الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie — Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquée

L'estimateur de Quasi Maximum de vraisemblance pour le processus APARCH avec erreurs Laplace (1,1)

Préparé par : Menacer bouthaina
Kennouda Nourhane

Devant le jury

Abdlouahab Mohammed Salah	U.Abd Elhafid Boussouf	Président
Boularouk Yakoub	U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
Bououden Rabeh	U.Abd Elhafid Boussouf	Examinateur

Année Universitaire : 2020/2021

Remerciements

La première personne que nous tenons à remercier est nos encadrant `Mr.Boularouk Yakoub`*, pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité. Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous les professeurs du département de Mathématiques et Informatique spécialité mathématiques appliquée. qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études. Nous sommes reconnaissantes à tous les membres de nos familles surtout nos mères et nos pères, et à tous nos collègues qui nous ont soutenues tout au long de nos études. Enfin, on remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail..*

Dédicace

A mon très chère père "El hachemi"

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Tu as toujours été à mes côtés me soutenir et m'encourager. Qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui. Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection puor vous.

A mon très chère mère "Chahrazad"

Qui m'a entouré d'amour, d'affection et qui fait tout pour ma réussite. Il est naturel que ma pensée la plus forte aille vers ma mère, à qui je dois la vie et une part essentielle de ma personnalité. Qu'elle sache que l'amour qu'elle me donne continue à m'animer et me permet d'envisager l'avenir comme un défi.

A mon très chère mes frère "Yasser" et "SalahElddin"

A tous les moments d'enfance passés avec vous mes frère, Aucun langage ne saurait exprimer mon respect et ma considération pour votre soutien et encouragements pour moi. Puissent nos liens fraternels se consolider et se pérenniser encore plus. Que Dieu le Tout Puissant vous garde et vous procure santé et bonheur.

A mon chére grand mère"Aichouche". *Et tout la famille* "Kennouda" et "Daoui" *sans exception.*

A mon chère mes amis "Bouthaina","Chirine","Zineb",...

Je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtes pour moi des sœurs et des amies sur qui je peux compter. En témoignage de l'amitié qui nous unit et des souvenirs de tous les moments que nous avons passés ensemble

❤ Kennouda Nourhane

Dédicace

Je dédie ce modeste travail tout d'abord :

A Allah le tout puissant, le miséricordieux. Et à son Prophète Mohamed (P.S.L).

A l'homme de ma vie, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père "RABAH"

A la femme qui est la source de mes efforts et qui me rendre heureuse par son amour : mon adorable mère "SAMIA"

A mes chèrs frères :"Abde Allah"et"Younes".

A mes chérs soeurs :"Ilhem","Imane"et"Assia"et leurs maris, sans oublier ma petite soeur "Sabrine" et mes belles fleures : "Kousai","Moayad","Iyad" avec ma petite fille "Aridj", pour donner du goût et du sens à notre vie de famille, pour l'amour qu'ils me réservent.

A ma grand-mère et père pour leurs amours

A ma soeur et chère binôme :"Nourhane",que j'aime.

A mes amies qui me connaissent de prêt ou de loin et spécialement :

"Chirine","Zineb","soumia","Nour el houda","Samar","Khawla","Amira" .

A toute ma promotion 2019/2020 et à tous ceux qui me sont chers

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur spécialement mon encadreur " Mr.Boularouk Yakoub"

Merci pour leurs confiance et leurs encouragements.

Merci

❤ *Menacer Bouthaina*

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions l'estimateur de quasi-maximum vraisemblance d'un processus APARCH avec erreur Laplace(1.1). Pour cela, nous commençons par un aperçu général sur les notions de base et les définitions (processus stochastique, la loi Laplace, processus APARCH,...). Par suite, nous nous intéressons à l'étude de la consistance et la normalité asymptotiques de l'estimateur de quasi-maximum de vraisemblance pour les paramètres de modèle APARCH avec erreur Laplace(1, 1). Enfin,nous ajoutons un autre intérêt de la consistance forte et la normalité asymptotique de cet estimateur paramétrique en présentant une application numérique concerne la modélisation d'une série chronologique simulé APARCH à base d'erreurs Laplace(1, 1) avec différentes valeurs des paramètres.

Mots clés :

Modèle APARCH, Estimateur Quasi-Maximum de vraisemblance, Laplace(1,1), Consistance forte, Normalité asymptotique.

Abstract

In this thesis, we study the quasi-maximum likelihood estimator of a APARCH process with Laplace error (1.1). For this, we start with a general overview on the basics and definitions (stochastic process, Laplace law, APARCH process, ...). Thereafter, we are interested in the study of the asymptotic consistency and normality of the quasi-maximum likelihood estimator for APARCH model parameters with Laplace error (1, 1). Finally, we add another interest of the strong consistency and asymptotic normality of this parametric estimator by presenting a numerical application concerns the modeling of a simulated APARCH time series based on Laplace (1, 1) errors with different values of parameters.

Keywords :

APARCH model, Quasi-maximum likelihood estimator, Laplace(1,1), Strong consistency Asymptotic normality.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Notations générales

Notations	
$(\Omega, A, \mathbb{P})$	espace de probabilité.
$\mathcal{F}$	filtration(suite de tribu).
Ensemble et espace	
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	les entiers positives,les entiers,les nombres réels.
Fonction	
γ_X	la fonction d'autocovariance de (X_t).
$\mathbb{I}$	fonction indicatrice.
$\mathbb{I}_{A\cap B} = \mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B$	
$\mathbb{I}_{A\cup B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B$	
Processus	
$i.i.d$	indépendant et identiquement distribué.
$L(1, 1)$	la loi laplace de moyenne 1 et variance 1.
$p.s$	presque sûrment.

Estimation

arg	argument.
Θ	l'ensemble de stationnarité .
θ	l'ensemble des paramètres.
$\hat{\theta}$	estimateur de θ.
θ_0	la vrai valeur de paramètre.

Probabilité

$\xrightarrow{D}$	convergence en distribution.
$p.s$	presque sûrment.

Introduction

Depuis les travaux de Wold (1938), l'intérêt pour le développement des modèles de séries chronologiques, pouvant répondre aux besoins de l'utilisateur, a augmenté. Les modèles de séries chronologique linéaires a coefficients constants ont connus une ère de prospérité grace , en particulier, leur méthodologie : identification, estimation, validation.

Le modèle Puissance asymétrique autorégressif conditionnellement hétéroscédastique (APARCH) est crucial dans l'analyse des données de séries chronologiques. Les séries chronologiques(ou temporelles) sont appliquées de nos jours dans des domaines aussi variés que L'économétrie, la médecine ou la démographie, pour n'en citer qu'une petite partie
Le modèle APARCH a été suggéré par Ding, Granger, et Engle(1993) est certainement l'un des modèles de type ARCH les plus prometteurs.

Dans ce mémoire nous présentons essentiellement l'estimateur de Quasi Maximum de Vraisemblance (EQMV) pour le modèle APARCH basé sur la distribution de Laplace(1, 1) organisé comme suit :

- Dans le premier chapitre, nous présentons brièvement Les définitions principaux , des propriétés des processus stochastiques des séries chronologiques et quelques notions de bases.

- Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'estimateur de quasi-maximum vraisemblance Laplace, en plus, nous étudions l'existence et la stationnarité de processus APARCH. Nous prouvons la consistance forte et la normalité asymptotique de cet l'estimateur.
- En fin, dans le dernier chapitre, utilisant logiciel R, nous exposons à travers des éxperience de type Monté Carlo nous prouvons numériquement les résultats théoriques obtenus. Nous effectuons des application numérique sur des séries chronologiques simulées.

Chapitre 1

Définitons

Dans ce premier chapitre, nous exposons un petit rappel de quelques notions de basses concernant les processus stochastiques.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique est un modèle de probabilité permettant l'étude d'un phénomène aléatoire au cours du temps.*

Définition 1.1.2 *Une processus stochastique est une famille de variable aléatoire* $(X_t, t \in T)$*, définie sur un espace probabilisé* $(\Omega, A, \mathbb{P})$ *ou* T *est un ensemble d'indice (comme* $\mathbb{N}$ *où* $\mathbb{Z}$ *,où bien une partie de* $\mathbb{N}$ *où* $\mathbb{Z}$)

- si $T = \mathbb{N}$ *le processus stochastique est à temps discret*

- si $T = \mathbb{R}_+$ *le processus stochastique est à temps continue*

Définition 1.1.3 *(L'opérateur de retard) L'opérateur L est dit opérateur de* *retard s'il décale le processus d'une unité de temps vers le passé.* $LX_t = X_{t-1}$ *pour tout* $t > 1$.

Si l'opérateur est applique k fois, on obtient :

$$L^k X_t = X_{t-k}.$$

1.1.1 Stationnarité

Définition 1.1.4 ***(Moments d'ordre r)*** *Soit* ε *une variable aléatoire admettant une densité* f *. Pour tout entier* r *, on dit que* ε *admet un moment d'ordre* r *si la variable aléatoire* ε^r *admet une espérance, c'est le cas si seulement si* $\varepsilon \mapsto \mid \varepsilon \mid f(\varepsilon)$ *est intégrable. Dans ce cas le moment d'ordre* r *de* ε *est :*

$$E(\varepsilon^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^r f(\varepsilon) d\varepsilon$$

Remarque 1.1.1 *Nous remarquons que :*

1. *le moment d'ordre 0 d'une variable aléatoire existe toujours et vaut* $E(\varepsilon^0) = E(1) = 1$
2. *le moment d'ordre 1 est l'espérance de* ε *.*

Le stationnairité au second ordre(au sens faible)

Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$est dite stationnaire au second ordre , si les trois conditions suivant sont satisfait

* $\forall t \in \mathbb{Z} \qquad E(X_t^2) < +\infty \qquad$ (existence de espérance de X_t)
* $\forall t \in \mathbb{Z} \qquad E(X_t) = m \qquad$ indépend de t (m constant par apport t)
* $\forall t \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \gamma_X &= cov(X_t, X_{t+h}) \\ &= E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h})) \end{aligned}$$

Un processus est stationnaire au second ordre si l'ensemble de ses moments sont indépendants du temps.

Le stationnarité au sens strict(fortement stationnaire)

Définition 1.1.5 *On dit que le processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est stationnaire au sens strict si la loi de* $(X_{t_1}, \cdots X_{t_n})$ *et la même que la loi de* $(X_{t_1+\tau}, \cdots X_{t_n+\tau})$ *pour tout* $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ *avec* $t_i \in T$ *pour* $i = 1 \dots n$ *et pour tout* $\tau \in T$ *avec* $t_{i+\tau} \in T$

Remarque 1.1.2 *Une suite de variable aléatoire.iid* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est strictement stationnaire .*

Le processus bruit blanc (BB)

Parmi les classes des processus stationnaire il existe des processus particulier que sont les processus BB.

Définition 1.1.6 $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un BB faible, s'il satisfait les deux conditions suivant* $\forall t \in \mathbb{Z}$ *.*

1) $E(X_t) = 0$ (centrée).

2) $\gamma(h) = E(X_t.X_{t+h}) = \sigma^2 \mathbb{I}_{h=0} = \begin{cases} \sigma^2 & si \quad h = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

- Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est iid alors (ε_t)est un BB fort.

Remarque 1.1.3

$*$ *Un BB faible est faiblement stationnaire .*

$*$ *Un BB fort est fortement stationnaire.*

1.1.2 Causalité

Définition 1.1.7 *Un processus stochastique X_t est dit causal s'il existe une suite de constantes $(\alpha_k)_{k\geqslant 0}$ telle que :$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mid \alpha_k \mid < \infty$, avec :*

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varepsilon_{t-k}$$

1.1.3 Les séries chronologiques

La théorie des séries chronologiques (ou temporelles) est appliquée de nos jours dans des domaines variés que l'économétrie, la médecine ou la démographie.

Définition 1.1.8 *Une série chronologique est un ensemble d'observations d'un processus X_t, chacun étant enregistrée a un instant t.*

Remarque 1.1.4 *Noter aussi qu'une série chronologique est une observa-*

tion d'un processus stochastique a temps discret.

Objectifs principaux dans l'étude des séries chronologiques

L'étude d'une série chronologique permet d'analyser, de décrire et d'expliquer un phénomène au cours du temps.
Mais l'un des objectifs principaux de l'étude d'une série chronologique est la prévision qui consiste à prévoir les valeurs futures $X_{t+h}, (h = 1, 2, 3, \cdots)$ de la série chronologique à partir de ses valeurs observées jusqu'au temps $t : X_1, X_2, \cdots, X_t$.

Modélisation d'une série chronologique

Un modèle est une image simplifiée de la réalité qui vise a traduire les mécanismes de fonctionnement du phénomène étudié et permet de mieux les comprendre.
On distingue principalement deux types de modèles :

1. **Les modèles déterministes :** ces modèles relèvent de la statistique descriptives consistent a supposer que l'observation de la série a la date t est une fonction du temps t et d'une variable ε_t centrée faisant office d'erreur au modèle, représentant la différence entre la réalité et le modèle proposé :

$$X_t = f(t, \varepsilon_t)$$

D'une manière générale, on peut proposer un modèle qui représente la série temporelle étudiée en combinaison des trois éléments précédents :

$$Y_t = f_t + S_t + X_t, \quad t = 1 \ldots n.$$

Où :

-f_t est appelle tendance et soit une fonction décrite par un nombre fini de paramètre, par exemple,une fonction linéaire du temps $a + bt$ ou un pôlynome du temps t.

- S_t est la composonte saisonnière et est une fonction périodique.

2. **Les modèle stochastiques :** une partie importante de l'analyse des séries chronologiques est consacrée aux modèles linéaires.

1.2 La loi laplace

Dans la théorie des probabilités et en statistiques, la loi de laplace est une densité de probabilité continue,

1.2.1 Densité de probabilité

Une variable aléatoire possède une distribution laplace (μ, b) si sa densité de probabilité est :

$$\begin{aligned} f(x \mid \mu, b) &= \frac{1}{2b} exp(-\frac{|x-\mu|}{b}) \\ &= \frac{1}{2b}\begin{cases} exp(-\frac{\mu - x}{b}) & si \quad x < \mu \\ exp(-\frac{x-\mu}{b}) & si \quad x \geq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

1.2.2 Fonction de répartition

La fonction de la répartition de la loi de laplace s'écrit sous le forme :

$$\begin{aligned} F(x) &= \textstyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}exp(-\dfrac{\mu - x}{b}) & si \quad x < \mu \\ 1 - \dfrac{1}{2}exp(-\dfrac{x-\mu}{b}) & si \quad x \geq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

1.3 Fonctions gamma

La fonction gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes, on a pour tout entier $n > 0$.

$$\Gamma(n) = (n-1)! = 1 \times 2 \times ...(n-1).$$

Et en mathématiques, les fonctions gamma incomplètes supérieure et inférieure sont des types de fonctions spéciales qui se présentent comme des solutions à divers problèmes mathématiques tels que certaines intégrales.

1.3.1 Fonction gamma

On définit la fonction gamma aussi par :

Pour tout nombre complexe z tel que $Re(z) > 0$

$$\Gamma : z \to \int_{0}^{+\infty} t^{z+1} exp(-t)dt.$$

1.3.2 fonction gamma incomplète inférieure

La fonction gamma incomplète inférieure est définie comme :

$$\Upsilon(\delta, x) = \int_{0}^{x} y^{\delta-1} e^{-y} dy.$$

1.4 Le maximum de vraisemblance

1.4.1 Estimateur

Définition 1.4.1 *Un estimateur est une statistique permettant d'évaluer un paramètre inconnu relatif à une loi de probabilité*

Définition 1.4.2 *Un estimateur est une valeur $\hat{\theta}_n$ calculée sur un échantillon tiré au hasard, la valeur $\hat{\theta}_n$ est donc une variable aléatoire possédant une espérance $E(\hat{\theta}_n)$, et une variance $Var(\hat{\theta}_n)$.*
On comprend alors que sa valeur puisse fluctuer selon l'échantillon. Elle a de très faibles chances de coïncider exactement avec la valeur θ_0 qu'elle est censée représenter. L'objectif est donc de maîtriser l'erreur commise en prenant

la valeur de $\hat{\theta}_n$ pour celle de θ.

1.4.2 La vraisemblance

La vraisemblance est utilisé pour construire des estimateurs de paramètre caractérisant une loi de probabilité ou un modele stochastique à partir d'un échantillon de mesures.

La fonction de vraisemblance est définie en fonction d'un vecteur de paramètres inconnus θ comme la densité des données observées par rapport à une mesure de probabilité discrète ou continue.

1. **cas X variable discrète :**

   Dans un premier temps, on suppose que X est une variable discrète suivant la loi $L(\theta)$ avec un paramètre inconnu. On rappelle que l'on veut estimer θ à partir des données $(x_1, \ldots, x_n)$, le vecteur des données $(x_1, \ldots, x_n)$ étant une réalisation d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de X.

   On peut définir la vraisemblance des données $x_1, \ldots, x_n$ par la fonction de θ :

   $$L_n(\theta) = \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n = x_1, \ldots, x_n), \theta).$$

   Comme $(X_1, \ldots, X_n)$est un n-échantillon, par l'indépendance et la distribution identique des variable $(X_1, \ldots, X_n)$ on peut aussi écrire :

$$L_n(\theta) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n X_i = x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i, \theta)$$

2. **Cas X variable continue :**

   Soit X une variable aléatoire suivant une loi continue décrite par la densité de probabilité f dépendant d'un paramètre θ. La vraisemblance est une fonction de θ, étant donné une réalisation x de la variable aléatoire X, qui s'écrit alors :

   $$L_n(\theta) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n).$$

   Comme $(X_1, \ldots, X_n)$est un n-échantillon, par l'indépendance et la distribution identique des variable $(X_1, \ldots, X_n)$ on peut aussi écrire :

   $$L_n(\theta) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i).$$

1.4.3 Fonction de log-vraisemblance

On appelle fonction de log-vraisemblance pour $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ la fonction de θ définie par :

$$L_n(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, \theta) = log(l_n(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, \theta)).$$

La fonction logarithme népérien étant croissante, l'estimateur maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ pour $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ vérifie :

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta}(L_n(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \theta)).$$

1.4.4 L'estimateur de quasi vraisemblance maximale *(EQMV)*

Définition 1.4.3 *En général, la fonction de vraisemblance pour un processus X n'est pas calculable puisque le passé du phénomènes $(X_0, X_{-1}, \dots)$ sont généralement inconnus. C'est pourquoi on utilise la quasi-vraisemblance qu'on obtient en remplaçant le passé du processus par des zéros.L'estimateur de quasi vraisemblance maximale (EQMV) est défini par :*

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta \in \Theta} log(QL_{\theta}(X_1, \dots, X_n)).$$

1.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.5.1 *Soient $(U_1, \dots, U_n)$ et $(V_1, \dots, V_n)$ des réels (ou des complexes). Alors :*

$$\sum_{k=1}^{n} \mid U_k V_k \mid \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \mid U_k \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \mid V_k \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.6 Convergence presque sûrement des variables aléatoires

Définition 1.6.1 *Nous disons que la suite X_n converge presque sûrement vers X si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to \infty} P(sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon) = 0$$

Ceci est noté $X_n \underset{n \to \infty}{\xrightarrow{a.s.}} X$.

Chapitre 2

Processus Puissance asymétrique ARCH Modèle-APARCH-

Dans ce chapitre, nous traitons l'estimation des paramètres d'un modèle APARCH avec erreur Laplace$(1,1)$, la méthode d'estimation envisagée est la méthode du quasi maximum de vraisemblance. Dans un premier temps, nous étudions l'existence et la stationnarité pour ce modèle. Parsuite, on va étudier en détail la méthode du quasi maximum de vraisemblance, et calculer l'estimateur de quasi maximum de vraisemblance Laplace, obtenu sous l'hypothèse que$(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suit une loi Laplace(1,1). Enfin, nous prouvons la consistance forte et la normalité asymptotique de cet estimateur paramétrique.

2.1 Processus APARCH(p,q)

Le modèle APARCH(p,q) a été introduit par Ding et comme solution de système d'équations :

$$\begin{cases} x_t = \sigma_t \xi_t \\ \sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i(|x_{t-i}| - \gamma_i x_{t-i})^\delta + \sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Où$\delta \geqslant 1$,$\alpha_0 > 0$,$\alpha_i \geqslant 0$,$-1 < \gamma_i < 1$, pour $i = 1, ..., p$, $\beta_j \geqslant 0$ pour $j = 1, ..., q$ avec $\alpha_p > 0$, $\beta_q > 0$ et $\sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j < 1$

• on note le vecteur des paramètres par : $\theta = (\delta, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p, \gamma_1, ..., \gamma_p, \beta_1, ..., \beta_q)$

Proposition 2.1.1

Soit X_t le processus APARCH définie par (2.1.1), si $(1 - \sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j L^j)^{-1}$ existe, alors pour $t \in \mathbb{Z}$ la variance conditionnelle peut s'écrit sous la forme :

$$\sigma_t^\delta = b_0 + \sum_{i \geq 1} b_i^+ (max(X_{t-i}, 0))^\delta + \sum_{i \geq 1} b_i^- (max(-X_{t-i}, 0))^\delta \tag{2.1.2}$$

où $b_0 = (1 - \sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j)^{-1} \alpha_0$ et les coefficients $(b_i^+, b_i^-)_{i \geq 1}$ sont définis par les relations de récurence :

$$\begin{cases} b_i^+ = \sum\limits_{k=1}^{q} \beta_k b_{i-k}^+ + \alpha_i (1 - \gamma_i)^\delta \quad avec \quad \alpha_i (1 - \gamma_i)^\delta = 0 \quad pour \quad i > p; \\ b_i^- = \sum\limits_{k=1}^{q} \beta_k b_{i-k}^- + \alpha_i (1 + \gamma_i)^\delta \quad avec \quad \alpha_i (1 + \gamma_i)^\delta = 0 \quad pour \quad i > p, \end{cases}$$

avec $b_i^+ = b_i^- = 0$ *pour* $i < 0$

Preuve 1 *(preuve de la Proposition 2.1.1)*

On a pour $t \in \mathbb{Z}$ *la variance conditionnelle est définie par :*

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (|x_{t-i}| - \gamma_i x_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \tag{2.1.3}$$

En remplaçant $X_t = max(X_t, 0) + min(X_t, 0)$ *et* $|X_t| = max(X_t, 0) - min(X_t, 0)$ *dans (2.1.3) on obtient :*

$$(1 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j L^j)\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (1-\gamma_i)^\delta (max(X_{t-i}, 0))^\delta + \alpha_i (1+\gamma_i)^\delta (-min(X_{t-i}, 0))^\delta \tag{2.1.4}$$

on remarque que (2.1.4) peut s'écrir sous la forme :

$$B(L)\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \Theta^+(L)(max(X_t, 0))^\delta + \Theta^-(L)(max(-X_t, 0))^\delta \tag{2.1.5}$$

avec

$$\begin{aligned} B(L) &= (1 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j L^j) \\ \Theta^+(L) &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (1-\gamma_i)^\delta L^i = \sum_{i=1}^{p} \theta_i^+ L^i \\ \Theta^-(L) &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (1+\gamma_i)^\delta L^i = \sum_{i=1}^{p} \theta_i^- L^i \end{aligned}$$

Comme $(1-\sum_{j=1}^{q}\beta_j L^j)^{-1}$ *éxiste, on'a :*

$$\sigma_t^{\delta} = b_0 + \sum_{i\geq 1} b_i^{+} L^i (max(X_t, 0)^{\delta} + \sum_{i\geq 1} b_i^{-} L^i (max(-X_t, 0))^{\delta} \tag{2.1.6}$$

pour déterminer les coefficients b_0 *et* $(b_i^{+}, b_i^{-})_{i\geq 1}$ *On a de (2.1.5) et (2.1.6) :*

$$\begin{cases} B(L)\sum_{i\geq 0} b_i^{+} L^i & = \alpha_0 + \Theta^{+}(L) \\ B(L)\sum_{i\geq 0} b_i^{-} L^i & = \alpha_0 + \Theta^{-}(L) \end{cases} \tag{2.1.7}$$

implique que

$$b_0 = b_0^{+} = b_0^{-} = \frac{\alpha_0}{B(L)} = (1-\sum_{j=1}^{q}\beta_j)^{-1}\alpha_0$$

Le système (2.1.7) est équivalent au système

$$\begin{cases} (1-\sum_{j=1}^{q}\beta_j L^j)\sum_{i\geq 0} b_i^{+} L^i = \sum_{i=0}^{p}\theta_i^{+} L^i \\ (1-\sum_{j=1}^{q}\beta_j L^j)\sum_{i\geq 0} b_i^{-} L^i = \sum_{i=0}^{p}\theta_i^{-} L^i \end{cases} \quad , \textit{ avec} \qquad \theta_0 = \alpha_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i\geq 0} b_i^{+} L^i - \sum_{i\geq 0}\sum_{j=1}^{q}\beta_j b_i^{+} L^{i+j} = \sum_{i=0}^{p}\theta_i^{+} L^i \\ \sum_{i\geq 0} b_i^{-} L^i - \sum_{i\geq 0}\sum_{j=1}^{q}\beta_j b_i^{-} L^{i+j} = \sum_{i=0}^{p}\theta_i^{-} L^i \end{cases} \quad , \textit{ avec} \qquad \theta_0 = \alpha_0.$$

de la premiére équation on a :

$$b_1^+ = \beta_1 b_0^+ + \alpha_1(1-\gamma_1)^\delta$$

$$b_2^+ = \beta_1 b_1^+ + \beta_2 b_0^+ + \alpha_2(1-\gamma_2)^\delta$$

$$b_3^+ = \beta_1 b_2^+ + \beta_2 b_1^+ + \beta_3 b_0^+ + \alpha_3(1-\gamma_3)^\delta$$

$$\ldots$$

de la deuxiéme équation on a :

$$b_1^- = \beta_1 b_0^- + \alpha_1(1+\gamma_1)^\delta$$

$$b_2^- = \beta_1 b_1^- + \beta_2 b_0^- + \alpha_2(1+\gamma_2)^\delta$$

$$b_3^- = \beta_1 b_2^- + \beta_2 b_1^- + \beta_3 b_0^- + \alpha_3(1+\gamma_3)^\delta$$

$$\ldots$$

Alors les coefficients $(b_i^+, b_i^-)_{i\geq 1}$ *sont définis par les relations de récurence :*

$$\begin{cases} b_i^+ = \sum\limits_{k=1}^{q} \beta_k b_{i-k}^+ + \alpha_i(1-\gamma_i)^\delta \quad \textit{avec} \quad \alpha_i(1-\gamma_i)^\delta = 0 \quad \textit{pour} \quad i > p; \\ b_i^- = \sum\limits_{k=1}^{q} \beta_k b_{i-k}^- + \alpha_i(1+\gamma_i)^\delta \quad \textit{avec} \quad \alpha_i(1+\gamma_i)^\delta = 0 \quad \textit{pour} \quad i > p, \end{cases}$$

Lemme 2.1.1

Soit $0 < \rho_0 < 1$, *en définir* $U = \{\theta \setminus \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_q \leqslant \rho_0\}$.

pour tout $\theta \in U$ *on a :*

$$b_i^+ \leqslant C_1 \rho_0^{\frac{i}{q}} \qquad 0 \leqslant i < \infty \tag{2.1.8}$$

$$b_i^- \leqslant C_2 \rho_0^{\frac{i}{q}} \qquad 0 \leqslant i < \infty \tag{2.1.9}$$

avec $C_1, C_2 > 0$ *constant plus grand .*

Preuve 2 *(preuve du Lemme 2.1.1)*

On va montrer ce lemme par récurence.

- *Pour i=0 on a :*

$$b_0^+ = b_0^- = \frac{\alpha_0}{1 - \sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j} \leq \frac{\alpha_0}{1-\rho_0} \rho_0^{\frac{0}{q}}. \tag{2.1.10}$$

relation vérifié.

- *Pour* $i \geqslant 1$ *:*

Supposon que le lemme est vérifie pour tout $j > R = max(p, q)$ *tel que* $j < i$ *et on va montrer qui est reste vrais pour i :*

De (2.1.8)on trouve,

$$\begin{aligned} b_i^+ &\leqslant (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_q) \max_{1 \leqslant k \leqslant q} b_{i-k} \\ &\leqslant \rho_0 C_1 \rho_0^{\frac{(i-q)}{q}} \\ &\leqslant C_1 \rho_0^{\frac{i}{q}} \end{aligned}$$

et de (2.1.9) :

$$\begin{aligned} b_i^- &\leqslant (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_q) \max_{1 \leqslant k \leqslant q} b_{i-k} \\ &\leqslant \rho_0 C_2 \rho_0^{\frac{(i-q)}{q}} \\ &\leqslant C_2 \rho_0^{\frac{i}{q}} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

2.2 Définition et hypothése

2.2.1 Existence et stationnarité

Existence

Proposition 2.2.1

Si $\theta_0 \in \Theta$, alors il existe une unique solution causal de X_t (X_t indépendant de $(\varepsilon_i)_{i>t}$ pour $t \in \mathbb{Z}$) qui est stationnaire ergodique et satisfait $E(\mid X_0 \mid^r) < \infty, r \geq 1$.

La stationnarité

Définissons l'espace Θ par

$$\begin{aligned} \Theta = \ & \{\theta \in \mathbb{R}^{2+2p+q} \setminus \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i [(e(1-\gamma_i)^\delta + e^{-1}(1+\gamma_i)^\delta)\Gamma(\delta+1) \\ & +(1-\gamma_i)^\delta(1 - e^{-1} - e\Upsilon(\delta+1,1))] + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1\} \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2 *Le processus APARCH définie dans (2.1.1) est stationnairesis et seulement si $\theta \in \Theta$.*

Preuve 3 *(preuve de la proposition 2.2.2)*

Soit X_t est le proccessus de APARCH(p,q) à base d'erreurs LAPLACE(1,1) définir par :

$$\begin{cases} x_t = \sigma_t \xi_t \\ \sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i (|x_{t-i}| - \gamma_i x_{t-i})^\delta + \sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \end{cases}$$

tel que $\xi_t \sim L(1,1)$

De Bollerslev ([9]), la condition de l'existence de$E(\sigma_t)^\delta$ et $E\{|x_t|\}^\delta$ est :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i E(|\xi_{t-i}| - \gamma_i \xi_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1 \tag{2.2.1}$$

D'aprés la définition de $E\{x\}^\delta$ on a :

$$\begin{aligned} E(|\xi_{t-i}| - \gamma_i \xi_{t-i})^\delta &= \int_{\mathbb{R}} (|x| - \gamma_i x)^\delta f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|x| - \gamma_i x)^\delta e^{-|x-1|} dx \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

On fait une changement de variable $x - 1 = y$ dans (2.2.2) on obtient :

$$E(|\xi_{t-i}| - \gamma_i \xi_{t-i})^\delta = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|y+1| - \gamma_i (y+1))^\delta e^{-|y|} dy$$

Pour simplifié on a :

$$(|y+1| - \gamma_i(y+1))^\delta = (y+1)^\delta(\mathbb{I}_{y>-1} - \mathbb{I}_{y<-1} - \gamma_i)^\delta$$

$$Et$$

$$e^{-|y|} = e^{-y}\mathbb{I}_{y>0} + e^{y}\mathbb{I}_{y<0}$$

Alors :

$$E(|\xi_{t-i}| - \gamma_i\xi_{t-i})^\delta = E_1 + E_2 + E_3$$

Telle que :

$$E_1 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(y+1)^\delta(1-\gamma_i)^\delta e^{-y}\mathbb{I}_{y>0}dy \tag{2.2.3}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(y+1)^\delta(-1-\gamma_i)^\delta e^{y}\mathbb{I}_{y<-1}dy \tag{2.2.4}$$

$$E_3 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(y+1)^\delta(1-\gamma_i)^\delta e^{y}\mathbb{I}_{-1<y<-0}dy \tag{2.2.5}$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{2}(1-\gamma_i)^{\delta}\int\limits_0^{+\infty}(y+1)^{\delta}e^{-y}dy \\
&= \frac{1}{2}(1-\gamma_i)^{\delta}e\int\limits_0^{+\infty}(y+1)^{\delta}e^{-(y+1)}dy \\
&= \frac{1}{2}(1-\gamma_i)^{\delta}e\int\limits_1^{+\infty}y^{\delta}e^{-y}dy \\
&= \frac{1}{2}(1-\gamma_i)^{\delta}e\int\limits_0^{+\infty}y^{\delta}e^{-y}dy - \frac{1}{2}(1-\gamma_i)^{\delta}e\int\limits_0^{1}y^{\delta}e^{-y}dy \\
&= \frac{1}{2}(1-\gamma_i)^{\delta}e\Gamma(\delta+1) - \frac{1}{2}(1-\gamma_i)^{\delta}e\Upsilon(\delta+1,1) \qquad (2.2.6)
\end{aligned}
$$

Et on a :

$$
\begin{aligned}
E_2 &= \frac{1}{2}(-1-\gamma_i)^{\delta}\int\limits_{-\infty}^{-1}(y+1)^{\delta}e^{y}dy \\
&= \frac{1}{2}(-1-\gamma_i)^{\delta}e^{-1}\int\limits_{-\infty}^{-1}(y+1)^{\delta}e^{y+1}dy \\
&= \frac{1}{2}(-1-\gamma_i)^{\delta}e^{-1}\int\limits_{-\infty}^{0}y^{\delta}e^{y}dy \\
&= \frac{1}{2}(1+\gamma_i)^{\delta}e^{-1}\int\limits_{-\infty}^{0}(-y)^{\delta}e^{y}dy \\
&= \frac{1}{2}(1+\gamma_i)^{\delta}e^{-1}\int\limits_{0}^{+\infty}y^{\delta}e^{-y}dy \\
&= \frac{1}{2}(1+\gamma_i)^{\delta}e^{-1}\Gamma(\delta+1) \qquad (2.2.7)
\end{aligned}
$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{2}(1-\gamma_i)^\delta \int\limits_{-1}^{0} (y+1)^\delta e^y dy \\ &= \frac{1}{2}(1-\gamma_i)^\delta e^{-1} \int\limits_{0}^{1} y^\delta e^y dy \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Alors :

$$\begin{aligned} E(|\xi_{t-i}| - \gamma_i \xi_{t-i})^\delta &= \frac{1}{2}\Gamma(\delta+1)[e(1-\gamma_i)^\delta + e^{-1}(1+\gamma_i)^\delta] \\ &+ \frac{1}{2}(1-\gamma_i)^\delta [e^{-1} \int\limits_{0}^{1} y^\delta e^y dy - e\Upsilon(\delta+1,1)] \end{aligned}$$

on remarque que :

$$\begin{aligned} \int\limits_{0}^{1} y^\delta e^y dy &\leq \int\limits_{0}^{1} e^y dy \\ &\leq (e-1) \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Donc :

$$E(|\xi_{t-i}|-\gamma_i\xi_{t-i})^\delta < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i[(e(1-\gamma_i)^\delta+e^{-1}(1+\gamma_i)^\delta)\Gamma(\delta+1)+(1-\gamma_i)^\delta(1-e^{-1}-e\Upsilon(\delta+1,1))]+\sum_{j=1}^{q}\beta_j$$

Donc la condition (2.2.1) deveient :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i[(e(1-\gamma_i)^\delta+e^{-1}(1+\gamma_i)^\delta)\Gamma(\delta+1)+(1-\gamma_i)^\delta(1-e^{-1}-e\Upsilon(\delta+1,1))]+\sum_{j=1}^{q}\beta_j < 1$$

2.2.2 Définition de l'estimateur

Soit $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ une trajectoire observée de ξ où $\theta \subset \mathbb{R}^{2+2p+q}$ est l'ensemble des paramètre inconnus du modèle, pour estimer θ nous considérons la log-vraisemblance de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.Si f est la densité de probabilité de ξ définit par :

$$f_\xi(\xi_t) = \frac{1}{2} e^{-|\xi_t - 1|} \tag{2.2.10}$$

- Le modèle APARCH(p,q) s'écrit sous la forme :

$$x_t = \sigma_t \xi_t$$

L'équation de variance conditionnelle :

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (|x_{t-i}| - \gamma_i x_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$$

avec $\delta \geqslant 0$,$\alpha_0 > 0$,$\alpha_i \geqslant 0$,$-1 < \gamma_i < 1$,pour $i = 1, ..., p$, $\beta_j \geqslant 0$pour $j = 1, ..., q$ avec $\alpha_p > 0$, $\beta_q > 0$ et $\sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j < 1$

Et comme on a :

$$f_{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\xi(\xi_i)$$

Alors

$$
\begin{aligned}
f_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} e^{-|\xi_i-1|} \\
&= \frac{1}{2^n} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i-1|}
\end{aligned}
$$

Utiliser l'intégrale pour obtenir la fonction $f(X_1,\ldots,X_n)$

$$
\oint f_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n = \oint \frac{1}{2^n} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i-1|} d\xi_1 \ldots d\xi_n \quad (2.2.11)
$$

$$
= \frac{1}{2^n} \oint e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i-1|} d\xi_1 \ldots d\xi_n \quad (2.2.12)
$$

On fait une changement de variable $(\xi_1,\ldots,\xi_n) \longrightarrow (X_1,\ldots,X_n)$

on a $X_t = \xi_t \sigma_t \qquad \text{tq} \qquad \xi_t \rightsquigarrow L(1,1)$

$\Rightarrow \xi_t = X_t \sigma_t^{-1}$ alors $d\xi_t = \sigma_t^{-1} dX_t, \forall t = 1 \ldots n$

Donc (2.2.12) devient :

$$
\begin{aligned}
\oint f_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)d\xi_1\ldots d\xi_n &= \tfrac{1}{2^n}\oint e^{-\sum\limits_{t=1}^{n}|X_t(\sigma_\theta^t)^{-1}|}(\sigma_\theta^1)^{-1}dx_1\ldots(\sigma_\theta^n)^{-1}dx_n \\
&= \tfrac{1}{2^n}\oint e^{-\sum\limits_{t=1}^{n}|X_t(\sigma_\theta^t)^{-1}-1|}(\prod_{t=1}^{n}(\sigma_\theta^t)^{-1})dx_1\ldots dx_n \\
&= \tfrac{1}{2^n}\oint e^{-\sum\limits_{t=1}^{n}|(\sigma_\theta^t)^{-1}||X_t-\sigma_\theta^t|}(\prod_{t=1}^{n}(\sigma_\theta^t)^{-1})dx_1\ldots dx_n
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
f(X_1,\ldots,X_n) &= \frac{1}{2^n}(\prod_{t=1}^{n}(\sigma_\theta^t)^{-1})e^{-\sum\limits_{t=1}^{n}|(\sigma_\theta^t)^{-1}||X_t-\sigma_\theta^t|} \\
&= \prod_{t=1}^{n}\frac{1}{2}(\sigma_\theta^t)^{-1}e^{-|(\sigma_\theta^t)^{-1}||X_t-\sigma_\theta^t|}
\end{aligned}
$$

• Cette vraisemblance peut s'écrit sous la forme :

$$
l(\theta) = \frac{1}{2^n}e^{-\sum\limits_{t=1}^{n}|(\sigma_\theta^t)^{-1}||X_t-\sigma_\theta^t|}(\prod_{t=1}^{n}(\sigma_\theta^t)^{-1}) \qquad (2.2.13)
$$

$\bullet L(\theta)$ La fonction log-vraisemblance :

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \log l(\theta) \\
&= \log\Big(\frac{1}{2^n} e^{-\sum_{t=1}^{n} |(\sigma_\theta^t)^{-1}||X_t - \sigma_\theta^t|} \Big(\prod_{t=1}^{n} (\sigma_\theta^t)^{-1}\Big)\Big) \\
&= -n \log 2 - \sum_{t=1}^{n} |(\sigma_\theta^t)^{-1}||X_t - \sigma_\theta^t| - \sum_{t=1}^{n} \log(\sigma_\theta^t) \\
&= -n \log 2 - \sum_{t=1}^{n} (\log(\sigma_\theta^t) + |(\sigma_\theta^t)^{-1}||X_t - \sigma_\theta^t|)
\end{aligned}$$

$\bullet$ Nous définisson respectivement la vraisemblance de Laplace et le quasi-vraisemblance de Laplace par :

$$L_n(\theta) = -\sum_{t=1}^{n} q_t(\theta), q_t(\theta) = \log(\sigma_\theta^t) + |(\sigma_\theta^t)^{-1}||X_t - \sigma_\theta^t| \tag{2.2.14}$$

$$\widehat{L}_n(\theta) = -\sum_{t=1}^{n} \widehat{q}_t(\theta), \widehat{q}_t(\theta) = \log(\widehat{\sigma}_\theta^t) + |(\widehat{\sigma}_\theta^t)^{-1}||X_t - \widehat{\sigma}_\theta^t| \tag{2.2.15}$$

Comme $(X_0, X_{-1}, \dots)$ sont inconnus, en général σ_θ^t ne sont pas calculables pour cela, au lieu d'utiliser la log-vraisemblance on utilise la quasi log-vraisemblance .

Un EQMV de Laplace $\widehat{\theta}_n$ est le maximisateur de $\widehat{L}_n$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_n &= \arg\max_{\theta \in \Theta} \widehat{L}_n \\
&= \arg\min_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^{n} \widehat{q}_i(\theta)
\end{aligned}$$

2.2.3 Hypothèses nécessaires pour la convergence d'EQMV-Laplace

L'EQMV Laplace pourrait converger et être asymptotiquement Gaussien mais cela nécessiter quelques hypothèses supplémentaires sur Θ et la fonction σ_θ :

- **Hypothèses H1**(*compacité*) : Θ est un ensemble compact .

- **Hypothèses H2**(*Borne inférieur de la variance conditionnelle*) : il existe un constante $\alpha_0 > 0$ tel que ,$\forall \theta \in \Theta$ alors $\sigma_\theta(x) > \alpha_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

- **Hypothèses H3** : $E[| X_t - 1 |] = 1$.

- **Hypothèses H4** (*Identifiabilité*) : Le fonction σ_θ est telle que pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, alors $\sigma_{\theta_1} = \sigma_{\theta_2}$ implique que $\theta_1 = \theta_2$

2.3 comportement asymptotique d'EQMV

2.3.1 Propriétaires asymptotiques de la quasi vraisemblance

Lemme 2.3.1

Supposons que $\theta_0 \in \Theta$ et que X_t est la solution causal et stationnaire de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$,alors pour tout $t \in \mathbb{N}^{\infty}$. :

$$E[\mid \hat{\sigma_\theta^t} - \sigma_\theta^t \mid_\Theta^r] \leqslant CE[\mid X_0 \mid^r](\sum_{j\geqslant t} \alpha_j^{(0)}(\sigma_\theta^t, \Theta))^r.$$

avec

$$\alpha_j^{(0)}(\sigma_\theta^t, \Theta) = \sup_{\theta\in\Theta} \max(|b_j^+(\theta)|^{\frac{1}{\delta}}, |b_j^-(\theta)|^{\frac{1}{\delta}})$$

2.3.2 Consistance forte

Théorème 2.3.1

Supposons que les hypothéses sont satisfaites, alors la suite d'EQMV-laplace $(\widehat{\theta}_n)$ converge fortement, c'est-à-dire

$$\widehat{\theta}_n \longrightarrow \theta_0 \quad p.s$$

Preuve 4 *(preuve du Théorème 2.3.1)*

Nous preuvons ce théorème en deux étapes, dans la première étape une forte loi uniforme des grandes nombres sur θ satisfaite par $\frac{1}{n}\widehat{L}_n(\theta)$qui converge vers

$L(\theta) = -E\{q_t(\theta)\}$ est établi.Parsuite, dans la deuxième étape nous preuvons que $L(\theta)$ admet un maximum unique en θ_0.

*On prouve l'**étape(1)** par le meme façon de la preuve du théorème 1 de Bardet et Boularouk (2017), la loi uniforme forte des grands nomber satisfaite pour la moyenne d'échantillon $(\widehat{q}_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ est obtenu en prouvant que $E\{|q_t(\theta)|\} < \infty$. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et sous l'hypothèse H2, on a :*

$$\begin{aligned}
|q_t(\theta)| &= |\log(\sigma_\theta^t) + |(\sigma_\theta^t)^{-1}||X_t - \sigma_\theta^t|| \\
&\leq |\log(\sigma_\theta^t)| + |X_t(\sigma_\theta^t)^{-1} - 1| \\
&\leq |\sigma_\theta^t| - 1 + |\frac{X_t}{\sigma_\theta^t}| + 1 \\
&\leq |\sigma_\theta^t| + \frac{|X_t|}{\alpha_0}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sup |q_t(\theta)| \leq |\sigma_\theta^t| + \frac{1}{\alpha_0}|X_t| \tag{2.3.1}$$

ou, $E\{|X_t|\} < \infty$ d'aprés la proposition 2.2.1 et $E\{|\sigma_\theta^t|\} < \infty$ d'aprés le Lemme 1 de Bardet et Wintenberger ([2]) ce qui implique que $E\{|q_t(\theta)|\} < \infty$, d'où on conclut que :

$$|\frac{1}{n}L_n(\theta) - L(\theta)| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{p.s} 0. \tag{2.3.2}$$

Nous allons maintenent montrer que :

$$\frac{1}{n}|\widehat{L}_n(\theta) - L_n(\theta)| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{p.s} 0. \tag{2.3.3}$$

En effet, pour tout $\theta \in \Theta$ et $t \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta) &= \log \widehat{\sigma_\theta^t} + |X_t \widehat{\sigma_\theta^t}^{-1} - 1| - \log \sigma_\theta^t - |X_t (\sigma_\theta^t)^{-1} - 1| \\
&\leq \log \frac{\widehat{\sigma_\theta^t}}{\sigma_\theta^t} + |X_t \widehat{\sigma_\theta^t}^{-1} - 1| - |X_t (\sigma_\theta^t)^{-1} - 1| \\
&\leq \frac{\widehat{\sigma_\theta^t}}{\sigma_\theta^t} - 1 + |\widehat{\sigma_\theta^t}^{-1} - (\sigma_\theta^t)^{-1}||X_t| \\
&\leq \frac{\widehat{\sigma_\theta^t} - \sigma_\theta^t}{\sigma_\theta^t} + |\widehat{\sigma_\theta^t}^{-1} - (\sigma_\theta^t)^{-1}||X_t|
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)| &\leq |\widehat{\sigma_\theta^t} - \sigma_\theta^t| \alpha_0^{-1} + |\widehat{\sigma_\theta^t} - \sigma_\theta^t| \alpha_0^{-2} |X_t| \\
&\leq C |\widehat{\sigma_\theta^t} - \sigma_\theta^t| (1 + |X_t|))
\end{aligned}$$

avec $C > 0$.

De la même mainéaire, il suffit de montrer que :

$$E\{|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)|\} < \infty$$

D'aprés le corollaire 1 de Kounias et Weng(1969)([37]), il suffit de montrer que il existe un $s \in [0,1]$telle que :

$$\sum_{t \geq 1} \frac{1}{t^s} E\{|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)|^s\} < \infty$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $s = 1$

$$E\{|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)|\} \leq CE\{(1 + |X_t|)^2\}^{\frac{1}{2}} \times E\{(|\widehat{\sigma^t_\theta} - \sigma^t_\theta|)^2\}^{\frac{1}{2}} \qquad (2.3.4)$$

D'aprés la proposition(2.2.1),le lemme(2.3.1), et la relation (2.3.4) *on a* $E\{|X_t|^2\} < \infty$ *et* $E\{|\widehat{\sigma}_t|^2\} < \infty$ *cen qui implique :*

$$\begin{aligned} E\{|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)|\} &\leq CE\{|X_0|^2\}^{\frac{1}{2}}(\sum_{j\geq t} \alpha_j^{(0)}(\sigma^t_\theta, \Theta)) \\ &\leq C(\sum_{j\geq t} \alpha_j^{(0)}(\sigma^t_\theta, \Theta)) \\ &\leq C' \sum_{j\geqslant t} \rho^j \end{aligned}$$

tel que $C' = C \times \max(C_1, C_2)$ *et* $\rho = \rho_0^{\frac{1}{q\delta}}$.

Nous avons donc :

$$\sum_{t\geq 1} \frac{1}{t} E\{|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)|\} \leq A \sum_{t\geq 1} \frac{\rho^t}{t} \qquad (avec\ A = \frac{C'}{1-\rho})$$

Cette série est fini car $0 < \rho < 1$*, par conséquent, nous obtenons :*

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} |\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{p.s} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n}|\widehat{L}_n(\theta) - L_n(\theta)| \qquad \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{p.s} 0$$

Comme on a :

$$\begin{aligned}|\frac{1}{n}\widehat{L}_n(\theta)-L(\theta)| &= |\frac{1}{n}\widehat{L}_n(\theta)-\frac{1}{n}L_n(\theta)+\frac{1}{n}L_n(\theta)-L(\theta)| \\ &\leq \frac{1}{n}|\widehat{L}_n(\theta)-L_n(\theta)|+|\frac{1}{n}L_n(\theta)-L(\theta)|\end{aligned}$$

Donc nous avons :

$$\frac{1}{n}\widehat{L}_n(\theta) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{p.s} L(\theta) \tag{2.3.5}$$

*Pour prouver l'**étape(2)** on suppose que $L(\theta)$ admet deux maximum θ et θ_0 telle que $\theta \neq \theta_0$, pour $\theta \in \Theta$ on a :*

$$\begin{aligned}L(\theta) &= -E\Big(q_t(\theta)\Big) \\ &= -E\Big(\log(\sigma_\theta^t)+|X_t(\sigma_\theta^t)^{-1}-1|\Big) \\ &= -E\Big(\log(\sigma_\theta^t)+(\sigma_\theta^t)^{-1}|X_t-\sigma_\theta^t|\Big) \\ &= -E\Big(\log(\sigma_\theta^t)+\frac{\sigma_{\theta_0^t}}{\sigma_\theta^t}|\xi_t-\frac{\sigma_\theta^t}{\sigma_{\theta_0}^t}|\Big)\end{aligned}$$

et on a aussi :

$$\begin{aligned}L(\theta_0) &= -E\Big(q_t(\theta_0)\Big) \\ &= -E\Big(\log(\sigma_{\theta_0}^t)+|X_t(\sigma_{\theta_0}^t)^{-1}-1|\Big) \\ &= -E\Big(\log(\sigma_{\theta_0}^t)+(\sigma_{\theta_0}^t)^{-1}|X_t-\sigma_{\theta_0}^t|\Big) \\ &= -E\Big(\log(\sigma_{\theta_0}^t)+|\xi_t-1|\Big) \\ &= -E\Big(\log(\sigma_{\theta_0}^t)\Big)-1\end{aligned}$$

utilisant l'Hypothèse ***H3****, nous avons :*

$$\begin{aligned} L(\theta_0) - L(\theta) &= E\Big(\log\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}} + \frac{\sigma_{\theta^t_0}}{\sigma^t_\theta}|\xi_t - \frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}| - |\xi_t - 1|\Big) \\ &= E\Big(\log\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}\Big) + \frac{\sigma_{\theta^t_0}}{\sigma^t_\theta}E\Big(|\xi_t - \frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}|\Big) - 1 \\ &= E\Big(\log\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}\Big) + \frac{\sigma_{\theta^t_0}}{\sigma^t_\theta}E\Big(|(\xi_t - 1) + (1 - \frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}})|\Big) - 1 \end{aligned}$$

mais pour un ξ_t suivant une distribution de probabilité symétrique, nous avons pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, $E\Big(|\xi_t - 1 + m|\Big) > E\Big(|\xi_t - 1|\Big) = 1$, d'où

$$\begin{aligned} L(\theta_0) - L(\theta) &> E\Big(\log\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}\Big) + \frac{\sigma_{\theta^t_0}}{\sigma^t_\theta} - 1 \\ &> H(\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}}) \end{aligned}$$

avec $H(x) = \log(x) - 1 + \frac{1}{x} \geq 0$. pour tout $x \in]0, +\infty[$, Si $x = 1$ on a $H(x) = 0$.

par conséquent,

$$\frac{\sigma^t_\theta}{\sigma^t_{\theta_0}} = 1 \Rightarrow \sigma^t_\theta = \sigma^t_{\theta_0} \quad \textit{alors d'aprér } (\boldsymbol{H4}) \quad \theta_0 = \theta$$

ce qui contredit l'hypothèse initial, donc $L(\theta)$ admet un maximum unique.

2.3.3 La normalité asymptotique

Maintenant, nous donnons le théorème prouvant la normalité asymptotique pour l'estimateur.

Théorème 2.3.2 *(la normalité asymptotique)*

Soit X_t une solution stationnaire de (2.1.1),avec $\theta_0 \in \Theta$, et que les conditions du théoème 2.3.1 vérifiée, si la fonction de probabilite cumulée de ξ_0 est continûment différentaible alors :

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{D} N_d(0, F^{-1}GF^{-1}) \tag{2.3.6}$$

où les matrices $F(\theta_0)$ et $G(\theta_0)$ sont définit par

$$F(\theta_0) = E\left(\frac{\partial^2 q_t(\theta_0)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right) \text{ pour } 1 \leqslant i, j \leqslant p + q + 1. \tag{2.3.7}$$

$$G(\theta_0) = E\left(\frac{\partial q_t(\theta_0)}{\partial\theta_i}\frac{\partial q_t(\theta_0)}{\partial\theta_j}\right) \text{ pour } 1 \leqslant i, j \leqslant p + q + 1. \tag{2.3.8}$$

Pour démontrer ce théorème, On a les fonctions $\dfrac{\partial L_n(\theta)}{\partial\theta}$ et $\dfrac{\partial^2 L_n(\theta)}{\partial\theta^2}$ sont mesurables et p.s. Fini pour tous $\theta \in \Theta$.Leurs propriétés asymptotiques sont décrites dans les deux lemmes suivants

Lemme 2.3.2

Soit X_t une solution stationnaire de (2.1.1),avec $\theta_0 \in \Theta$, alors on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{D} N_d(0, G(\theta_0)). \qquad (2.3.9)$$

avec $G(\theta_0)$ la matrice définie dans (2.3.8).

Lemme 2.3.3

Soit X_t une solution stationnaire de (2.1.1),avec $\theta_0 \in \Theta$, alors on'a

$$\left\| \frac{1}{n} \frac{\partial^2 L_n(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} - \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\|_{\Theta} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{p.s} 0 \text{ avec } \frac{\partial^2 L_n(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} = -E\left[\frac{\partial^2 q_0(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]. \qquad (2.3.10)$$

Preuve 5 *(preuve du Théorème 2.3.2)*

La premiére dérivée de L_n est :

$$\frac{\partial L_n}{\partial \theta_i} = -\sum_{t=1}^{n} \frac{\partial q_t}{\partial \theta_i}$$

avec

$$\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i} = \sigma_t^{-1} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} - \sigma_t^{-2} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} |x_t - \sigma_t| + \sigma_t^{-1} (\xi_t - 1) \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} sign(x_t - \sigma_t)$$

De puis $\theta_0 \in \Theta$ et $\widehat{\theta_n} \to \theta_0$, extension de Taylor de $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial L(\widehat{\theta_n})}{\partial \theta_i}$ implique

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial L_n(\widehat{\theta_n})}{\partial \theta_i} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta_i} + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 L_n(\overline{\theta}_{n,i})}{\partial \theta \partial \theta_i} \sqrt{n}(\widehat{\theta_n} - \theta_0)$$

Avec n suffisamment grande telle que $(\overline{\theta}_{n,i}) \in \Theta$, *qui est entre* $\widehat{\theta_n}$ *et* θ_0

En utilise la consistence de $\widehat{\theta_n}$ *et resultat de lemme(2.3.3), on déduire que*

$$F_n = -\frac{1}{n}(\frac{\partial^2 L_n(\overline{\theta}_{n,i})}{\partial\theta\partial\theta_i})_{1\leq i\leq d} \to F(\theta_0).$$

tel que $F(\theta_0)$ *définie dans(2.3.7)*

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j} &= \sigma_t^{-1}\frac{\partial^2\sigma_t}{\partial\theta_i\partial\theta_j} - \sigma_t^{-2}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j} + (2\sigma_t^{-3}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j} - \sigma_t^{-2}\frac{\partial^2\sigma_t}{\partial\theta_i\partial\theta_j})|x_t - \sigma_t| + \\ &(x_t\sigma_t^{-1} - 1)(\sigma_t^{-1}\frac{\partial^2\sigma_t}{\partial\theta_i\partial\theta_j} - \sigma_t^{-2}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j} - \sigma_t^{-2}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j})sign(x_t - \sigma_t) \\ &+2\sigma_t^{-1}(x_t\sigma_t^{-1} - 1)\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j}\delta_{(x_t-\sigma_t)}(0)\end{aligned}$$

et comme on a $E(\sigma_t^{-1}|x_t - \sigma_t|) = E(|\xi_t - 1|) = 1$, *et* $E(sign(x_t - \sigma_t)) = E(sign(\xi_t - 1)) = 0$, *alors on obtient*

$$E\{\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\} = E(\sigma_t^{-2}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j}) + 2f_\xi(1)E(\sigma_t^{-2}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_i}\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta_j})$$

$F(\theta_0)$ *est un matrice transitive, et il exists n grande qui met* F_n*estun matrice transitive. en plus, puisque* $E\|\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\| < \infty$ *la loi uniforme des grands nombres pour* $\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}$ *implique*

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) = -nF_n^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{\partial L_n(\widehat{\theta}_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial\theta}) \qquad (2.3.11)$$

Utilisé lemme (2.3.2), et comme $\frac{\partial \widehat{L}_n(\widehat{\theta}_n)}{\partial \theta} = 0$ *($\widehat{\theta}_n$ est un extremum local de $\widehat{L}_n$),*

$$E[\frac{1}{\sqrt{n}}|\frac{\partial L_n}{\partial \theta} - \frac{\partial \widehat{L}_n}{\partial \theta}|] \to 0$$

$$\begin{aligned}
|\frac{\partial \widehat{q}_t(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}| &= |\widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} - \widehat{\sigma}_t^{-2}\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i}|x_t - \widehat{\sigma_t}| + \widehat{\sigma_t}^{-1}(\xi_t - 1)\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} sign(x_t - \widehat{\sigma_t}) \\
&\quad -\sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} + \sigma_t^{-2}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}|x_t - \sigma_t| - \sigma_t^{-1}(\xi_t - 1)\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i} sign(x_t - \sigma_t)| \\
&= |(\widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} - \sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}) - (\widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} - \sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i})|\xi_t - 1| \\
&\quad +(\widehat{\sigma}_t^{-1}\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} - \sigma_t^{-1}\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i})(\xi_t - 1) sign(\xi_t - 1)| \\
&\leq \frac{1}{\alpha_0}|(\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}) - (\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i})|\xi_t - 1| + (\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}) \\
&\quad (\xi_t - 1) sign(\xi_t - 1)| \\
&\leq \frac{1}{\alpha_0}(|\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}| + |\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}||\xi_t - 1| + |\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}||\xi_t - 1|) \\
&= \frac{1}{\alpha_0}|\frac{\partial \widehat{\sigma}_t}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}|(1 + 2|\xi_t - 1|)
\end{aligned}$$

On peut écrire σ_t sous la forme causal $\sigma_t = \sum_{i \geq 1} \alpha_i x_{t-i}$

Tq

$$\frac{\partial \alpha_i(\theta)}{\partial \theta_k} \leq C i \rho_*^i$$

Pour tout $\theta \in \Theta$ et $i \leq 0 < \infty$. par conséquent

$$|\frac{\partial \widehat{q}_t(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}| \leq \frac{1}{\alpha_0}(1 + 2|\xi_t - 1|) \sum_{t \leq i \leq \infty} i \rho_*^i x_{t-i}$$

Donc, $E|\dfrac{\partial \widehat{q}_t(\theta)}{\partial \theta_i} - \dfrac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}| < \infty$
Cela atteint la preuve.

Preuve 6 *(preuve du Lemme 2.3.2)*

Le preuve est divisée en deux parties, premiérement nous prouvons que $(\partial q_t(\theta)/\partial \theta_i; F_t = \sigma(X_{t-1}, \ldots)$ *est une martingale de différences et deuxiémement nous avons appliqué le théorème central limite pour les martingales de différences*

1-Pour prouver que $(\partial q_t(\theta)/\partial \theta_i; F_t)$ *est un martingal-différences, il suffit de montrer pour tout* $t \in \mathbb{Z}$ *les deux poits suivants :*

i) $E[\dfrac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}/F_t] = 0$ *p.s.*

ii) $E\left|\dfrac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}\right| < \infty$

sont satisfaits.

- *On a pour tout* $t \in \mathbb{Z}$

$$E(|X_t - \sigma_t|/F_t) = b \ et \ E(sing(X_t - \sigma_t)/F_t) = 0.$$

par suite, $E\left(\dfrac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}\right)=0$

$$\begin{aligned}
E\left|\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}\right| &= E\left|\frac{\partial}{\partial \theta_i}(log\sigma_\theta^t+\frac{|X_t-\sigma_\theta^t|}{|\sigma_\theta^t|})\right|\\
&\leqslant E\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}(|\sigma_\theta^t|+\frac{|X_t|}{\alpha_0})\right)\\
&\leqslant E\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}(|\sigma_\theta^t|+\frac{|\xi_t\sigma_\theta^t|}{\alpha_0})\right)\\
&\leqslant E\left(\frac{\partial|\sigma_\theta^t|}{\partial \theta_i}(\frac{|\xi_t|}{\alpha_0}+1)\right)\\
&\leqslant CE\left(\frac{\partial|\sigma_\theta^t|}{\partial \theta_i}\right)\\
&< \infty
\end{aligned}$$

2- Maintant nous prouvons que $E\left(\dfrac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}\right)^2<\infty.$

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}\right)^2 &= E\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}(log\sigma_\theta^t+\frac{|X_t-\sigma_\theta^t|}{\sigma_\theta^t})\right)^2\\
&\leqslant E\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}(|\sigma_\theta^t|+\frac{|X_t|}{\alpha_0})\right)^2\\
&\leqslant E\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}(|\sigma_\theta^t|+\frac{|\xi_t\sigma_\theta^t|}{\alpha_0})\right)^2\\
&\leqslant E\left(\frac{\partial|\sigma_\theta^t|^2}{\partial \theta_i}(\frac{|\xi_t|}{\alpha_0}+1)^2\right)\\
&\leqslant C^{'}E\left(\frac{\partial|\sigma_\theta^t|^2}{\partial \theta_i}\right)
\end{aligned}$$

Puis,

$$E\left(\frac{\partial q_t}{\partial \theta}\right)^2 = \sum_{t=1}^{n} E\left(\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i}\right)^2 < +\infty$$

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i}\frac{\partial q_t}{\partial \theta_j}\right) &= E\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}(log\sigma_\theta^t + \frac{|X_t - \sigma_\theta^t|}{\sigma_\theta^t})\frac{\partial}{\partial \theta_j}(log\sigma_\theta^t + \frac{|X_t - \sigma_\theta^t|}{\sigma_\theta^t})\right) \\
&= E(\frac{\partial|\sigma_\theta^t|}{\partial \theta_i}\frac{\partial|\sigma_\theta^t|}{\partial \theta_j}(\frac{|\xi_t|}{\alpha_0} + 1)^2)
\end{aligned}$$

Le théorème centrale limite pour les différences de martingale implique

$$n^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{D} N_d(0, G(\theta_0)). \tag{2.3.12}$$

tell que $G(\theta_0)$ définie dans 2.3.8

Preuve 7 *(preuve du lemme 2.3.3)*
Le deuxième processus dérivé $\left(\frac{\partial^2 q_t}{\partial \theta^2}\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire ergodique (c'est une fonction mesurable de $X_t, X_{t-1}, \ldots$) par conséquent, il satisfait àune loi uniforme des grands nombres, si son permier moment uniforme est borné .Par conséquent, en utilisant la borne $\sigma_\theta^{-1} \leqslant \alpha_0^{-1}$, il existe $c > 0 telque$

$$\left|\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right| \leqslant C\left[\left(\left|\frac{\partial^2 \sigma_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right| + \left|\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_j}\right|\left|\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}\right|\right) + \left(\left|\frac{\partial^2 \sigma_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right| + \left|\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_j}\right|\left|\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}\right|\right) \mid X_t - \sigma_t \mid\right]$$

Nous concluons que $E\left|\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right| < \infty$ depuis, tout $t \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant i, j \leqslant d$ tq $d = i + j + 1$
$E \mid X_t^2 \mid < +\infty, E \mid \sigma_t \mid < +\infty, E|\frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_i}| < +\infty, E|\frac{\partial^2 \sigma_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}| < +\infty$

En conséquence , le LUGN pour $\dfrac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial\theta}$

Chapitre 3

Application numérique

Afin d'illustrer les résultats prouvés, nous réalisons des expériences de Monte-Carlo sur le comportement du QMLE Laplace avec erreurs de moyenne 1 pour différentes tailles (n = 100, n = 1000 et n = 5000), et nous illustrons la consistance du paramètre $\widehat{\theta}_n$ à travers une représentation en boite dans la Figure 3.1 et la normalité asymptotique à travers la Figure 3.2. Comme nous réalisons une comparaison numérique entre l'EQMLE de Laplace à base d'erreurs de moyenne 1 et l'EQMLE de Laplace à base d'erreurs de moyenne nulle sur des séries de moyennes $m = 0, 0.7, 1, 1.4$. Tous ces éxperiences sont appliqués sur des séries chronologiques APARCH(1,1) pour plusieurs tailles d'échantillon (n = 100, n = 1000 et n = 5000).

3.1 Comportment asymptotique de $\widehat{\theta}_n$.

Dans cette section, nous étudions numériquement la consistance de $\widehat{\theta}_n$, nous réalisons une étude de monte carlo sur des séries chronologiques APARCH(1,1) sur 1000 séries chronologique pour plusieurs tailles d'échantillon (n = 100, n = 1000 et n = 5000) puis nous calculons le RMSE, le mode, la médiane et l'étendu pour l'échantillon des estimateurs $(\widehat{\theta}_n)_{n=1,1000}$ obtenus. Les caractéristiques statistiques de l'échantillon des estimateurs $(\widehat{\theta}_n)_{n=1,1000}$ obtenus sont exposé dans le tableau 3.1. Nous présontons graphiquement dans les figures (3.1 et 3.1) une représentation en boite et une représentation en histogramme de l'échantillon des estimateurs $(\widehat{\theta}_n)_{n=1,1000}$.

Considérerons l'APARCH(1,1) définie par :

$$\begin{cases} x_t = \sigma_t \xi_t \\ \sigma_t^\delta = \omega + \alpha(|x_{t-1}| - \gamma x_{t-1})^\delta + \beta \sigma_{t-1}^\delta \end{cases}$$

Avec $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 1.2$.

		$RMSE$		$Mode$		$Médiane$		$Etendue$	
n		$\widehat{\theta}_n^{(0)}$	$\widehat{\theta}_n$	$\widehat{\theta}_n^{(0)}$	$\widehat{\theta}_n$	$\widehat{\theta}_n^{(0)}$	$\widehat{\theta}_n$	$\widehat{\theta}_n^{(0)}$	$\widehat{\theta}_n$
n=100	ω	0.24	0.17	0.30	0.22	0.31	0.23	0.93	0.86
	α	∞	0.17	0.42	0.31	0.42	0.32	∞	0.86
	β	0.21	0.20	0.11	0.12	0.11	0.14	1.01	0.92
	γ	0.25	0.24	0.89	0.87	0.89	0.85	0.19	0.18
	δ	0.48	0.48	1.03	0.98	1.03	1.01	1.18	1.21
n=1000	ω	0.11	0.06	0.28	0.20	0.29	0.20	0.54	0.47
	α	0.36	0.06	0.57	0.39	0.57	0.38	7.95	0.47
	β	0.09	0.09	0.20	0.20	0.20	0.20	0.52	0.55
	γ	0.07	0.07	0.81	0.80	0.81	0.81	0.42	0.47
	δ	0.40	0.40	1.19	1.14	1.19	1.19	12.38	9.02
n=5000	ω	0.10	0.03	0.29	0.20	0.29	0.20	0.18	0.18
	α	0.19	0.03	0.58	0.40	0.58	0.40	0.39	0.18
	β	0.04	0.04	0.20	0.20	0.20	0.20	0.23	0.22
	γ	0.03	0.03	0.80	0.80	0.80	0.80	0.19	0.18
	δ	0.40	0.40	1.20	1.20	1.20	1.20	1.18	1.21

TABLE 3.1 – Caractéristiques statistiques de $\widehat{\theta}_n$.

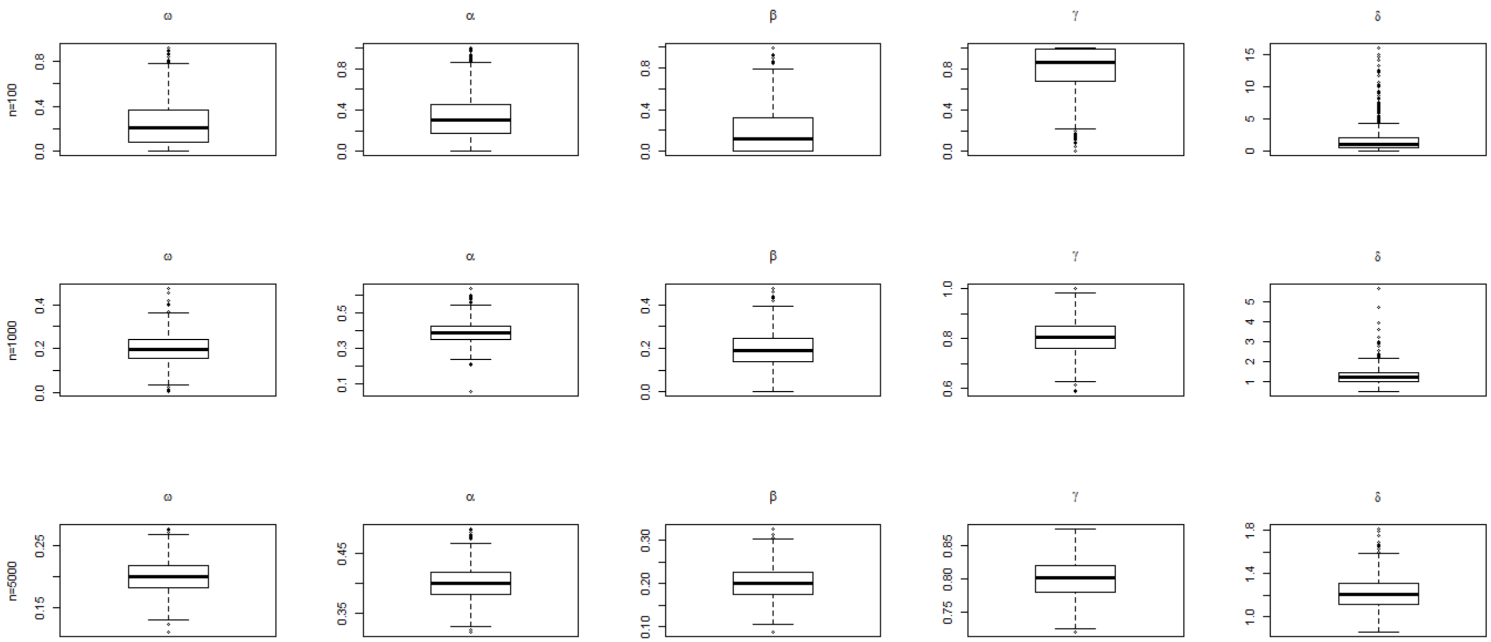

FIGURE 3.1 – Représentation en boite.

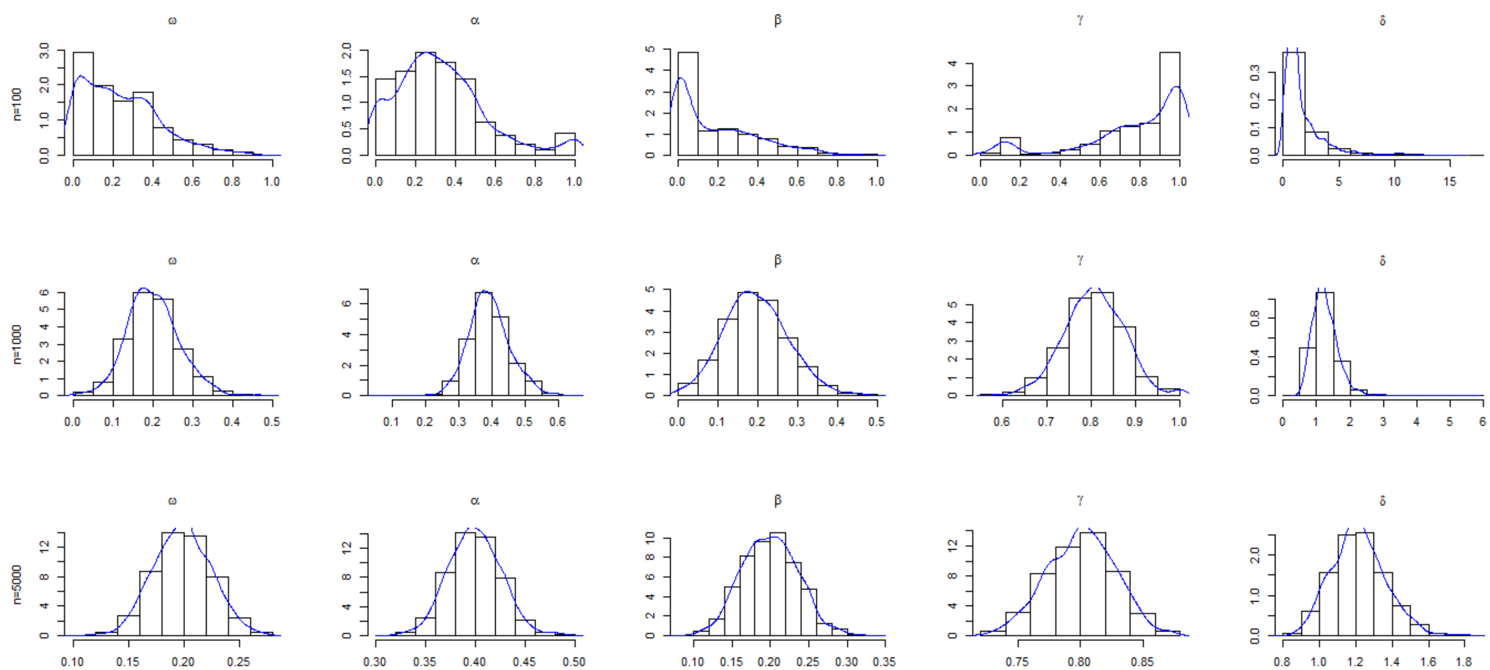

FIGURE 3.2 – Représentation en histogramme.

Discussion des résultats

On voit clairement que le RMSE décroit avec la taille d'échantillon, mais il est plus petit dans le ca de $\widehat{\theta}_n$, pareil pour l'etendue ce qui montre que les estimateurs obtenus sous l'hypothèse que le bruit est de moyenne égale à 1 sont plus proches des vraies valeurs que celle obenus sous l'hypothèse que le bruit est de moyenne égale à 0. De plus, le mode et la médiane s'approche des vraies valeurs de façon meilleur pour $\widehat{\theta}_n$ que pour $\widehat{\theta}_n^{(1)}$.

3.2 Comparaison

On considère d'abord le bruit blanc $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tel que la distribution de ε_0 est une distribution Laplace(1,m) pour plusieurs valeurs de m : $m = 0, m = 0.7, m = 1, m = 1.4$. En utilisant 1000 réplications indépendantes, l'erreur quadratique moyenne (RMSE) est calculée et rapportée dans le prochain tableau 3.2.

Discussion des résultats

D'une part, il est clair que le RMSE diminue à mesure que la taille de l'échantillon augmente, ce qui valide les résultats théoriques (cohérence des estimateurs). En revanche, le tableau 3.2 montrent que $\widehat{\theta}_n$ fournit une esti-

		$m=0$		$m=0.7$		$m=1$		$m=1.4$	
n		$\widehat{\theta}_n^{(0)}$	$\widehat{\theta}_n$	$\widehat{\theta}_n^{(0)}$	$\widehat{\theta}_n$	$\widehat{\theta}_n^{(0)}$	$\widehat{\theta}_n$	$\widehat{\theta}_n^{(0)}$	$\widehat{\theta}_n$
n=100	ω	0.16	0.15	0.21	0.16	0.24	0.17	0.28	0.20
	α	0.30	0.20	167.85	0.22	∞	0.17	∞	1.57
	β	0.18	0.18	0.21	0.19	0.21	0.20	0.23	0.21
	γ	0.22	0.24	0.27	0.27	0.25	0.24	0.29	0.31
	δ	0.43	0.45	0.48	0.49	0.48	0.48	0.54	0.57
	Σ	1.29	1.22	169.01	1.33	∞	1.61	∞	2.87
n=1000	ω	0.05	0.07	0.09	0.07	0.11	0.06	0.18	0.09
	α	0.05	0.11	0.13	0.09	0.36	0.06	2.27	0.15
	β	0.07	0.07	0.08	0.08	0.09	0.09	0.10	0.09
	γ	0.08	0.09	0.08	0.08	0.07	0.07	0.07	0.06
	δ	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40
	Σ	0.65	0.73	0.78	0.72	1.04	0.68	3.01	0.80
n=5000	ω	0.02	0.05	0.06	0.04	0.10	0.03	0.17	0.06
	α	0.02	0.09	0.10	0.07	0.19	0.03	0.35	0.12
	β	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
	γ	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
	δ	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40
	Σ	0.51	0.61	0.63	0.57	0.76	0.52	0.98	0.64

Table 3.2 – RMSE.

mation plus précise que $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ pour plusieurs valeurs de moyenne pour le bruit, sauf bien sûr dans le cas de moyenne égale à zéro (même dans ce cas le RSME des deux les estimateurs sont presque les mêmes)

Conclusion générale

Dans ce travail, s'est porté sur le modèle de séries chronologiques, nous nous sommes intéressés aux modèles APARCH introduits par Ding.

Plus précisément, nous avons présenté Les définitions principaux de modéle APARCH , propriétés des processus stochastiques des séries chronologiques et quelques notions de bases, la loi laplace et les fonctions gamma et la définition de estimation, la vraisemblance, la fonction log-vraisemblance.

Aussi,nous avons donné l'estimateur de quasi maximum vraisemblance Laplace avec des conditions assurant l'existance et stationnarité, nous avons donné Hypothèses nécessaires pour la convergence de l'estimation de quasi maximum de vraisemblance pour le processus APARCH à base d'erreurs Laplace. Nous avons démontré leurs propriétaires asymptotiques de la quasi vraisemblance, de consistance forte et la preuve de la normalité asymptotique de l'EQMV-Laplace.
A la fin. Nous avons présenté une application numérique des séries chrono-

logiques APARCH simulées. Et nous comparons entre le modèle APARCH avec erreurs Laplace(1,1) et le modèle APARCH avec erreurs Laplace (1, 0), et comme Laplace (1, 1) il est aussi admet consistance et l'asymptotiques normale. Et nous avons remarquant que l'APARCH avec erreurs Laplace(1,1) mieux dans certains cas que l'APARCH avec erreurs Laplace (1,0).

Bibliographie

[1] Ansley, C.F. (1979), An algorithm for the exact likelihood of a mixed autoregressive moving average process, Biometrika 66, 59-65 .

[2] Bardet, J.M. and Wintenberger, O. (2009), Asymptotic normality of the Quasi-Maximum likelihood estimator for multidimensional causal process, The Annals of Statistics, 37, 2730-2759.

[3] Barnarda, W. Trindade, A.A. Wickramasingheb, R.I.P (2014), Autoregressive Moving Average Models Under Exponential Power Distributions, ProbStat Forum, 7, 65-77.

[4] Berkes, I., Horváth, L. and Kokoszka, P. (2003), GARCH processes : structure and estimation, Bernoulli, 9, 201-227.

[5] Berkes, I. and Horváth, L. (2004), The efficiency of the estimators of the parameters in GARCH processes, The Annals of Statistics, 32, 633-655.

[6] Billingsley, P. (1968), Convergence of Probability Measures. Wiley, New York.

[7] Box, G.E.P. Jenkins, G.M. (1970), Time Series Analysis ; Forecasting and Control, San Francisco : Holden-Day.

[8] Box, G.E.P. Jenkins, G.M. (1976), Time Series Analysis Forecasting and Control, 2nd edition. San Franoisco : Holden-Day.

[9] Bollerslev, T. (1986), Generalised autoregressive conditional heteroscedasticity, Journal of Econometrics, 31, 307-327.

[10] Broyden, C. G. (1970), The convergence of a class of double-rank minimization algorithms, Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, 6, 76-90.

[11] Brockwell, P.J. Davis, R.A. (2002), Time Series Theory and Methods, Springer-Verlag : New York.

[12] Brockwell P.J., Lindner A. (2010), Strictly stationary solutions of autoregressive moving average equations. Biometrika 97, 765-772.

[13] Davis, R. and Dunsmuir, W. (1997), Least Absolute Deviation Estimation for Regression with ARMA Errors. Journal of Theoretical Probability, 10, 481-497.

[14] Davis, R. Knight, K. Liu, J. (1992), R.M-Estimation for Autoregressions with Infinite Variance, Stoch. Proc. Appl. 40, 145-180.

[15] DeFrutos, R.F. Serrano, G.R.(1997), A generalized least squares estimation method for invertible vector moving average models, Econom Lett 57, 149-156.

[16] DENT, W. MEN, A.S. (1978), A Monte Carlo study of autoregressive integrated moving average processes. J. Econometrics 7, 23-55.

[17] Doukhan, P. and Wintenberger, O. (2007), Weakly dependent chains with infinite memory. Stochastic Process. Appl., 118, 1997-2013.

[18] Ding, Z., Granger C.W.J., Engle R.F. (1993), A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model, Journal of Empirical Finance 1, 83-106.

[19] Dugre, J.P.(1980), Generating covariance sequences and the calculation of quantization and rounding error variances in digital filters, Acoustics, Speech and n.a. Processing, IEEE Transactions,Vol. 28, 102 - 104.

[20] Durbin, J. (1959), Efficient estimation of parameters in moving-average models, Biometrika 46, 306-16.

[21] Engle, R.F. (1982), Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, Econometrica 50, 987-1008.

[22] Feller, W. (1971), An Introduction to Probability Theory and Its Applications 2. Wiley, New York.

[23] Fletcher, R. (1970), "A New Approach to Variable Metric Algorithms", Computer Journal, 13, 3, 317–322

[24] Fletcher, R. Reeves, C. M. (1964), Function minimization by conjugate gradients, The Computer Journal, Vol. 7, 2, 149-154.

[25] Francq, C. and Zakoian, J.-M. (2004), Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes, Bernoulli, 10, 605-637.

[26] Francq, C., Lepage, G. and Zakoian, J-M. (2011), Two-stage non Gaussian QML estimation of GARCH models and testing the efficiency of the Gaussian EQMV. Journal of Econometrics, 165, 246-257.

[27] Francq, C. and Zakoian, J-M. (2013), Optimal predictions of powers of conditionally heteroskedastic processes. J. Roy. Statist.soc, B, 75, 345-367.

[28] Francq, C. and Zakoian, J-M. (2015), Risk-parameter estimation in volatility models. Journal of Econometrics, 184, 158-173.

[29] Gao, Y., Zhang, C. and Zhang, L. (2012) Comparison of GARCH Models based on Different Distributions, Journal of Computers, 7, 1967-1973.

[30] Ghoudi, K. and Remillard, B. (2014), Comparison of specification tests for GARCH models. Computational Statistics and Data Analysis, 76, 291-300.

[31] Godolphin, E.J. (1984), A direct representation for the large sample maximum likelihood estimator of a Gaussian autoregressive moving average process, Biometrika, 71, 1984, 281–89.

[32] Goldfarb, D. (1970),A Family of Variable Metric Methods Derived by Variational Means Maths. Comput., 24, 23-26.

[33] Hannan, E.J. Rissanen, E.J. (1982), Recursive estimation of mixed autoregressive-moving average order, Biometrika, 69, 81-94.

[34] Jeantheau, T. (1998), Strong consistency of estimators for multivariate arch models. Econometric Theory ,14, 70-86.

[35] Klar, B., Lindner, F. and Meintanis, S.G. (2012) Specification tests for the error distribution in GARCH models. Computational Statistics and Data Analysis 56, 3587-3598.

[36] Koreisha, S. Pukkila, T. (1989), Fast linear estimation methods for vector moving average models, J. Time Ser. Analysis, 10, 325-339.

[37] Kounias, E.G. and Weng, T.-S. (1969), An inequality and almost sure convergence. Annals of Mathematical Statistics, 40, 1091-1093.

[38] Li, G. and Li, W.K. (2008), Least Absolute Deviation Estimation for Fractionally Integrated Autoregressive Moving Average Time Series Models with Conditional Heteroscedasticity. Biometrika, 95, 399-414.

[39] Ling, S. McAleer, M. (2002). Necessary and Sufficient Moment Conditions for the GARCH(r, s) and Asymmetric Power GARCH(r, s) Models. Econometric Theory, 18, 3, 722-729.

[40] Ling, S. and McAleer, M. (2003), Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model. Econometric Theory, 19, 280-310.

[41] Li,W.K. McLeod, A.I. (1988), ARMA modeling with non-Gaussian innovations, J. Time Ser., 9, 2, 155-168.

[42] Lumsdaine, R.L. (1996), Consistency and asymptotic normality of the quasi-maximum likelihood in IGARCH$(1, 1)$ and covariance stationary GARCH$(1, 1)$ models. Econometrica, 64, 575-596.

[43] Mauricio, J.A. (1959), Exact maximum likelihood estimation of stationary vector ARMA models. J. Am. Statist. Ass., 90, 282-91.

[44] Mauricio, J.A. (1997), The exact likelihood of a vector autoregressive moving average model, Appl. Statistics 46, 157-171.

[45] Mauricio, J.A. (2002), An algorithm for the exact likelihood of a vector autoregressive moving average model, J. Time Ser. Analysis 23, 473-486.

[46] McLeod, A. I. (1977), Improved Box-Jenkins estimators. Biometrika 64, 531-534.

[47] McLeod, A.I. Holanda Sales P.R. (1983), An algorithm for approximate likelihood calculation of ARMA and seasonal ARMA models, J. Roy. Statist.soc, 32, 2, 211-223.

[48] Melard, G. A. (1984), Fast algorithm for the exact likelihood of autoregressive-moving average models, Appl. Statistics, 33, 104-114.

[49] Mittnik, S. (1990), Computation of theoretical autocovariance matrices of multivariate autoregressive moving average time series, J. Roy. Statist.Soc, Series B, 52, 151-155.

[50] Newey, W.K. and Steigerwald, D.G. (1997), Asymptotic bias for quasi-maximum-likelihood estimators in conditional heteroskedasticity models. Econometrica 65, 587-599.

[51] Nelder, J. A. Mead, R. (1965), A Simplex Method for Function Minimization. Comput. J. 7, 308-313.

[52] Nelson, H. L. Jr. and Granger, C. W. J. (1979), Experience with using the Box-Cox transformation when forecasting economic time series. Journal of Econometrics, 10, 57–69.

[53] Nicholls, D.F. Hall, A.D. (1979), The exact likelihood function of multivariate autoregressive moving average models, Biometrika, 66, 259-264.

[54] Pearlman, J.G. (1980), An algorithm for the exact likelihood of a high-order autoregressive -moving average process, Biometrika, 67, 232-233.

[55] Peng, L. and Yao, Q. (2003), Least absolute deviations estimation for ARCH and GARCH models. Biometrika 90, 967-975.

[56] OSBOBN, D. R. (1976), Maximum likelihood estimation of moving average processes. Ann. Econ. and Soc. Measurement 5, 75-87.

[57] Reinsel, G.C. Basu, S. Yap, S.F. (1992), Maximum likelihood estimators in the multivariate autoregressive moving average model from a generalized least squares viewpoint, J. Time Ser Analysis, 13, 133-145.

[58] Reinsel, G.C. (1997), Elements of Multivariate Time Series Analysis. second ed, Springer, New York.

[59] Robinson, P.M. (1991), Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regression, Journal of Econometrics, 47, 67-84.

[60] Robinson, P.M. and Zaffaroni, P. (2006), Pseudo-maximum likelihood estimation of ARCH(∞) models, Ann. Statist. 34, 1049-1074.

[61] Shanno, David, F. Kettler, Paul C. (1970), Optimal conditioning of quasi-Newton methods, Math. Comput. 24, 111, 657-664.

[62] Shea, B.L. A (1988), Note on the generation of independent realisations of a vector autoregressive moving average proces, J. Time Ser. Anal. 9, 403-410.

[63] Shea, B.L. (1989), The exact likelihood of a vector autoregressive moving average model, J. Roy. Statist. Soc. Ser. C, 38, 161-184.

[64] SHEPHARD, N. PITT, M.K. (1997), Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series, Biometrika. 84, 3 : 653-667.

[65] Straumann, D. and Mikosch, T. (2006), Quasi-maximum-likelihood estimation in conditionally heteroscedastic time series : A stochastic recurrence equations approach. Ann. Statist. 34, 2449-2495.

[66] Solo, V. (1984) The exact likelihood for a multivariate ARMA model, J. Multivar. Anal. 15, 164-173.

[67] Tunnicliffe-Wilson, G. (1973), The estimation of parameters in multivariate time series models, J. Roy. Statist.Soc, B, 35, 76-85.

[68] Van der Vaart, A.W. (2000), Asymptotic Statistics, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics,Cambridge University Press.

[69] Weiss, A.A. (1984), ARMA models with ARCH errors. J. Time Ser. Anal., 5, 2, 129-143.

[70] Weiss, A.A. (1986), Asymptotic theory for ARCH models estimation and testing. Econometric Theory, 2, 107-131.

[71] Whittle,P.(1951) Thesis : Hypothesis Testing in Time Series Analysis, Upsala : Almquist and Wiksell.