الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire de MILA

N° Réf :……………

Centre universitaire Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques appliquées

Nouveau schéma de communication sécurisée à base du chaos

Préparé par

- Chahrazed BOUCHELAGHEM
- Inass ZENTOUT

Devant le jury :

Labed BOUDJEMAA (M.A.A)	C.U. Abdelhafid Boussouf-Mila	Président
Smail KAOUACHE (M.C.B)	C.U. Abdelhafid Boussouf-Mila	Rapporteur
Allal MEHAZZEM (M.A.A)	C.U. Abdelhafid Boussouf-Mila	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

ملخص:

الهدف من هذا العمل هو تنفيذ رسم تخطيطي بسيط للاتصال الآمن القائم على الفوضى. يستند هذا العمل من ناحية على تزامن نظام **لو** ومن جهة أخرى على إخفاء المعلومات السرية.

يتم تنظيم باقي هذه الرسالة على النحو التالي :

في الفصل الأول سنقوم بعرض المفاهيم الأساسية الرئيسية للأنظمة الديناميكية الحتمية كما سنحدد فيه بعض المفاهيم التمهيدية لنظرية الفوضى.

الفصل الثاني مخصص لدراسة بعض التعاريف الأولية المتعلقة بأنواع مختلفة من تزامن المذبذبات الفوضوية المقترنة.

في الفصل الثالث سنعمل على تنفيد رسم تخطيطي بسيط للاتصال الآمن على أساس الفوضى. يتكون هذا الرسم البياني من مذبذبين متطابقين مرتبطين بقناة إرسال عامة ، سيتم تشفير الرسائل ثم إرسالها من مذبذب جهاز الإرسال. هدفنا هو استعادة هذه الإشارات المفيدة باستخدام تقنية إزالة البارامترية. وأخيرًا ، يتم توضيح مخططات المزامنة المقترحة عن طريق بعض الأمثلة الرقمية.

الكلمات المفتاحية:

الأنظمة الفوضوية ، التزامن، التحكم الفعال، التحكم المنسجم، الاتصالات الآمنة.

<u>Résumé :</u>

Ce travail de ce mémoire consiste à réaliser un schéma simple de communication sécurisée à base du chaos, il repose d'une part sur la synchronisation du système hyperchaotique de **Lu** et d'une autre sur le masquage de l'information sécrète.

La suite de ce mémoire est organisée de la façon suivante:

Le premier chapitre présente les principales notions de base des systèmes dynamiques déterministes. Il énonce également quelques concepts introductifs à la théorie du chaos.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de quelques définitions préliminaires concernant les différents types de synchronisations des oscillateurs chaotiques couplés.

Le troisième chapitre consiste à réaliser un simple schéma de communication sécurisée à base du chaos. Ce schéma se compose de deux oscillateurs hyperchaotiques identiques liés par un canal de transmission public. Les messages transmis seront cryptés puis envoyés à partir de l'oscillateur émetteur. Notre objectif est de récupérer ces signaux utiles en utilisant la technique de démodulation paramétrique. Enfin, les schémas de synchronisation proposée sont illustrés par l'intermédiaire des exemples numériques.

Mots-clés:

Systèmes chaotiques, synchronisation, contrôle actif, contrôle adaptatif, communication sécurisée.

Abstract:

This work consists in carrying out a simple diagram of secure communication based on chaos; it is based on the synchronization of the hyperchaotic system of Lu and the masking of the secret information.

The rest of this work is organized as follows:

The first chapter presents the main basic notions of deterministic dynamical systems. It also sets out some introductory concepts to chaos theory.

The second chapter is devoted to the studies of some preliminary definitions concerning the different types of synchronizations of coupled chaotic oscillators.

The third chapter consists in making a simple diagram of secure communication based on chaos. This diagram consists of two identical hyperchaotic oscillators linked by a public transmission channel; the messages will be encrypted and then sent from the transmitter oscillator. Our goal is to recover these useful signals using the parametric demodulation technique. Finally, the proposed synchronization schemes are illustrated by means of the numeric examples.

Keywords:

Chaotic systems, synchronization, active controller, adaptive controller, secure communication.

Remerciements

Avant tout nous remercions ALLAH le tout puissant et miséricordieux qui nous a donné la force, la réussite et la patience d'accomplir ce modeste travail.
Nous remercions nos très chers parents pour leur soutien moral et financier qui nous a permis de réussir et de terminer nos études.

Nous sommes très sensible à l’intérêt qu’ont bien voulu porter à ce travail Monsieur Smail KOUACHE, maître de conférences au centre universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila. Nous tenons à le remercier pour m’avoir fait l’honneur d’être rapporteur de ce mémoire.

Nous tenons à remercier également, Monsieur Labed Boudjama maître assistant au centre universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila et Mr. Mehazzem Allal maitre assistant au centre universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila pour m’avoir fait l’honneur d’être membre de mon jury.
Nous remercions également l’ensemble du personnel du département de mathématiques et informatique de centre universitaire.

Dédicace

C'est avec un énorme plaisir, un cœur ouvert et une immense joie que dédie ce modeste travail :

*À mes très chers et magnifiques parents **Salah et Hakima**, qui m'ont bien soutenu et aidé tout au long de mon parcours jusqu'à en arriver jusqu'ici. Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragements. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserveet t'accorde santé, longue vie et bonheur.*

*À mes très chers frères **Nafaa** et **Loutfi** et ma belle sœur **Mounia**, Puisse Dieu vous donne santé, bonheur, courage et surtout réussite dans la vie.*

À toute la famille, grands et petits.

*À **Chahra**, chère amie avant d'être binôme.*

*À mes très belles copines : **Sabah**, **Rim**, **Hayat**, **Soumia**, **Ghada** **Yousra, Manel, Meriem et Khawla…***

À toutes les personnes qui m'ont permis de réaliser ce travail et accompagnés tout au long ce chemin.

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supèrieur.

INASS

Dédicace

Avec joie, fierté et respect je dedie ce modest travail :

*À mes chers parents **Mouhamed** et **Fadila**, sans vous rien n'aurait pu être possible, que Dieu vous protège et vous prête une longue vie pleine de santé et de prospérité.*

À mes chers soeurs :

***Meriem, Fatima, Sabrina, Nawel, Nadjet, Nada, Noura, Sassia,** source d'éspoir et de motivation.*

*À mes chers frères **Abdelghafour, Ahmed ,Fayçal** et **Abdelfettah** pour leurs appui et leurs encouragement.*

Aux** femmes de mes frères **Farida, Nassima et mounira .

À nos poussins de maison, mes chers :

Raiid , Adnane** " Que Dieu bénisse son âme" , **Ayoub, waiil, Hadil, Yakoub, Malak, Ishaq, Anes, Mayssem, Siraj, Yasser, Alaa, Noursine.

*À ma chère binôme **Iness** avec qui j'ai passé de trés bons moments.*

***Je** ne saurai terminer sans citer mes chers amies , **Soumia, Rim, Hayet, Sabah, Ghada, Minouch, Yousra, Meriem, Khawla, Manel...** et tant d'autres.*

Merci pour tous les bons moments passés ensemble.

Chahrazed

Table des matières

Table des figures

Introduction Générale

Les "**systèmes chaotiques**" sont des systèmes dynamiques non linéaires qui sont régis par des lois déterministes, dépendant de plusieurs paramètres et leurs évolutions au cours du temps sont imprévisible.

Plusieurs systèmes ont été présentés ces dernières années exploitant les comportements chaotique dans les domaines physiques [1], chimiques [2], biologiques [3] et économiques [4], etc. L'étude de tels systèmes est liée à la théorie du chaos qui a été reconnue à partir des années 1960, grâce aux travaux d'un grand nombre de chercheurs notamment ceux de Lorenz [5], et grâce à la découverte de nouveaux outils de calculs.

Le concept d'utilisation de la théorie du chaos pour les systèmes de communication a été essentiellement inspiré des travaux de Pecora et Carroll en 1990 [6]. Ils ont découvert que deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes peuvent se synchroniser s'ils sont convenablement couplés.

Les phénomènes de synchronisation du chaos ont fait l'objet d'un intérêt particulier dans l'étude des systèmes chaotiques, car ils peuvent s'appliquer à de vastes domaines de l'ingénierie et des sciences de l'information, notamment en communication sécurisée [7] et cryptologie [8].

La configuration de base d'un système de synchronisation est constituée d'un système émetteur et un système récepteur. On rappelle que ces systèmes peuvent être identiques avec des conditions initiales différentes ou complètement différents. Dans la littérature, différentes méthodes de contrôle ont été employées pour réaliser la synchronisation, telles que : le contrôle continu [9], le contrôle adaptatif [10], le contrôle de mode glissant [11] et le contrôle adaptatif flou [12]. À l'aide de ces méthodes, plusieurs concepts de synchronisation chaotique d'ordre entier ont été également étendus, à savoir la synchronisation complète [13], l'anti-synchronisation [14], la synchronisation généralisée [15], la synchronisation projective [16], la synchronisation projective modifiée [17] et la synchronisation généralisée de type $Q - S$ [18].

La transmission chaotique est un mode de communication sécurisée qui est née par l'inclusion du chaos dans les systèmes de transmissions. L'idée principale consiste à injecter le message dans un signale chaotique pour masquer cette information et de l'envoyer vers le récepteur à travers un canal public. Ainsi, après la synchronisation des deux systèmes (émetteur et récepteur), l'information cryptée est donc récupérée au niveau du récepteur.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrive en général dans ce contexte particulier. Nous présentons une application potentielle dans la communication sécurisée à base de la synchronisation du système de Lű

La suite de ce mémoire est organisée de la façon suivante :

Le premier chapitre présente les principales notions de base des systèmes dynamiques déterministes. Il énonce également quelques concepts introductifs à la théorie du chaos.

Le deuxième chapitre est consacré à l' étude de quelques définitions préliminaires concernant les différents types de synchronisations des oscillateurs chaotiques couplés.

Le troisième chapitre consiste à réaliser un schéma simple de communication sécurisée à base du chaos, il repose d'une part sur la synchronisation du système hyperchaotique de Lű et d'une autre sur le masquage de l'information secrète. Ce schéma se compose de deux oscillateurs chaotiques identiques liés par un canal de transmission publique, des messages seront chiffrés puis envoyés à partir de l'oscillateur émetteur. Notre objectif est de récupérer ces signaux en utilisant la technique de démodulation paramétrique.

Enfin, ce mémoire est clôturée par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions générales sur les phénomènes chaotiques ou hyperchaotiques qui apparaissent dans les systèmes dynamiques déterministes. Nous commencerons par définir la notion des systèmes dynamiques, puis nous aborderons d'autres notions mathématiques notamment, les attracteurs, le bassin d'attraction, les points stationnaires, la section de Poincaré et quelques notions de stabilité. Enfin nous présenterons les caractéristiques principales d'un comportement chaotique ou hyperchaotique.

1.1 Introduction à la théorie des systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée pour étudier les systèmes physiques qui évoluent au cours du temps.
Du point de vue mathématiques, les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :
• Systèmes dynamiques continus.
• Systèmes dynamiques discrets.

1.1.1 Systèmes dynamiques continus

L'évolution d'un système dynamique continue est décrit par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{x} = f(x, t, v), \tag{1.1}$$

où, $x \in E$ (E un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ appelé espace de phase) est le vecteur d'état, $v \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur des paramètres et $f : E \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$ est le champ de vecteur, qui représente la dynamique du système (1.1).

1.1.2 Systèmes dynamiques discrets

Une modélisation discrète du temps peut être imposée soit par la même nature du processus soit par le besoin de "discrétiser" un modèle au temps continu pour le traiter numériquement. L'évolution du système est observée en choisissant certains moments du temps que nous allons supposer équidistants. Dans tous les cas le choix de l'unité de temps représente une partie importante de modélisation du système. Dans ce modèle, le temps sera donc noté par une variable n qui prend les valeurs entières : Dans ce cas, un système dynamique peut se présenter par une fonction itérative :

$$x_{n+1} = f(x_n, v), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

1.1.3 Systèmes autonomes ou non autonomes

Lorsque le champ de vecteur f ne dépend pas explicitement du temps, le système (1.1) est dit autonome. Dans le cas contraire, il est dit non autonome.
En utilisant un changement de variable approprié, on peut facilement transformer un système non autonome de dimension n en un système autonome équivalent de dimension $n + 1$.

1.2 Attracteurs et bassin d'attraction

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent toutes les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle un attracteur.
Il en existe deux type d'attracteurs : attracteurs réguliers et attracteurs étranges.

1.2.1 Attracteurs réguliers

Il existe trois types distincts d'attracteurs réguliers.

❶ L'attracteur ″point fixe″ : c'est l'attracteur le plus simple. Il est représenté par un point dans l'espace des phases. C'est donc une solution constante et stationnaire.

❷ L'attracteur ″cycle limite″ : c'est une trajectoire fermée qui attire toutes les orbites proches. C'est donc une solution périodique du système.

❸ L'attracteur "quasi-périodique" : représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs fréquences, que l'on appelle parfois "tore".

1.2.2 Attracteurs chaotiques

Un attracteur chaotique est bien plus complexe que les autres attracteurs, il est caractérisé par :

❶ Un volume nul.

❷ un dimension fractale (non-entière) d, $2 < d < n$, où n est la dimension de l'espace de phase.

❸ Une séparation exponentiellement rapide de deux trajectoires initialement proches.

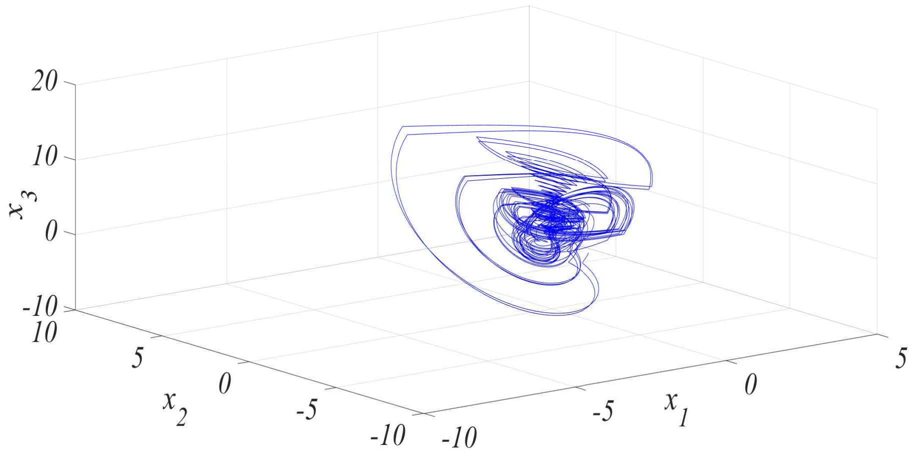

FIGURE 1.1 – Attracteurs chaotiques du système de Danca [19].

Définition 1.2.1. *Soit A un sous ensemble compact de l'espace de phases E. Un attracteur A du système (1.1) vérifie les quatre conditions suivantes :*

❶ *A est invariant sous l'action du flot varphi$_t$, c'est-à-dire : $\varphi_t(A) = A$.*

❷ *A est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.*

❸ *Il existe une orbite dense dans A.*

❹ *A est indécomposable, c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs ne peut pas être un attracteur.*

1.2.3 Bassin d'attraction

Définition 1.2.2. *Lorsque A est un attracteur, l'ensemble :*

$$B(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \lim_{t\to\infty} \phi_t(x) \in A \right\}, \tag{1.3}$$

est appelé le bassin d'attraction de A. C'est donc, l'ensemble des points pour lesquels les trajectoires convergent asymptotiquement vers A.

1.3 Points d'équilibre

En général, on ne sait pas résoudre explicitement des équations différentielles non linéaires. On fait alors une étude qualitative de ses solutions. Cette étude va commencer par la recherche des points d'équilibre de l'équation différentielle (1.1).
En ce point d'équilibre, la vitesse s'annule :

$$\dot{x} = 0. \tag{1.4}$$

Les points d'équilibre, que nous notons x_{eq}, vérifient alors l'équation suivante :

$$f(x_{eq}) = 0. \tag{1.5}$$

Dans l'espace de phase, un point d'équilibre se représente par un point. Sa valeur est déterminée à savoir la condition initiale choisie. Par ailleurs, pour des conditions initiales différentes nous pouvons trouver plusieurs points d'équilibre. De plus, ces points peuvent être stables ou instables, à savoir la convergence ou la divergence entre les trajectoires voisines.

1.4 Stabilité des points d'équilibres

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires au voisinage des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet alors d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est très proche d'un point d'équilibre. La théorie de stabilité au sens de Lyapunov est valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste toujours suffisamment proche.

Définition 1.4.1. *(**Stabilité**) Le point d'équilibre x_{eq} du système (1.1) est stable au sens de Lyapounov si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\,,\ \textit{tel que}\ \left\|x_0 - x_{eq}\right\| < \delta \Rightarrow \left\|x(t, x_0) - x_{eq}\right\| < \epsilon\ \forall t \geq t_0. \tag{1.6}$$

Définition 1.4.2. *(**Attractivité**) Le point d'équilibre x_{eq} du système (1.1) est attractif si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \textit{tel que}\ \left\|x_0 - x_{eq}\right\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} (x(t, x_0) - x_{eq}) = 0. \tag{1.7}$$

Définition 1.4.3. *(**Stabilité asymptotique**) Le point d'équilibre x_{eq} du système (1.1) est asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.*

Définition 1.4.4. *(**Stabilité exponentielle**) Le point d'équilibre x_{eq} du système (1.1) est exponentiellement stable, s'il existe deux constantes strictement positives a et b et s'il existe $t_0 > 0$, tels que :*

$$\left\|x(t, x_0) - x_{eq}\right\| < a\exp(-bt), \textit{pour tout } \ t \geq t_0. \tag{1.8}$$

Remarque 1.1. *Notons que l'utilisation des définitions précédentes, pour réaliser la stabilité de (1.1), au voisinage de son point d'équilibre, exige la résolution explicite de l'équation (1.1), ce qui est souvent très difficile dans la plupart des cas. De ce fait là, les deux méthodes suivantes de Lyapounov nous permettent de contourner cet obstacle.*

1.4.1 Méthode directe

La méthode directe de Lyapounov nous permet d'analyser localement la stabilité de système (1.1), sans le résoudre explicitement. Le problème de la stabilité se ramène alors à chercher une telle fonction (dite fonction de Lyapounov), qui est fourni des informations sur la stabilité du système. Le théorème suivant va résumer cette méthode.

Théorème 1.4.1. *[20] Le point d'équilibre x_{eq} du système (1.1) est dit stable (respectivement asymptotiquement stable) au sens de Lyapounov s'il existe un voisinage $D(x_{eq})$ et une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ (dite fonction de Lyapounov) de classe C^1 ayant les propriétés suivantes :*
1. $V(x_{eq}) = 0$ et $V(x) > V(x_{eq})$, pour tout $x \neq x_{eq}$ dans D.
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ (respectivement $\dot{V}(x) < 0$), pour tout $x \neq x_{eq}$ dans D.

1.4.2 Méthode indirecte

La seconde méthode de Lyapounov est basée sur l'examen de la linéarisation au voisinage du point d'équilibre x_{eq} du système (1.1). Plus précisément, on examine les valeurs propres x_{eq} de la matrice jacobienne associée à ce point d'équilibre.
La linéarisation revient à poser :

$$x = x_{eq} + \delta x, \tag{1.9}$$

où δx est une petite perturbation appliquée au voisinage du point d'équilibre x_{eq} . On a alors :

$$\dot{x} = \dot{x}_{eq} + \delta\dot{x}. \tag{1.10}$$

Le système (1.1) devient alors :

$$\dot{x}_{eq} + \delta\dot{x} = f(x_{eq} + \delta x). \tag{1.11}$$

En utilisant un développement de Taylor du premier ordre de f au voisinage x_{eq}, on obtient :

$$f(x_{eq} + \delta x) = f(x_{eq}) + J_f(x_{eq})(x - x_{eq}), \tag{1.12}$$

où J_f représente la matrice jacobienne de f. D'où :

$$\delta \dot{x} = J_f(x_{eq})\delta x. \tag{1.13}$$

Cette équation montre l'évolution de la perturbation δx au voisinage du point d'équilibre. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 1.4.2. *(Théorème de Hartmann-Grobman) [21] Si la matrice jacobienne $J_f(x_{eq})$ admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certain voisinage de x_{eq}.*

Remarque 1.2. *Ce théorème nous permet de lier la dynamique du système non linéaire (1.1) à la dynamique du système linéarisé (1.13).*

L'extension du théorème sur la linéarisation est alors :

Théorème 1.4.3. *Soit x_{eq} un point d'équilibre du système (1.1).*
1- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $J_f(x_{eq})$ ont des parties réelles strictement négatives, alors x_{eq} est dit exponentiellement stable.
2- Si la matrice jacobienne ayant au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, le point x_{eq} est dit instable.

1.4.3 Inconvénients de la méthode indirecte

La méthode indirecte de Lyapunov ayant deux inconvénients principaux. Le premier est que la stabilité que l'on peut obtenir n'est valable que dans un voisinage du point d'équilibre. Le second inconvénient est que la méthode est non conclusive lors de la présence de valeur(s) propre(s) à partie réelle nulle. cependant que ces inconvénient n'apparaissent pas dans la méthode directe de Lyapunov. Pour cela, la détermination de la fonction de Lyapounov possède des bonnes propriétés.

1.5 Section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret.

Soit maintenant un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension n et une surface de dimension ($n-1$). L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface. L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface, représente la section de Poincaré.

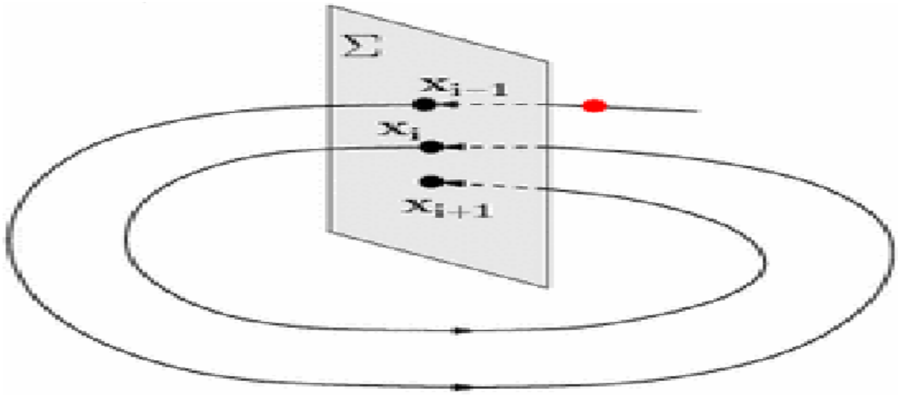

FIGURE 1.2 – Section de Poincaré

Remarque 1.3. *Si le système dynamique continue défini sur un espace de dimension n, on aurait une application de Poincaré définie sur un espace de dimension $n-1$.*

Remarque 1.4. *L'application de Poincaré est aussi un outil pour l'étude de la stabilité des orbites périodiques. En effet, l'intérêt de l'application de Poincaré : son étude est plus simple que celle du flot. Par exemple le point d'équilibre $c = P(c)$ est un point attractif. Cette propriété est équivalente à l'existence d'un cycle limite attractif pour le flot.*

1.6 Caractérisation du chaos

L'objectif de cette partie est de mieux faire connaître les caractéristiques permettant de reconnaître un comportement chaotique. En première approche, nous rappelons quelques approches de définitions du chaos, ensuite nous présentons des caractéristiques principales du comportement chaotique d'un système dynamique déterministe. Nous citons également quelques scénarios de transition vers le chaos. Enfin, nous terminons cette partie par une application sur les systèmes chaotiques.

1.6.1 Le chaos

En général, il n'existe pas une définition formelle du chaos. Cependant, il existe plusieurs approches de définitions possibles du chaos. Ces approches ne sont pas toutes

équivalentes, mais elles convergent vers certaines propriétés communes caractérisant le chaos. Par exemple, la définition du chaos selon Li-Yorke [22] est la suivante :
Une application continue $f : [0,1] \to [0,1]$ est chaotique, s'il y a un ensemble indénombrable $S \subset [0,1]$, tel que les trajectoire de deux points distincts $x_1, x_2 \in S$ sont proximaux et non asymptotique ; c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \inf(\left|f^{(n)}(x_1) - f^{(n)}(x_2)\right|) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \sup(\left|f^{(n)}(x_1) - f^{(n)}(x_2)\right|) > 0. \tag{1.14}$$

D'après Devaney [23] : un système dynamique est chaotique si et seulement si :

a) Il est topologiquement transitif, c'est-à-dire si l'on considère deux voisinages arbitraires de deux états distincts d'un système dynamique, alors il existe une trajectoire qui passe de l'un à l'autre.

b) Il possède un ensemble dense d'orbites périodiques.

c) Il possède la propriété de sensibilité aux conditions initiales.

1.6.2 Caractéristiques principales du comportement chaotique

Ci-dessous, nous rappelons quelques caractéristiques qui nous permettent de mieux comprendre les points marquants d'un système chaotique.

Non-linéarité

La non-linéarité est l'une des caractéristiques fondamentales des systèmes chaotiques. En effet, tout système linéaire ne peut pas être chaotique.

Déterminisme

Un système chaotique est déterministe (plutôt que probabiliste), c'est-à-dire qu'il soumit à des lois qui décrivent complètement son mouvement. La notion de déterminisme signifie donc la capacité de prédire l'état futur d'un phénomène à partir d'un événement passé. Cependant, dans les phénomènes aléatoires, il est impossible de prévoir les trajectoires d'une quelconque particule.

Aspects aléatoires

La Figure 1.3 illustre l'évolution temporelle des trajectoires chaotiques du système de Lű [29]. Le système représente une évolution complexe, non périodique et imprévisible. C'est donc l'aspect aléatoire des systèmes chaotiques.
L'évolution temporelle d'une trajectoire chaotique apparaît comme aléatoire, cepen-

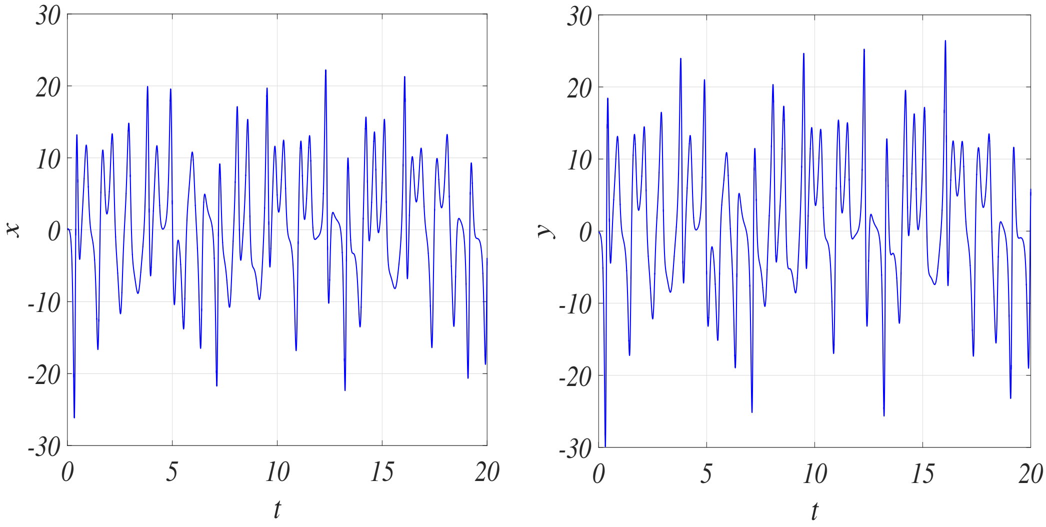

FIGURE 1.3 – Aspects aléatoires des états chaotiques du système de Lű [29].

dant l'observation de cette trajectoire dans l'espace des phases, au voisinage de l'infini, décrit une forme particulière dont la structure est fractale ; c'est l'attracteur chaotique.

Attracteurs chaotiques

La figure géométrique particulière qui représente l'attracteur d'un système chaotique dans l'espace des phases en fonction du temps, appelé attracteur chaotique. Ainsi, cet attracteur se produit à l'aide de deux opérations simultanées à savoir l'étirement, responsable de la sensibilité aux conditions initiales et de l'instabilité, et le repliement, responsable du côté étrange. D'autre part, on parle d'attracteur chaotique lorsque sa dimension est fractale. Grâce de cette propriété particulière, fractale, ces attracteurs sont qualifiés d'étranges(chaotiques). Ils représentent la signature du chaos qui nous permet d'authentifier un comportement chaotique.

Sensibilité aux conditions initiales

Les systèmes chaotiques sont extrêmement très sensibles aux conditions initiales. De très petites perturbations sur l'état initial d'un système peuvent être mener finalement à un comportement strictement différent dans son état final. La Figure 1.4 illustre l'évolution temporelle d'un trajectoire du système de Lű [29] avec trois conditions initiales différentes très proches.

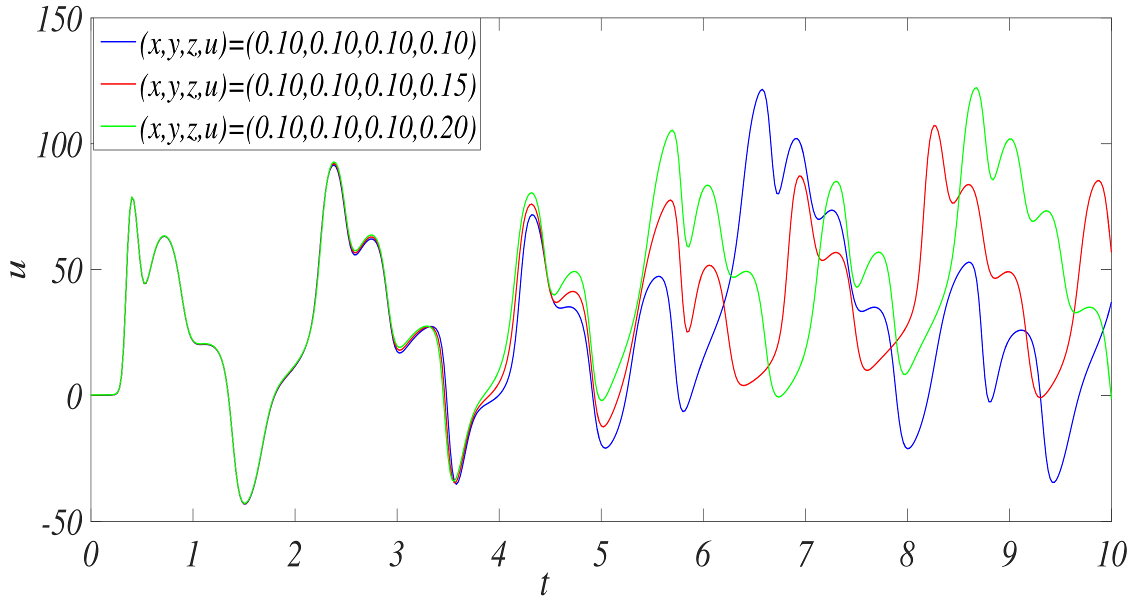

FIGURE 1.4 – Evolution temporelle de la trajectoire u du système de Lű avec trois conditions initiales différentes très proches.

Exposants de Lyapounov

La vitesse de divergence de deux trajectoires initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapounov afin de caractériser la nature du chaos détecté. L'exposant de Lyapounov sert à mesurer le taux de divergence des deux trajectoires. Lyapunov a démontré que le nombre d'exposants de Lyapounov est égal à la dimension de l'espace des phases. Par exemple, pour un système à temps continue d'ordre 4, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 les exposants de Lyapounov de ce système satisfaisant $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$. Alors ce système se comporte de la manière suivante :

- Si $\lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Il s'agit d'un point d'équilibre asymptotiquement stable.
- Si $\lambda_1 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < 0$. Il s'agit d'un cycle limite stable.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < 0$. Il s'agit d'un tore stable.
- Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < \lambda_4 < 0$ et $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i < 0$. Il s'agit d'un système chaotique.
- Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$ et $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i < 0$. Il s'agit d' un système hyperchaotique.

Remarque 1.5. *Un exposant de Lyapounov négatif selon une direction, indique que les tra-*

jectoires se rapprochent et par conséquent on perd l'information sur les conditions initiales. l'orbite est donc attractive vers une orbite périodique ou un point fixe. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce genre de système exhibe une stabilité asymptotique.
Un exposant de Lyapounov positif selon une direction, indique que la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. les trajectoires divergent, l'orbite est donc chaotique. Intuitivement, c'est la sensibilité aux conditions initiales.
Un exposant de Lyapounov nul, les orbites issues de conditions initiales différentes, gardent une séparation constante, ni convergent, ni divergent l'une par rapport à l'autre. Dans ce cas, un tel système physique est dit conservatif.

Remarque 1.6. *Notons qu'il existe plusieurs algorithmes pour calculer les exposents de Lyapounov, l'un des plus connus étant l'algorithme de Wolf [24]. Cet algorithme nous permet de calculer les exposants de Lyapounov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires par rapport à la perturbation introduite parallèlement.*

Diagramme de bifurcations

On dit qu'il y a une bifurcation lorsqu'un tel changement qualitatif de la structure d'un système se produit à l'occasion de la variation quantitative de l'un de ses paramètres (qu'on l'appelle valeur de bifurcation). Les graphiques qui représentent ces bifurcations, sont appelés diagrammes de bifurcation. Donc le diagramme de bifurcation est un outil très important pour évaluer les comportements possibles d'un système en fonction des valeurs de bifurcation. La Figure 1.5 illustre le diagramme de bifurcations de l'application logistique définie sur le segment $[0, 1]$ par :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \tag{1.15}$$

où $n = 0, 1, 2, ...$ dénote le temps discret, et $r \in [0, 4]$ un paramètre de contrôle.
Selon la Figure 1.5, on peut constater trois états différents du système selon la valeur du paramètre r : un régime stable, puis périodique à plusieurs états et enfin un régime chaotique.

1.6.3 Route vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit " paramètre de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas à une

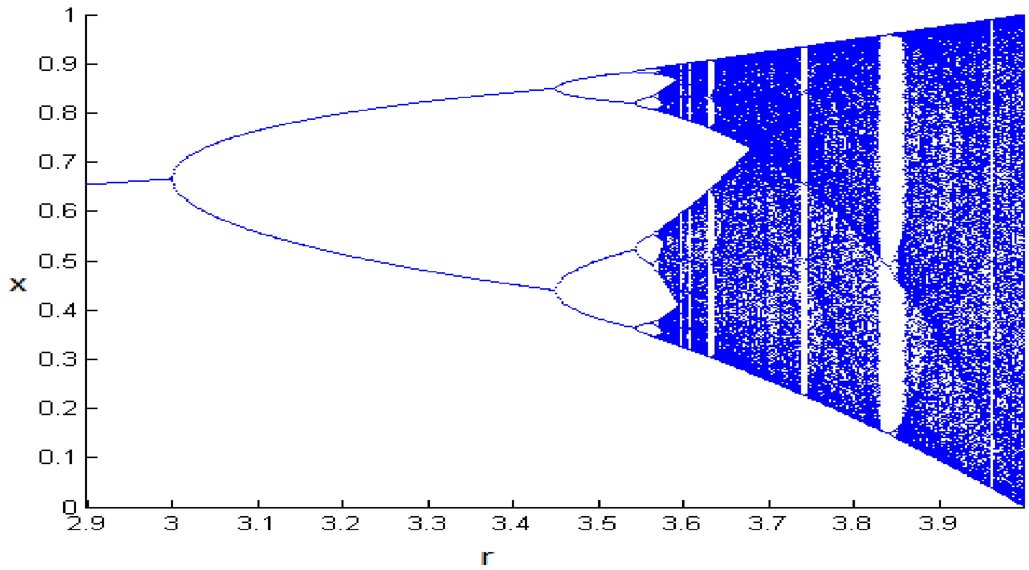

FIGURE 1.5 – Diagramme de bifurcations de l'application logistique.

complexification progressive du régime dynamique développé par le système.
En général les trois scénarios de transition vers le chaos sont les suivants :

Intermittence

L'intermittence vers le chaos se caractérise par un mouvement périodique entrecoupé par des bouffées chaotiques, puis le régime redevient périodique et ainsi de suite. La survenance des bouffées apparaissent de manière irrégulière dans le temps. L'augmentation d'un paramètre réalise l'augmentation de la fréquence des perturbations, puis les bouffées sont rares et espacées et finalement le chaos domine le comportement du système.

Doublement de période

Par l'augmentation progressive de la valeur de bifurcation, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, par huit, etc..., ces doublements de période étant de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique (Voire Figure 1.6).

Quasi périodicité

Le troisième scénario de transition vers le chaos est la quasi périodicité, qui intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit

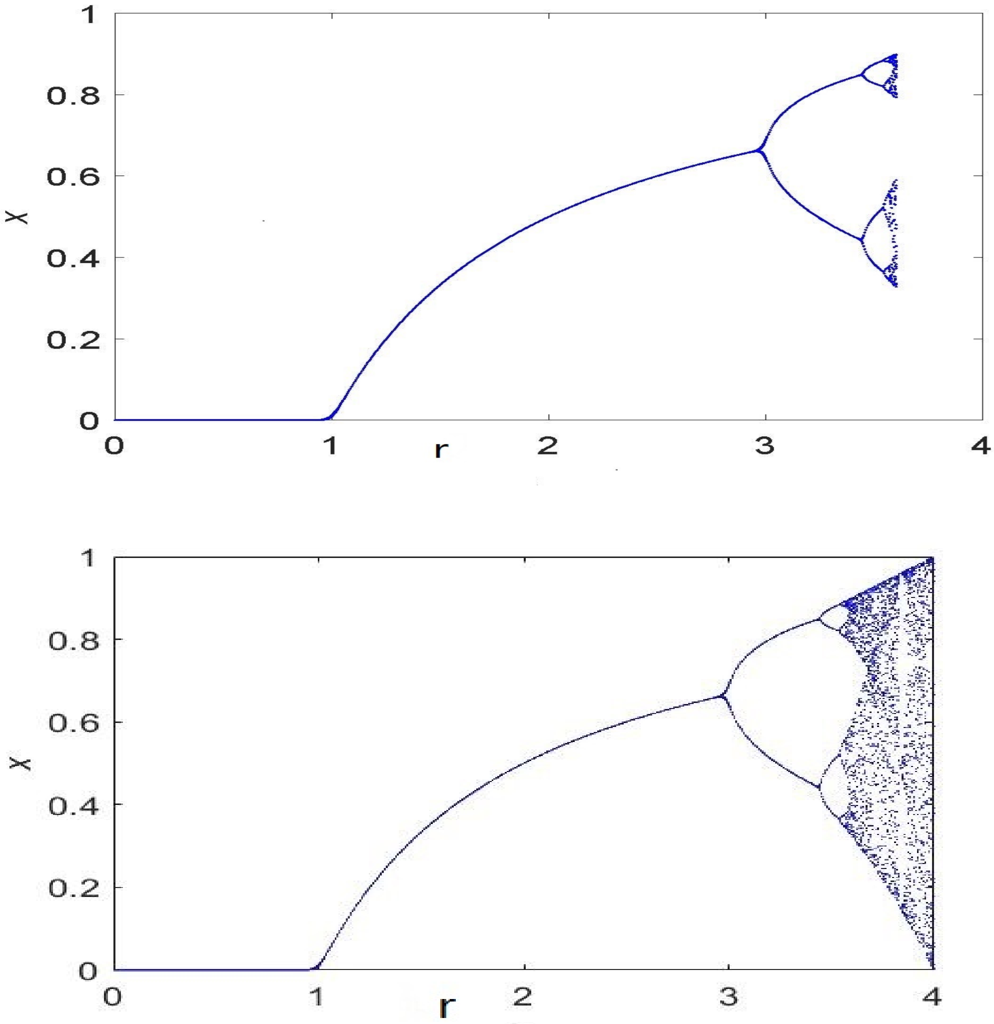

FIGURE 1.6 – Transition vers le chaos par doublement de période de l'application logistique.

quasi périodique. Ce régime peut, à son tour, perdre la stabilité et devenir alors soit directement chaotique, soit par la survenance d'une troisième fréquence.

1.6.4 Avantage du Chaos

Comme il a été déjà mentionné dans l'introduction, le chaos déterministe peut générer des comportements dynamiques d'apparences aléatoires. Il serait donc intéressant d'utiliser ces derniers comme porteuses d'informations en communications sécurisées.

1.6.5 Exemple d'un système hyperchaotique

Plusieurs systèmes chaotiques et hyperchaotiques ont été étudié dans la littérature. Parmi ces systèmes, on retrouve le système de Lorenz [25], le système de Chen [26], le système de Liu [27], le système de Qai [28], le système de Lű [29] et système de Rössler modifié [30].

Prenons comme un exemple de systèmes hyperchaotiques continue, le système de Rössler modifié [30] donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 + x_4, \\ \dot{x}_2 = x_1 + a_1 x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 - a_3 x_3 + a_2, \\ \dot{x}_4 = a_4 x_1, \end{cases} \tag{1.16}$$

où x_1, x_2, x_3, x_4 sont les variables d'état, et a_1, a_2, a_3, a_4 sont des constantes réelles positives. En comparant le côté droit du système (1.16) à zéro, nous pouvons constater que ce système ayant un seul point d'équilibre $P(0, 0, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_2}{a_3})$.

La matrice jacobienne du système (1.16) au point P est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{a_3} & 0 & -a_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

et l'équation caractéristique est donnée par :

$$\begin{gathered} \lambda^4 + (a_3 - a_1)\,\lambda^3 + \left(\tfrac{a_2}{a_3} - a_4 - a_1 a_3 + 1\right)\lambda^2 + \left(a_3 + a_4\,(a_1 - a_3) - a_1 \tfrac{a_2}{a_3}\right)\lambda \\ + \left(a_4\left(\tfrac{a_2}{a_3} + 1\right) - a_4\left(\tfrac{a_2}{a_3} - a_1 a_3 + 1\right)\right) = 0. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Lorsque les paramètres du système sont donnés par :

$$a_1 = 0.283,\ a_2 = 0.01,\ a_3 = 5 \text{ et } a_4 = 0.1, \tag{1.19}$$

on va voir que le système est hyperchaotique, et dans ce cas, les valeurs propres appartenant au système hyperchaotique (1.16) sont calculés par :

$$-3.193 \times 10^{-2},\ -4.99,\ 0.157 \pm 0.94043i. \tag{1.20}$$

Il est évident que le système a un point d'équilibre instable.

Attracteur hyperchaotique

Pour la simulation numérique, l'algorithme d'intégration de Runge-Kutta de quatrième ordre a été réalisé pour résoudre ce système.

Le système(1.16) peut afficher un attracteur hyperchaotique si les paramètres a_1, a_2, a_3 et a_4 prennent des valeurs comme dans le cas (1.19) et les valeurs initiales du système (1.16) comme :

$$x_1(0) = 2,\ x_2(0) = -5,\ x_3(0) = 0.03 \text{ et } x_4(0) = 0.2. \tag{1.21}$$

Les projections de portrait de phase sur les plans : $x_2 - x_3$, $x_1 - x_3$, $x_1 - x_2 - x_3$ et $x_1 - x_3 - x_4$ sont représentés dans la Figure 1.7.

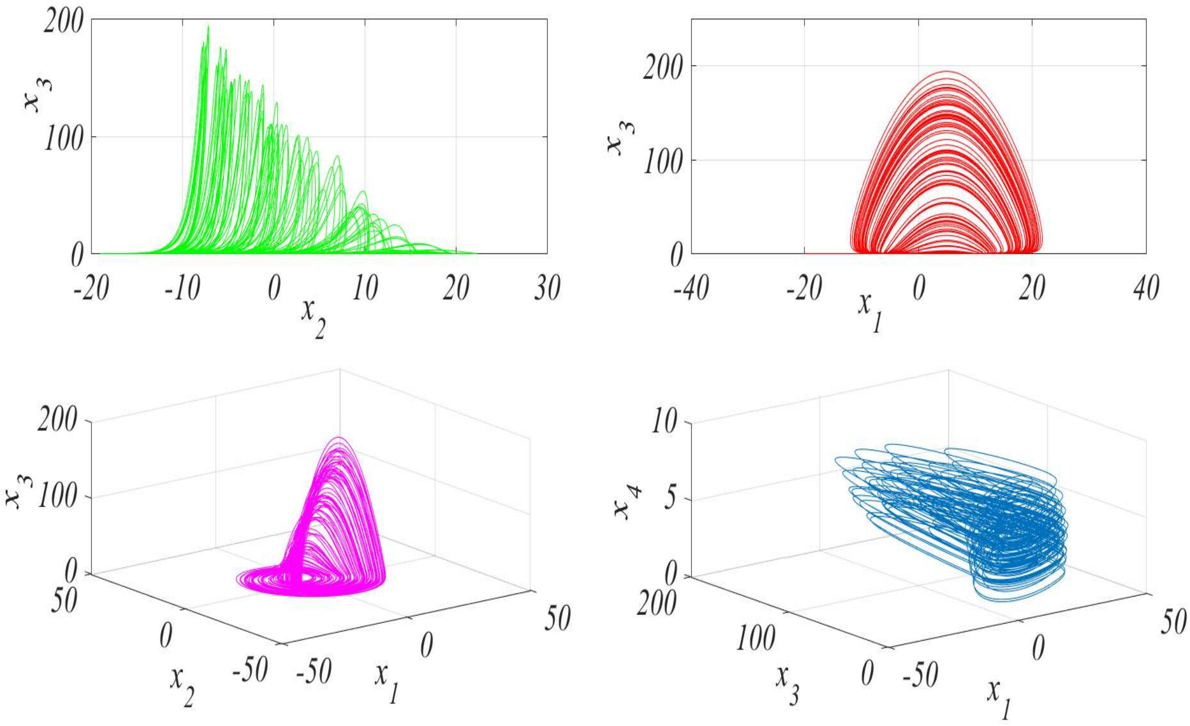

FIGURE 1.7 – Projections de portrait de phase du système (1.16)

Spectre des exposants de Lyapounov

Pour étudier l'impact des paramètres sur le système dynamique étudié, supposons que les trois paramètres a_2, a_3, a_4 sont maintenus constants et nous prenons a_1 varier dans l'intervalle $[0, 0.3]$. La variation des trois plus grand exposants de Lyapounov pour différentes valeurs de a_1 est donné dans la Figure 1.8, en utilisant l'algoritme de Wolf [31].

En particulier, lorsque les paramètres a_1, a_2, a_3, a_4 prennent des valeurs comme dans la cas (1.19) et les conditions initiales du système hyperchaotique (1.16) prennent des valeurs :

$$x_1(0) = 0.1,\ x_2(0) = -0.1,\ x_3(0) = 0 \text{ et } x_4(0) = 10, \tag{1.22}$$

les exposants de Lyapounov du système (1.16) sont donnés par :

$$\lambda_1 = 0.14,\ \lambda_2 = 0.034,\ \lambda_3 = 0 \text{ et } \lambda_4 = -5.27. \tag{1.23}$$

Ce qui assure que le système est bien hyperchaotique.

De plus, $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = -5.96 < 0$, ce qui montre que le système est bien dissipatif, et par conséquent, le volume du système va diminuer de la valeur V_0 à 0. Cela signifie que toutes les trajectoires du système arrivent finalement à un attracteur quand $t \to +\infty$.

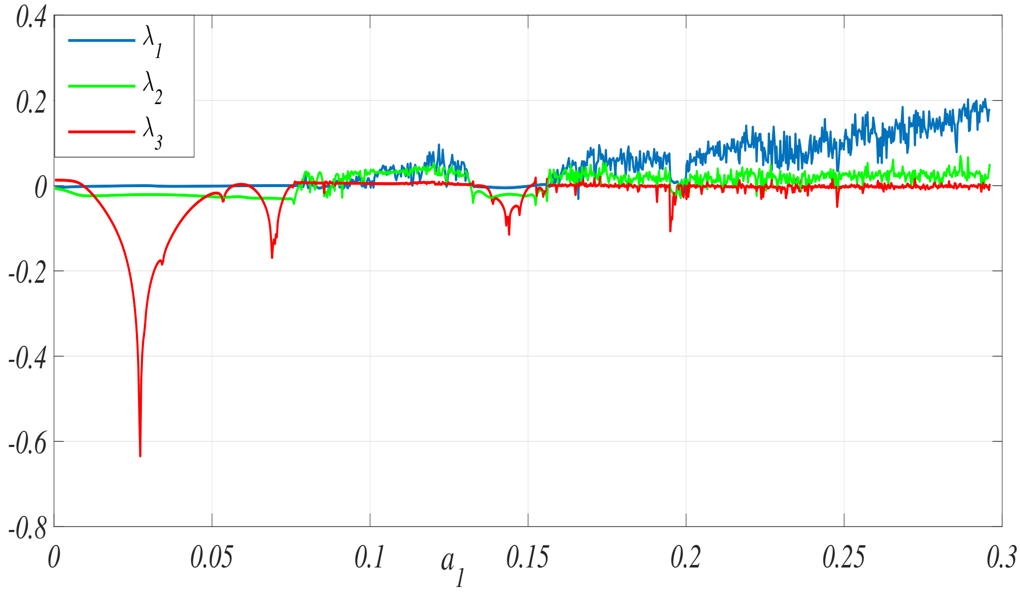

FIGURE 1.8 – Les trois plus grand exposants de Lyapunov du système (1.16).

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exhibé quelques notions de base des systèmes dynamiques. Nous avons présenté également les définitions mathématiques relatives au chaos et les différentes caractéristiques intrinsèques aux systèmes chaotiques.

Chapitre 2

Synchronisation des systèmes chaotiques

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques définitions préliminaires concernant les différents types de synchronisations des oscillateurs chaotiques couplés. Après avoir la présentation de ces différents régimes de synchronisation, nous présentons le problème de la synchronisation des systèmes chaotiques avec une méthode basée sur la théorie de contrôle continu. On rappelle que la méthode de contrôle continu est généralement utilisée lorsque les paramètres d'un système sont disponibles pour la mesure.

Définition 2.0.1. *Le mot synchronisation vient du grec syn (commun) et chronos (temps) et signifie avoir le même comportement au même moment. La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie alors que l'un des systèmes copie le mouvement de l'autre.*

2.1 Systèmes couplés

On dit que deux oscillateurs sont couplés, si l'existence d'une petite perturbation dans l'un des oscillateurs entraîne une perturbation dans l'autre. Physiquement, cet effet se traduit par un transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. Ce type d'accouplement s'appelle en général accouplement mutuel.

2.1.1 Accouplement bidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes chaotiques, présentés par des équations suivantes :

$$\dot{X}(t) = f_1(X, t), \tag{2.1}$$

$$\dot{Y}(t) = f_2(Y, t), \tag{2.2}$$

On dit que les deux systèmes (2.1) et (2.2) sont couplés, si on peut les réécrire sous les formes suivantes :

$$\dot{X}(t) = g_1(X, X, Y, t), \tag{2.3}$$

$$\dot{Y}(t) = g_2(Y, X, Y, t), \tag{2.4}$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions non linéaires, et la première variable de chaque équation représente la variable du système, tandis que la deuxième et la troisième variable sont les résultats de l'effet d'accouplement.
La dernière représentation signifie que chaque système a un acte sur l'autre, c'est la définition de l'accouplement bidirectionnel.

2.1.2 Accouplement unidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes identiques représentés par les deux équations suivantes :

$$\dot{X}(t) = f(X, t), \tag{2.5}$$

$$\dot{Y}(t) = f(Y, t), \tag{2.6}$$

Lorsque l'équation (2.6) va être modifier par l'effet d'accouplement, et si le résultat de cette modification nous donne de nouvelles équations suivantes :

$$\dot{X}(t) = f(X, t), \tag{2.7}$$

$$\dot{Y}(t) = g(Y, X, t), \tag{2.8}$$

tel que $g(Y, X, t) = f(Y, t)$, pour $X = Y$, dans ce cas on parle de l'accouplement unidirectionnel. le premier système s'appelle système émetteur (maître) et le deuxième système récepteur(esclave). La dernière représentation signifie que le système émetteur a un acte sur le récepteur et le contraire est faux. Il est bien clair que ce type d'accouplement est un cas particulier d'accouplement mutuel. Dans ce travail, on s'intéresse à l'accouplement unidirectionnel.

2.2 Différents régimes de synchronisation

Plusieurs régimes de synchronisation ont été employés dans la littérature, à savoir : la synchronisation complète (SC), l'anti-synchronisation (AS), la synchronisation projective (SP) et la synchronisation projective modifie (SPM), etc.
Par exemple, dans la synchronisation complète, nous avons une coïncidence complète

entre les variables d'états des deux systèmes maître-esclave synchronisés. Cependant par exemple, dans la synchronisation projective, l'état du système maître se synchronise avec un multiple (plusieur) de l'état du système esclave.

Considérons maintenant les systèmes maître et esclave respectivement suivants :

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.9}$$

$$\dot{y} = g(y) + u, \tag{2.10}$$

où $x, y \in \mathbb{R}^n$; sont les vecteurs d'etat des systèmes maître et esclave, respectivement, $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs non linéaires des fonctions continues, et u est le vecteur de contrôle. L'objectif de cette partie consiste principalement à vérifier les performances de la méthode d'un contrôle pour différents types de synchronisation des systèmes chaotiques.

2.2.1 Synchronisation complète

La synchronisation complète (SC) a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnelles des système dynamiques. C'est la forme de la synchronisation la plus simple. On dit qu'il y a une SC entre les deux systèmes maître et esclave , s'il existe un contrôle $u(t, x, y)$, tel que l'équation :

$$\lim_{t\to\infty} \left\| y(t) - x(t) \right\| = 0, \tag{2.11}$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes.
Si $f = g$, la SC est dite identique.
L'étude de synchronisation se ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système qui s'appelle "système erreur", ce dernier est donnée par l'équation :

$$e = y - x. \tag{2.12}$$

2.2.2 Anti-synchronisation

Le système maître et le système esclave sont dits prêts pour effectuer l'anti-synchronisation entre ces deux systèmes , s'il existe un contrôle $u(t, x, y)$ tel que l'équation :

$$\lim_{t\to\infty} \left\| y(t) + x(t) \right\| = 0, \tag{2.13}$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes.

2.2.3 Synchronisation projective

On dit qu'il y a une synchronisation projective (SP) entre les deux systèmes maître et esclave, s'il existe un contrôle efficace $u(t, x, y)$, de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t\to\infty} \left\| y(t) - \theta x(t) \right\| = 0, \tag{2.14}$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes, où θ est une constante non nulle, appelée facteur d'échelle.

2.2.4 Synchronisation projective modifiée

On dit qu'il y a une synchronisation projective modifiée (SPM) entre les deux systèmes maître et esclave, s'il existe un contrôle efficace $u(t, x, y)$, de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t\to\infty} \left\| By(t) - x(t) \right\| = 0, \tag{2.15}$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes, où B est une matrice diagonale constante non nulle, appelée matrice d'échelle i.e ,

$$B = diag(b_1, b_2, ..., b_n),\ b_i \neq b_j,\ pour\ tout\ i, j = 1, 2, ..., n. \tag{2.16}$$

Remarque 2.1. *La synchronisation complète (respectivement, l'anti-synchronisation) est le cas particulier de synchronisation projective où le facteur d'échelle $\theta = 1$ (respectivement $\theta = -1$).*

2.2.5 Synchronisation généralisée de type $Q - S$

On dit qu'il y a une synchronisation généralisée de type $Q-S$ entre les deux systèmes, jusqu'à des matrices de mise à l'échelle Q et S, s'il existe un contrôle $u(t, x, y)$, tel que :

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| Qy(t) - Sx(t) \right\| = 0, \tag{2.17}$$

pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes.

2.3 Exemple : Synchronisation complète entre deux systèmes chaotiques identiques

Dans cet exemple, nous abordons le problème de la synchronisation complète entre deux systèmes chaotiques identiques. La technique de contrôle actif et le théorème de la stabilité des systèmes linéaires sont adoptés pour démontrer la convergence et analyser

la stabilité du système erreur.
Pour définir la synchronisation proposée, considérons les deux systèmes suivants :

$$\dot{X} = f(X), \tag{2.18}$$

$$\dot{Y} = g(Y) + U, \tag{2.19}$$

où $X, Y \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs d'état des systèmes maître-esclave respectivement, $U = [u_1, u_2, ..., u_n]^T \in \mathbb{R}^n$ est un paramètre de contrôle et $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions non linéaires et continues.
Notre objectif maintenant est de concevoir un contrôle continu U, de tel sorte que la synchronisation entre les systèmes (2.18) et (2.19) est réalisée.
Pour quantifier cet objectif, on définit l'erreur de synchronisation de la manière suivante :

$$e(t) = Y(t) - X(t). \tag{2.20}$$

Ce qui signifie que les systèmes (2.18) et (2.19) sont globalement synchronisés de manière asymptotique, c'est-à dire :

$$\lim_{t \to +\infty} \|e(t)\| = 0. \tag{2.21}$$

Dans la suite, on va essayer de contrôler la partie linéaire des systèmes maître-esclave (2.22) et (2.23).

2.3.1 Etude théorique

Supposons que les dynamiques des systèmes (2.18) et (2.19) s'écrivent sous les formes suivantes :

$$\dot{X} = AX + F(X), \tag{2.22}$$

$$\dot{Y} = AY + G(Y) + U, \tag{2.23}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la partie linéaire et F, G sont des parties non linéaire des deux systèmes (2.18) et (2.19) respectivement.
L'évolution du système erreur est donné par :

$$\dot{e} = Ae - F(X) + G(Y) + U, \tag{2.24}$$

Choisissons maintenant le contrôle $U = (u_1, u_2, ...u_n)^T$, de tel sorte que la partie non linéaire du système (2.24) soit éliminée et le système erreur converge asymptotiquement vers zéro. Supposons alors que U satisfait la relation suivante :

$$U = F(X) - G(Y) + Be, \tag{2.25}$$

où $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice de gain, qui peut être choisie de telle sorte que l'erreur de synchronisation converge asymptotiquement vers zéro.
L'utilisation de l'hypothèse (2.25), nous permet de réécrire (2.24) comme suit :

$$\dot{e} = (A + B)e. \tag{2.26}$$

Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème 2.3.1. *Si la matrice B est choisi de telle sorte que toutes les valeurs propres de la matrice A + B ont des parties réelles strictement négatives, alors la synchronisation souhaité entre les deux systèmes (2.22) et (2.23) est achevée.*

Preuve 2.3.1. *Immédiatement en utilisant le théorème 1.4.3.*

2.3.2 Simulations numériques

Supposons que le système de Lorenz hyperchaotique [25] est le système émetteur. La dynamique de ce système est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_4, \\ \dot{x}_2 = cx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 = -x_2x_3 + dx_4, \end{cases} \tag{2.27}$$

où (x_1, x_2, x_3, x_4) est le vecteur d'état et a, b, c, d sont des paramètres positifs.
Nous prenons les conditions initiales du système (2.27) comme suit :

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0, , x_4(0) = -1. \tag{2.28}$$

Les paramètres de système émetteur sont sélectionnées comme :

$$(a, c, b, d) = (10, 28, \frac{8}{3}, 1.3). \tag{2.29}$$

Le système (2.27) présente un comportement hypechaotique, comme le montre à la Figure 2.1.
Supposons également que le système de Lorenz hyperchaotique est le système récepteur. Le système hyperchaotique contrôlé de Lorenz est exprimé par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + y_4 + u_1, \\ \dot{y}_2 = cy_1 - y_2 - y_1y_3 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - by_3 + u_3, \\ \dot{y}_4 = -y_2y_3 + dy_4 + u_4, \end{cases} \tag{2.30}$$

où $(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ est le vecteur d'état de ce système et a, b, c, d sont des paramètres positifs.
Nous prenons les conditions initiales du système (2.30) comme :

$$y_1(0) = 1.8, y_2(0) = 3, y_3(0) = -4, y_4(0) = -3. \tag{2.31}$$

Les valeurs des paramètres sont sélectionnés comme dans le cas 2.29. La partie linéaire

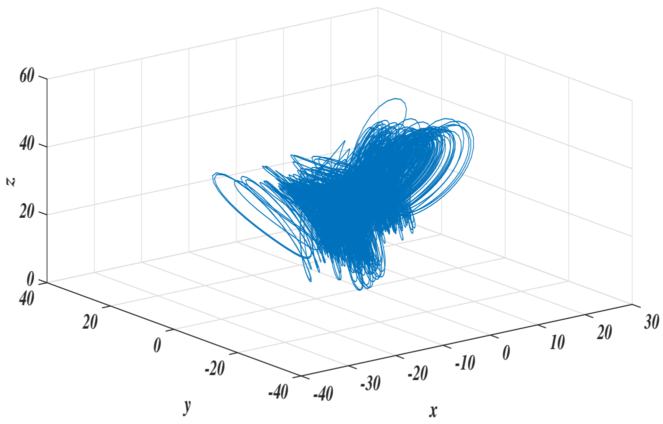

Figure 2.1 – Attracteur chaotique du système de Lorenz.

A du système (2.30) est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ c & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Pour atteindre notre objectif, on définit le système erreur comme :

$$e(t) = y(t) - x(t). \tag{2.33}$$

Dans ce cas, les conditions initiales du système erreur sont calculés par :

$$e_1(0) = 0.8, e_2(0) = 2, e_3(0) = -4, e_4(0) = -2. \tag{2.34}$$

La matrice de gain B, est sélectionnée de telle sorte que :

$$A + B = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Dans le cadre de ce choix particulier, la dynamique de système erreur devient :

$$\dot{e}_i(t) = (A + B)e_i(t), \text{ pour tout } i = 1, 2, 3, 4. \tag{2.36}$$

Il est facile de voire que tous toutes les valeurs propres de la matrice $A + B$ ont des parties réelles strictement négatives, alors la synchronisation souhaité entre les deux systèmes proposés est achevée.
L'évolution des fonctions d'erreur, est illustrée à la Figure 2.2.
D'après la Figure 2.2, on remarque qu'après un temps très court, les erreurs du système

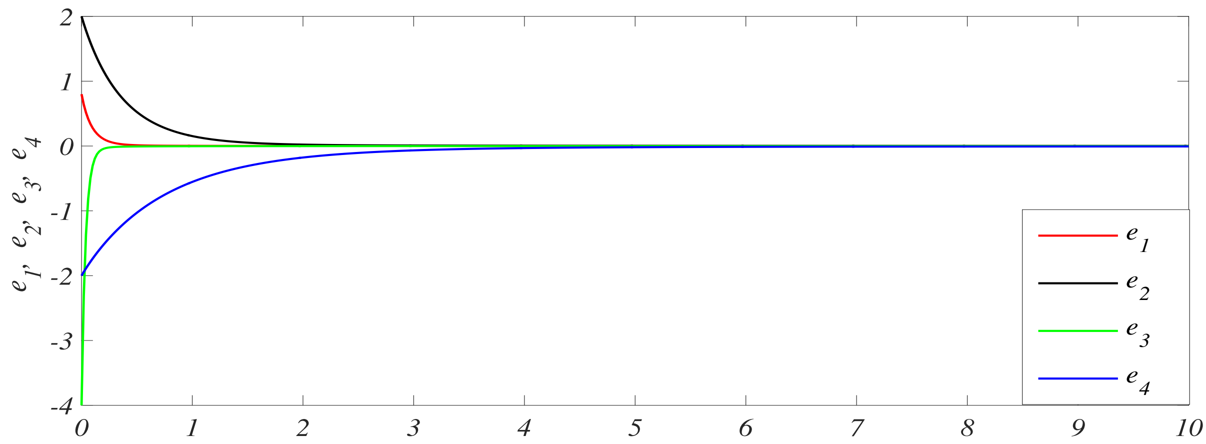

FIGURE 2.2 – L'évolution des fonctions d'erreur du système (2.36).

(2.36) convergent rapidement vers zéro, ce qui montre que la synchronisation souhaité, entre les deux systèmes (2.27) et (2.30) est achevée.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques définitions préliminaires concernant les différents types de synchronisations des oscillateurs chaotiques couplés. Le problème de la synchronisation complète entre deux systèmes chaotiques a été également étudié. Cette synchronisation a été réalisée via un contrôle actif. Une propriété du théorème de la stabilité des systèmes linéaire a été effectuée pour conclure sur la stabilité ainsi que la convergence de l'erreur de synchronisation. Des simulations numériques ont été illustré pour tester l'efficacité du système de synchronisation proposée.

Chapitre 3

Communication sécurisée par synchronisation des systèmes chaotiques

L'idée principale de la transmission chaotique consiste à ajouter le message dans un signal chaotique pour chiffrer cette information et de l'envoyer vers le récepteur à travers un canal public. l'information chiffrée est donc récupérée au niveau du récepteur après la synchronisation des deux systèmes émetteur et récepteur.
Plusieurs travaux ont été présentés ces dernières années exploitant les signaux chaotiques dans le contexte des communications sécurisées. En effet, leurs caractéristiques, sensibilités aux conditions initiales et aux variations paramétriques et aspects aléatoires sont bien adaptées aux communications sécurisées [32, 33, 34]. Cependant, tous ces travaux souffrent de certaines limitations. En effet, dans ces schémas de communication sécurisée, la taille du message doit être suffisamment petite pour ne pas induire la stabilité asymptotique d'un système chaotique(préservation de comportement chaotique), ce qui peut entraîner l'échec de la récupération du signal émis. Cependant, dans des situations réelles, certains messages à transmettre peuvent être très volumineux ou non bornés.

Récemment, Smail kaouache [35] a proposé un nouveau schéma de communication sécurisée basé sur la synchronisation projective d'un nouveau système hyperchaotique fractionnaire, dans lequel le signal du message est borné ou non borné.

Motivé par le travail ci-dessus, nous présentons dans ce mémoire une approche simple pour résoudre à la fois le problème de synchronisation du système de Lű et celui de la sécurisation des transmissions chaotiques, où le message transmis peut être borné ou non borné. Des simulations numériques serons également donnés pour affirmer les résultats théoriques.

3.1 Techniques de communications sécurisées à base du chaos

Dans cette partie nous présentons quelques techniques de communications sécurisée à base du chaos.

3.1.1 Chiffrement par addition

Le chiffrement par addition (ou bien le masquage chaotique) est la technique la plus simple pour la transmission dune information. Dans cette technique, le signal d'information $m(t)$ est ajouté à un signal chaotique $x(t)$ généré par un système émetteur. Le signal du texte chiffré $T(t) = m(t) + x(t)$ ainsi obtenu est transmis à travers le canal de transmission vers un système récepteur qui se synchronise identiquement avec le système émetteur. Le signal d'information reconstruit $\hat{m}(t)$ est alors obtenu après la soustraction entre le signal chiffré (transmis) $T(t)$ et le signal porteur estimé $\hat{x}(t)$.

3.1.2 Modulation paramétrique

Cette mèthode consiste à utiliser le signal d'information pour moduler l'un des paramètres du système émetteur. Cependant, la méthode d'ajouter le message et la fonction de modulation des paramètres ne doivent pas supprimer le caractère chaotique du signal envoyé au système récepteur. Le système récepteur synchronise d'une manière adaptative avec le système émetteur et finalement le signal d'information est récupéré par l'intermédiaire d'une loi d'adaptation.

3.2 Communications sécurisées par la synchronisation du système de Lű

La principale motivation de cette partie consiste à étudier une approche simple d'un schéma de communication sécurisée basé sur la synchronisation du systéme de Lű en utilisant la technique de modulation paramétrique. Cette opération sera effectuée par l'intermédiaire de quatre élément principales, à savoir : la modulation (en utilisant la fonction exponentielle), l'émetteur chaotique, le récepteur chaotique et la démodulation. Le diagramme principal de ce schéma est illustré à la Figure 3.1.

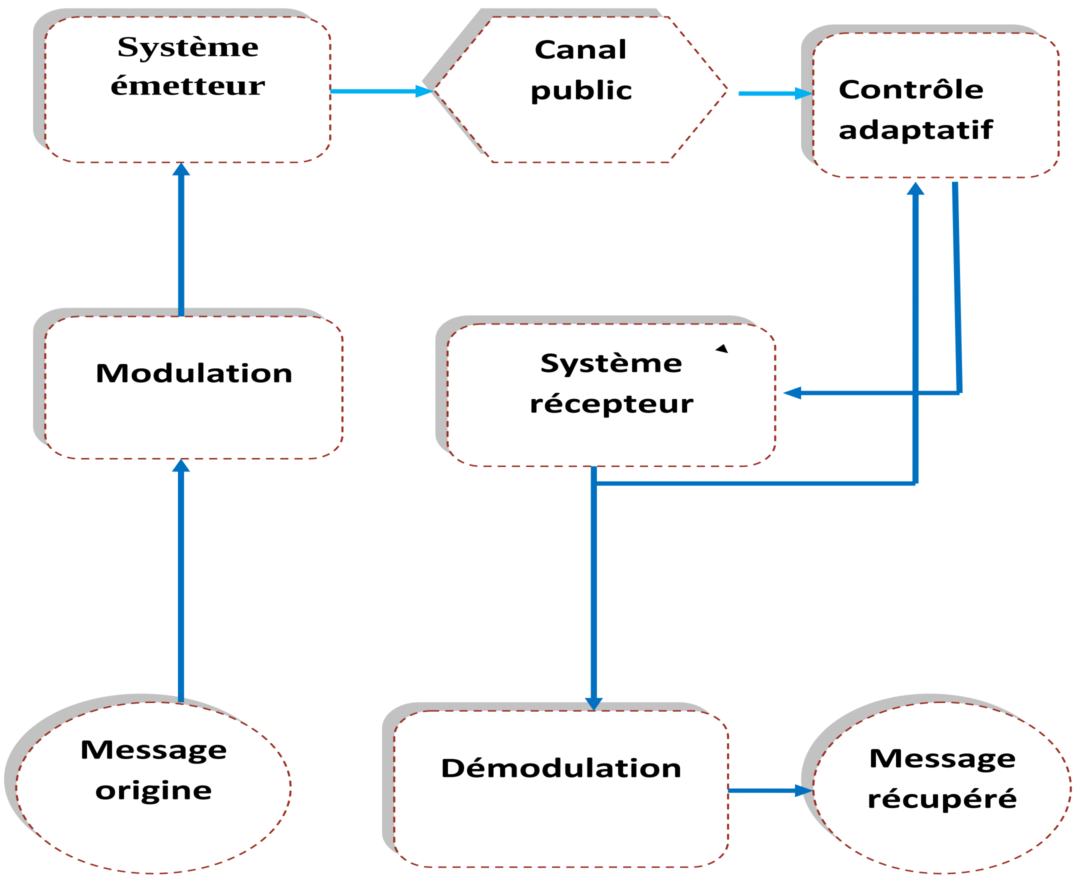

FIGURE 3.1 – Diagramme principal de communication sécurisée.

3.2.1 Modulation

Considérons le système hyperchaotique de Lű [29] qui décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = cx_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 = x_1x_3 + dx_4, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$a = 36, b = 3, c = 20 \text{ et } 0.6 \leq d \leq 1, \tag{3.2}$$

Pour transmettre un signal de message quelle que soit sa taille, nous envisageons de le moduler dans le paramètre inconnue d du système (3.1).
Soit $m(t)$ le message transmis. Définissons maintenant un nouveau paramètre inconu $D = D(t)$. Afin de préserver le comportement chaotique du système étudié, nous présentons la technique de la modulation paramétrique suivante :

$$D(t) = 0.4 \exp(-m(t)) + 0.6, \quad m(t) \geq 0. \tag{3.3}$$

Il est claire que $0.6 \leq D \leq 1$.

3.2.2 Émetteur

Considérons maintenant le système (3.1) et nous remplaçons le paramètre d par D, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = cx_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 = x_1 x_3 + Dx_4, \end{cases} \tag{3.4}$$

où x_1, x_2, x_3, x_4 sont des signaux chaotiques qui doivent être transmis au récepteur via un canal public.

Puisque $D(t) \in [0.6, 1]$, le système résultant (3.4) est encore reste hyperchaotique (Figure 3.2). Nous prenons donc le système (3.4) comme système èmetteur.

3.2.3 Récepteur

Considérons également le système récepteur est le système de Lű , qui est supposé décrit par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{y}_2 = cy_2 - y_1 y_3 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - by_3 + u_3, \\ \dot{y}_4 = y_1 y_3 + \hat{D} y_4 + u_4, \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\hat{D}$ est le paramètre inconnu à estimer et $u_i, i = 1, 2, 3, 4$ sont les contrôles à concevoir. Notre objectif consiste à concevoir des contrôles adaptatifs u_i (pour tout $i = 1, 2, 3, 4$) et un paramètre $\hat{D}$ réalisant une synchronisation entre le système émetteur (3.4) et le système recepteur (3.5).
Pour quantifier cet objectif, l'erreur de synchronisation est défini comme suit :

$$e_i = y_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{3.6}$$

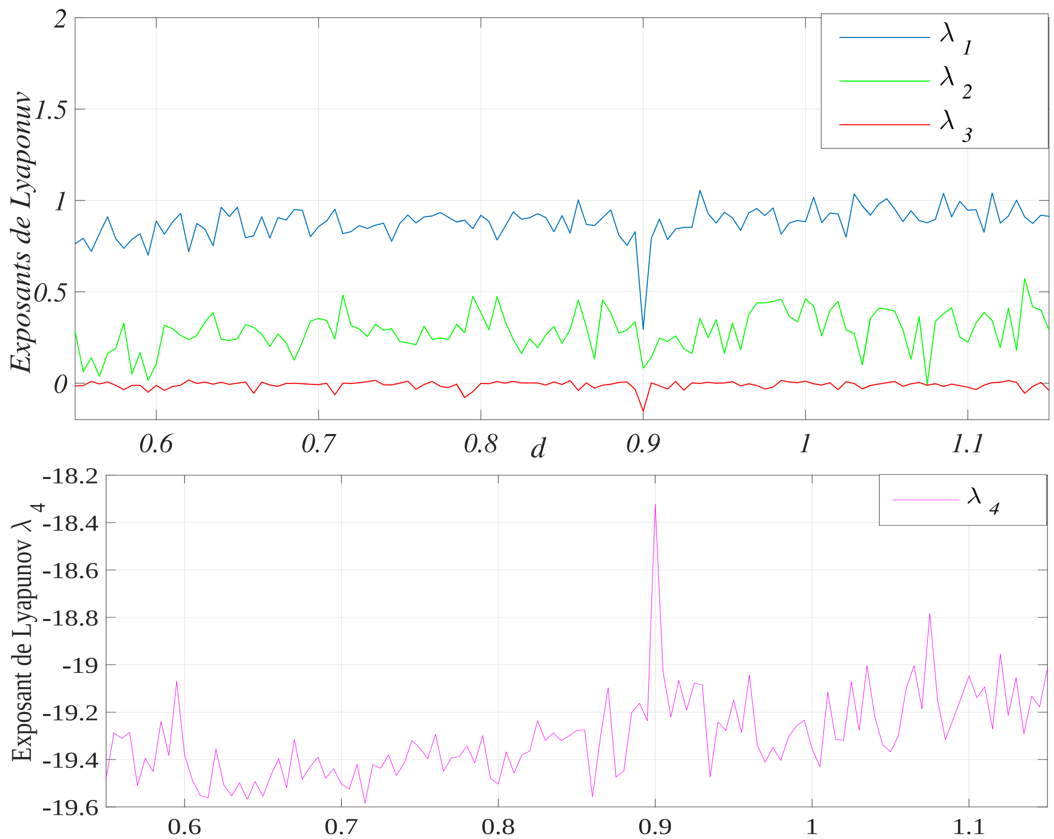

Figure 3.2 – Exposants de Lyapounov du système de Lű.

Définissons également l'erreur d'estimation par :

$$e_D = D - \hat{D}. \tag{3.7}$$

La dynamique de l'erreur de synchronisation est alors donné par :

$$\dot{e}_i = \dot{y}_i - \dot{x}_1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{3.8}$$

En substituant les équations (3.4) et (3.5) dans l'équation (3.8), on trouve :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + u_1, \\ \dot{e}_2 = ce_2 - y_1 y_3 + x_1 x_3 + u_2, \\ \dot{e}_3 = y_1 y_2 - x_1 x_2 - be_3 + u_3, \\ \dot{e}_4 = y_1 y_3 - x_1 x_3 + \hat{D} e_4 - e_D x_4 + u_4. \end{cases} \tag{3.9}$$

En différenciant (3.7) par rapport à t, nous obtenons :

$$\dot{e}_D = -0.4 \dot{m} \exp(-m) - \dot{\hat{D}}. \tag{3.10}$$

Par conséquent, le problème de synchronisation devient le problème de stabilité de la dynamique des erreurs (3.9). Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Si les contrôles adaptatifs et la loi de commande sont sélectionnés respectivement comme :*

$$\begin{cases} u_1 = -a(e_2 - e_1) - k_1 e_1, \\ u_2 = -ce_2 + y_1 y_3 - x_1 x_3 - k_2 e_2, \\ u_3 = -y_1 y_2 + x_1 x_2 + (b - k_3) e_3, \\ u_4 = -y_1 y_3 + x_1 x_3 - De_4 + e_D x_4 - k_4 e_4, \end{cases} \tag{3.11}$$

où k_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sont des gains de contrôle positifs,

et

$$\dot{\hat{D}} = -e_4^2 - 0.4\dot{m}\exp(-m), \tag{3.12}$$

alors la synchronisation entre les deux systèmes (3.4) et (3.5) est achevée.

Preuve 3.2.1. *Avec le choix de contrôle adaptatif (3.11), le système d'erreur (3.9) devient :*

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1 e_1, \\ \dot{e}_2 = -k_2 e_2, \\ \dot{e}_3 = -k_3 e_3, \\ \dot{e}_4 = -e_D e_4 - k_4 e_4. \end{cases} \tag{3.13}$$

Considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$V = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} e_i^2 + e_D^2\right). \tag{3.14}$$

En calculant la dérivée de V le long des trajectoires du système erreur (3.13), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^{4} e_i \dot{e}_i + e_D \dot{e}_D \\ &= e_1(-k_1 e_1) + e_2(-k_2 e_2) \\ &\quad + e_3(-k_3 e_3) + e_4(-e_D e_4 - k_4 e_4) + e_D(-0.4\dot{m}\exp(-m) - \dot{\hat{D}}) \\ &= -(k_1 e_1^2 + k_2 e_2^2 + k_3 e_3^2 + k_4 e_4^2) + e_D(-e_4^2 - 0.4\dot{m}\exp(-m) - \dot{\hat{D}}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

En substituant la loi d'adaptation (3.12) dans (3.15), on obtient :

$$\dot{V} = -(k_1 e_1^2 + k_2 e_2^2 + k_3 e_3^2 + k_4 e_4^2). \tag{3.16}$$

Évidemment, V est définie positive et $\dot{V}$ est définie négative sur $\mathbb{R}^5$. D'après le théorème de la stabilité de Lyapounov, les erreurs de synchronisation e_i, $i = 1, 2, 3, 4$ convergent asymptotiquement vers zéro, c'est-à -dire la synchronisation entre les deux systèmes (3.4) et (3.5) est achevée et le zéro du paramètre erreur D est également asymptotiquement stable. Cela implique que le paramètre incertain D est également estimé simultanément dans le récepteur. Ceci complète la preuve.

3.2.4 Démodulation

Selon la fonction de la transformation inversible (3.3), le signal du message d'origine peut êre récupéré sous la forme :

$$\hat{m}(t) = \ln\left(\frac{0.4}{\hat{D}(t) - 0.6)}\right). \tag{3.17}$$

Ici $\hat{m}(t)$ représente le signal récupéré. Lorsque la synchronisation souhaitée a lieu, nous avons $\hat{D}(t) \to D(t)$ quand $t \to \infty$. On obtient alors :

$$\hat{m}(t) = \ln\left(\frac{0.4}{\hat{D}(t) - 0.6)}\right) \to m(t) = \ln\left(\frac{0.4}{D(t) - 0.6}\right), \quad quand\ t \to \infty. \tag{3.18}$$

En utilisant la méthode de démodulation ci-dessus, le récepteur peut donc extraire le signal du message $\hat{m}$ avec succés.

3.2.5 Résultats de simulation

Dans cette partie, nous présentons des simulations numériques pour montrer l'efficacité du système de communication proposé.

Cas d'un signal d'information borné

Ici, le signal de message caché dans le système émetteur est donné par :

$$m(t) = 2 + \sin(t) + \cos(2t). \tag{3.19}$$

Évidement, $0 \leq m(t) \leq 4$. Selon l'équation (3.3), on peut sélectionner $D(t)$ comme suit :

$$D(t) = 0.4\exp(-2 - \sin(t) - \cos(2t)) + 0.6. \tag{3.20}$$

Il en résulte que $D(0) = 1$.
La condition initiale pour la loi d'adaptation est donnée par : $\hat{D}(0) = 1$.
Donc la condition initiale de l'erreur d'estimation est donnée par $e_D(0) = 0$.
Les conditions initiales des deux systèmes (3.4) et (3.5) sont sélectionnés respectivement comme :

$$x_1(0) = 0.02,\ x_2(0) = 0.02,\ x_3(0) = 0.04,\ x_4(0) = 0.06. \tag{3.21}$$

$$y_1(0) = 0.03,\ y_2(0) = 0.05,\ y_3(0) = 0.03,\ y_4(0) = 0.03. \tag{3.22}$$

Par suite les conditions initiales de système erreur sont données par :

$$e_1(0) = 0.01,\ e_2(0) = 0.03,\ e_3(0) = -0.01,\ e_4(0) = -0.03. \tag{3.23}$$

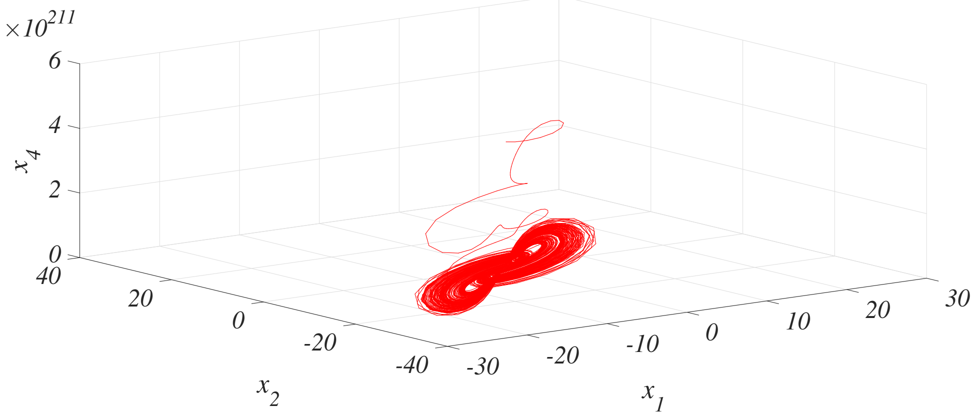

FIGURE 3.3 – Attracteur chaotique du système résultant. (3.4)

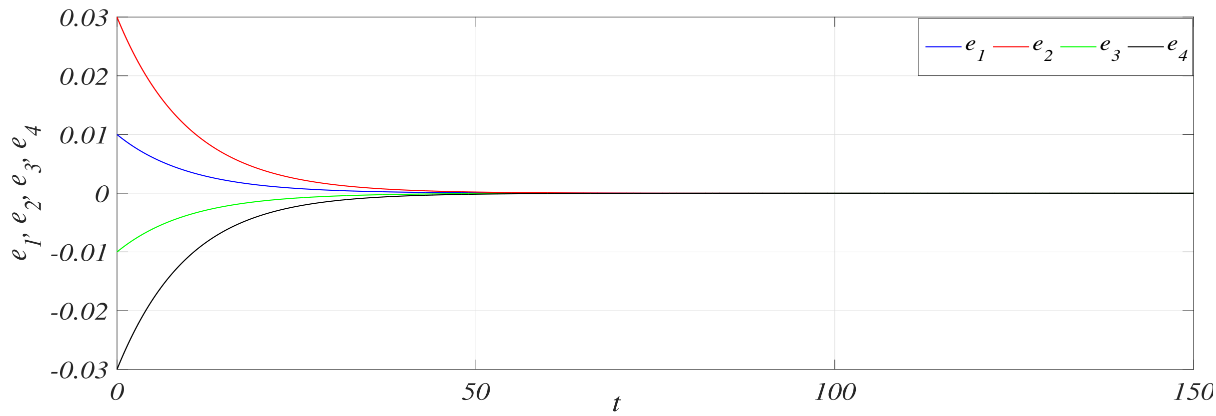

FIGURE 3.4 – L'évolution temporelle de l'erreur de synchronisation. Cas du signal d'information borné : $m(t) = 2 + \sin(t) + \cos(2t)$.

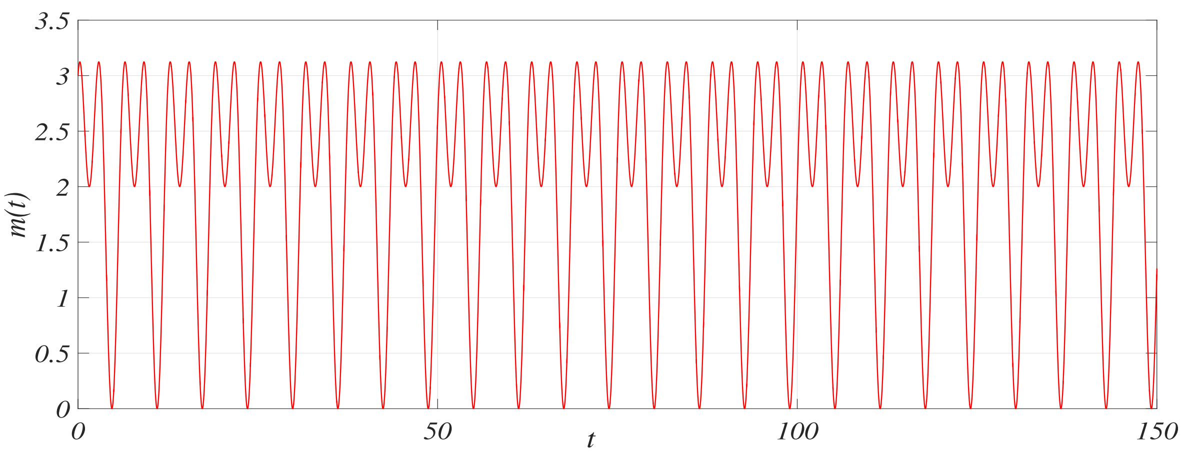

FIGURE 3.5 – L'évolution temporelle de message origine : $m(t) = 2 + \sin(t) + \cos(2t)$.

Les paramètres de gain sont choisis comme suit :

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0.1. \tag{3.24}$$

La Figure 3.3 illustre le comportement chaotique du système résultant (3.4). Les résultats de la simulation du système de communication sécurisé proposé sont présentés aux Figures 3.4, et 3.5.

Remarque 3.1. *De la Figure 3.4, nous voyons que les erreurs de synchronisation e_i, $i = 1, 2, 3, 4$ convergent asymptotiquement vers zéro rapidement. C'est-à-dire que la synchronisation entre le système émetteur et le système récepteur est obtenue sous la présence des contrôleurs (3.11) et de la loi d'adaptation (3.12), et l'objectif de communication est atteint.*

Cas d'un signal d'information non borné

Dans ce cas, le signal du message est pris comme suit :

$$m(t) = 0.01(t + cos(2t)). \tag{3.25}$$

Afin de préserver le comportement chaotique du système émetteur étudié, l'amplitude du signal d'information ne doit pas dépasser certaines valeurs limites. Pour cela, on suppose que $|m(t)| < \infty$.
Selon l'équation (3.3), $D(t)$ peut être obtenu comme suit :

$$D(t) = 0.4 \exp(-0.01(t + cos(2t))) + 0.6. \tag{3.26}$$

Il en résulte que $D(0) = 1$.
La condition initiale pour la loi d'adaptation est donnée par : $\hat{D}(0) = 01$.
Donc la condition initiale de l'erreur d'estimation est donnée par $e_D(0) = 0$.
Les conditions initiales des deux systèmes (3.4) et (3.5) sont sélectionnés respectivement comme :

$$x_1(0) = 0.1,\ x_2(0) = -0.2,\ x_3(0) = 0.2,\ x_4(0) = 0.4. \tag{3.27}$$

$$y_1(0) = 0.2,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 0.1,\ y_4(0) = 0.2. \tag{3.28}$$

Par suite les conditions initiales de système erreur sont données par :

$$e_1(0) = 0.1,\ e_2(0) = 0.2,\ e_3(0) = -0.1,\ e_4(0) = -0.2. \tag{3.29}$$

Les paramètres de conception sont choisis comme suit :

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0.2. \tag{3.30}$$

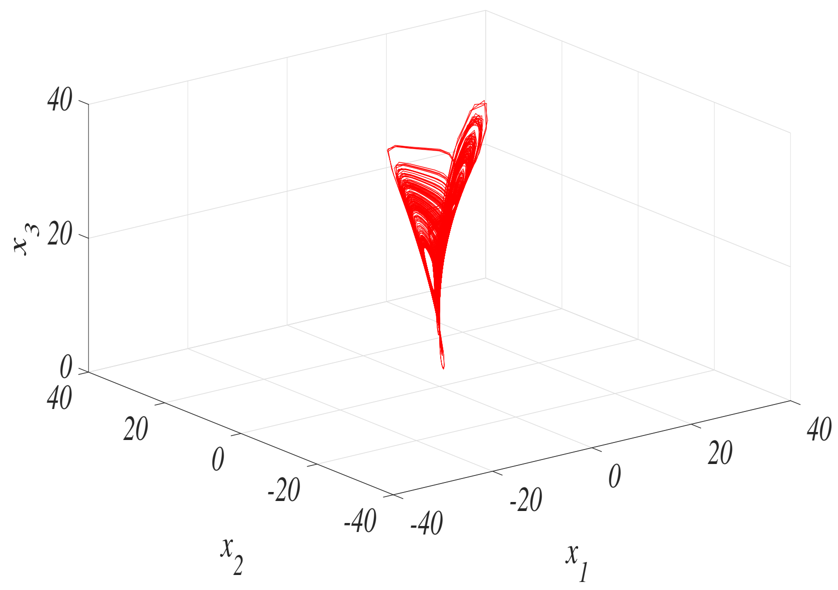

FIGURE 3.6 – Attracteur chaotique du système résultant. (3.4)

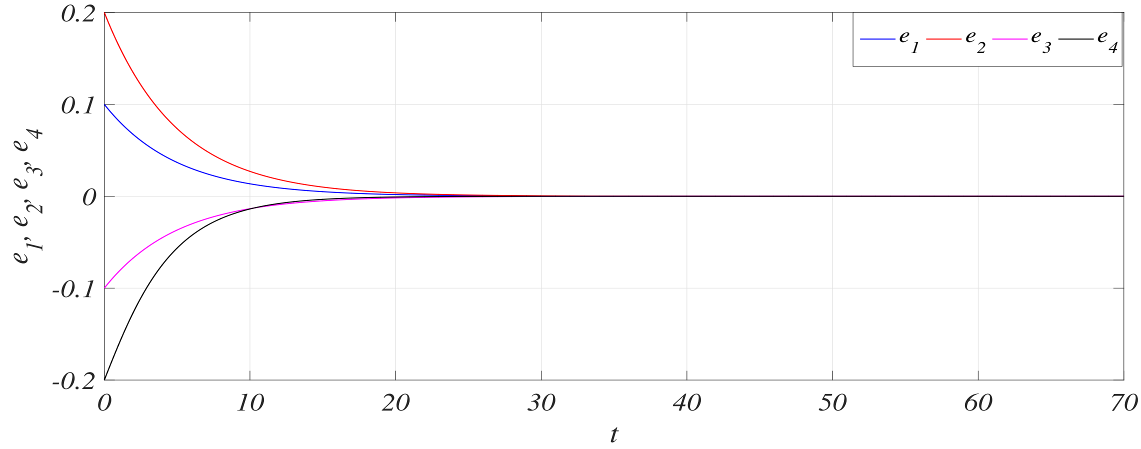

FIGURE 3.7 – L'évolution temporelle des erreurs de synchronisation. Cas du signal d'information non borné : $m(t) = 0.01(t + \cos(2t))$.

L'attracteur chaotique du système résultant (3.4) est représenté à la Figure 3.6. Les résultats de simulation numériques pour la synchronisation entre les systèmes émetteur et récepteur via les contrôleurs (3.11) et la loi d'adaptation (3.12) et le message transmis sont illustrés aux Figures 3.7 et 3.8.

Remarque 3.2. *La Figure 3.7 décrit l'évolution temporelle des erreurs de synchronisation* e_i $i = 1, 2, 3, 4$, *ce qui montre que les erreurs de synchronisation approchent trés rapidement de l'origine. Donc, la synchronisation souhaitée est obtenue.*

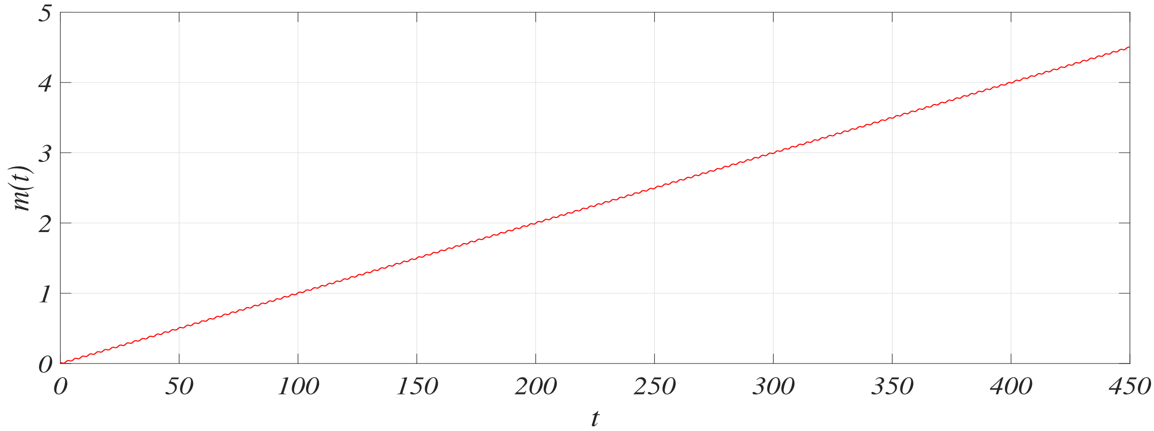

FIGURE 3.8 – L'évolution temporelle de message origine non borné : $m(t) = 0.01(t + \cos(2t))$.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une technique simple de transmission sécurisée d'informations qui repose sur le principe de la synchronisation du système de Lű en utilisant la technique de modulation paramétrique. On rappel que la taille du message n'est pas limitée dans notre schéma et le signal de message peut être transmis avec succès et en secret. A travers les résultats numériques obtenus, nous constatons bien qu'une fois la synchronisation des deux systèmes est assurée, les messages transmis sont alors récupérés au niveau de récepteur. Ceci confirme les performances de la méthode de synchronisation proposée.

Conclusion générale

Dans ce travail de ce mémoire, nous avons étudie la synchronisation du système de Lű et leur applications pour la communication sécurisée.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques notions de base des systèmes dynamique chaotiques, qui sont très utiles pour la bonne compréhension de notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de quelques définitions préliminaires concernant les différents types de synchronisations des oscillateurs chaotiques couplés.

Dans le dernier chapitre, un contrôle adaptatif a été employé dans un schéma de communication sécurisée basé sur la synchronisation du système de Lű. Une analyse basée sur la méthode de Lyapounov a été effectuée pour conclure sur la stabilité aussi bien que sur la convergence asymptotique des erreurs de synchronisation. Par ailleurs, nous avons montré comment adapter le système de Lű à notre schéma de transmission afin d'assurer la stabilité du système, préserver le comportement chaotique, améliorer le niveau de sécurité et augmenter l'amplitude des messages transmis. Enfin, des simulations numériques ont été fournies pour tester la capacité des schémas de synchronisations et de communication sécurisée proposés.

Bibliographie

[1] Roy, R., Murphy Jr, T. W., Maier, T. D., Gills, Z, Hunt, E. R. Dynamical control of a chaotic laser : Experimental stabilization of a globally coupled system.*Physical Review Letters* **68** (9) (1992) 1259–1262.

[2] Petrov, V., Gaspar, V., Masere, J. and Showalter, K. Controlling chaos in the Belousov—Zhabotinsky reaction.*Nature* **361** (6409) (1993) 240–243.

[3] Garfinkel, A., Weiss, J. N., Ditto, W. L. and Spano, M. L. Chaos control of cardiac arrhythmias.*Trends in Cardiovascular Medicine* **5** (2) (1995) 76–80.

[4] Ding, J. and Yao, H.X. Chaos control of a kind of non-linear finance system. *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)* **25** (6) (2004) 500–504.

[5] Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences* **20** (2) (1963) 130–141.

[6] Carroll, T. L and Pecora, L. M. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **38** (4) (1991) 453-456.

[7] Olga, I.M., Alexey, A.K. and Alexander, E.H. Generalized synchronization of chaos for secure communication : remarkable stability to noise. *Physics Letters A* **374** (29) (2010) 2925–2931.

[8] Inzunza-Gonzalez, E. and Cruz-Hernandez, C. Double hyperchaotic encryption for security in biometric systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **13** (1) (2013) 55–68.

[9] Guitian, H.E. and Maokang, L.U.O. Dynamic behavior of fractional order Dufing chaotic system and its synchronization via singly active control. *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.* **33** (5) (2012) 567-582.

[10] Gan, Q., Yang, Y., Fan, S. and Wang, Y. Synchronization of stochastic Fuzzy cellular neural networks with leakage delay based on adaptive control. *Differ. Equ. Dyn. Syst.* **22** (2014) 319-332.

[11] Zhen, W., Xia, H. and Hao, S. Control of an uncertain fractional order economic system via adaptive sliding mode. *Neuro computing* **83** (2012) 83–88.

[12] Bouzeriba, A., Boulkroune, A. and Bouden, T. Projective synchronization of two different fractional-order chaotic systems via adaptive fuzzy control. *Neural Comput. Applic.* (2015).

[13] Carroll, TL, Pecora, LM. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **38** (4) (1991) 453–456.

[14] Rehan, M. Synchronization and anti-synchronization of chaotic oscillators under input saturation. *Appl. Math. Model.* **37** (2013) 6829–6837.

[15] Zhang, G., Liu, Z., Ma, Z. Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems. *Chaos Solitons Fract.* **32** (2) (2007) 773–779.

[16] Manieri, R. Rehacek, J. Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* **82** (15) (1999) 3042-3045.

[17] Li, G.H. Modified projective synchronization of chaotic system. *Chaos Solitons Fractals* **32** (5) (2007) 1786-1790.

[18] Yan, Z. Chaos $Q\check{}S$ synchronization between Rössler system and the new unified chaotic system. *Phys. Lett. A* **334** (5) (2005) 406–412.

[19] Danca, M. F., Feckan, M., Kuznetsov, N. and Chen, G. Complex dynamics, hidden attractors and continuous approximation of a fractional-order hyperchaotic PWC system. *Nonlin. Dyn.*, **91** (2018) 2523–2540.

[20] Slotine, J. J. E. and Li, W. *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, New-Jersey, 1991.

[21] Lu, K., Hartman-Grobman, A. Theorem for scalar reaction-diffusion equations. *Journal of differential equations.* **93** (2) (1991) 364–394.

[22] Vialar, T. and Goergen, A. *Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2009.

[23] Devaney, R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Menlo Park, Benjamin/ Cummings 1986.

[24] A. Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. and Vastano, J. A. Determining Lyapunov Exponents from a time Series. *Physica D : Nonlinear Phenomena* **16** (1985) 285–317.

[25] Wang, X.Y., Song, J.M. : Synchronization of the fractional order hyperchaos Lorenz systems with activation feedback control. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** (8) (2009) 3351–3357.

[26] Li, T.Z., Wang, Y., Luo, M.K. Control of fractional chaotic and hyperchaotic systems based on a fractional order controller. *Chin. Phys.B* **23** (8) (2010) 080501.

[27] Liu, L., Liu, C. and Zhang, Y. Analysis of a novel four-dimensional hyperchaotic system.*Chin. J. Phys.* **46** (2008) 386–393.

[28] Wang, H. and Cai, G. Controlling hyperchaos in a novel hyperchaotic system. *Journal of Information and Computing Science***4** (4) (2009) 251–258.

[29] Chen, A., Lu, J., Lű, J. and Yu, S. Generating hyperchaotic Lű attractor via state feedback control. *Physica A* **364** (2006) 103–110.

[30] Kaouache, S. and Abdelouahab, M.S. Modified projective synchronization between integer order and fractional order hyperchaotic systems *Jour. of Adv. Research in Dynamical and Control Systems* **10** (5) (2018) 96–104.

[31] Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. and John, A.W. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D* **16**, (1985) 285–317.

[32] Liu, S. and Zhang, F. Complex function projective synchronization of complex chaotic system and its applications in secure communication. *Nonlinear Dyn.* **76** (2014) 1087-1097.

[33] Wu, X., Wang, H. and Lu, H. Modified generalized projective synchronization of a new fractional-order hyperchaotic system and its application in secure communication. *Nonlinear Anal. RWA* **13** (2012) 1441–50.

[34] Cheng, C. J. 2012 Robust synchronization of uncertain unified chaotic systems subject to noise and its application to secure communication. *Appl. Math. Comput.* **219** (2012) 2698–712.

[35] Kaouache, S. Synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques : Application a la sécurisation des communications *Thèse de Doctorat, Université de Constantine1.* (2020).