \log\{a(e_t)\} \leq \log E\{a(e_t)\} = \log(\phi + \xi) < 0.$$

Remarque 1.3 La stationnarité stricte en modèle ARCH(1) dans le cas $\xi = 0$ est écrite comme suit :

$$0 \leq \phi < \exp\{-E(\log e_t^2)\}, \quad (1.5)$$

pour $e_t \sim (0, 1)$ la condition devient $\phi < 3.56$. Pour $E(\log e_t^2) = -\infty$, dans un instant tel que la masse tend vers 0, la condition (1.5) est toujours satisfaite. Il existe une solution ARCH(1) strictement stationnaire quelque soit la valeur de ϕ .

Exemple 1.1 Dans cet exemple en étudiant la stationnarité strict du modèle GARCH(1,1), la matrice $B(e_t)$ est écrit dans ce cas comme : $B(e_t) = (e_t^2, 1)'(\phi_1, \xi_1)$ nous avons donc :

$$B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_1) = \prod_{j=1}^{t-1} (\phi_1 e_{t-j}^2 + \xi_1) B(e_t),$$

il s'ensuit que

$$\log \|B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_1)\| = \sum_{j=1}^{t-1} \log(\phi_1 e_{t-j}^2 + \xi_1) + \log \|B(e_t)\|,$$

tel que $\gamma_B = E\{\phi_1 e_t^2 + \psi_1\}$, alors la condition nécessaire et suffisant pour la stationnarité strict est $E\{\phi_1 e_t^2 + \psi_1\} < 0$.

Il y a une difficulté de montrer la négativité de γ_B , donc on cherche des conditions plus faibles, Francq et Zakoïan [16] a proposé le lemme suivant :

lemme 1.1 Soit $(B(e_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ suite ergodique et strictement stationnaire du modèle TGARCH défini par (0.2) lorsque $E\{\log^+ \|B(e_t)\|\}$ est fini, où avec l'exposant de lyapunov on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p.s. \|B(e_0) \cdots B(e_{t-1})\| = 0 \Rightarrow \gamma_B < 0, \quad (1.6)$$

Chapitre 1. Propriétés probabilistes d'un modèle TGARCH(p,q)

comme les modèles ARMA, nous sommes généralement intéressés à la non-anticipativité de solution X_t de modèle (0.2), c'est-à-dire, ceux pour lesquels X_t appartient au champ σ algèbre engendré par $\{e_t, e_{t-1}, \dots\}$.

Remarque 1.4 Dans cette remarque on trouve une condition suffisante pour la négativité de γ_B , on a toujours $\gamma_B \leq E\{\log\|B(e_1)\|\}$ car :

$$\log\|B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_1)\| \leq \log\|B(e_t)\| + \log\|B(e_{t-1})\| + \cdots + \log\|B(e_1)\|,$$

et comme $B(e_t)$ sont i.i.d, $\forall t \in \mathbb{Z}$ donc

$$E\{\log\|B(e_t)\|\} = E\{\log\|B(e_{t-1})\|\} = \cdots = E\{\log\|B(e_1)\|\},$$

on trouve

$$\begin{aligned} E\{\log\|B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_1)\|\} &\leq E\{\log\|B(e_t)\| + \log\|B(e_{t-1})\| + \cdots + \log\|B(e_1)\|\} \\ &= E\{\log\|B(e_t)\|\} + E\{\log\|B(e_{t-1})\|\} + \cdots + E\{\log\|B(e_1)\|\} \\ &= E\{\log\|B(e_1)\|\} + E\{\log\|B(e_1)\|\} + \cdots + E\{\log\|B(e_1)\|\} = tE\{\log\|B(e_1)\|\}, \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E\{\log\|B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_1)\|\} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E\{t \log\|B(e_1)\|\} = E\{\log\|B(e_1)\|\},$$

d'où le résultat.

Corollaire 1.2 D'après Francq et Zakoïan, on donne une Conditions d'explosion : pour $t \geq 1$, en modèle GARCH(1,1) avec les conditions initiales pour X_0 et h_0 , si $\gamma_B > 0$ alors $h_t^2 \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)(p.s)$, si de plus $E\{|\log(e_t^2)|\} < +\infty$ alors

$$\gamma_B > 0 \Rightarrow X_t^2 \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)(p.s).$$

Dans la remarque suivante, nous discutons sur le cas intégré voir Francq et Zakoïan [16] :

Remarque 1.5 1) D'après Klüppelberg, Linder et Maller proposent que si $\gamma_B = 0$ alors $h_t^2 \rightarrow +\infty$ en probabilité.

2) D'après inégalité de Jensen on a : $E\{\log(e_t^2)\} < +\infty$ la restriction $E\{|\log(e_t^2)|\} < +\infty$ i.e $E\{\log(e_t^2)\} > -\infty$, en ARCH(1) cette restriction s'annule puisque la condition

$$\gamma_B = E\{\log(\psi e_t^2)\} > 0 \Rightarrow E\{\log(e_t^2)\} > -\infty.$$

D'après Ali [1], il existe aussi des modèles qui nous permettent d'extraire la formule TGARCH(p,q), on les trouve dans les corollaires suivants :

Corollaire 1.3 *Ce modèle est obtenu pour $\phi_i = \psi_i$ et prendre la forme :*

$$X_t = h_t e_t, h_t^2 = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i |X_{t-i}| + \sum_{j=1}^q \xi_j h_{t-j},$$

puisque $|X_t| = X_t^+ - X_t^-$, il s'appelle valeur absolue GARCH (AVGARCH).

Corollaire 1.4 *Le modèle GJR-GARCH est représenté par l'expression :*

$$h_t^2 = \phi_0 + \sum_{i=1}^p (\phi_i X_{t-i}^2 + \delta_i \mathbb{I}_{t-i} X_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q \xi_j h_{t-j}^2,$$

où

$$\mathbb{I}_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{t-i} < 0 \\ 0 & \text{si } X_{t-i} \geq 0 \end{cases}.$$

Pour étudier la stationnarité stricte on utilise γ_B mais si $t \rightarrow \infty$ nous ne pouvons pas calculer γ_B , on utilise alors le rayon spectral noté $\rho(B)$ qui est le plus grand module de ces valeurs propres. Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur l'espace des matrices $(2q+p) \times (2q+p)$, on a le résultat :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|B^t\| = \log \rho(B), t \in \mathbb{N}^*. \quad (1.7)$$

Remarque 1.6 *Si $B(e_t) = B$ telle que B est une matrice indépendante de t pour tout $t \in \mathbb{Z}$, nous avons $\gamma_B = \log \rho(B)$ d'après (1.7).*

D'après Bibi et Ghezal [3] on a le théorème suivant :

Théoreme 1.2 *Si la matrice $B = B(e_t)$, $t \in \mathbb{Z}$ (B est une matrice indépendante de t) à partir du définition (1.1) et l'inégalité de Jensen, les conditions*

$$E(\log \|B(e_k)B(e_{k-1}) \cdots B(e_1)\|) < 0, \forall k > 0 \text{ et } \rho(E\{B(e_1)\}) < 1, \text{ i.e}$$

$$\sum_{i=1}^q \phi_i + \sum_{j=1}^p \xi_j < 1 \Rightarrow \gamma_B < 0, \quad (1.8)$$

la condition suffisante (1.8) est plus forte que la condition de la stationnarité stricte $\gamma_B < 0$ ((1.8) $\Rightarrow E\{X_t^2\} < +\infty$), cette démonstration est trouvée dans la proposition suivante :

Proposition 1.1 (Voir Francq et Zakoïan [12])

Si $\gamma_B < 0$ les relations suivantes sont équivalentes :

- a) $\sum_{j=1}^p \xi_j < 1$.
- b) Les racines de polynôme $1 - \xi_1 z - \dots - \xi_p z^p$, sont à l'extérieur du disc-unité ($|z| > 1$).
- c) $\rho(A) < 1$, où A est la sous matrice de $B(e_t)$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{p-1} & \xi_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve : Comme tous les termes des matrices $B(e_t)$ sont positifs, il est clair que γ_B est supérieur au coefficient de Lyapounov de la suite obtenue en remplaçant les coefficients des q premières lignes et des q premières colonnes par 0 dans les matrices $B(e_t)$, en utilisant la Remarque 1.6 on voit que

$$\log \rho(A) \leq \gamma_B,$$

par suite $\gamma_B < 0 \Rightarrow (c)$, il est facile de montrer (par récurrence sur p et en développant par rapport à la dernière colonne) que, pour $\lambda \neq 0$

$$\det(\lambda I_p - A) = \lambda^p - \lambda^{p-1} \xi_1 - \dots - \lambda \xi_{p-1} - \xi_p = (\lambda)^p \mathcal{B}\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

où $\mathcal{B}(z) = 1 - \xi_1 z - \dots - \xi_p z^p$, on déduit que si $\gamma_B < 0$ alors $\mathcal{B}(z) = 0$ a toutes ses racines en dehors du cercle unité, d'où l'équivalence entre (b) et (c). A présent, montrons que (a) \Leftrightarrow (b), on a : $\mathcal{B}(0) = 1$ et $\mathcal{B}(1) = 1 - \sum_{j=1}^p \xi_j$ donc si $\sum_{j=1}^p \xi_j \geq 1$ alors $\mathcal{B}(1) \leq 0$ et par continuité il existe une racine dans $]0, 1]$, ainsi (b) \Rightarrow (a).

Inversement si $\sum_{j=1}^p \xi_j \geq 1$ et si $\mathcal{B}(z_0) = 0$ pour un z_0 de module inférieur ou égale a 1 alors

$$1 = \sum_{j=1}^p \xi_j z_0^j = \left| \sum_{j=1}^p \xi_j z_0^j \right| \leq \sum_{j=1}^p \xi_j |z_0|^j \leq \sum_{j=1}^p \xi_j,$$

ce qui est impossible, par suite (a) \Rightarrow (b). □

Maintenant on cherchons des conditions d'existence d'une solution stationnaire au second-ordre pour le modèle TGARCH(p,q).

1.2 Stationnarité au second-ordre

Nous avons présenter dans cette section une condition qui assure l'existence d'une solution faiblement stationnaire donné par Bollerslev, d'après Francq et Zakoïan [16] on a le théorème suivant.

Théoreme 1.3 *Une condition nécessaire et suffisante pour un processus GARCH(p,q) défini par (0.1) soit stationnaire au seconde ordre est que :*

$$\sum_{i=1}^q \phi_i + \sum_{i=1}^p \xi_i < 1. \quad (1.9)$$

On utilise la remarque suivante pour démontré le théorème précédant :

Remarque 1.7 *Si $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus vérifie le modèle (0.1) alors $\{X_t^2\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est vérifie une représentation ARMA, qui s'écrit sous la forme :*

$$X_t^2 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} \phi_i X_{t-i}^2 = \phi_0 - \sum_{j=0}^q \xi_j \omega_{t-j}, \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (1.10)$$

tel que (ω_t) est un processus de bruit.

Preuve : Commençons par la condition nécessaire, Francq et Zakoïan supposent que (X_t) est un processus GARCH(p,q) stationnaire au second-ordre c'est à dire que (X_t) indépendant de t, i.e :

$$E\{X_t\} = E\{X_{t+k}\}, \quad \forall t, k \in \mathbb{Z}$$

en prenant l'espérance de deux membres de l'équation (1.10), on obtient :

$$E\{X_t^2\} - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} \phi_i E\{X_{t-i}^2\} = \phi_0 - \sum_{j=0}^q \xi_j E\{\omega_{t-j}\}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

et puisque $E\{\omega_{t-j}\} = E\{X_{t-j}^2\} - E\{h_{t-j}\} = 0$ et par la stationnarité de (X_t) , on va trouver que

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} \phi_i\right) E\{X_t^2\} = \phi_0,$$

donc $(1 - \xi(1) - \phi(1))E\{X_t^2\} = \phi_0$, donc la condition nécessaire et suffisante pour $E\{h_t\}$ doit être positive est $\xi(1) + \phi(1) < 1$.

Montrons l'inverse c'est à dire supposons que (1.10) soit vraie et on cherche une solution

de GARCH au sens fort qui soit stationnaire, on pose

$$X_p(t) = B(e_t)X_{p-1}(t) + Y_t, \forall p \geq 0,$$

($X_p(t) = 0$ si $p < 0$), on conclure alors :

$$X_p(t) - X_{p-1}(t) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{p-1} B(e_{t-i})Y_{t-p} & \text{si } p > 0 \\ Y_t & \text{si } p = 0 \end{cases},$$

calculons la norme matricielle : soit B une matrice à coefficient positive alors

$$\|B\| = \sum_{i,j} |B_{ij}| \Rightarrow E\{\|B\|\} = E\{\sum_{i,j} |B_{ij}|\},$$

donc

$$E\{\|X_p(t) - X_{p-1}(t)\|\} = \left\| \prod_{i=0}^{p-1} E\{B(e_{t-i})\} E\{Y_{t-p}\} \right\|,$$

(d'après l'indépendance de $B(e_{t-i})$ et Y_{t-p} , et la positivité de $\prod_{i=0}^{p-1} B(e_{t-i})Y_{t-p}$, $p > 0$)
 $E\{\|X_p(t) - X_{p-1}(t)\|\} = \|B^p Y\|$ tel que $B = E\{B(e_{t-i})\}$ et $Y = E\{Y_{t-p}\}$, $\forall i = \overline{0, p-1}$.

On sait que :

$$\det(\lambda I_{p+q} - B) = \lambda^{p+q} \left(1 - \left(\sum_{i=1}^p \phi_i \lambda^{-i} + \sum_{j=1}^q \xi_j \lambda^{-j} \right) \right),$$

on suppose que $|\lambda| \geq 1$, on appliquant ($|x - y| \geq |x| - |y|$), on trouve

$$|\det(\lambda I_{p+q} - A)| \geq |1 - \left(\sum_{i=1}^p \phi_i \lambda^{-i} + \sum_{j=1}^q \xi_j \lambda^{-j} \right)| \geq 1 - \left(\sum_{i=1}^p \phi_i |\lambda|^{-i} + \sum_{j=1}^q \xi_j |\lambda|^{-j} \right),$$

mais on a

$$|\lambda|^{-i} < 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^q \xi_j |\lambda|^{-j} \leq \xi(1) \text{ donc } \sum_{i=1}^p \phi_i |\lambda|^{-i} + \sum_{j=1}^q \xi_j |\lambda|^{-j} \leq \phi(1) + \xi(1),$$

on déduit que

$$|\det(\lambda I_{p+q} - B)| \geq 1 - (\phi(1) + \xi(1)) \geq 0 \Rightarrow \rho(B) < 1,$$

d'autre part on a $\lim_{p \rightarrow \infty} \|B^p\| = \exp(p \log \rho(B))$, on peut conclure que $B^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, donc

$$E\{\|X_p(t) - X_{p-1}(t)\|\} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui implique que $X_p(t)$ est convergent en L^1 , en appliquant le critère de Cauchy on obtient que $X_p(t)$ est convergent p.s lorsque $p \rightarrow \infty$.

Soit $\lim_{p \rightarrow \infty} X_p(t) = \underline{X}_t$ tel que $(X_p(t))_t$ strictement stationnaire, donc \underline{X}_t est la solution de l'équation (1.1). \square

Remarque 1.8 Si (1.10) vérifie alors nous avons $\gamma_B < 0$, car si (1.10) vérifie on a $\rho(B) < 1$ et d'autre part on a $\gamma_B < \log \rho(B)$.

Exemple 1.2 Dans ce exemple on donne la régions de stationnarité du modèle GARCH(1,1).

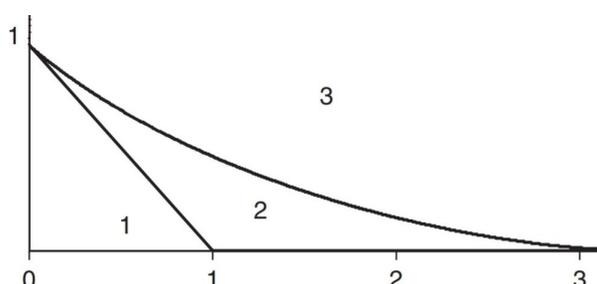


FIGURE 1.1 – Régions de stationnarité du modèle GARCH(1,1).

La Figure(1.1) représente trois régions de stationnarité du modèle GARCH(1,1) (l'axe des abscisses représente ϕ_1 et l'axe des ordonnées représente ξ_1) tel que si $e_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ la région 1 représente la stationnarité au second ordre et la région 2 représente la stationnarité stricte, par contre région 3 représente la non-stationnarité.

Exemple 1.3 Dans ce exemple on donne Les courbes d'impact pour les modèles ARCH(1) et TAR(1).

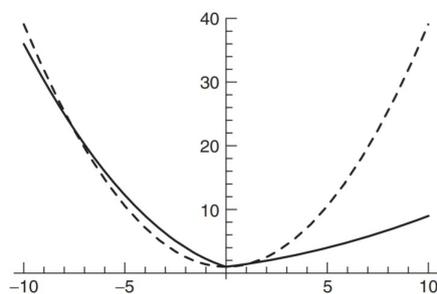


FIGURE 1.2 – Représentation des modèles ARCH(1) et TAR(1).

La Figure(1.2) représente les courbes d'impact (l'axe des abscisses représente X_{t-1} et l'axe

des ordonnées représente h_{t-1}^2) pour le modèle ARCH(1), $X_t = \sqrt{1 + 0.38X_{t-1}^2}e_t$ (ligne pointillée) et le modèle TAR(1), $X_t = 1 - 0.5X_{t-1}^- + 0.2X_{t-1}^+$ (ligne continue).

Exemple 1.4 Dans ce exemple on donne la régions de stationnarité du modèle TAR(1).

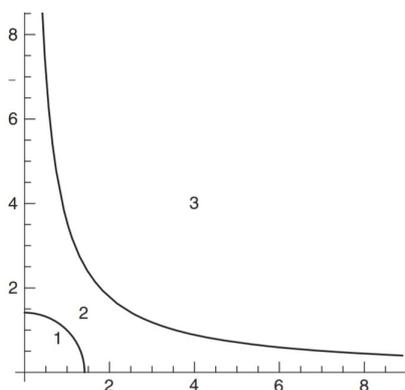


FIGURE 1.3 – Régions de stationnarité du modèle TAR(1).

La Figure(1.3) représente trois régions de stationnarité du modèle TAR(1) (l'axe des abscisses représente ϕ_1 et l'axe des ordonnées représente ψ_1) tel que si $e_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ la région 1 représente la stationnarité au second ordre et la région 1 et 2 représentent la stationnarité stricte, par contre la région 3 représente la non-stationnarité.

Nous allons passé à en revue l'existence des moments d'ordre supérieur du modèle TGARCH strictement stationnaire dans la section suivante.

1.3 Moments d'ordre supérieur

Soit un processus strictement stationnaire $\{X_t^2\}$ défini comme la première composante de \underline{X}_t tel que $E\{e_t^{2s}\} < +\infty$ (Francq et Zakoïan [6]). Ghezal [19] a donné le théorème suivant :

Théoreme 1.4 Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus $\{X_t^2\}$ admet des moments jusqu'à l'ordre s est que le rayon spectral de $E\{B(e_t)^{\otimes s}\}$ strictement inférieur à 1 i.e :

$$si \rho(E\{B(e_t)^{\otimes s}\}) < 1 \Leftrightarrow E\{X_t^{2s}\} < +\infty.$$

Preuve :

Montrons la première implication c'est à dire que :

$$\text{si } E\{X_t^{2s}\} < +\infty \text{ donc } \rho(E\{B(e_t)^{\otimes s}\}) < 1,$$

on utilise l'écriture vectorielle de ce modèle qui s'écrit aussi :

$$\underline{X}_t = \sum_{l=1}^k \left(\prod_{i=0}^{l-1} B(e_{t-i}) \right) \underline{\eta}(e_{t-l}) + \prod_{i=0}^k B(e_{t-i}) X_{t-i-1}, \quad (1.11)$$

de (1.11) et par la positivité de $B(e_t)$ et e_t on résulte que :

$$\begin{aligned} E(\underline{X}_t^{\otimes s}) &= E\left(\sum_{l=1}^k \left(\prod_{i=0}^{l-1} B(e_{t-i}) \right) \underline{\eta}(e_{t-l}) + \prod_{i=0}^k B(e_{t-i}) X_{t-i-1} \right)^{\otimes s} \\ &\geq \sum_{l=1}^k E\left(\prod_{i=0}^{l-1} B(e_{t-i}) \underline{\eta}(e_{t-l}) \right)^{\otimes s}, \end{aligned}$$

puisque on a :

$$E\{B(e_t)\} = E\{B(e_{t-1})\} = \dots = E\{B(e_{t-l+1})\},$$

(car $E\{e_{t-i}^2\} < +\infty, \forall i = \overline{0, l-1}$) et l'indépendance de (e_{t-i}) implique l'indépendance entre les $B(e_{t-i})$ et e_{t-l} alors

$$E(\underline{X}_t^{\otimes s}) \geq \sum_{l=0}^k (E(B(e_t))^{\otimes s})^l E(\underline{\eta}(e_{t-l}))^{\otimes s}, \quad (1.12)$$

qui est finies alors d'après (1.12) on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{l=0}^k (E(B(e_t))^{\otimes s})^l E(\underline{\eta}(e_{t-l}))^{\otimes s} < +\infty,$$

pour Vérifier la positivité de tous les éléments du vecteur $(E(B(e_t))^{\otimes s})^l E(\underline{\eta}(e_{t-l}))^{\otimes s}$, nous avons vérifié la positivité de $B(e_t)^l \underline{\eta}(e_{t-l})$ tel que :

$$E(B(e_t))^{\otimes s} E(\underline{\eta}(e_{t-l}))^{\otimes s} = E(B(e_t)^l \underline{\eta}(e_{t-l}))^{\otimes s}. \quad \square$$

D'après Fancq et Zakoïan [16] on a les lemmes suivants :

lemme 1.2 (Conclusion dans cette partie avec un résultat établissant que la condition de la stationnarité stricte implique également l'existence de certains moments.)

Soit X v.a.r presque sur positive, si $E\{X^r\} < +\infty$ pour un $r > 0$ et si $E(\log X) < 0$

alors $\exists s > 0$ tel que $E\{X^s\} < 1$.

Preuve :

La fonction génératrice de $Y = \log X$ est définie par :

$$M(u) = E\{e^{uY}\} = E\{X^u\},$$

la fonction est continument dérivable sur $[0, r]$ et on a pour $u > 0$:

$$\frac{M(u) - M_0}{u} = \int \frac{e^{uy} - 1}{u} dP_Y(y),$$

on sait que $\forall \tau > 0, \forall u \in]0, \tau[$:

$$\left| \frac{e^{uy} - 1}{u} \right| \leq \frac{e^{\tau|y|}}{\tau}, \quad (1.13)$$

ce résultat s'obtient par exemple en introduisant la fonction définie par $g(v) = \frac{e^v - 1}{v}$ pour $v \neq 0$, et $g(0) = 1$, g est une fonction croissante sur \mathbb{R} , on a pour $y \geq 0$:

$$\frac{e^{uy} - 1}{u} \leq \frac{e^{\tau y} - 1}{\tau} \leq \frac{e^{\tau y}}{\tau},$$

et pour $y < 0$

$$\frac{1 - e^{uy}}{u} \leq -y \leq \frac{e^{-\tau y}}{\tau},$$

ce qui prouve (1.13). On a $\int y dP_Y(y) = E(\log X) < 0$, comme $M(0) = 1$, il existe $s > 0$ tel que $M(s) = E(X^s) < 1$. \square

lemme 1.3 $\{B(e_t)\}$ Suite de matrices positives, γ_B l'exposant de lyapunov alors :

$$\gamma_B < 0 \Leftrightarrow \exists s > 0, \exists t_0 \geq 1,$$

$$\gamma_B := E\{\|B(e_{t_0})B(e_{t_0-1}) \cdots B(e_1)\|^s\} < 1.$$

Preuve :

supposons $\gamma > 0$, comme

$$\gamma_B = \inf_t \left\{ \frac{1}{t} E\{\log \|B(e_t)B(e_{t-1}) \cdots B(e_1)\|\} \right\} < 0,$$

$$\exists t_0 \geq 1 \text{ tel que } E\{\log \|B(e_{t_0})B(e_{t_0-1}) \cdots B(e_1)\|\} < 0,$$

de plus

$$E\{\|B(e_{t_0})B(e_{t_0-1}) \cdots B(e_1)\|\} = \|E\{B(e_{t_0})B(e_{t_0-1}) \cdots B(e_1)\}\|$$

$$\|E\{B(e_1)\}^{t_0}\| = E\{\|B(e_1)\|\}^{t_0} < +\infty,$$

en utilisant la norme multiplicative $\|B\| = \sum_{i,j} |B(i,j)|$, la positivité des éléments des B_i , l'indépendance et l'équidistribution des B_i , d'après le lemme passé entraîne donc l'existence d'un $s > 0$ et $t_0 \geq 1$ tel que $\gamma_B \xi < 1$, (l'inégalité de Jensen) on obtient :

$$\gamma_B \leq \frac{1}{t_0} E(\log \|B(e_{t_0})B(e_{t_0-1}) \cdots B(e_1)\|) \leq \frac{1}{st_0} \log \gamma_B < 0. \quad \square$$

Le corollaire suivant existe dans l'article Bibi et Ghezal [2].

Corollaire 1.5 *Soit γ_B de la suite $\{B(e_t)\}$, alors*

$$\gamma_B < 0 \Leftrightarrow \exists s > 0, E(h_t^{2s}) < \infty \text{ et } E(X_t^{2s}) < \infty,$$

où $X_t = h_t e_t$ est une solution strictement stationnaire de GARCH(p,q).

Exemple 1.5 *Existence des moments du modèle GARCH(1,1).*

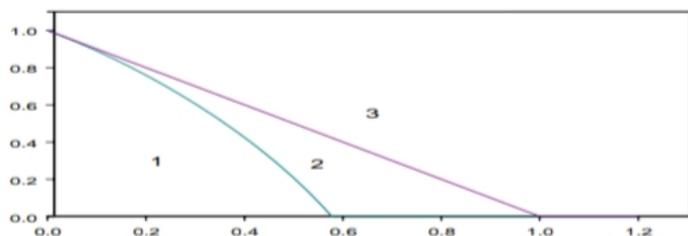


FIGURE 1.4 – Représentation de la série GARCH(1,1).

La Figure(1.2) représente l'existence des moments du modèle GARCH(1,1) (l'axe des abscisses représente ϕ_1 et l'axe des ordonnées représente ξ_1) tel que 1 représente l'existence de moment d'ordre 4, 1 et 2 représente les moments d'ordre 2 mais 3 représente la variance infinie.

1.3.1 Kurtosis

Dans cette partie on va calculer le coefficient de Kurtosis d'un modèle TGARCH(p,q), les résultats suivants sont trouver dans Francq et Zakoïan [16]. D'abord on calcule les moments conditionnelles d'ordre k :

$$E\{X_t^{2k} | \sigma\{X_s, s < t\}\} = E\{h_t^{2k} e_t^{2k} | \sigma\{X_s, s < t\}\},$$

d'après la dépendance de h_t^{2k} et $\sigma\{X_s, s < t\}$ et on utilisons les propriétés de l'espérance conditionnelle nous avons :

$$E\{X_t^{2k} | \sigma\{X_s, s < t\}\} = h_t^{2k} E\{e_t^{2k} | \sigma\{X_s, s < t\}\} = h_t^{2k} E\{e_t^{2k}\}. \quad (1.14)$$

Proposition 1.2 *Le coefficient de Kurtosis de la loi conditionnelle d'un processus (X_t) qui vérifie la formule (0.2) est donné par :*

$$Kur_X = Kur_e, \quad (1.15)$$

où Kur_e signifie le coefficient conditionnelle du processus (e_t) .

Preuve :

pour démontrer la relation (1.15), on va calculer le Kurtosis de (X_t) par rapport à la tribu $\sigma\{X_s, s < t\}$, pour tout $t, s \in \mathbb{Z}$. Par définition on a

$$Kur_X = \frac{E\{X_t^4 | \sigma\{X_s, s < t\}\}}{(E\{X_t^2 | \sigma\{X_s, s < t\}\})^2},$$

et d'après l'équation (1.14), on obtient

$$Kur_X = \frac{h_t^4 E\{e_t^4\}}{h_t^4 (E\{e_t^2\})^2} = Kur_e,$$

d'où le résultat. □

1.3.1.1 Le coefficient de Kurtosis de la loi inconditionnelle

D'après Francq et Zakoïan [16] on a :

Proposition 1.3 *Soit (X_t) processus TGARCH, le coefficient de Kurtosis de la loi inconditionnelle de (X_t) donné par :*

$$Kur_X = \frac{E\{h_t^4\}}{(E\{h_t^2\})^2} Kur_e.$$

Preuve :

Par définition on a : $Kur_X = \frac{E\{X_t^4\}}{(E\{X_t^2\})^2}$ et d'après l'indépendance de e_t^2 et h_t^2 , e_t^4 et h_t^4 on trouve :

$$Kur_X = \frac{E\{e_t^4 h_t^4\}}{(E\{e_t^2 h_t^2\})^2} = \frac{E\{e_t^4\} E\{h_t^4\}}{(E\{e_t^2\})^2 (E\{h_t^2\})^2} = \frac{E\{h_t^4\}}{(E\{h_t^2\})^2} Kur_e,$$

d'où le résultat. □

lemme 1.4 Soit (X_t) processus de TGARCH qui vérifie l'équation (0.2). Le coefficient de Kurtosis de ce processus est :

$$Kur_X = \frac{Kur_e}{Kur_e - c(Kur_e - 1)}. \quad (1.16)$$

Preuve :

Soit (X_t) satisfait (1.4),

$$\text{si } \sum_{i \geq 0} |\alpha_i| < \infty \text{ avec } \sum_{i \geq 0} \alpha_i L^i = \frac{1 - \sum_{i=1}^q \xi_i L^i}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} \phi_i L^i},$$

sous la condition $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} \phi_i < 1$, on obtient

$$X_t^2 = \frac{\phi_0}{1 - \phi(1)} - \sum_{i \geq 0} \alpha_i \omega_{t-i}, \quad (1.17)$$

où $\alpha_1 = 1$, on introduit la variance sur les deux membres de (1.17) il vient :

$$V(X_t^2) = c - V(\omega_t), \quad c = \sum_{i \geq 0} \alpha_i^2,$$

d'autre part on a

$$V(\omega_t) = E\{\omega_t^2\} = E\{h_t^2(e_t^2 - 1)^2\} = E\{h_t^2\}(E\{e_t^4\} - 1) = E\{h_t^2\}(Kur_e - 1),$$

donc

$$V(X_t^2) = cE\{h_t^2\}(Kur_e - 1), \quad (1.18)$$

et nous avons aussi

$$V(X_t^2) = E\{X_t^4\}(E\{X_t^2\})^2 = Kur_e E\{h_t^2\} - (E\{h_t\})^2, \quad (1.19)$$

de l'équation (1.18) et (1.19) on trouve que

$$\begin{aligned} Kur_e E\{h_t^2\} - (E\{h_t\})^2 &= cE\{h_t^2\}(Kur_e - 1), \\ (Kur_e - c(Kur_e - 1))E\{h_t^2\} &= (E\{h_t\})^2, \end{aligned} \quad (1.20)$$

alors de l'équation (1.20) on obtient l'équation (1.16). □

Exemple 1.6 Pour le modèle TGARCH(1,1) à coefficients positifs, la condition d'exis-

Chapitre 1. Propriétés probabilistes d'un modèle TGARCH(p,q)

tence de $E\{|X_t|^m\}$ peut être obtenue directement. en utilisant la représentation :

$$h_t = \phi_0 + a(e_{t-1})h_{t-1}, \quad a(e) = \phi_1 e^+ + \psi_1 e^- + \xi_1,$$

nous trouvons que $E\{h_t^m\}$ existe et satisfait :

$$E\{h_t^m\} = \sum_{i=0}^m C_m^i \phi_0^i E\{a^{m-i}(e_{t-1})\} E\{h_t^{m-i}\},$$

si et seulement si $E\{a^m(e_t)\} < 1$.

Si cette condition est satisfait $m = 4$, alors le coefficient de kurtosis existe. De plus, si $e_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ on a :

$$Kur_X = 3 \frac{E\{h_t^4\}}{(E\{h_t^2\})^2},$$

et en utilisant la notation $a_i = E\{a^i(e_t)\}$, les moments peuvent être calculés successive-ment comme :

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\phi_1 + \psi_1) + \xi_1, \quad E\{h_t\} = \frac{\phi_0}{1 - a_1}.$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \psi_1^2) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\xi_1(\phi_1 + \psi_1) + \xi_1^2, \quad E\{h_t^2\} = \frac{\phi_0^2(1 + a_1)}{(1 - a_1)(1 - a_2)}.$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\phi_1^3 + \psi_1^3) + \frac{3}{2}\xi_1(\phi_1^2 + \psi_1^2) + \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\xi_1^2(\phi_1 + \psi_1) + \xi_1^3,$$

$$E\{h_t^3\} = \frac{\phi_0^3(1 + 2a_1 + 2a_2 + a_1a_2)}{(1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3)}.$$

$$a_4 = \frac{3}{2}(\phi_1^4 + \psi_1^4) + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi_1(\phi_1^3 + \psi_1^3) + \xi_1^4 + 3\xi_1^2(\phi_1^2 + \psi_1^2) + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\xi_1^3(\phi_1 + \psi_1),$$

$$E\{h_t^4\} = \frac{\phi_0^4(1 + 3a_1 + 5a_2 + 3a_1a_2 + 3a_3 + 5a_1a_3 + 3a_2a_3 + a_1a_2a_3)}{(1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3)}.$$

De nombreux moments du TGARCH(1,1) peuvent être obtenus de la même manière, comme les autocorrélations des valeurs absolues et des carrés, mais les calculs peuvent être fastidieux.

Estimation d'un modèle TGARCH(p,q)

Dans ce chapitre, nous allons traiter l'estimation des paramètres d'un modèle TGARCH, la méthode d'estimation la plus utilisée est la méthode de quasi maximum vraisemblance (QMV) gaussienne. Les modèles reposent sur des formulations des moyennes et des variances conditionnelles, en pratique celle ci souvent paramétrées de façon que la moyenne conditionnelle $m_t(\theta)$ et la variance conditionnelle $h_t^2(\theta)$ apparaissent comme des fonctions de paramètres inconnus et de valeurs passées du processus, la connaissance de ces moments ne suffit cependant pas sous hypothèse supplémentaire à caractériser la loi conditionnelle des processus, la vraisemblance est écrite comme si la loi des variables X_t était normale centrée réduite, mais cette hypothèse n'est pas nécessaire pour la convergence d'estimateur, elle a évident un effet sur la variance de la loi normale asymptotique d'estimateur, le processus observé dans cette estimation est un processus strictement stationnaire non anticipative défini comme l'équation (0.2) dans le chapitre précédent. Nous présentons ici cette méthode, commençons par l'étude des propriétés stationnaire (asymptotique) de QMV c'est à dire la consistance forte (la convergence forte) puis la normalité asymptotique de QMV.

2.1 Les propriétés asymptotiques de QMV

Soit le modèle TGARCH qui défini comme suit :

$$\begin{cases} X_t = h_t e_t \\ h_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^q \phi_i X_{t-i}^+ + \psi_i X_{t-i}^- + \sum_{j=1}^p \xi_j h_{t-j}, \forall t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

telle que $\phi_0 > 0$, $\phi_i \geq 0$, $\psi_i \geq 0$ ($i = \overline{1, q}$) et $\xi_j \geq 0$ ($j = \overline{1, p}$).

Une grande attention a été accordée récemment aux propriétés asymptotique du quasi maximum estimateur de variance dans le contexte des processus TGARCH, l'approche de maximum de vraisemblance nécessite de spécifier une distribution particulière, supposons donc que e_t soit normalement distribué avec un zéro moyen et une variance égale 1. Soit $\underline{\phi}_0 = (\phi_0(1), \dots, \phi_0(d))' \in \mathbb{R}^d$, $\underline{\phi}(k) = (\phi_1(k), \dots, \phi_q(k))' \in \mathbb{R}^q$, $\underline{\psi}(k) = (\psi_1(k), \dots, \psi_q(k))' \in \mathbb{R}^q$ et $\underline{\xi}(k) = (\xi_1(k), \dots, \xi_p(k))' \in \mathbb{R}^p$ avec ($k = 1, \dots, d$) sont les coefficients de modèle TGARCH et soit θ un vecteur contenant ces paramètres et les probabilités de transitions.

Définition 2.1 Soit (X_1, \dots, X_n) une réalisation de longueur n du non anticipative solution stationnaire de modèle TGARCH, avec les conditions initiales spécifiées ci dessus. D'après Hamadeh et Zakoïan [21] on a : soit (X_1, \dots, X_n) des observations constituent une réalisation d'un TGARCH(1,1) et soit $\underline{\theta}$ un vecteur des paramètres à estimer tel que :

$$\underline{\theta} = (\phi_0, \phi_1, \psi_1)' \in \Phi \subset \mathbb{R}_+^*$$

où Φ est un espace de paramètre. La valeur du paramètres est inconnue, elle définit par $\underline{\theta}_0 = (\phi_0^*, \phi_1^*, \psi_1^*)'$. Nous précisions des valeurs initiales X_0, \tilde{h}_0^2 et on écrit la vraisemblance conditionnelle gaussienne

$$L_n(\underline{\theta}) = L_n(\underline{\theta}; X_1, \dots, X_n) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{h}_t^2}} \exp\left(-\frac{X_t^2}{2\tilde{h}_t^2}\right), \quad (2.1)$$

pour $t \geq 1$, on définit \tilde{h}_t^2 récursivement par

$$\tilde{h}_t^2 = \tilde{h}_t^2(\underline{\theta}) = \phi_0 + \sum_{i=1}^q \phi_i (X_{t-i}^+)^2 + \psi_i (X_{t-i}^-)^2 + \sum_{j=1}^p \xi_j h_{t-j}^2,$$

On peut prendre comme valeurs initiales

$$X_0^2 = \tilde{h}_0^2 = \phi_0.$$

Maintenant on donne quelques définitions sur l'estimateur et le quasi maximum vraisemblance.

Le quasi maximum vraisemblance

La quasi maximum vraisemblance a été développé par le staticien Ronald Aylmer Fisher dans une série de travaux par exemple (Fisher 1912,1922,1935), elle a gagné une grande popularité comme méthode d'estimation pour le modèle TGARCH, car elle est valable pour tout processus strictement stationnaire. Quasi vraisemblance est une technique uti-

lisé pour estimer des paramètres inconnus à partir d'une vraisemblance supposé. Pour cela, il se fait décrire la vraisemblance en fonction des paramètres, et de la maximiser. Les valeurs qui sont obtenues de ce processus de maximisation sont les estimations du maximum vraisemblance des paramètres inconnus. En considérant l'estimation des paramètres de la solution strictement stationnaire, non anticipative et ergodique du modèle (0.2).

L'approche du maximum de vraisemblance nécessite de spécifier une distribution particulière pour X_t . Généralement, en étudiant la quasi vraisemblance gaussienne (la vraisemblance obtenue à partir d'une loi normale centré réduite pour le X_t).

Définition 2.2 *L'estimateur de maximum vraisemblance est défini de façon unique, et se calcule explicitement. Il présente de nombreux avantages. sous des hypothèses vérifiées par de nombreux modèles courants, on démontre qu'il est asymptotiquement sans biais et convergente, on démontre de plus que sa variance est minimale. la méthode de maximum de vraisemblance est donc théoriquement la meilleure des méthodes d'estimation, et pour calculer ce maximum il faut déterminer les valeurs pour lesquelles la dérivé de la vraisemblance s'annule. Or par définition la vraisemblance est un produit de probabilités ou de densités, qui peut être assez compliqué à dériver, donc il est préférable de dériver une somme, et c'est pourquoi on commence par remplacer la vraisemblance par son logarithme étant croissante, il est équivalent de maximiser $\log(L(\theta, x_1, \dots, x_n))$ ou $L(\theta, x_1, \dots, x_n)$. Pour un paramètre multidimensionnel, le principe est le même, mais les calculs d'optimisation sont plus compliqués, pour les lois normales deux paramètres sont inconnus. Afin d'éviter des confusions dans les dérivations nous noterons ν le paramètre de variance habituellement noté h^2 , pour un n-uplet de réels (x_1, \dots, x_n) la vraisemblance vont :*

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \nu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\nu}}.$$

Pour calculer le log de vraisemblance, ce dernier est utiliser pour l'application numérique. D'après Francq et al [8] on donne la remarque suivante :

Remarque 2.1 *Si $p \neq 0$ la difficulté est comme une technique de simulation, pour cela on base sur le maximum de vraisemblance estimateur dans le cas $p = 0$.*

Définition 2.3 *La fonction log quasi-vraisemblance donné sous la forme*

$$\log \tilde{L}_n(\theta) = n \log(2\pi) + \sum_{t=1}^n \left[\log \tilde{h}_t + \frac{X_t^2}{\tilde{h}_t} \right].$$

D'après Francq et Zakoïan [15] on a aussi les deux définitions suivantes :

Définition 2.4 L'estimateur de quasi maximum de vraisemblance de $\underline{\theta}$ noté $\hat{\underline{\theta}}_n$ est obtenu en maximisant la fonction de quasi maximum de vraisemblance $L_n(\underline{\theta})$ i.e

$$\hat{\underline{\theta}}_n = \arg \max_{\underline{\theta} \in \Phi} L_n(\underline{\theta}) = \arg \min_{\underline{\theta} \in \Phi} \tilde{J}_n(\underline{\theta}). \quad (2.2)$$

Définition 2.5 L'estimateur de quasi-maximum de vraisemblance $\hat{\underline{\theta}}_n$ est obtenu en minimisant le critère limite

$$\tilde{J}_n(\underline{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t, \quad \tilde{l}_t = \tilde{l}_t(\underline{\theta}) = \log \tilde{h}_t^2 + \frac{X_t^2}{\tilde{h}_t^2},$$

$$\text{avec } l_t(\underline{\theta}) = \log h_t^2 + \frac{X_t^2}{h_t^2}.$$

La convergence forte des estimateurs du QMV pour le modèle TGARCH(1.1) a été démontré sous des hypothèses de stationnarité par Lumsdaine (1996), Lee et Hansen (1994).

2.1.1 La consistance forte de QMV

pour étudier la convergence forte des estimateurs du QMV, on fait quelque hypothèse donné par Hamadeh et Zakoïan [21], soient $\mathcal{P}_{\underline{\theta}}$ et $\varphi_{\underline{\theta}}$ deux polynômes de degré q et p où

$$\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}}}(y) = \sum_{i=1}^q \phi_i y^i, \quad \mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}}}(y) = \sum_{i=1}^q \psi_i y^i \text{ et } \varphi_{\underline{\theta}}(y) = 1 - \sum_{j=1}^p \xi_j y^j,$$

H1 : $\underline{\theta}_0 \in \Phi$ et Φ est un compact.

H2 : $\gamma_B < 0$ et $\forall \underline{\theta} \in \Phi, \sum_{j=1}^p \xi_j < 1$.

H3 : e_t^2 a une loi non dégénérée et $E\{e_t^2\} = 1$.

H4 : Si $p > 0$, les polynômes $\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}_0}}, \mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}_0}}$ et $\varphi_{\underline{\theta}_0}$ n'ont pas des racines communes, de plus $\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}_0}}(1) + \mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}_0}}(1) \neq 0$ et $\phi_{01} + \psi_{01} + \xi_{01} \neq 0$.

D'après proposition (1.1) on note que H2 implique $1 - \xi_1 y = 0 \Rightarrow |y| > 1$.

A partir des hypothèses précédentes, on peut énoncer la remarque de Francq et Zakoïan.

Remarque 2.2 - Dans le cas ARCH, l'hypothèse H4 n'est pas vérifiée.

- On voit que la seule racine de $\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}_0}}(y)$ et $\mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}_0}}(y)$ est 0 et la seule racine de $\varphi_{\underline{\theta}_0}(y)$ est $\frac{1}{\xi_1}$.
- Pour les propriétés d'estimateur du QMV d'un TGARCH(1,1), l'hypothèse de $E\{e_t\} = 0$ n'est pas nécessaire.
- Dans l'hypothèse H3, on note $E\{\theta_n e_t^2\} = 1$ pour des raisons d'identifiabilité et n'est pas pour dire que $E\{e_t^2\} < \infty$.

Le théorème suivant de Francq et Zakoïan [12], permet d'établir la convergence forte de $\hat{\theta}_n$.

Théoreme 2.1 *soit $(\hat{\theta}_n)$ une suite d'estimateurs du QMV vérifie l'équation (2.2) avec les conditions initiales $X_0^2 = \dots = X_{1-q}^2 = \tilde{h}_0^2 = \dots = \tilde{h}_{1-p}^2 = \phi_0$ ou $X_0^2 = \dots = X_{1-q}^2 = \tilde{h}_0^2 = \dots = \tilde{h}_{1-p}^2 = X_1^2$, sous les hypothèses H1-H4, donc*

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \underline{\theta}_0 \text{ p.s. quand } n \rightarrow \infty.$$

Le théorème a été prouvé dans Francq et al [17]. Cette démonstration base sur les lemmes suivants (dans l'article Bibi et Ghezal [3]) :

lemme 2.1 *Ce lemme signifie qu'on peut oublier les valeurs initiales, en utilisant la compacité de Φ et on montre que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Phi} |J_n(\theta) - \tilde{J}_n(\theta)| = 0, \text{ p.s.}$$

Preuve :

En intégrant l'équation de TGARCH(1,1) et en remplaçant h_{t-1}^2 par \tilde{h}_{t-1}^2 dans h_t^2 on obtient

$$\sum_{i=0}^{\infty} \xi_1^i (\phi_0 + \phi_1 X_{t-i}^2),$$

on fait une majoration, on déduit presque sûrement que :

$$\sup_{\theta \in \Phi} \|h_t^2 - \tilde{h}_t^2\| = \sup_{\theta \in \Phi} \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \xi_1^i (\phi_0 + \phi_1 X_{t-i}^2) \right\| \leq K \xi_1^t, \forall t \quad (2.3)$$

en utilisant l'équation (2.3),

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Phi} |J_n(\theta) - \tilde{J}_n(\theta)| &= \sup_{\theta \in \Phi} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log h_t^2 - \log \tilde{h}_t^2 + \frac{X_t^2}{h_t^2} - \frac{X_t^2}{\tilde{h}_t^2} \right| \right\} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Phi} \left\{ \left| \log \left(\frac{h_t^2}{\tilde{h}_t^2} \right) \right| + \left| \frac{\tilde{h}_t^2 - h_t^2}{h_t^2 \tilde{h}_t^2} \right| X_t^2 \right\} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{\infty} \sup_{\theta \in \Phi} \left\{ \left| \log \left(\frac{h_t^2}{\tilde{h}_t^2} \right) \right| \right\} + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{\infty} \sup_{\theta \in \Phi} \left\{ \left| \frac{\tilde{h}_t^2 - h_t^2}{h_t^2 \tilde{h}_t^2} \right| X_t^2 \right\}, \end{aligned}$$

lorsque on fait une majoration on trouve $h_t^2 \geq \sup_{\underline{\theta} \in \Phi} \{\phi_0\}$ qui est équivalent à $\frac{1}{h_t^2} \leq \sup_{\underline{\theta} \in \Phi} \{\frac{1}{\phi_0}\}$, donc

$$\sup_{\underline{\theta} \in \Phi} |J_n(\underline{\theta}) - \tilde{J}_n(\underline{\theta})| \leq \left\{ \sup_{\underline{\theta} \in \Phi} \frac{1}{\phi_0} \right\} \frac{K}{n} \sum_{t=1}^n \xi_1^t + \left\{ \sup_{\underline{\theta} \in \Phi} \frac{1}{\phi_0^2} \right\} \frac{K}{n} \sum_{t=1}^n \xi_1^t X_t^2.$$

Pour montrer que $\xi_1^t X_t^2 \rightarrow 0$ p.s. en utilisant le lemme de Borel-Cantelli, nous montrons que pour tout réel $\phi > 0$ la série de terme général

$$P(\xi_1^t X_t^2 > \phi) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{E\{\xi_1^t X_t^2\}^z}{\phi^z} = \frac{E\{X_t^{2z}\}}{(1 - \xi_1)\phi^z} < \infty,$$

en utilisant la stationnarité stricte et l'existence des moments d'ordre $z > 0$ pour X_t^2 , de plus, pour déduire le résultat, en utilisant le lemme de Cesàro (voir Annexe). □

lemme 2.2 *Ce lemme est appelé l'identifiabilité du paramètre, on suppose que $h_t^2(\underline{\theta}) = h_t^2(\underline{\theta}_0)P_{\underline{\theta}_0}$ p.s. et on montre que $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0$.*

Preuve :

On remarque qu'on a

$$\log h_t^2(\underline{\theta}) = \frac{\phi_0}{\varphi_{\underline{\theta}}(1)} + \frac{\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}}(D)} \mathbb{I}_{\{X_t > 0\}} \log X_t^2 + \frac{\mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}}(D)} \mathbb{I}_{\{X_t < 0\}} \log X_t^2,$$

on a aussi

$$\log h_t^2(\underline{\theta}_0) = \frac{\omega}{\varphi_{\underline{\theta}_0}(1)} + \frac{\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}_0}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}_0}(D)} \mathbb{I}_{\{X_t > 0\}} \log X_t^2 + \frac{\mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}_0}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}_0}(D)} \mathbb{I}_{\{X_t < 0\}} \log X_t^2,$$

si $\log h_t^2(\underline{\theta}) = \log h_t^2(\underline{\theta}_0)$ p.s., par stationnarité nous avons $\log h_t^2(\underline{\theta}) = \log h_t^2(\underline{\theta}_0)$ pour toute t , donc nous obtenons presque sûrement

$$\begin{aligned} \log h_t^2(\underline{\theta}) - \log h_t^2(\underline{\theta}_0) &= \frac{\phi_0}{\varphi_{\underline{\theta}}(1)} - \frac{\omega}{\varphi_{\underline{\theta}_0}(1)} + \left[\frac{\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}}(D)} - \frac{\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}_0}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}_0}(D)} \right] \mathbb{I}_{\{X_t > 0\}} \log X_t^2 \\ &\quad + \left[\frac{\mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}}(D)} - \frac{\mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}_0}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}_0}(D)} \right] \mathbb{I}_{\{X_t < 0\}} \log X_t^2, \end{aligned}$$

on déduit que

$$\left[\frac{\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}}(D)} - \frac{\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}_0}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}_0}(D)} \right] \mathbb{I}_{\{X_t > 0\}} \log X_t^2 + \left[\frac{\mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}}(D)} - \frac{\mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}_0}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}_0}(D)} \right] \mathbb{I}_{\{X_t < 0\}} \log X_t^2 = \frac{\phi_0}{\varphi_{\underline{\theta}}(1)} - \frac{\omega}{\varphi_{\underline{\theta}_0}(1)}.$$

On choisi quelque soit variable aléatoire qui est mesurable par rapport à $\sigma\{e_u, u \leq t\}$, noté par L_t . Si

$$\frac{\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}}(D)} \neq \frac{\mathcal{P}_{1_{\underline{\theta}_0}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}_0}(D)} \text{ ou } \frac{\mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}}(D)} \neq \frac{\mathcal{P}_{2_{\underline{\theta}_0}}(D)}{\varphi_{\underline{\theta}_0}(D)}, \quad (2.4)$$

il existe $(a, b)' \in \mathbb{R} - \{0, 0\}$, tel que

$$a\mathbb{I}_{\{e_t > 0\}} \log X_t^2 + b\mathbb{I}_{\{e_t < 0\}} \log X_t^2 + L_{t-1} = 0 \text{ p.s.}$$

ceci est équivalent aux deux équations

$$\begin{cases} (a \log e_t^2 + a \log h_t^2 + L_{t-1})\mathbb{I}_{\{e_t > 0\}} = 0 \\ (b \log e_t^2 + b \log h_t^2 + L_{t-1})\mathbb{I}_{\{e_t < 0\}} = 0 \end{cases},$$

notons qu'une équation de la forme $a_0 \log x^2 \mathbb{I}_{\{x > 0\}} + a_1 \mathbb{I}_{\{x > 0\}} = 0$ possède deux solutions positives alors $a_0 = 0$. Puisque e_t et (h_t^2, L_{t-1}) sont indépendants et d'après H3, on conclut que $a = 0$. De même, nous obtenons $b = 0$, ce qui conduit à une contradiction. On résume que l'équation (2.4) n'est pas vrai, et la conclusion découle de H4. \square

lemme 2.3 *Sous **H1** à **H4** alors le minimum de J_n dans Φ est unique i.e. $J_n(\underline{\theta}) > J_n(\underline{\theta}_0)$ pour toute $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0$ et prend le minimum valeur si $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0$.*

Preuve :

La preuve signifie que $E_{\underline{\theta}_0}\{|l_t(\underline{\theta})|\} < +\infty$ et si $\underline{\theta} \neq \underline{\theta}_0$ alors $E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta})\} > E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta}_0)\}$ d'après la stationnarité de la suite $(l_t(\underline{\theta}))$

$$E_{\underline{\theta}_0}\{J_n(\underline{\theta})\} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta})\} = E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta})\}$$

pour $f \geq 0$ et $f \leq g$, on a les deux propriétés suivantes : $(f + g)^{-1} \leq g^{-1}$ et $f^{-1} \geq g^{-1}$, on les besoin pour montrer que $E_{\underline{\theta}_0}\{l_t^{-1}(\underline{\theta})\} < +\infty$ nous avons donc

$$E_{\underline{\theta}_0}\{l_t^{-1}(\underline{\theta})\} = E_{\underline{\theta}_0}\{\log^{-1} h_t + \frac{X_t^2}{h_t}\} \leq E_{\underline{\theta}_0}\{\log^{-1} h_t\} \leq \max\{0, -\log \phi_0\} < \infty\},$$

en utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient

$$E\{\log h_t(\underline{\theta}_0)\} = E_{\underline{\theta}_0}\{\frac{1}{s} \log(h_t^s(\underline{\theta}_0))\} \leq \frac{1}{s} \log E_{\underline{\theta}_0}\{(h_t^s(\underline{\theta}_0))\} < \infty,$$

de cette manière, on peut conclure que

$$E\{\log^+ h_t(\underline{\theta}_0)\} < \infty \implies E_{\underline{\theta}_0}\{l_t^+(\underline{\theta}_0)\} < \infty,$$

et puisque nous avons aussi $E_{\underline{\theta}_0}\{l_t^-(\underline{\theta}_0)\} < \infty$, nous concluons que $E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta}_0)\}$ est bien définie dans \mathbb{R} , par ailleurs on a

$$\begin{aligned} E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta})\} - E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta}_0)\} &= E_{\underline{\theta}_0}\left\{\log\left\{\frac{h_t(\underline{\theta})}{h_t(\underline{\theta}_0)}\right\} + \frac{X_t^2}{h_t(\underline{\theta})} - \frac{X_t^2}{h_t(\underline{\theta}_0)}\right\} \\ &= E_{\underline{\theta}_0}\left\{\log\left\{\frac{h_t(\underline{\theta})}{h_t(\underline{\theta}_0)}\right\} + \frac{h_t(\underline{\theta}_0)}{h_t(\underline{\theta})}e_t^2 - e_t^2\right\} \end{aligned}$$

d'après la linéarité de l'espérance et l'indépendance de $h_t(\underline{\theta}_0)$ et e_t^2 , on trouve que

$$E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta})\} - E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta}_0)\} = E_{\underline{\theta}_0}\left\{\log\left\{\frac{h_t(\underline{\theta})}{h_t(\underline{\theta}_0)}\right\}\right\} + E_{\underline{\theta}_0}\left\{\frac{h_t(\underline{\theta})}{h_t(\underline{\theta}_0)} - 1\right\},$$

en appliquant la relation ($\log y < y - 1 \forall y > 0$) et le dernier résultat, on trouve que

$$E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta})\} - E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta}_0)\} \geq E_{\underline{\theta}_0}\left\{\log\left\{\frac{h_t(\underline{\theta})}{h_t(\underline{\theta}_0)}\right\}\right\} + E_{\underline{\theta}_0}\left\{\log\left\{\frac{h_t(\underline{\theta}_0)}{h_t(\underline{\theta})}\right\}\right\},$$

et comme $\log\left\{\frac{h_t(\underline{\theta}_0)}{h_t(\underline{\theta})}\right\} = -\log\left\{\frac{h_t(\underline{\theta})}{h_t(\underline{\theta}_0)}\right\}^{-1}$, alors $E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta})\} - E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta}_0)\} \geq 0$ donc

$E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta})\} > E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta}_0)\}$ si $\underline{\theta} \neq \underline{\theta}_0$, et d'après l'égalité $E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta})\} = E_{\underline{\theta}_0}\{l_t(\underline{\theta}_0)\}$, on montre l'unicité dans le vecteur initial, tel que ce dernier est réalisé si et seulement si $\frac{h_t(\underline{\theta}_0)}{h_t(\underline{\theta})} = 1$ $P_{\underline{\theta}_0}$ p.s, donc d'après le lemme (2.2) $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0$, ce qui prouve le lemme. \square

D'après Francq et Zakoïan [16] on a la remarque suivantes :

Remarque 2.3 1. *On suppose pas que la véritable valeur du paramètre appartient à l'intérieur de Φ . Ainsi, le théorème permet de traiter les cas où certains, ϕ_i ou ψ_i , sont nuls.*

2. *Il est essentiel de remarquer que la stationnarité stricte n'est pas supposée qu'à $\underline{\theta}_0$, pas dans l'ensemble Φ . En vue de proposition (1.1), la condition $\sum_{j=1}^p \xi_j < 1$ est plus faible que l'état de la stationnarité stricte.*

3. *L'hypothèse H_4 disparaît en ARCH dans le cas général, cette hypothèse permet une sur-identification de l'un des deux, mais pas les deux, nous estimons ensuite systématiquement les paramètres de TGARCH(p-1,q) si le modèle TGARCH(p,q) est utilisé.*

4. *Si $p \neq 0$, l'hypothèse H_4 empêche le cas où tous les ϕ_i sont des zéros comme le cas comme celui-ci, la stationnarité stricte de la solution du modèle (0.2) est un bruit blanc fort d'une variance égale à 1.*

5. *L'hypothèse de l'absence d'une racine commune $p > 1$ et $q > 1$. En effet si $q = 1$, la seule racine de $1 - \xi_1 z - \dots - \xi_p z^p$ est le zéro et on a $\xi_j(0) \neq 0$. Si $p = 1$ et $\xi_j(0) \neq 0$,*

l'unique racine de $1 - \xi_1 z - \dots - \xi_p z^p$ est $\frac{1}{\xi_j} > 0$, puisque les coefficients ϕ_i sont positives, donc cette valeur ne peut être jamais zéro de $1 - \xi_1 z - \dots - \xi_p z^p$.

6. L'hypothèse $E\{\eta_t\} = 0$ n'est pas nécessaire pour la consistance de QMV du modèle TGARCH, la variance conditionnelle de X_t , est donc, en général, proportionnel à h_t , l'hypothèse $E\{\eta_t^2\} = 1$, est faite pour des raisons d'identification, et n'est pas restrictive à condition que $E\{\eta_t^2\} \neq \infty$.

2.1.2 La normalité asymptotique de QMV

Une extension de théorème (1) sera donné ci -après et consistera une étape essentielle pour la preuve de la normalité asymptotique d'estimateur. Tandis que la consistance forte de tous les moments exigences, ce n'est pas le cas pour la normalité asymptotique, en effet comme dans le cas TGARCH, nous allons prouver la normalité asymptotique de $\hat{\theta}$ sous le moment conditionnel d'ordre 04 sur $(e_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, ainsi nous faisons les hypothèses suivantes :

H5 : $Kur_e := E\{e_t^4\} < \infty$.

H6 : $\underline{\theta}_0$ à l'intérieur de Φ .

L'hypothèse **H6** est une adaptation de **H1** à TGARCH, le théorème suivant de Bibi et Ghezal [3] nous donne \sqrt{n} -consistance de $\hat{\theta}$.

Théoreme 2.2 *Sous les hypothèses **H6-H2**, on a*

$$\sqrt{N}(\underline{\theta} \rightarrow \hat{\underline{\theta}}_0) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \Sigma(\underline{\theta}_0))$$

lorsque $N \rightarrow \infty$, tel que $\Sigma(\underline{\theta}_0) := J^{-1}(\underline{\theta}_0)I(\underline{\theta}_0)J^{-1}(\underline{\theta}_0)$, les matrices $I(\underline{\theta}_0)$ et $J(\underline{\theta}_0)$ sont données par :

$$I(\underline{\theta}_0) = \sum_{k=1}^p E_{\theta_0} \left\{ \frac{\partial l_k(\underline{\theta}_0)}{\partial \theta} \frac{\partial l_k(\underline{\theta}_0)}{\partial \theta'} \right\}, \quad J(\underline{\theta}_0) = \sum_{k=1}^p E_{\theta_0} \left\{ \frac{\partial^2 l_k(\underline{\theta}_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\},$$

qui peuvent être partitionnées comme

$$I(\underline{\theta}_0) = \begin{pmatrix} I_{\phi\phi} & I_{\phi\psi} \\ I_{\psi\phi} & I_{\psi\psi} \end{pmatrix}, \quad J(\underline{\theta}_0) = \begin{pmatrix} J_{\phi\phi} & J_{\phi\psi} \\ J_{\psi\phi} & J_{\psi\psi} \end{pmatrix},$$

de telle sorte que les sous-matrices $I_{\phi\phi}, I_{\phi\psi}, I_{\psi\psi}, J_{\phi\phi}, J_{\phi\psi}$ et $J_{\psi\psi}$ sont en diagonale de p -bloc.

Preuve : La preuve suit essentiellement les mêmes arguments que dans Aknouche et Bibi.

Remarque 2.4 *en fait, les sous matrices $I_{\phi\phi}, I_{\phi\psi}, I_{\psi\psi}, J_{\phi\phi}, J_{\phi\psi}$ et $J_{\psi\psi}$ sont diagonales de p -bloc implique l'indépendance asymptotique des estimations pour chaque $1 \leq k \leq p$ qui n'est par surprenant le résultat en modèle TGARCH, en outre, l'indépendance asymptotique apparaît également pour les estimations des composantes de TGARCH, avec l'innovation symétrique de distribution.*

Remarque 2.5 *Il est clair que d'après le théorème (2.2) lorsque $e_t = \eta_t$ pour tous t , notre résultat asymptotique Coïncide avec ceux pour les purs modèles TGARCH avec les innovations i.i.d. (Basawa et Lund).*

Application numérique

Le modèle TGARCH est une approche standard pour étudier le comportement de la volatilité des séries chronologiques financières. La spécification originale du modèle TGARCH est élaborée sur la base de la distribution normale pour les perturbations qui ne peuvent pas s'accommoder des propriétés de la queue-de poisson en général existant des séries chronologiques financières. Par conséquent les estimations qui en résultent ne sont pas efficaces. Traditionnellement, la distribution t de l'étudiant et la distribution générale des erreurs sont utilisés alternativement pour résoudre ce problème. Toutefois, une étude récente souligne que ces distributions alternatives manquent de stabilité en cas d'agrégation. Il reste donc le choix approprié de la répartition des perturbations dans le modèle TGARCH encore une question ouverte. Dans ce mémoire, nous présentons les caractéristiques théoriques et l'opportunité de la distribution stable tempérée. En outre, nous effectuons une série de simulation des études visant à démontrer que le modèle TGARCH avec cette répartition surpasse ceux qui ont une distributions normale, student t et GED (general error distribution). Ce résultat est robuste avec des preuves empiriques du rendement quotidien. Par conséquent, nous soutenons que la distribution stable tempérée pourrait être un outil très utile pour la modélisation de la volatilité financière dans des contextes généraux avec vue spécification de type TGARCH. Dans cette partie, on devise le chapitre en deux sections. Dans la première section on fait la simulation d'un processus GARCH(1,1) et on donne des résultats d'estimations des paramètres de ce modèle par la méthode quasi maximum de vraisemblance. Dans la deuxième section, en simulant le modèle TGARCH(1,1). Dans toute cette partie on utilise le logiciel **R** (3.5.1) avec le package fGARCH et les fonctions GarchSpec, GarchSim et GarchFit pour le modèle GARCH(1,1) et le package TGARCH avec la fonction TGarchSim pour le modèle TGARCH(1,1).

3.1 Simulation d'un modèle GARCH(1,1)

On dit qu'un marché est efficient si le prix des titres sur ce marché reflète complètement toute l'information disponible. Dans un tel marché, il est possible de prévoir les rentabilités futures. En terme des séries temporelles, le rendement sur ce marché est donc un bruit blanc. Le bruit blanc est ainsi un modèle de référence pour le rendement d'un titre. Mais nous le verrons, on rencontre assez couramment des rendements qui ne sont pas des bruit blancs. Dans les modèles de série temporelle classique, la variance de la série conditionnellement à son passé est constante, or le graphe de beaucoup des séries financières suggère que la variance du rendement n'est pas constante (voir figure 3.1).

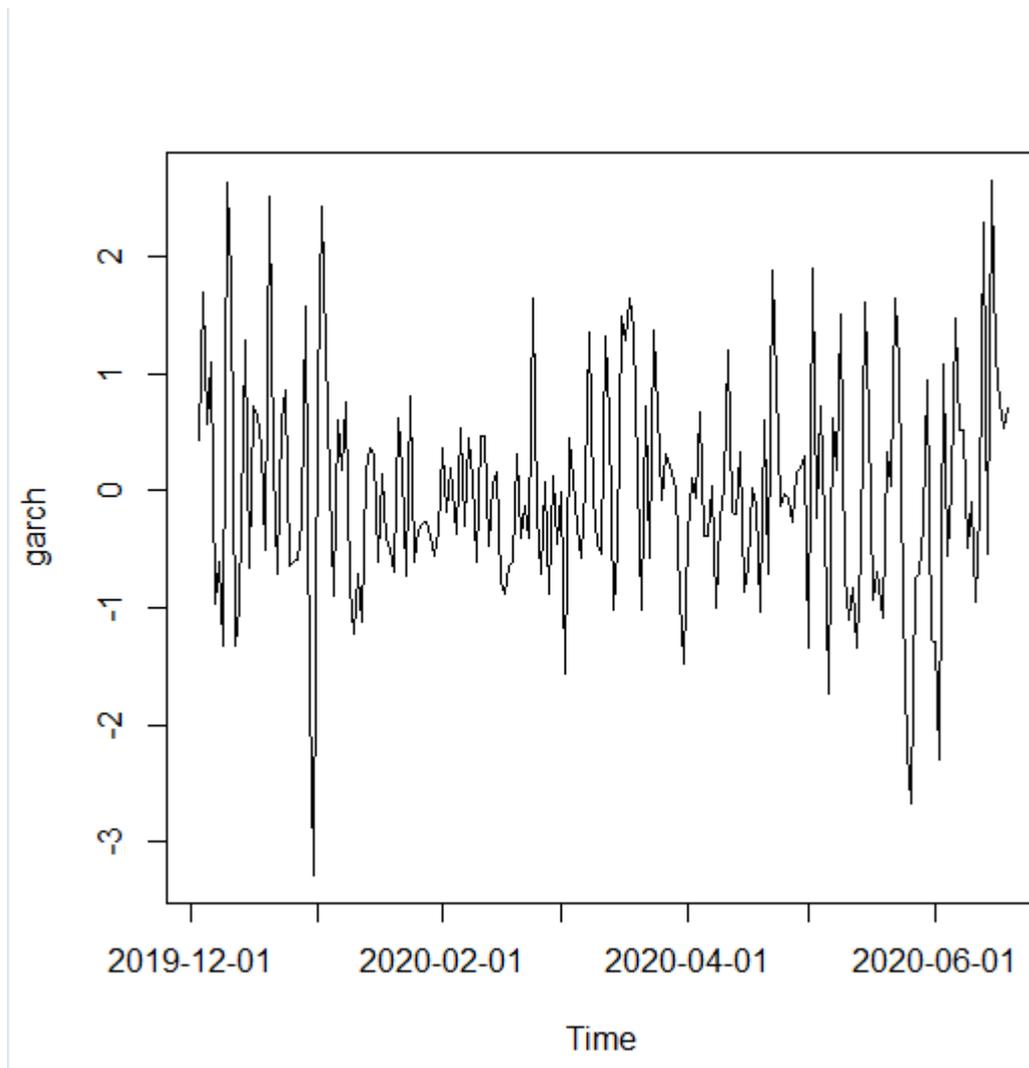


FIGURE 3.1 – Représentation du modèle GARCH(1,1).

Chapitre 3. Application numérique

Les modèles de rendement d'action doivent donc pouvoir modéliser la variabilité de la série conditionnellement au passé, si le rendement est un bruit blanc mais que son carré montre une autocorrélation c'est que le rendement est une suite de variable non corrélés mais non indépendantes, il ne peut donc être un bruit blanc gaussien.

Pour éclairer l'image sur la simulation, nous donnons un exemple qui estime les paramètres du modèle GARCH(1,1) résumés dans le tableau 3.1.

Exemple 3.1 On propose : $e = 0.028147$, $\phi_0 = 0.076614$, $\phi_1 = 0.135914$ et $\xi = 0.84642$.

	Estimation	Erreur Std.	valeur t	Pr(> t)
e	0.02815	0.04615	0.610	0.5420
ϕ_0	0.07661	0.03303	2.319	0.0204 *
ϕ_1	0.13591	0.03103	4.380	1.19e-***
ξ_1	0.84644	0.03352	25.253	< 2e - 16***

signif. codes : 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood :

-1649.964 normalized : -1.881373

TABLE 3.1 – Tableau d'estimation du modèle GARCH(1,1).

à l'aide d'une fonction sur le langage R, nous avons pu calculer la valeur du fonction log vraisemblance qui soit négative.

L'application du modèle GARCH se trouve beaucoup plus dans le domaine financier - économique, on prend un exemple vivant (société danon et société loreal).

Exemple 3.2 Cette figure est une représentation des estimations de la densité et de la gaussien, les deux estimations sont nulles lorsque le rendement et la densité soient nulles, et on remarque avec l'augmentation du rendement et de densité il y a un changement très élevé du estimation de densité sur l'estimation gaussienne.

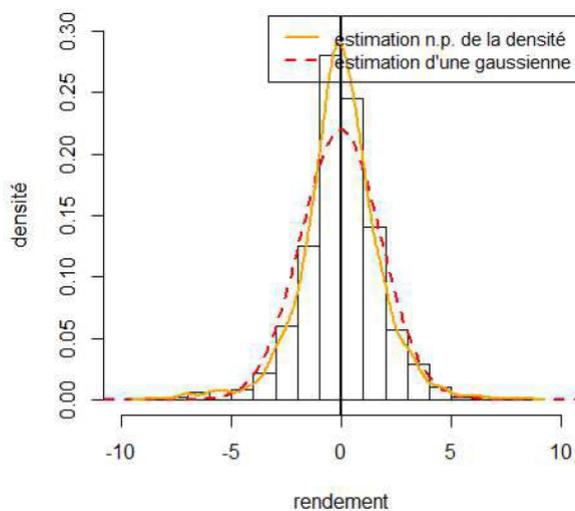


FIGURE 3.2 –

Exemple 3.3 *La même chose dans ce exemple de société loreal.*

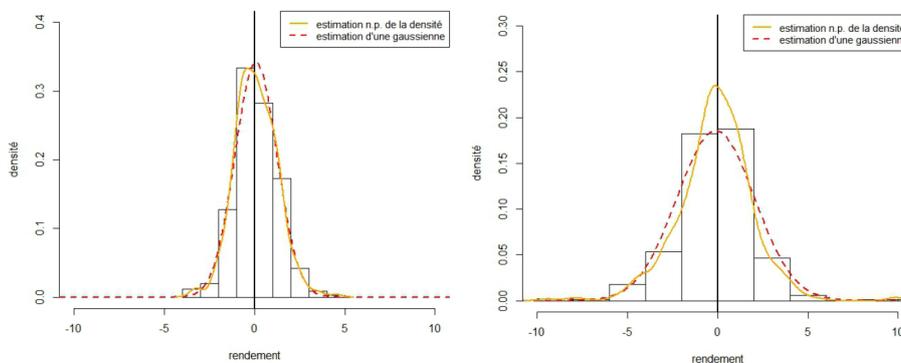


FIGURE 3.3 –

Cette figure signifie qu'il y a une différence concernant l'estimation de densité et l'estimation gaussienne et l'effet de la crise sur ce changement tel que, avant la crise on remarque que l'estimation de densité est plus élevée que la densité gaussienne, mais pendant la crise on a le contraire.

3.2 Simulation d'un modèle TGARCH(1,1)

Comme un exemple on prend $p = 1$ et $q = 1$, d'après Wu [27] le modèle TGARCH(1,1) peut être s'écrit sous la formule suivantes :

$$\begin{cases} X_t = h_t e_t \\ h_t^2 = \phi_{s_{t-1}} + \psi_{s_{t-1}} X_{t-1}^2 + \xi_{s_{t-1}} h_{t-1}^2, \forall t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

tel que X_t est série de retours avilis et h_t est la variance conditionnelle, avec $E\{e_t\} = 0$ et $Var\{e_t\} = 1$, e_t des innovation indépendants et les variables $\{\phi_{s_{t-1}}, \psi_{s_{t-1}}, \xi_{s_{t-1}}\}$ dépend

d'une variable seuil y_{t-1} i.e $\begin{cases} h_t^2 = \phi_0 + \psi_0 X_{t-1}^2 + \xi_0 h_{t-1}^2 & \text{si } y_{t-1} \leq y_0 \\ h_t^2 = \phi_1 + \psi_1 X_{t-1}^2 + \xi_1 h_{t-1}^2 & \text{sinon} \end{cases}$

tel que l'état du mode s_t est déterminer par la variable seuil y_{t-1} , la valeur seuil y_0 avec $E\{s_t\} = E\{y_{t-1} > y_0\} = \pi$. Pour simplifier on suppose que y_0 ne dépend pas de h_t^2 , et comme nous remarquons la variance conditionnelle situe entre deux régimes différents. On sait que ce modèle admet une solution strictement stationnaire si $\phi_0 < \infty$, $\phi_1 < \infty$ et $[(\psi_0 + \xi_0)(1 - \pi) + (\psi_1 + \xi_1)\pi] < 1$, pour cela, on fait la simulation selon la valeur de π , et comme suit, nous avons un tableau qui résume le résultat :

Exemple 3.4 On propose : $e = 0.2842027$, $\phi_0 = 0.07665155$, $\phi_1 = 0.13593163$, $\psi_1 = 0.00000001$ et $\xi_1 = 0.84644768$.

	Estimation	Erreur Std.	valeur t	Pr(> t)
e	2.842e-02	4.620e-02	0.615	0.53843
ϕ_0	7.665e-02	4.005e-02	1.914	0.05562
ϕ_1	1.359e-01	4.490e-02	3.028	0.00246**
ψ_1	1.000e-08	5.475e-02	0.000	1.00000
ξ_1	8.464e-01	4.371e-02	19.363	< 2e - 16***

signif. codes : 0 '****' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 ' . ' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood :

-1650.136 normalized : -1.881569

TABLE 3.2 – Tableau d'estimation du modèle TGARCH(1,1).

Le tableau précédent nous donne un calcul de valeur de la fonction log vraisemblance. On remarque que même dans ce cas elle est strictement négative. Pour bien déduire la relation entre la valeur des paramètres et la valeur de log MV on donne un autre exemple (Tableau 3.3).

Exemple 3.5 *On donne un autre exemple :*

	Estimation	Erreur Std.	valeur t	Pr(> t)
e	1.94822	0.02889	67.427	$< 2e - 16^{***}$
ϕ_0	0.08188	0.03075	2.663	0.007752**
ϕ_1	0.18705	0.08573	2.182	0.029134*
ϕ_2	0.37238	0.11902	3.129	0.001756**
ξ_1	0.40945	0.11995	3.413	0.000642***

signif. codes :0 '****' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 ' . ' 0.1 ' ' ,

Log Likelihood :

-464.2879 normalized : -1.160720

TABLE 3.3 – Tableau d'estimation du modèle GARCH(1,2).

Chapitre 3. Application numérique

On remarque qu'il y a une proportion direct entre les paramètres et la fonction log MV.

Passant maintenant à la simulation d'un modèle TGARCH, pour estimer la valeur seuil, nous divisons l'échantillon de la variable seuil en 40 intervalle et les 39 point de la grille correspondent 2.5 centiles à 97.5 centiles, pour évaluer la performance du modèle, nous utilisant le critère Akaike et le critère d'information bayésien pour comparer le modèle GARCH de seuil au modèle GARCH standard (1,1) :

$$AIC = 2K - 2 \ln L$$

$$BIC = K \ln(n) - 2 \ln L$$

où n est la taille de l'échantillon et k est le nombre de paramètres estimés dans le modèle. Des résultats semblables sont obtenus pour deux autres cas et sont présentés. Le tableau présente les résultats de l'estimation pour 3 ensembles de paramètres dans le cas 2. Les estimateurs MLE sont toujours cohérents et nous observons également que l'EQM des estimations dans chaque régime est pas sensiblement différent comme indiqué dans le tableau 1. Il peut être causé par le fait que les probabilités des écarts conditionnels dans chaque régime sont égaux, et nous nous attendons également à une EQM plus élevée pour les estimations dans régime non étatique. Lorsque la probabilité que processus de variance conditionnelle dans le régime 2 égale 0.9, même dans le cas stationnaire, nous ne serons plus ont un estimateur cohérent de 1. Comme le régime 2 est plus instable, la probabilité est élevée que l'écart conditionnel est dans un tel régime peut être la raison pour laquelle nous ne parvenons pas à estimateur. Nous remarquons également que les estimations des paramètres du MSE. Il confirme notre affirmation que la faible probabilité dans un régime affecte la performance de La figure présente la densité estimée des estimations de MLE, Les estimations de MLE sont approximativement impartiales et cohérentes.

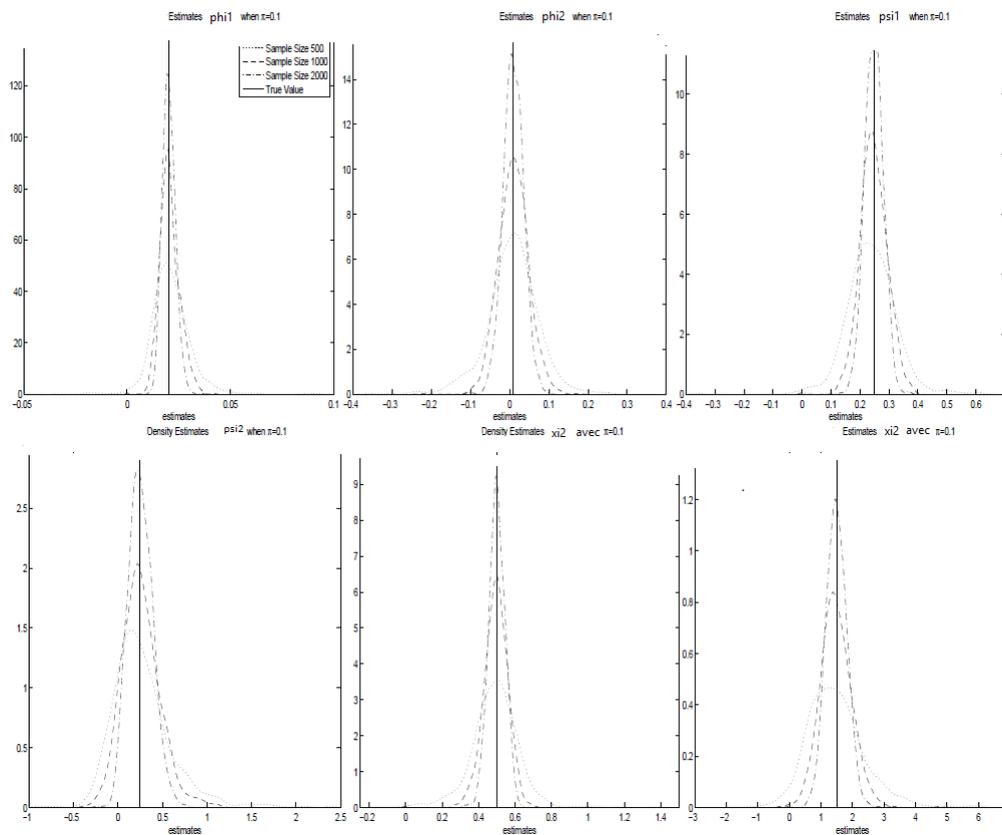


FIGURE 3.4 – Simulation du QMV du modèle TGARCH(1,1).

Annexe

4.1 Processus stochastique

Hétéroscédasticité

Définition 4.1 *En statistique, l'on parle d'hétéroscédasticité lorsque les variances des résidus des variables examinées sont différentes. Cette notion provient du grec et est composée du préfixe hétéro- (« autre »), et de skedasê (« dissipation »). La notion d'hétéroscédasticité s'oppose à celle d'homoscédasticité, qui correspond au cas où la variance de l'erreur des variables est constante. Tandis que dans le cas d'homoscédasticité, nous avons $Var(X_i) = h^2 \forall i$, nous avons désormais $Var(X_i) = h_i^2 \forall i$, où h_i^2 peut être différent de h_j^2 , pour $i \neq j$.*

La volatilité

Définition 4.2 *La volatilité c'est peut être un des concepts statistiques les plus importants dans la modélisation des séries financière, pour lequel on a les contraintes que l'espérance de l'erreur conditionnelle à toutes les observations du passé est nul et la variance n'est pas constante est change par rapport à chaque période du passé.*

Kurtosis

Définition 4.3 *Le Kurtosis est un paramètre qui mesure le degré d'aplatissement ou de rétrécissement de la distribution d'une variable aléatoire. Il est s'écrit sous la forme suivante :*

$$Kur_X = E \left\{ \frac{(X_t - \mu)^4}{h^4} \right\},$$

tel que (X_t) un processus d'espérance μ et de d'écart type h . Si le processus (X_t) est centré, alors le kurtosis de ce processus est s'écrit sous forme : $Kur_X = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$, où $\mu_k = E(X_t^k)$.

Remarque 4.1 On va spécifie trois cas de Kurtosis comparé toujours par la distribution normale, le cas où le coefficient d'aplatissement égale à 3. Si le Kurtosis supérieure à 3 la distribution est aplatie et la troisième cas si le Kurtosis inférieure à 3 lorsque la distribution est rétrécie.

Vecteur gaussien

Définition 4.4 Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n . On dit que X est un vecteur gaussien si, pour tout $a = (a_1, \dots, a_n)$ de \mathbb{R}^n ,

$$C = \sum_{i=1}^n a_i X_i,$$

une v.a.r. de loi normale (i.e., toute combinaison linéaire des composantes de (X_1, \dots, X_n) est de loi normale).

processus gaussien

Définition 4.5 Soit $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ une filtration, le processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est gaussien si pour tout $H \in \mathcal{F}(T)$ le vecteur $(X_h)_{h \in H}$ est gaussien.

4.2 Matrices

Le rayon spectral

Définition 4.6 Le rayon spectral d'une matrice B est noté $\rho(B)$ qui est le plus grand module de ces valeurs propres (λ_i) , tel que :

$$\rho(B) = \max\{|\lambda_i|, i = 1, 2, \dots\},$$

où, soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur l'espace des matrices, on a le résultat :

$$\log \rho(B) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|B^t\|, t \in \mathbb{N}^*.$$

Produit de Kronecker

Enonçons maintenant la définition et quelques propriétés sur le produit de Kronecker (Lütkepohl [23]).

Définition 4.7 Soit $A = (a_{ij})$ et B deux matrices quelconques, le produit de Kronecker de A et B définit par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ le produit de Kronecker de ces matrices

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & 5 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & 7 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & 8 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ 4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & 9 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & 6 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 15 & 3 & 9 \\ 8 & 4 & 20 & 10 & 12 & 6 \\ 1 & 3 & 7 & 21 & 8 & 24 \\ 4 & 2 & 28 & 14 & 32 & 8 \\ 4 & 12 & 9 & 27 & 6 & 18 \\ 16 & 8 & 36 & 18 & 24 & 12 \end{pmatrix}.$$

Propriété 4.1 Soit A et B deux matrices quelconques, alors on a :

1. $A^{\otimes s} = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{s \text{ fois}}$.
2. $(AB)^{\otimes s} = A^{\otimes s} B^{\otimes s}$.

4.3 Notions générales

Le lemme de Borel-Cantelli est un résultat important et très utile. Surtout pour démontrer la loi forte des grands nombres.

lemme 4.1 (Borel-Cantelli)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilisé. Soit $(A_n)_{n>1}$ une suite d'événement infini. Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty,$$

alors

$$P(\limsup_n A_n) = 0.$$

Le lemme de Cesàro signifie que si la suite (v_n) a une limite, la moyenne de Cesàro a la même limite.

lemme 4.2 (*Cesàro*)

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle converge vers un nombre fini s , et soit $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k$.

Donc la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers s .

Conclusion

Ce travail a pour but d'étudier une propriété probabiliste du modèle TGARCH (la stationnarité stricte, la stationnarité au second ordre et les moments d'ordre supérieure), nous avons cherché des conditions d'existence d'une solution strictement stationnaire pour le même modèle, et nous avons trouvés que cette condition est que l'exposant de Lyapunov doit être strictement négatif. En suite, nous avons étudié une propriété de l'estimateur de QMV pour le modèle TGARCH, en effet, la convergence forte et la normalité asymptotique. Puis nous avons passé à l'estimation des paramètres de ce modèle par la méthode QMV, cette méthode très efficace car elle est très utilisée et nous donne une bonne estimation pour n'importe quel processus strictement stationnaire. Dans le troisième chapitre, nous avons appliqué les résultats obtenus dans les deux chapitres passés, en utilisant le logiciel **R** (3.5.1) avec le package **fGarch** pour le modèle GARCH et le package **TGARCH** pour le modèle TGARCH. Finalement, nous avons rappelés quelques définitions et notions de bases que nous avons embauchées pendant notre travail.

Bibliographie

- [1] Ali.G ; 2013 ; EGARCH, GJR-GARCH, TGARCH, AVGARCH, NGARCH, IGARCH and APARCH Models for Pathogens at Marine Recreational Sites ; Journal of Statistical and Econometric Methods ; vol.2, no.3 ; ISSN :2051-5057 ; pp :60.
- [2] Bibi.A, Ghezal.A ; 2018 ; QMLE of periodic time-varying bilinear-GARCH models ; COMMUNICATIONS IN STATISTICS ; VOL.00, NO.0 ; pp :4.
- [3] Bibi.A, Ghezal.A ; 2018 ; QMLE OF PERIODIC BILINEAR MODELS AND OF PARMA MODELS WITH PERIODIC BILINEAR INNOVATIONS ; KYBERNETIKA ; VOLUME 54, NUMBER 2 ; pp :380-397.
- [4] Cui.L, Huang.k, Cai.H.J ; 2013 ; Application of a TGARCH-wavelet neural network to arbitrage trading in the metal futures market in China ; Quantitative Finance ; 1072954 ; pp :1.
- [5] Cai.Y, Stander.J ; 2019 ; The Threshold GARCH Model : Estimation and Density Forecasting for Financial Returns ; Journal of Financial Econometrics ; pp :2.
- [6] Francq.C, Zakoïan.J.M ; Deriving the autocovariances of powers of Markov-switching GARCH models, with applications to statistical inference ; EQUIPPE Université Lille 3 and CREST ; pp :4.
- [7] Francq.C, Roussignol.M, Zakoïan.J.M ; Conditional heteroskedasticity driven by hidden Markov chains ; Laboratoire de Mathématiques Appliquée Université du Littoral-Cote d'Opale ; pp :5-8.
- [8] Francq.C, Roussignol.M, Zakoïan.J.M ; 1998 ; CONDITIONAL HETEROSKEDASTICITY DRIVEN BY HIDDEN MARKOV CHAINS ; Université du Littoral-Cote d'Opale, Université de Marne la vallée and GREMARS Université de Lille 3 and CREST ; pp :199-204.

Bibliographie

- [9] Francq.C, Roussignol.M, Zakoïan.J.M; 2000; Modèles ARCH avec changement de régime markovien; C. R. Acad. Sci. Paris; pp :922-923.
- [10] Francq.C, Zakoïan.J.M; 2000; Stationnarité des modèles ARMA à changement de régime markovien; C. R. Acad. Sci. Paris; pp :1032.
- [11] Francq.C, Zakoïan.J.M; 2001; Stationarity of multivariate Markov-switching ARMA models; Journal of Econometrics 102; pp :342.
- [12] Francq.C, Zakoïan.J.M; 2004; Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes; Bernoulli 10(4); pp :607-609.
- [13] Francq.C, Gautier.A; 2004; Estimation de modèles ARMA à changements de régime récurrents; C. R. Acad. Sci. Paris,Ser.1339; pp :57.
- [14] Francq.C, Zakoïan.J.M; 2005; The L^2 -structures of standard and switching-regime GARCH models; Stochastic Processes and their Applications 115; pp :1561.
- [15] Francq.C, Zakoïan.J.M; 2007; Quasi-maximum likelihood estimation in GARCH processes when some coefficients are equal to zero; Stochastic Processes and their Applications 117; pp :1267.
- [16] Francq.C, Zakoïan.J.M; GARCH Models Structure, Statistical Inference and Financial Applications; John Wiley and Sons Ltd; 2010; ISBN :978-0-470-68394-0; pp :24-30-48-253.
- [17] Francq.C, Wintenberger.O, Zakoïan.J.M; 2012; Garch models without positivity constraints : exponential or log garch?; MPRA; pp :27.
- [18] Guerbyenne.H, Kessira.A; 2018; Power periodic threshold GARCH model :Structure and estimation; Communications in Statistics-Theory and Methods; ISSN :0361-0926; pp :8.
- [19] Ghezal.A; 2019; QMLE for Periodic Time-Varying Asymmetric log GARCH Models; Communications in Mathematics and Statistics; ISSN :2194-6701; pp :8.
- [20] He.C, Teräsvirta.T; 1999; Properties of moments of a family of GARCH Processes; Journal of Econometrics 92; pp :177.
- [21] Hamadeh.T, Zakoïan.J.M; 2011; Asymptotic properties of LS and QML estimators for a class of nonlinear GARCH processes; Journal of Statistical Planning and Inference 141; pp :489.
- [22] Hui.W, JiaZhu.P; 2014; Restricted normal mixture QMLE for non-stationary TGARCH(1,1) models; SCINCE CHAINA Mathematics; vol.57, No.7; pp :1343.

Bibliographie

- [23] Lütkepohl.H ; Handbook of Matrices ; Copyright by John Wiley and Sons Ltd ; 1996 ; ISBN :0471966886 :0471970158 (pbk) ; pp :117.
- [24] Ling.S, McAleer.M ; 2002 ; Stationarity and the existance of moments of a family of GARCH processes ; Journal of Econometrics 106 ; pp : 111.
- [25] Pan.B, Chen.M ; 2016 ; Quasi-maximum exponential likelihood estimation for a non stationary GARCH(1,1) model ; COMMUNICATIONS IN STATISTICS-THEORY AND METHODS ; VOL.45, NO.4,ISSN :0361-0926 ; pp : 1001.
- [26] Sabiruzzaman.Md, Huq.Md, Beg.R.A, Anwar.S ; 2010 ; Modeling and forecasting trading volume index : GARCH versus TGARCH approach ; The Quarterly Review of Economics and Finance 50 ; pp :143.
- [27] Wu.J ; 2010 ; Threshold GARCH Model : Theory and Application ; The University of Western Ontario ; pp :2-6.
- [28] Wu.J ; 2011 ; Threshold GARCH Model : Theory and Application ; The University of Western Ontario ; pp :2-3.
- [29] Xie.Y ; 2009 ; Consistency of maximum likelihood estimators for the regime-switching GARCH model ; Statistics : A Journal of Theoretical and Applied Statistics ; Vol.43, No.2 ; pp :155.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié au premier lieu quelques propriétés probabilistes pour le modèle TGARCH qui sont la stationnarité stricte, la stationnarité au seconde ordre et l'existence des moments d'ordre supérieurs. Au second lieu, nous allons estimer les paramètres de ce modèle par la méthode de QMV. Comme une application on va faire la simulation du modèle TGARCH en utilisant le langage R.

Mots-clé

processus GARCH, processus TGARCH, stationnarité, consistance, EQMV et la normalité asymptotique.

Abstract

In this paper, we first study some probabilistic properties for the model TGARCH which are strict stationarity, second order stationarity and the existence of higher order moments. In the second place, we will estimate the parameters of this model using the QMV method. As an application we will simulate the TGARCH model using the R language.

Keywords

GARCH process, TGARCH process, stationarity, consistance, QMLE and asymptotique normality.

ملخص

في هذه المذكرة سوف ندرس اولا بعض الخصائص الاحتمالية لنموذج TGARCH التي تتمثل في الاستقرار القوي والضعيف ووجود لحظات من الدرجة العليا، من ناحية اخرى سنقوم بتقدير وسائل هذه النماذج من خلال طريقة الاحتمال شبه اقصى. كتطبيق سنقوم بتنفيذ المحاكات لهذا النموذج باستخدام برنامج R .

الكلمات المفتاحية

نموذج GARCH ، نموذج TGARCH ، الاستقرار و مقدر الاحتمال شبه الاقصى.