

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Université Abd Elhafid Boussouf Mila
Institut des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de
Master**

**EN: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques appliquées**

*Sur les équations aux différences fractionnaires de
Riemann et de Caputo*

Préparé par

- *Kherbache Ilham*
- *Rekab Aicha*

Devant le jury

Abdelouahab Mohammed SalahPrésident

Bououden Rabah.....Rapporteur

Boularouk Yakoub.....Examineur

Année Universitaire : 2019/2020

REMERCIEMENTS

Nous remercions notre dieu qui nous a donnée le courage et la volonté de poursuivre nos études, ainsi que nos parents, qui ont sacrifié leur vie pour notre réussite.

Nous tenant remercier sincèrement Dr. Bououden Rabah , qui, en tant que Directeur de mémoire, se est toujours montrés à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, laide et le temps qu'ils ont bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Nos remerciements s'adressent également aux membres du jury :monsieur le président Dr. Abdelouahab Mohammed Salah et monsieur l'examineur Boularouk Yakoub qui ont accepté d'évalueur notre travail et de nous avoir honorés par leur présence.

Nous remercions tous la famille, tous les amis pour leurs encouragement.

Nous remercions tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin la mise en oeuvre de ce travail.

DÉDICACES

Au nom du ♥DIEU ♥ le clément et le miséricordieux je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents ♥**Tounsi**♥ et ♥ **Fadila** ♥ qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser ce travail de recherche dans les meilleures conditions.

A mes chers ♥sœurs ♥, ♥ frère ♥.

A mes ♥proche amis ♥ et toute ma grande famille.

♥Ilham♥

DÉDICACES

Merci Allah

DE m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et du bonheur.

Je dédie ce modeste travail particulièrement à mes chers parents, qui ont consacré leur existence à bâtir la mienne, pour leur soutien, patience et soucis de tendresse et d'affection pour tout ce qu'ils ont fait pour que je puisse arriver à ce stade.

A mon père ♥**Mahmoud**♥, qui est toujours disponible pour nous, et prêt à nous aider, je lui confirme mon attachement et mon profond respect.

A ma mère ♥**khadidja**♥ qui m'a encouragé durant toutes mes études, et qui sans elle, ma réussite n'aurait pas eu lieu. Qu'elle trouve ici mon amour et mon affection.

A mes ♥ frère ♥ et ♥ sœurs ♥.

Mon futur partenaire de vie ♥ Houssam ♥ , qui m'a soutenu dans la réalisation de ce mémoire.

Aux deux petites filles, ♥ Baraa ♥ et ♥ Tartil ♥.

A tous mes amis de ma promotion.

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

Et à tous ceux que j'ai connus durant mon cycle d'étude.

♡Aicha♡

Résumé

Le travail de ce mémoire s'inscrit dans le contexte de l'étude sur les équations aux différences fractionnaires de Riemann et de Caputo.

Trois parties ont été proposées, la première concerne le calcul fractionnaire, la seconde est consacrée aux équation différence, la troisième est pour étudier l'application chaotique de Lozi d'ordre fractionnaire.

Abstract

The work of this dissertation falls within the context of the study of Riemann and Caputo fractional difference equation.

Three parts have been proposed, the first concerns fractional calculus, the second is devoted to the difference equations, the third is to study the chaotic application of Lozi of fractional order .

ملخص

يندرج عمل هذه المذكرة ضمن دراسة معادلات الفروق الجزئية لريمان وكايبيتو .
تم اقتراح ثلاثة فصول, يتعلق الفصل الأول بالحساب الكسري, ويتمثل محتواه في العناصر الأساسية للدوال (Γ, β), وحساب الأختلافات, وفرق الجمع والكسور.
أما الفصل الثاني مخصص لمعادلات ذات الفروق و مكون من ثلاثة عناصر: مفاهيم في حساب التفاضل مع الأختلافات, معادلات فرق صحيحة, معادلات الفروق الكسرية . الفصل الثالث : الفوضى في تطبيق لوزي الكسري ويشمل تطبيق فوضوي من النظام الكسري لوزي

TABLE DES MATIÈRES

table de figures	iv
liste de tableaux	v
Symboles et notations	vii
Introduction générale	viii
1 Calcul Fractionnaire	1
1.1 Fonctions spéciales de calcul fractionnaire	1
1.1.1 Fonction Gamma	1
1.1.2 Fonction Bêta	4
1.1.3 Fonction Mittag-Leffler	4
1.2 Calcul de Différence	5
1.2.1 Opérateur De Différence Discret	6
1.2.2 Opérateur de Saut	6
1.2.3 Fonction de Chute	8
1.2.4 Fonction Delta Exponentielle	10
1.2.5 Fonction Delta Trigonométriques	15
1.2.6 Delta intégral	18
1.2.7 Transformé discrète	19
1.3 Somme et différence fractionnaire	20

1.3.1	Somme fractionnaire	21
1.3.2	Différence fractionnaire	22
1.3.3	Formule binomiales fractionnaire	24
2	Equations aux différences	27
2.1	Notions sur le calcul aux différences	27
2.2	Equation aux différences d'ordre entier	32
2.2.1	Equations aux différences linéaires à coefficients variables	32
2.2.2	Equation aux différences linéaires à coefficients constants	41
2.2.3	Equation aux différences non linéaires	46
2.3	Equation aux différences fractionnaires	48
2.3.1	Résolution des équations aux différences μ fractionnaires	48
2.3.2	Résolution des équations aux différences fractionnaires non linéaire de Caputo	55
3	Le chaos dans l'application fractionnaire de Lozi	59
3.1	L'application chaotique de Lozi d'ordre fractionnaire	59
	Bibliographie	69

TABLE DES FIGURES

1.1	Courbe représentative fonction Gamma	3
3.1	(a) Diagramme de bifurcation de l'application de Lozi standard avec $x(0)=y(0)=0$ et $(\alpha, \beta) = (1.7, 0.5)$, (b) les attracteur dans le plan $x - y$, et (c) le plus grand exposant de Lyapunov calculé au moyen de la méthode jacobienne	61
3.2	Attracteur de l'application de Lozi fractionnaire dans le plan $x - y$ avec $x(0) = y(0) = 0$, $(\alpha, \beta) = (1.7, 0.5)$ et différents ordres fractionnaires	62
3.3	Instantanés du plan $x - y$ appartenant à l'application fractionnaire de Lozi avec $v = 0.654$ pris en $n = 1845$, $n = 1862$ et $n = 2000$	62
3.4	Diagrammes de bifurcation de l'application de Lozi fractionnaire avec a comme diagramme de bifurcation b et x pour différents ordres fractionnaires v	63
3.5	Le plus grand Lyapunov de l'application fractionnaire de Lozi obtenue pour les mêmes paramètres. Conditions initiales et ordres fractionnaires de la figure 3.4	64
3.6	Evolution temporelle discrète des états pour l'application de Lozi fractionnaire avec $x(0) = y(0) = 0$, $(\alpha, \beta) = (1.7, 0.5)$, $v=0.98$	65
3.7	(a) Diagramme de bifurcation de l'application d'écoulement fractionnaire avec $\lambda = -1.7$, $(x(0), y(0)) = (0.1)$ et ordres fractionnaires $v = 0.98$; (b) Le plus grand exposant Lyapunov correspondant.	65

3.8 Evolution temporelle de l'application d'écoulement fractionnaire avec $\theta = -0.1$, $\lambda = -1.7$, $(\alpha, \beta) = (1.7, 0.5)$. Et les ordres fractionnaires $\nu=0.98$ et $\nu=0.973$ 66

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Annulateurs de quelques fonctions $g(n)$	46
-----	--	----

SYMBOLES ET NOTATIONS

$\Gamma(z)$	Fonction Gamma d'Euler
$\Re(z)$	Partie réelle de z
$\beta(x, y)$	Fonction béta d'Euler
$E_\alpha(z)$	Fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre
$E_{\alpha, \beta}$	Fonction Mittag-Leffler à deux paramètres
$f^{(n)}$	Dérivée de f d'ordre entier n
Δ^n	Opérateur de différence discret en arrière
$\sigma(t)$	Opérateur dz saut en avant
$h_\nu(t, s)$	Monôme de Taylor
Δ_a^ν	Somme ν -fractionnaire
$\Delta_a^{-\nu}$	Différence ν -fractionnaire

INTRODUCTION GÉNÉRALE

En 1978, Lozi introduit dans une courte note une nouvelle carte chaotique en deux dimensions, les équations et les attracteurs ressemblent ceux de la célèbre carte de Hénon. Simplement, un terme quadratique dans celui-ci est remplacé par un autre terme linéaire par morceaux dans la première équation. Cela permet de prouver rigoureusement le caractère chaotique de certains attracteurs et une analyse détaillée de leurs bassins d'attraction. L'application de Lozi est défini par :

$$\begin{cases} x(n+1) = -\alpha|x(n)| + y(n) + 1, \\ y(n+1) = \beta x(n). \end{cases}$$

Où a et b sont les paramètres réels non nulle. L'intérieur de la région où les orbites restent bornées, la carte de Lozi peut présenter la fois des comportements réguliers et chaotiques suivant les valeurs des deux paramètres a et b .

L'objectif de ce travail sur les équations aux différences fractionnaires de Riemann et de Caputo.

Ce mémoire est composé d'une introduction générale et trois chapitres partagés de la façon suivante :

Le premier chapitre est consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, quelques concepts préliminaires qui seront introduits comme les fonctions Gamma, Bêta et la fonction Mittag-Leffler, ensuite nous abordons le calcul de différence dont nous nous intéressons à l'opérateur Delta de différence discret, ses applications sur quelques fonc-

tions (fonction de saut, chute, Delta exponentielle et fonctions Delta trigonométriques), la transformée discrète. Pour terminer ce chapitre, Nous nous sommes intéressés à la somme et à la différence fractionnaire qui servent comme outils de base dans le calcul fractionnaire et les formules binomiales fractionnaires.

Le deuxième chapitre présente trois parties :

La première partie nous commençons par donner quelques notions du calcul aux différences,

La seconde traite les équations aux différences d'ordre entier dont nous évoquons l'existence et l'unicité de la solution de cette dernière, les méthodes de résolution de chaque type d'équation.

La troisième partie s'intéresse aux équations aux différences fractionnaires dont nous répondons à la question d'existence et unicité de la solution et nous présentons leur résolutions.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude du chaos dans l'application fractionnaire de Lozi . Enfin, nous terminons notre mémoire par une conclusion .

CHAPITRE 1

CALCUL FRACTIONNAIRE

Le calcul fractionnaire est un outil souvent utilisé dans la résolution des problèmes d'ingénierie, notamment pour l'étude des systèmes fractionnaires, c'est pourquoi, nous allons rappeler dans ce chapitre quelques éléments de base sur :

- Les fonctions : Gamma, Bêta, Mittag-Leffler.
- Calcul de différence.
- Somme et différence fractionnaires.

1.1 Fonctions spéciales de calcul fractionnaire

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler ; notée Γ ; prolonge la factorielle aux valeurs réelles ou complexe[1,2].

Définition 1.1.1.

L'une des fonctions de base de calcul fractionnaire est la fonction Gamma. Elle prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels et même pour les nombres complexes pour $z \in \mathbb{C}$ telle que

$\Re(z) > 0$. On définit la fonction Gamma notée Γ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t)t^{z-1} dt. \quad (1.1)$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Propriétés 1.1.1.

(a) Pour $\Re(z) > 0$, la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

En effet :

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^{\infty} t^{(z+1)-1} \exp(-t) dt; \\ &= \int_0^{\infty} t^z \exp(-t) dt; \\ &= [-t^z \exp(-t)]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt; \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

(b) La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car : $\gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$. En effet :

$$\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!,$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1!,$$

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!.$$

(c) On peut représenter $\gamma(z)$ par la limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{(z+1)\cdots(z+n)}.$$

(d) Prolongement de la fonction $\gamma(z)$ pour le demi-plan $\Re < 0$: La relation est donnée par :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}, \quad (1.2)$$

tel que n est un entier positif et $z \neq 0, -1, -2, \dots$. Il s'ensuit, d'après la relation précédente que la fonction Gamma est analytique dans le plan complexe \mathbb{C} sauf pour $z = 0, -1, -2, \dots$.

Lemme 1.1.1.

[3] Pour $0 < r < 1, n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n+1)} \leq \frac{n^r - (n-1)^r}{r}.$$

Graphe de la fonction $\Gamma(z)$.

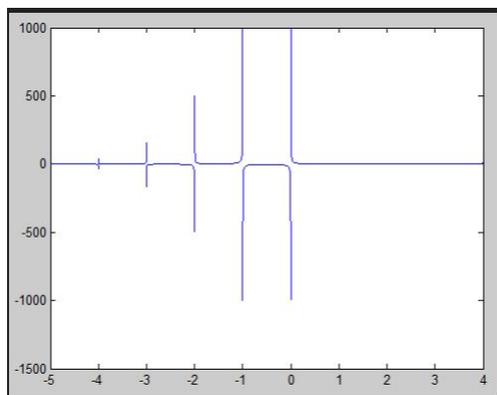


FIGURE 1.1 – Courbe représentative fonction Gamma

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.1.2.

[2]La fonction Bêta est un type d'intégration d'Euler défini par :

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad (\Re(z) > 0, \Re(w) > 0). \quad (1.3)$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad (\Re(z) > 0, \Re(w) > 0). \quad (1.4)$$

Notons que la fonction Bêta est symétrique, i.e : $\beta(z; w) = \beta(w; z)$.

Propriétés 1.1.2.

(a) $a\beta(a, b+1) = \beta(a+1, b)$.

(b) Si $n = b+1$ est un entier, cela donne une relation de récurrence :

$$\beta(a, b) = \frac{n-1}{a} \beta(a+1, n-1).$$

(c) $\beta(a, 1) = \frac{1}{a}$.

(d) Si $a = m$ et $b = n$, on obtient

$$\beta(m, n) = \frac{(m-1)(n-1)!}{m+n-1}.$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

Définition 1.1.3.

[2]La fonction exponentielle; $\exp(z)$; joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (z \in \mathbb{C}, \alpha > 0). \quad (1.5)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie dans [2], joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal et est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (1.6)$$

A partir de la relation (1.6), on trouve les relations suivantes :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z),$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(k+1)!} = \frac{\exp(z) - 1}{z},$$

et

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{\exp(z) - 1 - z}{z^2}.$$

Et en général

$$E_{1,p}(z) = \frac{1}{z^{p-1}} \left(\exp(z) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{z^k}{k!} \right).$$

Les cosinus et les sinus hyperboliques sont aussi des cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k)!} = \cosh(z).$$

Et

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{\Gamma(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

Pour les équations différentielle d'ordres fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

1.2 Calcul de Différence

Dans cette section, nous présentons le calcul delta de base qui sera utilisé pour notre future résultats. Nous appuyons dans cette partie sur les ouvrages [4, 5, 6, 7], pour plus de

détails, voir [4, 5, 6, 7].

Fréquemment, les fonctions que nous considérons seront définies sur un ensemble du formulaire :

$$\mathbb{N}_a = \{a, a + 1, a + 2, \dots\},$$

où $a \in \mathbb{R}$, où , un ensemble du formulaire :

$$\mathbb{N}_a^b = \{a, a + 1, a + 2, \dots, b\},$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $b - a$ est un entier positif.

1.2.1 Opérateur De Différence Discret

Définition 1.2.1.

Soit $f : \mathbb{N}_a^b \rightarrow \mathbb{R}$. Si $b - a > 0$, alors l'opérateur de différence discret, noté Δ , est défini par :

$$\Delta f(t) = f(t + 1) - f(t), \quad (1.7)$$

et la n^{ime} Delta différence de f est donnée récursivement par la formule :

$$\Delta^n f(t) = \Delta(\Delta^{n-1} f(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(t + k), \quad (1.8)$$

avec

$$t \in \mathbb{N}_a^{b-a}, b - a \geq n, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Pour $n = 0$, nous posons $\Delta^0 f(t) = f(t)$.

1.2.2 Opérateur de Saut

Définition 1.2.2.

On définit l'opérateur de saut en avant σ sur \mathbb{N}_a^b par la formule :

$$\sigma(t) = t + 1.$$

Il est souvent pratique d'utiliser la notation f^σ pour désigner la fonction définie par la composition $f \circ \sigma$, c'est :

$$f^\sigma(t) = (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t)) = f(t + 1),$$

pour $t \in \mathbb{N}_a^{b-1}$, aussi l'opérateur Δ^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ est défini récursivement par $\Delta^n f(t) = \Delta(\Delta^{n-1} f(t))$, pour $t \in \mathbb{N}_a^{b-n}$, où nous supposons l'entier $b - a \geq n$, enfin Δ^0 désigne l'opérateur d'identité, c'est-à-dire, $\Delta^0 f(t) = f(t)$. dans le théorème suivant, nous donnons plusieurs propriétés importantes d'opérateur de différence avant.

Théorème 1.2.1.

Soient $f, g : \mathbb{N}_a^b \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors pour $t \in \mathbb{N}_a^{b-1}$, nous avons :

- (i) $\Delta \alpha = 0$;
- (ii) $\Delta \alpha f(t) = \alpha \Delta f(t)$;
- (iii) $\Delta [f + g](t) = \Delta f(t) + \Delta g(t)$;
- (iv) $\Delta \alpha^{t+\beta} = (\alpha - 1) \alpha^{t+\beta}$;
- (v) $\Delta [f \cdot g](t) = f(\sigma(t)) \Delta g(t) + \Delta f(t) g(t)$;
- (vi) $\Delta \left(\frac{f}{g} \right) (t) = \frac{g(t) \Delta f(t) - f(t) \Delta g(t)}{g(t) g(\sigma(t))}$, avec $g(t) \neq 0, t \in \mathbb{N}_a^b$.

Démonstration.

(v)

$$\begin{aligned} f(\sigma(t)) \Delta g(t) + \Delta f(t) g(t) &= f(t + 1) [g(t + 1) - g(t)] + [f(t + 1) - f(t)] g(t), \\ &= f(t + 1) g(t + 1) - f(t) g(t), \\ &= \Delta [f \cdot g](t). \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \Delta \alpha^{t+\beta} &= \alpha^{t+1+\beta} - \alpha^{t+\beta}, \\ &= (\alpha - 1) \alpha^{t+\beta}. \end{aligned}$$

(vi) Soit $g(t) \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{f}{g}\right)(t) &= \frac{f(t+1)}{g(t+1)} - \frac{f(t)}{g(t)} \\ &= \frac{f(t+1)g(t) - f(t)g(t+1)}{g(t)g(t+1)}, \\ &= \frac{g(t)[f(t+1) - f(t)] - f(t)[g(t+1) - g(t)]}{g(t)g(\sigma(t))}, \\ &= \frac{g(t) \Delta f(t) - f(t) \Delta g(t)}{g(t)g(\sigma(t))}. \end{aligned}$$

□

1.2.3 Fonction de Chute

Définition 1.2.3.

Pour n un entier positif, on définit la fonction de chute, t^n , par :

$$t^n = t(t-1)(t-2) \cdots (t-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1} (t-i). \quad (1.9)$$

- Si $n = 0$, $t^n = 1$.
- Si n est un réel :

$$t^n = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-n+1)}. \quad (1.10)$$

- **Par convention**

Si $t+1-n \in (-\mathbb{N})$, alors $t^n = 0$. La fonction de chute est définie de sorte que la règle de puissance suivante soit vérifiée.

Règle de puissance généralisée

- (i) $\Delta(t+\alpha)^n = n(t+\alpha)^{n-1}$.
- (ii) $\Delta(\alpha-t)^n = -n(\alpha-\sigma(t))^{n-1}$.

Démonstration.

(i)

$$\begin{aligned}
\Delta(t + \alpha)^n &= (t + \alpha + 1)^n - (t + \alpha)^n, \\
&= \frac{\Gamma(t + \alpha + 2)}{\Gamma(t + \alpha + 2 - n)} - \frac{\Gamma(t + \alpha + 1)}{\Gamma(t + \alpha + 1 - n)}, \\
&= \frac{[(t + \alpha + 1) - (t + \alpha + 1 - n)\Gamma(t + \alpha + 1)]}{\Gamma(t + \alpha + 2 - n)}, \\
&= n \frac{\Gamma(t + \alpha + 1)}{\Gamma(t + \alpha - n + 2)}, \\
&= n(t + \alpha)^{n-1}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha - t)^n &= \Delta\left(\frac{\Gamma(\alpha - t + 1)}{\Gamma(\alpha - t + 1 - n)}\right), \\
&= \frac{\Gamma(\alpha - t)}{\alpha - t - n} - \frac{\Gamma(\alpha - t + 1)}{\Gamma(\alpha - t + 1 - n)}, \\
&= [(\alpha - t - n) - (\alpha - t)] \frac{\Gamma(\alpha - t)}{\Gamma(\alpha - t + 1 - n)}, \\
&= -n \frac{\Gamma(\alpha - t)}{\Gamma(\alpha - t + 1 - n)}, \\
&= -n(\alpha - \sigma(t))^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Cas particulier

$$\Delta t^n = (t + 1)^n - t^n.$$

Théorème 1.2.2. (*Règle de la puissance-cas particulier*)*La règle de la puissance :*

$$\Delta t^n = nt^{n-1}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.11)$$

Démonstration.

Supposons que n est un entier positif et considérons :

$$\begin{aligned}\Delta t^n &= (t+1)^n - t^n, \\ &= (t+1)t(t-1)\cdots(t-n+2) - t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1), \\ &= t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+2)[(t+1) - (t-n+1)], \\ &= nt^{n-1}.\end{aligned}$$

□

Définition 1.2.4.

Soit $n \geq k \geq 0, n, k$ des entiers. Alors le coefficient binomial est défini par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{\Gamma(k+1)}. \quad (1.12)$$

1.2.4 Fonction Delta Exponentielle

Dans cette section nous voulons étudier la fonction Delta exponentielle qui joue un rôle similaire dans le calcul delta sur \mathbb{N}_a que la fonction exponentielle $e^{pt}, p \in \mathbb{R}$, fait dans le calcul continu. Pour p une constant, $x(t) = e^{pt}$ est l'unique solution du problème :

$$\dot{x} = px, \quad x(0) = 1.$$

Pour la fonction exponentielle delta, nous amerions considère les fonctions dans l'ensemble des fonction régressives définies par :

$$\mathcal{R} = \{p : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } 1 + p(t) \neq 0 \text{ pour } t \in \mathbb{N}_a\}.$$

Certains résultats que nous donnons seront vrais si dans la définition des fonctions régressives nous considérons les fonction à valeur complexe au lieu des fonctions à valeurs réelles, nous laissons au lecteur le soin de constater quand celà est vrai. Alors est définit la fonction exponentielle delta correspondant à la fonction $p \in \mathcal{R}$, basée sur $s \in \mathbb{N}_a$, pour être

la solution unique du problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} \Delta x &= p(t)x(t), \\ x(s) &= 1, s \in \mathbb{N}_a. \end{cases} \quad (1.13)$$

La solution de (1.13) est :

$x(t) = ke_p(t, s)$, $s \in \mathbb{N}_a$, et k est une constante .

Théorème 1.2.3.

Soient $p \in \mathcal{R}$ et $s \in \mathbb{N}_a$. Donc

$$e_p(t, s) = \begin{cases} \prod_{\mathcal{T}=s}^{t-1} [1 + p(\mathcal{T})], & t \in \mathbb{N}_s, \\ \prod_{\mathcal{T}=t}^{s-1} [1 + p(\mathcal{T})]^{-1}, & t \in \mathbb{N}_a^{s-1}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Par convention

Pour une fonction h quelconque , nous avons :

$$\prod_{\mathcal{T}=s}^{s-1} h(\mathcal{T}) = 1.$$

Démonstration.

(a) Supposons que $t \in \mathbb{N}_s$.

En résolvant (1.13) pour $x(t + 1)$, nous obtenons :

$$x(t + 1) = [1 + p(t)]x(t), \quad t \in \mathbb{N}_a. \quad (1.15)$$

D'après la condition initiale, l'équation (1.15) devient pour $t = s + 1, s + 2$:

$$x(s + 1) = [1 + p(s)]x(s) = [1 + p(s)].$$

$$x(s + 2) = [1 + p(s + 1)]x(s + 1) = [1 + p(s)][1 + p(s + 1)].$$

En utilisant la même méthode, la formule de $e_p(t, s)$ s'écrit sous la forme :

$$e_p(t, s) = \prod_{\mathcal{T}=s}^{t-1} [1 + p(\mathcal{T})], \quad \text{pour } \mathcal{T} = s, s + 1, s + 2, \dots, t - 1.$$

Par convention

$$e_p(s, s) = \prod_{\mathcal{T}=s}^{s-1} [1 + p(\mathcal{T})] = 1.$$

(b) Supposons que $t \in \mathbb{N}_a^{s-1}$:

La résolution de (1.14) pour $x(t)$, nous donne :

$$x(t) = \frac{1}{1 + p(t)} x(t + 1). \quad (1.16)$$

Pour t prenant les valeurs $s - 1, s - 2$ et $x(t) = 1$ respectivement, l'équation (1.16) devient :

$$x(s - 1) = \frac{1}{1 + p(s - 1)} x(s) = \frac{1}{1 + p(s)}.$$

$$x(s - 2) = \frac{1}{1 + p(s - 2)} x(s - 1) = \frac{1}{[1 + p(s - 2)][1 + p(s - 1)]}.$$

En continuant de la même manière, nous aboutissons à :

$$x(t) = \prod_{\mathcal{T}=t}^{s-1} [1 + p(\mathcal{T})]^{-1}, \quad t \in \mathbb{N}_a^{s-1}.$$

□

Exemple 1.2.1.

Si $p(t) = p$ est une fonction constante dans \mathcal{R} , $p \neq -1$, alors d'après la formule (1.14) :

$$e_p(t, s) = (1 + p)^{t-s}, \quad (t \in \mathbb{N}_a).$$

Définition 1.2.5.

Soient $p; q \in \mathbb{R}$, $t, s, r \in \mathbb{N}_a$. On définit le cercle d'addition \oplus , le cercle de multiplication \odot et le cercle de soustraction \ominus , respectivement par :

- $(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + p(t)q(t)$,
- $(\alpha \odot p) = ((1 + p)^\alpha - 1)$,

$$\bullet (\ominus p) = \frac{-p(\mathcal{T})}{1 + p(\mathcal{T})}.$$

Le théorème suivant nous donne plusieurs propriétés de la fonction exponentielle $e_p(t, s)$, basée sur $s \in \mathbb{N}_a$.

Théorème 1.2.4.

Soient $p, q \in \mathcal{R}$ et $t, s, r \in \mathbb{N}_a$. Alors

- (i) $e_0(t, s) = 1$, et $e_p(t, t) = 1$;
- (ii) $e_p(t, s) \neq 0$, $t \in \mathbb{N}_a$;
- (iii) Si $1 + p > 0$, alors $e_p(t, s) > 0$;
- (iv) $\Delta e_p(t, s) = p(t)e_p(t, s)$;
- (v) $e_p^\sigma(t, s) = e_p(\sigma(t), s) = [1 + p(t)]e_p(t, s)$;
- (vi) $e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r)$;
- (vii) $e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)}$;
- (viii) $e_p(t, s)e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$;
- (ix) $e_p^\alpha(t, a) = e_{\alpha \circ p}(t, a)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathcal{R}^+$;
- (x) $e_{\ominus p}(t, s) = \frac{1}{e_p(t, s)}$.

Démonstration.

Nous montrons ces propriétés pour $s = a$.

- (i) La preuve de (i) est déduite de la définition de l'exponentielle.
- (ii) Puisque $p \in \mathcal{R}$, $1 + p(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{N}_a$, par conséquent :

$$e_p(t, a) = \prod_{\mathcal{T}=a}^{t-1} [1 + p(\mathcal{T})] \neq 0.$$

- (iii) La preuve de (iii) est similaire à celle de (ii).

(v)

$$e_p(\sigma(t), a) = \prod_{\mathcal{T}=a}^{\sigma(t)-1} [1 + p(\mathcal{T})] = \prod_{\mathcal{T}=a}^t [1 + p(\mathcal{T})] = [1 + p(t)]e_p(t, a).$$

(vi)

Lorsque $t \geq s \geq r$, alors :

$$e_p(t, s)e_p(s, r) = \prod_{\mathcal{T}=s}^{t-1} [1 + p(\mathcal{T})] \prod_{\mathcal{T}=r}^{s-1} [1 + p(\mathcal{T})],$$

$$= \prod_{\mathcal{T}=r}^{t-1} [1 + p(\mathcal{T})].$$

$$(vii) \quad e_p(t, a) = \prod_{s=a}^{t-1} [1 + p(s)] = \frac{1}{\prod_{s=a}^{t-1} [1 + p(s)]} = \frac{1}{e_p(a, t)}.$$

(viii)

$$\begin{aligned} e_p(t, a)e_q(t, a) &= \prod_{\mathcal{T}=a}^t [1 + p(\mathcal{T})] \prod_{\mathcal{T}=a}^t [1 + q(\mathcal{T})], \\ &= \prod_{\mathcal{T}=a}^t [1 + p(\mathcal{T})][1 + q(\mathcal{T})], \\ &= \prod_{\mathcal{T}=a}^t [1 + p(\mathcal{T}) + q(\mathcal{T}) + p(\mathcal{T})q(\mathcal{T})], \\ &= \prod_{\mathcal{T}=a}^t [1 + (p \oplus q)(\mathcal{T})], \\ &= e_{p \oplus q}(t, a). \end{aligned}$$

(ix)

$$\begin{aligned} e_p^\alpha(t, a) &= \left\{ \prod_{\mathcal{T}=a}^{t-1} [1 + p(\mathcal{T})] \right\}^\alpha, \\ &= \prod_{\mathcal{T}=a}^{t-1} [1 + p(\mathcal{T})]^\alpha, \\ &= \prod_{\mathcal{T}=a}^{t-1} [1 + (1 + p(\mathcal{T}))^\alpha - 1], \\ &= \prod_{\mathcal{T}=a}^{t-1} [1 + (\alpha \odot p)(\mathcal{T})], \\ &= e_{\alpha \odot p}(t, a). \end{aligned}$$

(x)

$$\begin{aligned}
e_{\ominus p}(t, a) &= \prod_{\mathcal{T}=a}^{t-1} [1 + (\ominus p)(\mathcal{T})], \\
&= \prod_{\mathcal{T}=a}^{t-1} \left[1 - \frac{p(\mathcal{T})}{1 + p(\mathcal{T})}\right], \\
&= \prod_{\mathcal{T}=a}^{t-1} \frac{1}{1 + p(\mathcal{T})}, \\
&= \frac{1}{\prod_{\mathcal{T}=a}^{t-1} [1 + p\mathcal{T}]}, \\
&= \frac{1}{e_p(t, a)}.
\end{aligned}$$

□

1.2.5 Fonction Delta Trigonométriques

Définition 1.2.6.

Soient $+ip, -ip \in \mathcal{R}$, $t \in \mathbb{N}_a$. Les fonctions Delta cosinus et Delta sinus sont désignées par :

$$\cos_p(t, a) = \frac{e_{ip}(t, a) + e_{-ip}(t, a)}{2}, \quad \sin_p(t, a) = \frac{e_{ip}(t, a) - e_{-ip}(t, a)}{2i}. \quad (1.17)$$

Définition 1.2.7.

Soient $+ip, -ip \in \mathcal{R}$, $t \in \mathbb{N}_a$. Les fonctions Delta cosinus hyperbolique et Delta sinus hyperbolique sont écrites sous la forme :

$$\cosh_p(t, a) = \frac{e_p(t, a) + e_{-p}(t, a)}{2}, \quad \sinh_p(t, a) = \frac{e_p(t, a) - e_{-p}(t, a)}{2}. \quad (1.18)$$

Le théorème suivant nous donne les propriétés des fonctions Delta cosinus et sinus hyperbolique.

Théorème 1.2.5.

Soient $-p, +p \in \mathcal{R}$. Alors

$$(i) \cosh_p(a, a) = 1, \quad \sinh_p(a, a) = 0;$$

- (ii) $\cosh_p^2(t, a) - \sinh_p^2(t, a) = e_{-p^2}(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a;$
- (iii) $\Delta \cosh_p(t, a) = p(t) \sinh_p(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a;$
- (iv) $\Delta \sinh_p(t, a) = p(t) \cosh_p(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a;$
- (v) $\cosh_{-p}(t, a) = \cosh_p(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a;$
- (vi) $\sinh_{-p}(t, a) = -\sinh_p(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a;$
- (vii) $e_p(t, a) = \cosh_p(t, a) + \sinh_p(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a.$

Démonstration.

- (i) $\cosh_p(a, a) = \frac{e_p(a, a) + e_{-p}(a, a)}{2} = 1, \quad \sinh_p(a, a) = \frac{e_p(a, a) - e_{-p}(a, a)}{2} = 0;$
- (ii) $\cosh_p^2(t, a) - \sinh_p^2(t, a) = \frac{(e_p(t, a) + e_{-p}(t, a))^2 - (e_p(t, a) - e_{-p}(t, a))^2}{4} = e_p(t, a)e_{-p}(t, a) = e_{p \oplus (-p)}(t, a) = e_{-p^2}(t, a);$
- (iii) $\Delta \cosh_p(t, a) = \frac{\Delta e_p(t, a) + \Delta e_{-p}(t, a)}{2} = \frac{1}{2}[P(t)e_p(t, a) - P(t)e_{-p}(t, a)] = p(t) \sinh_p(t, a);$
- (iv) $\Delta \sinh_p(t, a) = \frac{\Delta e_p(t, a) - \Delta e_{-p}(t, a)}{2} = \frac{1}{2}[p(t)e_p(t, a) + p(t)e_{-p}(t, a)] = p(t) \cosh_p(t, a);$
- (v) $\cosh_{-p}(t, a) = \frac{e_{-p}(t, a) + e_p(t, a)}{2} = \cosh_p(t, a);$
- (vi) $\sinh_{-p}(t, a) = \frac{e_{-p}(t, a) - e_p(t, a)}{2} = -\sinh_p(t, a);$
- (vii) $\cosh_p(t, a) + \sinh_p(t, a) = \frac{e_p(t, a) + e_{-p}(t, a) + e_p(t, a) - e_{-p}(t, a)}{2} = e_p(t, a).$

□

Le théorème suivant nous donne la relation entre la fonction Delta trigonométrique et la fonction Delta hyperbolique trigonométrique

Théorème 1.2.6.

Soient $-ip, +ip \in \mathcal{R}$. Alors :

- (i) $\sin_{ip}(t, a) = i \sinh_p(t, a);$
- (ii) $\cos_{ip}(t, a) = \cosh_p(t, a);$
- (iii) $\sinh_{ip}(t, a) = i \sin_p(t, a);$
- (iv) $\cosh_{ip}(t, a) = \cos_p(t, a).$

pour $t \in \mathbb{N}_a$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \sin_{ip}(t, a) &= \frac{1}{2i}[e_{i^2p}(t, a) - e_{-i^2p}(t, a)] = i \frac{e_p(t, a) - e_{-p}(t, a)}{2} = i \sinh_p(t, a); \\
\text{(ii)} \quad \cos_{ip}(t, a) &= \frac{e_{-p}(t, a) + e_p(t, a)}{2} = \cosh_p(t, a); \\
\text{(iii)} \quad \sinh_{ip}(t, a) &= \frac{e_{ip}(t, a) - e_{-ip}(t, a)}{2} = i \sin_p(t, a); \\
\text{(iv)} \quad \cosh_{ip}(t, a) &= \frac{e_{ip}(t, a) + e_{-ip}(t, a)}{2} = \cos_p(t, a).
\end{aligned}$$

□

Le théorème suivant nous donne les propriétés des fonctions Delta cosinus et sinus

Théorème 1.2.7.

Soient $-ip, +ip \in \mathcal{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \cos_p(a, a) &= 1, \quad \sin_p(a, a) = 0; \\
\text{(ii)} \quad \cos_p^2(t, a) + \sin_p^2(t, a) &= e_p^2(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a; \\
\text{(iii)} \quad \Delta \cos_p(t, a) &= -p(t) \sin_p(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a; \\
\text{(iv)} \quad \Delta \sin_p(t, a) &= p(t) \cos_p(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a; \\
\text{(v)} \quad \cos_{-p}(t, a) &= \cos_p(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a; \\
\text{(vi)} \quad \sin_{-p}(t, a) &= -\sin_p(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a; \\
\text{(vii)} \quad e_{ip}(t, a) &= \cos_p(t, a) + i \sin_p(t, a), \quad t \in \mathbb{N}_a.
\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \cos_p(a, a) &= \frac{e_{ip}(a, a) + e_{-ip}(a, a)}{2} = 1, \quad \sin_p(a, a) = \frac{e_{ip}(a, a) - e_{-ip}(a, a)}{2i} = 0; \\
\text{(ii)} \quad \cos_p^2(t, a) + \sin_p^2(t, a) &= \frac{(e_{ip}(t, a) + e_{-ip}(t, a))^2 + (e_{ip}(t, a) - e_{-ip}(t, a))^2}{4} = e_{ip}(t, a)e_{-ip}(t, a) = \\
&e_{ip \oplus (-ip)}(t, a) = e_{p^2}(t, a); \\
\text{(iii)} \quad \Delta \cos_p(t, a) &= \frac{\Delta e_{ip}(t, a) + \Delta e_{-ip}(t, a)}{2} = \frac{ip(t)e_{ip}(t, a) - ip(t)e_{-ip}(t, a)}{2} = -p(t) \sin_p(t, a); \\
\text{(iv)} \quad \Delta \sin_p(t, a) &= \frac{\Delta e_{ip}(t, a) - \Delta e_{-ip}(t, a)}{2} = \frac{ip(t)e_{ip}(t, a) + ip(t)e_{-ip}(t, a)}{2} = p(t) \cos_p(t, a); \\
\text{(v)} \quad \cos_{-p}(t, a) &= \frac{e_{-ip}(t, a) + e_{ip}(t, a)}{2} = \cos_p(t, a); \\
\text{(vi)} \quad \sin_{-p}(t, a) &= \frac{e_{-ip}(t, a) - e_{ip}(t, a)}{2i} = -\sin_p(t, a); \\
\text{(vii)} \quad \cos_p(t, a) + i \sin_p(t, a) &= \left(\frac{e_{ip}(t, a) + e_{-ip}(t, a)}{2} \right) + i \left(\frac{e_{ip}(t, a) - e_{-ip}(t, a)}{2i} \right) = e_{ip}(t, a).
\end{aligned}$$

□

1.2.6 Delta intégral

Définition 1.2.8.

Soient $f : c \rightarrow \mathbb{R}$, $c \leq d$, $c \in \mathbb{N}_a$. Alors le delta intégral est défini par :

$$\int_c^d f(t)\Delta t = \sum_{t=c}^d f(t). \quad (1.19)$$

Par convention

$$\sum_{t=c}^{c-k} f(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_1.$$

Définition 1.2.9.

Soit $f : \mathbb{N}_a^b \rightarrow \mathbb{R}$. Nous disons que F est une antidifférence de f sur \mathbb{N}_a^b si :

$$\Delta F(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{N}_a^{b-1}. \quad (1.20)$$

Définition 1.2.10.

Si $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$, donc le Delta intégral indéfini de f est donné par :

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + c, \quad (1.21)$$

où F est une antidifférence de f et c est une constante .

Quelques propriétés de delta intégral

Soient $f, g : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$, $b, c, d \in \mathbb{N}_a$, $b \leq c \leq d$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(i) \int_b^c \alpha f(t)\Delta t = \alpha \int_b^c f(t)\Delta t;$$

$$(ii) \int_b^c (f(t) + g(t))\Delta t = \int_b^c f(t)\Delta t + \int_b^c g(t)\Delta t;$$

$$(iii) \int_b^d f(t)\Delta t = 0;$$

$$(iv) \int_b^d f(t)\Delta t = \int_b^c f(t)\Delta t + \int_c^d f(t)\Delta t;$$

$$(v) \left| \int_b^c f(t)\Delta t \right| \leq \int_b^c |f(t)| \Delta t;$$

$$(vi) \text{ Si } F(t) = \int_b^t f(s)\Delta, \text{ pour } t \in \mathbb{N}_b^c, \text{ alors } \Delta F = f(t), \quad t \in \mathbb{N}_b^{c-1};$$

(vii) Si $f(t) \geq g(t)$, pour $t \in \mathbb{N}_b^{c-1}$, alors : $\int_b^c f(t)\Delta t \geq \int_b^c g(t)\Delta t$.

Théorème 1.2.8. (Théorème fondamental pour le calcul de différence).

Soient $f : \mathbb{N}_a^b \rightarrow \mathbb{R}$ et $F(t)$ une antidifférence quelconque de $f(t)$ sur \mathbb{N}_a^b . Donc

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b \Delta F(t)\Delta t = F(t)|_a^b = F(b) - F(a). \quad (1.22)$$

Théorème 1.2.9.

Soient p, r et α des constantes. Alors

- (i) $\int \alpha \Delta t = \frac{1}{\alpha-1} \alpha^t + c, \alpha \neq 1;$
- (ii) $\int (t - \alpha)^r \Delta t = \frac{1}{r+1} (t - \alpha)^{r+1} + c, r \neq -1;$
- (iii) $\int (\alpha - \sigma(t))^r \Delta t = \frac{-1}{r+1} (\alpha - 1)^{r+1} + c, r \neq -1;$
- (iv) $\int (t - 1)\Gamma(t)\Delta t = \Gamma(t) + c;$
- (v) $\int e_p(t, a)\Delta t = \frac{1}{p} e_p(t, a) + c, p \neq 0, -1;$
- (vi) $\int \cos_p(t, a)\Delta t = \frac{1}{p} \sin_p(t, a) + c, p \neq 0, -i, +i;$
- (vii) $\int \sin_p(t, a)\Delta t = \frac{-1}{p} \cos_p(t, a) + c, p \neq 0, -i, +i;$
- (viii) $\int \cosh_p(t, a)\Delta t = \frac{1}{p} \sinh_p(t, a) + c, p \neq 0, -i, +i;$
- (ix) $\int \sinh_p(t, a)\Delta t = \frac{1}{p} \cosh_p(t, a) + c, p \neq 0, -i, +i;$
- (x) $\int \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} \Delta t = \begin{pmatrix} t \\ r+1 \end{pmatrix} + c.$

1.2.7 Transformé discrète

La transformée discrète appelée aussi R-transformée est définie par

$$R_{t_0}(f(t))(s) = \sum_{t=t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{t+1} f(t). \quad (1.23)$$

Lemme 1.2.1.

Pour $v \in \mathbb{R} - \{\dots, -2, -1, 0\}$, on a

- (i) $R_{v-1}(t^{v-1})(s) = \frac{\Gamma(v)}{s^v},$
- (ii) $R_{v-1}(t^{v-1}\alpha^t)(s) = \frac{\alpha^{v-1}\Gamma(v)}{(s+t-\alpha)^v},$
- (iii) $R_v((h * g)(t))(s) = R_{v-1}(h(t))(s)R_0(g(t))(s).$

Pour démontrer (i), (ii) et (iii) consulter [7]

Lemme 1.2.2.

Soit $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{\dots, -1, 0\}$ et f set une fonction défini sur \mathbb{N}_a , alors :

$$R_{a+\mu}(\Delta^{-\mu} f(k))(z) = \frac{1}{z^\mu} R^a(f(k))(z).$$

Définition 1.2.11.

Le monôme de Taylor discret au point $s \in \mathbb{N}_a$, noté $h_n(t, s)$, $n \in \mathbb{N}_a$ est défini par :

$$h_n(t, s) = \frac{(t-s)^n}{n!}, \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{1.24}$$

Cas particilier

$$h_n(t, a) = \frac{(t-a)^n}{n!}, \quad t \in \mathbb{N}_a.$$

1.3 Somme et différence fractionnaire

Définition 1.3.1.

Le monôme de taylor v -fractionnaire est défini par :

$$h_v(t, s) = \frac{(t-s)}{\Gamma(v+1)}, \quad v \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_1).$$

Théorème 1.3.1.

Soient $t, s \in \mathbb{N}_a$. Alors

- (i) $h_v(t, t) = 0$;
- (ii) $\Delta h_v(t, a) = h_{v-1}(t, a)$;
- (iii) $\Delta_s h_v(t, s) = -h_{v-1}(t, \sigma(s))$;
- (iv) $\int h_v(t, a) \Delta t = h_{v+1}(t, a) + c$;
- (v) $\int h_v(t, \sigma(s)) \Delta s = -h_{v+1}(t, s) + c$.

Exemple 1.3.1.

En utilisant la définition de la somme fractionnaire, calculons $\Delta_0^{-\frac{1}{2}}1$:

$$\begin{aligned}
 \Delta_0^{-\frac{1}{2}}1 &= \int_0^{1+\frac{1}{2}} h_{-\frac{1}{2}}(t, \sigma(s))1\Delta s, \\
 &= -h_{-\frac{1}{2}}(t, s)|_{s=0}^{s=1+\frac{1}{2}} \quad (\text{d'après le thèorème(1.3.1), partie (v)}), \\
 &= -\frac{(-\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}, \\
 &= \frac{2}{\sqrt{p}}t^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

1.3.1 Somme fractionnaire

Soient $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$ et $v > 0$. Alors la somme v -fractionnaire est donnée par la formule :

$$\Delta_a^{-v}f(t) = \int_a^{t-v+1} h_{v-1}(t, \sigma(t))f(\mathcal{T})\Delta\mathcal{T}, \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\mathcal{T}=0}^{t-v} h_{v-1}(t, \sigma(\mathcal{T}))f(\mathcal{T}), \\
 &= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{\mathcal{T}=0}^{t-v} (t - \sigma(\mathcal{T}))^{v-1}f(\mathcal{T}), \quad t \in \mathbb{N}_{a+v}. \quad (1.26)
 \end{aligned}$$

où σ est un opérateur de saut.

Remarque 1.3.1.

Notons que la somme v -fractionnaire de f est un combinaison linéaire de $f(a), f(a+1), \dots, f(t-v)$, en particulier, $\Delta_0^{-v}f(t)$ prend la forme :

$$\Delta_a^{-v}f(t) = h_{v-1}(t, \sigma(a))f(a) + \dots + vf(t-v-1) + f(t-v).$$

1.3.2 Différence fractionnaire

Soit $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$, $v > 0$. On appelle une différence v -fractionnaire, la formule définie par :

$$\Delta_a^v f(t) = \Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+N-v}, \quad (1.27)$$

où N est un entier positif tel que : $N - 1 < v \leq N$.

Une autre définition de Δ_a^v équivalente est donnée par :

$$\Delta_a^v = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum_{s=a}^{t+v} (t - \sigma(s))^{-v-1} f(s), & v \in \mathbb{N}_{a+N-v}, \\ \Delta^N f(t), & v = N. \end{cases} \quad (1.28)$$

Théorème 1.3.2. (Continuité de la différence fractionnaire) :

Soit $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$. Alors la différence fractionnaire $\Delta_a^v f$ est continue pour $v > 0$. i.e pour chaque $m \in \mathbb{N}_0$ fixé,

$$\Delta_a^v f(a + [v] - v + m),$$

est continue pour $v > 0$, où $[v]$ est la partie entière de v .

Pour la preuve de ce théorème, consulter[6].

Définition 1.3.2.

Le v -Delta différence fractionnaire de Rimann-Liouville est donné (pour $v = N \in \mathbb{N}_0$) par la formule suivante :

$$\Delta_a^v f(t) = \Delta^N \Delta_a^{-(N-v)} f(t) = \Delta^N \Delta_a^{-0} f(t) = \Delta^N f(t), \quad t \in \mathbb{N}_a. \quad (1.29)$$

Définition 1.3.3.

Soient $v > 0$, $m - 1 < v \leq m$ où m est un entier positif, tel que :

$m = [v]$ avec $[v]$ désigne la partie entière de v .

Le v -delta différence fractionnaire de Caputo pour $t \in \mathbb{N}_{p+m-v}$ est défini par la relation suivante :

$${}^c \Delta_p^v f(t) = \Delta^{v-m} (\Delta^m f(t)) = \frac{1}{\Gamma(m-v)} \sum_{s=p}^{t-(m-v)} (t-s-1)^{m-v-1} \Delta^m f(s), \quad t \in \mathbb{N}^{p+m-v}. \quad (1.30)$$

Sachant que : $\Delta^m f(s)$ est l'opérateur delta de différence d'ordre m .

Exemple 1.3.2. Calculons $\Delta_0^{\frac{1}{2}}1$.

$$\Delta_0^{\frac{1}{2}}1 = \Delta\Delta_0^{-\frac{1}{2}}1 = \Delta\frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.3.3.

Soit $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$ et $v > 0$ avec $N - 1 < v \leq N$ $t \in \mathbb{N}_a$. Donc

$$\Delta_a^v f(t) = \begin{cases} \int_a^{t+v+1} h_{-v-1}(t, \sigma(\mathcal{T}))f(\mathcal{T})\Delta\mathcal{T}, & N - 1 < v < N \\ \Delta^N f(t), & v = N. \end{cases} \quad (1.31)$$

Théorème 1.3.4.

• *Puissance de la somme fractionnaire*

Soient $\mu \geq 0$, $v \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Delta_{a+\mu}^{-v}(t-a)^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)}(t-a)^{\mu+v}. \quad (1.32)$$

Pour $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+v}$

• *Puissance de la différence fractionnaire*

Soient $\mu > 0$, $v > 0$, $N - 1 < v < N$, $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Delta_{a+\mu}^v(t-a)^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-v+1)}(t-a)^{\mu-v}. \quad (1.33)$$

Pour $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+v}$

Exemple 1.3.3.

Calculons $\Delta_{\frac{3}{2}}^{-\frac{3}{2}}(t-2)^{\frac{1}{2}}$, $t \in \mathbb{N}_2$. Nous avons :

$$\Delta_{\frac{3}{2}}^{-\frac{3}{2}}(t-2)^{\frac{1}{2}} = \Delta_{2+\frac{1}{2}}^{-\frac{3}{2}}(t-2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}(t-2)^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(t-2)^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(t^2 - 5t + 6).$$

1.3.3 Formule binomiales fractionnaire

Soit $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$ et $N - 1 \leq v \leq N$. Alors

$$\Delta_a^v f(t) = \sum_{k=0}^{t+v-a} (-1)^k \binom{v}{k} f(t+v-k), \quad t \in \mathbb{N}_{a+N-v}, \quad (1.34)$$

$$\Delta_a^{-v} f(t) = \sum_{k=0}^{t-a-v} (-1)^k \binom{-v}{k} f(t-v-k), \quad (1.35)$$

$$= \sum_{k=0}^{t-a-v} (-1)^k \binom{v+k-1}{k} f(t-v-k), \quad t \in \mathbb{N}_{a+v}. \quad (1.36)$$

Quelque propriétés de la somme et la différence fractionnaires

(1) Composition de la somme fractionnaires

Soient f une fonction définie sur \mathbb{N}_a et μ, v sont des nombres positifs. Alors

$$[\Delta_{a+v}^{-\mu} (\Delta_a^{-v})](t) = (\Delta_a^{-(\mu+v)} f)(t) = [\Delta_{a+\mu}^{-v} (\Delta_a^{-\mu})](t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\mu+v}.$$

(2) Composition de la différence entière avec une somme fractionnaire

Soient $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$, $v > 0$, $N - 1 < v \leq N$, $k \in \mathbb{N}_0$. Donc :

$$[\Delta^k (\Delta_a^{-v} f)](t) = (\Delta_a^{k-v} f)(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+v}.$$

(3) Composition de la différence entière avec une différence fractionnaire

Soient $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$, $v > 0$, $N - 1 < v \leq N$, $k \in \mathbb{N}_0$. Donc

$$[\Delta^k (\Delta_a^v f)](t) = (\Delta_a^{k+v} f)(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+N-v}.$$

(4) Composition de la différence fractionnaire avec une somme fractionnaire

Soient $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$, $v, \mu > 0$ et $N - 1 < v \leq N$, $N \in \mathbb{N}_1$. Alors, par conséquent

$$\Delta_{a+\mu}^v \Delta_a^{-\mu} f(t) = \Delta_a^{v-\mu} f(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\mu+N-v}.$$

(5) Composition de deux différences fractionnaires

Soient $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que $v, \mu > 0$ avec $N - 1 < v < N$, et $M - 1 < v < M$,

donc pour $t \in \mathbb{N}_{a+M-mu+n-v}$

$$\Delta_{a+M-\mu}^v \Delta_a^\mu f(t) = \Delta^{v+\mu} f(t) - \sum_{j=0}^{M-1} h_{-\mu-M+j}(t-m+\mu, a) \Delta_a^{j-M+\mu} f(a+M-\mu).$$

Pour $v = N$, alors l'équation précédente devient :

$$\Delta_{a+M-\mu}^\mu \Delta_a^\mu f(t) = \Delta_a^{v+\mu} f(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+M-\mu}.$$

(6) Composition de la somme fractionnaire avec une différence entière

Soient $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $u, v > 0$, avec $N-1 < \mu < N$. Alors

$$\Delta_a^{-v} \Delta^k f(t) = \Delta_a^{k-v} f(t) - \sum_{j=0}^{k-1} h_{v-k+j}(t, a) \Delta^j f(a), \quad t \in \mathbb{N}_{a+v}.$$

(7) Composition de la somme fractionnaire avec une différence fractionnaire

Soient $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$, $u, v > 0$, avec $N-1 < \mu < N$. Alors

$$\Delta_a^{-v} \Delta_a^{\mu-v} f(t) - \sum_{j=0}^{N-1} h_{v-N+1}(t-N+v, a) \Delta^{j-(N-\mu)} f(a+N-\mu).$$

Pour $t \in \mathbb{N}_{a+N-\mu+v}$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit des définitions élémentaires et des notions de base relatives au calcul fractionnaire. Puis, dans ce chapitre, nous avons présenté l'opérateur Delta de différence discrète, ses applications sur quelques fonctions (fonction de saut, chute, Delta exponentielle et fonctions Delta trigonométriques), la transformée discrète. Pour terminer ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la somme et à la différences fractionnaires qui servent comme outils de base dans le calcul fractionnaire et les formules binomiales fractionnaires.

CHAPITRE 2

EQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

Les équations aux différences sont devenues un outil de valeur et ont beaucoup d'importance dans plusieurs domaines et disciplines scientifiques et ceci par leurs nombreuses applications dans les sciences appliquées telles que l'économie, la biologie, la théorie des probabilités, l'écologie,...etc. elle sont utilisées en modélisation des phénomènes de la vie réelle, notamment en dynamique des populations.

Dans ce chapitre, nous commençons par donner quelques notions de base sur les équations aux différences d'ordre entier [8,9]. Ensuite nous étudions les équations aux différences d'ordre fractionnaire [4, 10].

2.1 Notions sur le calcul aux différences

Définition 2.1.1.

On définit l'opérateur de différence Δ et l'opérateur de décalage E respectivement par :

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.1)$$

$$Ex(n) = x(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.2)$$

Remarque 2.1.1.

(i) Δ et E sont des opérateurs linéaires.

(ii) Δ et E commutent, c'est à dire $\Delta E = E\Delta$.

(iii) $\Delta = E - I$ où I est l'opérateur identité, c'est à dire $Ix(n) = x(n)$, $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Définition 2.1.2.

En général, on définit Δ^r et E^r respectivement par :

$$\Delta^r x(n) = \Delta(\Delta^{r-1}x(n)), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.3)$$

$$E^r x(n) = x(n+r), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.4)$$

Lemme 2.1.1.

De la Remarque 2.1.1, on peut montrer facilement les égalités suivantes :

$$\Delta^r = (E - I)^r = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} C_i^r E^i, \quad (2.5)$$

$$E^r = (\Delta + I)^r = \sum_{i=0}^r C_i^r \Delta^i. \quad (2.6)$$

où $C_0^0 = 1$ et $C_i^0 = 0$ si $i \neq 0$

Théorème 2.1.1.

Soit $\{x(n)\}_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $x(0) = x_0$. Alors

$$x(n) = x(0+n) = E^n x_0 = \sum_{i=0}^n C_i^n \Delta^i x_0, \quad (2.7)$$

$$\Delta^n x_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_i^n E^i x_0. \quad (2.8)$$

Proposition 2.1.1.

On a les propriétés suivantes pour Δ .

(i)

$$\sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta x(i) = x(n) - x(n_0), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.9)$$

(ii)

$$\Delta \left(\sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) \right) = x(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.10)$$

(iii)

$$\Delta(x(n)y(n)) = Ex(n)\Delta y(n) + y(n)\Delta x(n). \quad (2.11)$$

(iv)

$$\Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right) = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)\Delta y(n)}, \quad (2.12)$$

et $y(n)$ est non nulle sur \mathbb{N}_{n_0} .

(v) Soit $p(n) = \sum_{i=0}^k a_i n^{k-i}$ un polynôme de degré k (i.e $a_0 \neq 0$) où $a_i, i \in \{0, 1, \dots, k\}$ sont des réels. Alors :

$$\Delta^k p(n) = a_0 k!, \quad (2.13)$$

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0, \quad \forall i \geq 1. \quad (2.14)$$

Démonstration.

En utilisant (2.1) et (2.2), on trouve

(i)

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta x(i) &= \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i(i+1) - x(i)), \\ &= \sum_{i=n_0+1}^n x(i) - \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i), \\ &= x(n) - x(n_0). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \Delta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} x(i)\right) &= \sum_{i=n_0}^n x(i) - \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i), \\ &= x(n). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\Delta(x(n)y(n)) &= x(n+1)y(n+1) - x(n)y(n), \\ &= x(n+1)(y(n+1) - y(n)) + y(n)(x(n+1) - x(n)), \\ &= Ex(n)\Delta y(n) + y(n)\Delta x(n).\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right) &= \frac{x(n+1)}{y(n+1)} - \frac{x(n)}{y(n)}, \\ &= \frac{x(n+1)y(n) - x(n)y(n+1)}{y(n+1)y(n)}, \\ &= \frac{y(n)(x(n+1) - x(n)) - x(n)(y(n+1) - y(n))}{y(n+1)y(n)}, \\ &= \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)Ey(n)}.\end{aligned}$$

(v)

$$\Delta p(n) = \sum_{i=0}^k a_i(n+1)^{k-i} - \sum_{i=0}^k a_i n^{k-i}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(n+1)^k &= \sum_{i=0}^k C_i^k n^i = 1 + kn + \frac{k(k-1)}{2!}n^2 + \dots + kn^{k-1} + n^k, \\ (n+1)^{k-1} &= 1 + (k-1)n + \frac{(k-1)(k-2)}{2!}n^2 + \dots + (k-1)n^{k-2} + n^{k-1}, \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

donc

$$\Delta p(n) = a_0 k n^{k-1} + p_1(n),$$

où p est un polynôme de degré inférieur strictement à $k-1$, c'est à dire $\deg p_1 \leq k-1$.

De la même manière, on peut montrer que

$$\begin{aligned}\Delta^2 p(n) &= a_0 k(k-1)n^{k-2} + p_2(n), \text{ avec } \deg p_2 < k-2, \\ \Delta^3 p(n) &= a_0 k(k-1)(k-2)n^{k-3} + p_3(n), \text{ avec } \deg p_3 < k-3, \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

d'où (2.13) □

Proposition 2.1.2.

Soit

$$p(E) = \sum_{i=0}^k a_i E^{k-i}, \tag{2.15}$$

où E est l'opérateur défini par (2.2) et $a_i, i \in \{0, 1, \dots, k\}$ sont des réels. Alors

(i) pour tout $b \in \mathbb{R}$ on a :

$$p(E)b^n = p(b)b^n, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.16}$$

(ii)

$$p(E)(b^n x(n)) = b^n p(bE)x(n), \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.17}$$

Démonstration.

En utilisant (2.4) et (2.15), on trouve

(i)

$$\begin{aligned}p(E)b^n &= (a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \dots + a_k I)b^n, \\ &= a_0 b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + \dots + a_k b^n, \\ &= (a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + \dots + a_k)b^n, \\ &= p(b)b^n.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 p(E)(b^n x(n)) &= (a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \cdots + a_k I)(b^n x(n)), \\
 &= a_0 E^k b^n x(n) + a_1 E^{k-1} b^n x(n) + \cdots + a_k I b^n x(n), \\
 &= a_0 b^{n+k} x(n+k) + a_1 b^{n+k-1} x(n+k-1) + \cdots + a_k b^n x(n), \\
 &= b^n (a_0 b^k x(n+k) + a_1 b^{k-1} x(n+k-1) + \cdots + a_k x(n)), \\
 &= b^n p(bE)x(n).
 \end{aligned}$$

□

2.2 Equation aux différences d'ordre entier

2.2.1 Equations aux différences linéaires à coefficients variables

Définition 2.2.1.

Une équation de la forme :

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (2.18)$$

avec $p_i(n), i \in \{1, \dots, k\}$ et $g(n)$ sont des fonctions réelles définies sur \mathbb{N}_{n_0} et $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, s'appelle équation aux différences linéaire non homogène d'ordre k .

Définition 2.2.2.

On appelle équation homogène associée à l'équation (2.18) l'équation :

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.19)$$

Définition 2.2.3.

Une suite $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est dite solution de l'équation (2.18) si elle satisfait cette équation. Observons que si nous fixons k conditions initiales pour l'équation (2.18)

$$y(n_0) = c_0, \quad y(n_0+1) = c_1, \quad \dots, \quad y(n_0+k-1) = c_{k-1}, \quad (2.20)$$

où les c_i , $i \in \{0, \dots, k-1\}$ sont des constantes réelles. Alors, on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \dots + p_k(n)y(n) = g(n), & n \in \mathbf{N}_{n_0}, \\ y(n_0) = c_0, \quad y(n_0+1) = c_1, \dots, \quad y(n_0+k-1) = c_{k-1}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Théorème 2.2.1.

Le problème (2.21) admet une solution unique.

Exemple 2.2.1.

On considère l'équation aux différences linéaires d'ordre deux suivante :

$$y(n+2) + \frac{n}{n+1}y(n+1) + 3y(n) = n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (2.22)$$

avec $y(0) = 1$, et $y(1) = -1$ et on va calculer $y(3)$ et $y(4)$.

D'abord, nous récrivons l'équation (2.22) sous la forme :

$$y(n+2) = -\frac{n}{n+1}y(n+1) - 3y(n) + n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (2.23)$$

Posons $n = 0$ l'équation (2.23), on aura :

$$y(2) = 3y(0) = 3,$$

pour $n = 1$ on obtient :

$$y(3) = -\frac{1}{2}y(2) + 3y(1) + 1 = -\frac{7}{2},$$

Lemme 2.2.1.

Soit l'opérateur L défini par

$$Ly(n) = \sum_{i=0}^k p_i(n)y(n+k-i), \quad n \in \mathbf{N}_{n_0}. \quad (2.24)$$

Alors L est linéaire

Démonstration.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} L(\alpha x(n) + \beta y(n)) &= \sum_{i=0}^k p_i(n)(\alpha x(n+k-i) + \beta y(n+k-i)), \\ &= \alpha \sum_{i=0}^k p_i(n)x(n+k-i) + \beta \sum_{i=0}^k p_i(n)y(n+k-i), \\ &= \alpha Lx(n) + \beta Ly(n). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.1.

Soit L défini par (2.24). Alors l'équation (2.18) prend la forme

$$Ly(n) = g(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (2.25)$$

et l'équation (2.19) sera :

$$Ly(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (2.26)$$

avec $p_0(n) = 1, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Proposition 2.2.1.

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (2.26). Alors S est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Définition 2.2.4.

Soient $f_i(n), \quad i \in \{1, \dots, r\}$ des fonctions définies sur \mathbb{N}_{n_0} .

On dit que $f_i(n)$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{N}_{n_0} si

$$\forall \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \iff \alpha_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

Exemple 2.2.2.

$3^n, n3^n$ et $n^2 3^n$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{N}^* .

En effet :

$$\begin{aligned} \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n + \alpha_3 n^2 3^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* &\iff \alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ &\iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Définition 2.2.5.

Un ensemble de k solutions de l'équation (2.26) linéairement indépendantes est dit ensemble fondamental de solutions de cette équation.

Définition 2.2.6.

Soient $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \dots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ des solutions de l'équation (2.26). On définit le Casoratien $W(n)$ de ces solutions par :

$$W(n) = \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \cdots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \cdots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \cdots & y_k(n+k-1) \end{vmatrix}, n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.27)$$

Exemple 2.2.3.

Considérons l'équation aux différences suivante :

$$y(n+2) + \frac{3}{2}y(n+1) + \frac{1}{2}y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.28)$$

Vérifions que $\{(-1)^n\}_{n=0}^{+\infty}$ et $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{+\infty}$ sont des solutions de l'équation (2.28) et calculons leur Casoratien.

On a

$$(-1)^{n+2} + \frac{3}{2}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}(-1)^n = 0,$$

et

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Par définition le Casoratien $W(n)$ de $\{(-1)^n\}_{n=0}^{+\infty}$ et $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{+\infty}$ est :

$$\begin{aligned} W(n) &= \begin{vmatrix} (-1)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ (-1)^{n+1} & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{vmatrix}, \\ &= (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-1)^{n+1}, \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Lemme 2.2.2. (Lemme d'Abel)

Soient $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \dots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ des solutions de l'équation (2.26) et soit $W(n)$ leur Casoratien. Alors

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.29)$$

Pour démontrer ce lemme, on a besoin du lemme suivant

Lemme 2.2.3.

Considérons l'équation aux différences linéaire du premier ordre suivante

$$y(n+1) = a(n)y(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (2.30)$$

avec $y(n_0) = y_0$ et $a(n)$ est une fonction définie sur \mathbb{N}_{n_0} alors la solution de l'équation (2.30) est définie sur \mathbb{N}_{n_0} par :

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0. \quad (2.31)$$

Démonstration. (Par récurrence)

Pour $n = n_0 + 1$ de l'équation (2.30) on a :

$$y(n_{0+1}) = a(n_0)y(n_0) = a(n_0)y_0 = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) y_0 \right],$$

donc (2.31) est vraie pour $n = n_0 + 1$.

Maintenant supposons que (2.31) est vraie pour n et la montrons pour $n + 1$

On a

$$y(n+1) = a(n)y(n) = a(n) \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 = \left[\prod_{i=n_0}^n a(i) \right] y_0.$$

D'où (2.31). □

Démonstration. (du Lemme (2.2.2))

On va démontrer le lemme pour $k = 3$ et de la même manière, on peut montrer le cas général. Considérons l'équation aux différences :

$$y(n+3) + p_1y(n+2) + p_2y(n+1) + p_3y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.32)$$

Soient $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$, $\{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ et $\{y_3(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ trois solutions de l'équation (2.32) alors le Casorati de ces solutions est

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ y_1(n+3) & y_2(n+3) & y_3(n+3) \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \quad (2.33)$$

de L'équation (2.33), on a :

$$y_i(n+3) = -p_1(n)y_i(n+2) - p_2(n)y_i(n+1) - p_3(n)y_i(n), \quad i = 1, 2, 3, n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

et

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ -p_1(n)y_1(n+2) & -p_1(n)y_2(n+2) & -p_1(n)y_3(n+2) \\ -p_2(n)y_1(n+1) & -p_2(n)y_2(n+1) & -p_2(n)y_3(n+1) \\ -p_3(n)y_1(n) & -p_3(n)y_2(n) & -p_3(n)y_3(n) \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

En utilisant les propriétés des déterminants, on trouve :

$$\begin{aligned} W(n+1) &= \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ -p_3y_1(n) & -p_3y_2(n) & -p_3y_3(n) \end{vmatrix}, \\ &= -p_3(n) \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) \end{vmatrix}, \\ &= -p_3(n)(-1)^2 \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \end{vmatrix}, \\ &= (-1)^3 p_3(n)W(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \end{aligned}$$

D'où

$$W(n+1) = (-1)^3 p_3(n)W(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.34)$$

D'après le Lemme 2.2.3, on obtient

$$\begin{aligned} W(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3 p_3(i) \right] W(n_0), \\ &= (-1)^{3(n-n_0)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i) \right] W(n_0). \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat. □

Remarque 2.2.2.

Si l'équation (2.26) est à coefficients constants p_1, p_2, \dots, p_k , alors

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} p_k^{(n-n_0)} W(n_0). \quad (2.35)$$

Corollaire 2.2.1.

Supposons, dans (2.26), que $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, alors

$$W(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \iff W(n_0) \neq 0.$$

Théorème 2.2.2.

L'ensemble $y_1(n)_{n=n_0}^{+\infty}, y_2(n)_{n=n_0}^{+\infty}, \dots, y_k(n)_{n=n_0}^{+\infty}$ des solutions de l'équation (2.26) est un ensemble fondamental de solutions si et seulement si $W(n_0) \neq 0$.

Démonstration.

Soient $y_1(n)_{n=n_0}^{+\infty}, y_2(n)_{n=n_0}^{+\infty}, \dots, y_k(n)_{n=n_0}^{+\infty}$ des solutions de l'équation (2.26) et soient $\alpha_i, i \in 1, \dots, k$ des constantes réelles. Supposons que :

$$\alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n) + \dots + \alpha_k y_k(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

alors on trouve k équations

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n) + \dots + \alpha_k y_k(n) &= 0, \\ \alpha_1 y_1(n+1) + \alpha_2 y_2(n+1) + \dots + \alpha_k y_k(n+1) &= 0, \\ \vdots & \\ \alpha_1 y_1(n+k-1) + \alpha_2 y_2(n+k-1) + \dots + \alpha_k y_k(n+k-1) &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$Y(n)\xi = (0, 0, \dots, 0)^t, \quad (2.36)$$

où

$$Y(n) = \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \cdots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \cdots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \cdots & y_k(n+k-1) \end{pmatrix},$$

et

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)^t.$$

Observons que

$$W(n) = \det Y(n).$$

L'équation (2.36) admet une seule solution qui est la solution triviale (nulle)

i.e , $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ si et seulement si

$$\det T(n) = W(n) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

En combinant cette condition avec le Corollaire 2.2.1 on obtient le résultat voulu. \square

Exemple 2.2.4.

Montrer que $\{2^n\}_{n=0}^{+\infty}, \{(-3)^n\}_{n=0}^{+\infty}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation

$$y(n+2) + y(n+1) - 6y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.37)$$

(i) Il est facile de montrer que $\{2^n\}_{n=0}^{+\infty}$ et $\{(-3)^n\}_{n=0}^{+\infty}$ sont des solutions de l'équation (2.37).

(ii) Soit $W(n)$ le Casoratien des suites $\{2^n\}_{n=0}^{+\infty}$ et $\{(-3)^n\}_{n=0}^{+\infty}$. Alors

$$W(n) = \begin{vmatrix} 2^n & (-3)^n \\ 2^{n+1} & (-3)^{n+1} \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\begin{aligned} W(0) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \\ &= -5 \neq 0. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.2.2, $\{2^n\}_{n=0}^{+\infty}, (-3)^n\}_{n=0}^{+\infty}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.37).

Théorème 2.2.3. (Théorème fondamental)

Considérons l'équation (2.26). Si $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, alors l'équation (2.26) admet un ensemble fondamental de k solution.

Démonstration.

D'après le théorème 2.2.1, le problème

$$\begin{cases} y_i(n+k) + p_1(n)y_i(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y_i(n) = 0, & n \in \mathbb{N}_{n_0} \\ y_i(n_0+i-1) = 1, & y_i(n_0+j) = 0, & j \neq i-1, & 1 \leq i \leq k, \end{cases}$$

admet des solutions $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \cdots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$, soit $W(n)$ leur casoration. Alors

$$\begin{aligned} W(n_0) &= \begin{vmatrix} y_1(n_0) & y_2(n_0) & \cdots & y_k(n_0) \\ y_1(n_0+1) & y_2(n_0+1) & \cdots & y_k(n_0+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n_0+k-1) & y_2(n_0+k-1) & \cdots & y_k(n_0+k-1) \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$W(n_0) = \det I_k = 1 \neq 0,$$

donc d'après le Théorème 2.2.2 $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \cdots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.26) □

Corollaire 2.2.2.

L'espace S des solutions de l'équation (2.26) est de dimension k .

Maintenant, on considère l'équation (2.25) où g est une fonction discrète tel que $g(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$

On peut facilement vérifier le lemme suivant.

Lemme 2.2.4.

La différence entre deux solutions de l'équation (2.25) est solution de l'équation (2.26).

Remarque 2.2.1.

L'ensemble des solutions de l'équation (2.25) n'est pas un espace vectoriel.

Théorème 2.2.4.

Soient $\{y_i(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, i \in \{1, \dots, k\}$ des solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.26) et soit $\{y_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution particulière de l'équation (2.25), alors toute autre solution $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ de l'équation (2.25) s'écrit sous la forme

$$y(n) = \sum_{i=1}^k c_i y_i(n) + y_p(n), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \{1, \dots, k\} \text{ et } n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Démonstration.

Soient $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.25) et $\{y_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution particulière de la même équation. D'après le Lemme 2.2.4 la suite $\{(y - y_p)(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est une solution de l'équation (2.26).

Donc

$$y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^k c_i y_i(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

d'où

$$y(n) = \sum_{i=1}^k c_i y_i(n) + y_p(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

□

2.2.2 Equation aux différences linéaires à coefficients constants

Résolution des équations homogènes

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux équations aux différences linéaires homogènes

à coefficients constants d'ordre k de la forme

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0, \quad (2.38)$$

avec $p_i, i \in \{1, \dots, k\}$ sont des constantes réelles et $p_k \neq 0$. Notre objectif est de trouver un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.38) et par conséquent sa solution générale.

Proposition 2.2.2.

Soit λ un nombre complexe non nul. Si la suite définie par $y(n) = \lambda^n, \forall n \in \mathbb{N}$ est une solution de l'équation (2.38), alors λ est solution de l'équation

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0. \quad (2.39)$$

Démonstration.

Soit $y(n) = \lambda^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Substituons les termes de cette suite dans (2.38), nous obtenons :

$$\lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + \cdots + p_k \lambda^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.40)$$

donc

$$\lambda^n [\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.41)$$

d'où (2.40). □

Remarque 2.2.3.

L'équation (2.39) est appelée équation caractéristique associée à l'équation (2.38).

Théorème 2.2.5.

Soient $\lambda_i, i \in \{1, \dots, k\}$ les solutions distinctes de l'équation (2.39). Alors

$\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.38).

Démonstration.

Soient $\{\lambda_i^n\}_{n=0}^{+\infty}, i \in \{1, \dots, k\}$ des solutions de l'équation (2.38) et $W(n)$ le Casoratien de ces solutions, d'après le Théorème 2.2.2, il suffit de montrer que $W(0) \neq 0$.

On a :

$$W(n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix},$$

c'est le déterminant de Vandermonde. On a

$$W(0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i). \quad (2.42)$$

Puisque les λ_i , $i \in \{1, \dots, k\}$ sont distinctes, il en résulte de (2.42) que $W(0) \neq 0$ donc $\{\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.38). \square

Corollaire 2.2.3.

La solution générale de l'équation (2.38) est donnée par :

$$y(n) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^n, \quad c_i \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lemme 2.2.5.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ des solutions de l'équation (2.39) de m_1, m_2, \dots, m_r respectivement tels que $r \leq k$ et $m_1 + m_2 + \dots + m_r = k$.

Alors

$$\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \dots, n^{m_1-1}\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, n^{m_2-1}\lambda_2^n, \dots, \lambda_r^n, \dots, n^{m_r-1}\lambda_r^n\}$$

est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.38). Pour la démonstration (voir [11]).

Corollaire 2.2.4.

La solution générale de l'équation (2.38) s'écrit sous la forme :

$$y(n) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n, \quad c_{i,j} \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 2.2.5. (Racines réelles simples)

Considérons l'équation aux différences suivante :

$$y(n+2) + 2y(n+1) - y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.43)$$

avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$.

L'équation caractéristique associée à l'équation (2.43) est

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0,$$

et les solutions de cette équation sont :

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2} \text{ et } \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

Donc la solution générale de l'équation (2.43) est :

$$y(n) = c_1(-1 - \sqrt{2})^n + c_2(-1 + \sqrt{2})^n, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}.$$

D'après les conditions initiales on a

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + (-1 - \sqrt{2}) + c_2(-1 + \sqrt{2}) = 1, \end{cases}$$

donc

$$c_1 = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

d'où la solution de l'équation (2.43) avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$ est

$$y(n) = \frac{-1}{2\sqrt{2}}(-1 - \sqrt{2})^n + \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1 + \sqrt{2})^n \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 2.2.6. (Racines réelles multiples)

Considérons l'équation aux différences suivante :

$$y(n+2) - y(n+1) + \frac{1}{4}y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.44)$$

avec $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.

L'équation caractéristique associée à cette équation est :

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Les racines de cette équation sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \quad \text{de multiplicité} \quad m = 2.$$

Donc la solution générale de l'équation (2.43) est :

$$y_n = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}.$$

D'après les conditions initiales on a :

$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ \frac{1}{2} + c_2 \left(\frac{1}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

donc $c_1 = 1$ et $c_2 = -1$ et la solution de l'équation (2.44) avec $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$ est :

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Résolution des équation non homogènes

Le principe de résolution des équations non homogènes de la forme

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = g(n), \quad (2.45)$$

(où $p_i; i \in \{1, \dots, k\}$; sont des constantes réels et $p_k \neq 0$) consiste à éliminer la fonction $g(x)$ en introduisant l'opérateur d'avancement E puis résoudre l'équation homogène obtenue.

Définition 2.2.7.

Nous définissons l'opérateur d'avancement E de la suite de nombres entiers $f(n)$ par :

$$\begin{aligned} f(n) = c &\implies E(f(n)) = c, \\ f(n) \neq c &\implies E(f(n)) = f(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \end{aligned}$$

telle que c est une constante .

Le tableau ci-dessous résume l'annulateurs de quelques fonctions $g(n)$ dans l'équation

(2.45) avec $p_k(n)$ est un polynôme de degré k et α est une valeur entière :

fonction $g(n)$	Annulateur de $g(n)$
$g(n) = c$	$(E - 1)$
$g(n) = p_k(n)$	$(E - 1)^{k+1}$
$g(n) = \alpha^n$	$(E - \alpha)$
$g(n) = \alpha^n p_k(n)$	$(E - \alpha)^{k+1}$

TABLE 2.1 – Annulateurs de quelques fonctions $g(n)$

• **Quelque propriétés de l'opérateur d'avancement**

- (i) $c(f(n)) = c \times f(n)$,
- (ii) $(E_1 \times E_2)f(n) = E_1(E_2f(n))$,
- (iii) $(E_1 + E_2)f(n) = E_1(f(n)) + E_2(f(n))$,
- (iv) $(E_1 \times E_2)f(n) = (E_2 \times E_1)f(n)$,
- (v) $(E_1 + E_2)f(n) = (E_2 + E_1)f(n)$,
- (vi) $(E_1 + E_2 + E_3)f(n) = (E_1 + (E_2 + E_3))f(n)$,
- (vii) $((E_1 \times E_2)E_3)f(n) = (E_1(E_2 \times E_3))f(n)$.

2.2.3 Equation aux différences non linéaires

Définition 2.2.8.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : I^{k+1} \rightarrow I$ une fonction continue. Alors une équation aux différences d'ordre $k + 1$ écrite sous la forme :

$$y(n + 1) = f(y(n), y(n - 1), \dots, y(n - k)), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.46}$$

est dite non linéaire si elle n'est pas de la forme (2.18).

Définition 2.2.9.

Une solution de l'équation (2.46) est une suite $\{y(n)\}_{-k}^{+\infty}$ qui satisfait l'équation (2.46) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si nous précisons $(k + 1)$ conditions initiales $y(-k), y(-k + 1), \dots, y(0) \in I$, alors

$$\begin{aligned} y(1) &= f(y(0), y(-1), \dots, y(-k)), \\ y(2) &= f(y(1), y(0), \dots, y(-k + 1)), \\ &\vdots \end{aligned}$$

D'où la solution $\{y(n)\}_{-k}^{+\infty}$ de l'équation (2.46) existe et est unique pour tout $n \geq -k$ et elle est déterminée à partir des conditions initiales.

Définition 2.2.10.

Un point $\bar{y} \in I$ est un point d'équilibre pour l'équation (2.46) si :

$$\bar{y} = f(\bar{y}, \dots, \bar{y}).$$

i.e

$$y(n) = \bar{y}, \forall n \geq -k.$$

Définition 2.2.11.

Soit $\{y(n)\}_{-k}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.46) et soit $p \geq 1$ un entier. Alors

- (i) la solution $\{y(n)\}_{-k}^{+\infty}$ est éventuellement périodique de période p s'il existe un entier $N \geq -k$ tel que $y(n + p) = y(n), \forall n \geq N$.
- (ii) la solution $\{y(n)\}_{-k}^{+\infty}$ est p -périodique s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que :
 $y(n + p) = y(n), \forall n \geq -k$.

Définition 2.2.12.

Soit J un intervalle de \mathbb{R} tel que $J \subseteq I$. Alors J est appelé intervalle invariant pour l'équation (2.46) si $y(-k), y(-k + 1), \dots, y(0) \in J \implies y(n) \in J, \forall n \geq \mathbb{N}$.

Définition 2.2.13.

Supposons que

$$\begin{aligned} f : I^{k+1} &\longrightarrow I \\ (u(0), u(1), \dots, u(k)) &\longmapsto f(u(0), u(1), \dots, u(k)), \end{aligned}$$

est une fonction continûment différentiable dans un voisinage du point d'équilibre $(\bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y})$.

L'équation :

$$y(n+1) = p_0 y(n) + p_1 y(n-1) + \dots + p_k y(n-k), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.47)$$

est appelée équation linéaire associée à l'équation (2.38) autour du point \bar{y} avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y}), \quad i = 0, \dots, k,$$

et l'équation

$$\lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \dots - p_{k-1} \lambda - p_k = 0,$$

est appelée l'équation caractéristique associée à (2.47) autour du point \bar{y} .

2.3 Equation aux différences fractionnaires

2.3.1 Résolution des équations aux différences μ fractionnaires

Théorème 2.3.1. (Théorème d'existence et unicité)

Soient $q, f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}, v > 0$ et \mathbb{N} un entier positif tel que $N-1 < v \leq N$, alors le problème aux valeurs initiales fractionnaire suivante :

$$\Delta_{v-N}^v y(t) + q(t)y(t+v-N) = f(t), \quad (2.48)$$

$$y(v-N+i) = A_i, 0 \leq i \leq N-1, \quad (2.49)$$

admet une solution unique sur \mathbb{N}_{v-N} .

Où $A_i, 0 \leq i \leq N-1$ sont des constantes .

Démonstration.

D'après la remarque(1.3.1), $\Delta_{v-N}^{-(N-v)} y(t)$ est une combinaison linéaire de $y(v-N), y(v-N+1), \dots, y(t-N+v)$ Où le coefficient de $y(t-N+v)$ égale à 1 . Puisque

$$\Delta_{v-N}^v y(t) = \Delta^v \Delta_{v-N}^{-(N-v)} y(t), \quad (\text{d'après (1.27)}),$$

nous avons $\Delta_{v-N}^v y(t)$ est une combinaison linéaire de $y(v-N), y(v-N+1), \dots, y(t+v)$ pour chaque t fixé, dont le coefficient de $y(t+v)$ est égale à 1. Soient $y(t)$ définit par les conditions

initiales (2.49) sur \mathbb{N}_{v-N}^{v-1} , alors $y(t)$ satisfait l'équation aux différences d'ordre fractionnaire non homogène (2.48) à $t = 0$ si et seulement si

$$\Delta_{v-N}^v y(0) + q(0)y(v-N) = f(0),$$

mais $y(t)$ satisfait aussi

$$(\dots)y(v-N) + (\dots)y(v-N+1) + \dots + y(v) + q(0)y(v-N) = f(0),$$

$$(\dots)A_0 + (\dots)A_1 + \dots + A_{n-1} + y(v) + q(0)A_0 = f(0),$$

par conséquent, si nous définissons $y(v)$, solution de cette dernière équation, donc $y(t)$ satisfait l'équation aux différences d'ordre fractionnaire non homogène à $t = 0$.

Nous avons montré alors la connaissance de $y(t)$ aux points $v-N+i$, $0 \leq i \leq N-1$ détermine de manière unique la valeur de la solution au point v .

Par induction, la solution $y(t)$ est unique sur \mathbb{N}_{v-N} . \square

Théorème 2.3.2.

Soit $q : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, alors l'équation aux différences d'ordre fractionnaire homogène

$$\Delta_{v-N}^v u(t) + q(t)u(t+v-N) = 0, t \in \mathbb{N}_{v-N}, \quad (2.50)$$

admet N solutions u_i , $1 \leq i \leq N$ linéairement indépendantes sur \mathbb{N}_0 , et

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_N u_N(t),$$

est la solution générale de l'équation (2.50) sur \mathbb{N}_0 , telle que c_1, c_2, \dots, c_N sont des constantes arbitraires. En outre, si $y_p(t)$ est la solution particulière aux différences d'ordre fractionnaire non homogène (2.48) définie sur \mathbb{N}_0 , donc

$$y(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_N u_N(t) + y_p(t),$$

est la solution générale de l'équation aux différences d'ordre fractionnaire non homogène (2.48).

Théorème 2.3.3.

Soient $\mu > 0$, N est un entier positif tel que $N-1 < \mu \leq N$.

Supposons que a, c_1, c_2, \dots, c_N sont des constantes, alors $y(t)$ donnée par la formule ci-dessus

$$y(t) = c_1(t-a)^{\underline{\mu-1}} + c_2(t-a)^{\underline{\mu-2}} + \dots + c_N(t-a)^{\underline{\mu-N}},$$

est une solution de l'équation aux différences μ fractionnaire suivante $\Delta_{a+\mu-N}^{\underline{\mu}} y(t) = 0$, définie sur $\mathbb{N}_{a+\mu-N}$. Pour la démonstration de ce théorème, consulter [4].

Théorème 2.3.4.

Soit $N \geq 1$ un entier et $N-1 < \mu < N$. Si $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, alors la solution du problème aux valeurs initiales fractionnaire suivante

$$\Delta_{v-N}^v y(t) = f(t), \quad (2.51)$$

$$y(v-N+i) = 0, 0 \leq i \leq N-1, \quad (2.52)$$

est donnée par

$$y(t) = \Delta_0^{-v} f(t) = \sum_{s=0}^{t-v} h_{v-1}(t, \sigma(t)) f(s), t \in v-N.$$

Démonstration.

Soit

$$y(t) = \Delta_0^{-v} f(t) = \sum_{s=0}^{t-v} h_{v-1}(t, \sigma(t)) f(s),$$

alors nous avons par convention

$$y(v-N+i) = \sum_{s=0}^{-N+i} h_{v-1}(v-N+i, \sigma(t)) f(s) = 0,$$

pour $0 \leq i \leq N-1$, et par conséquent les conditions initiales (2.52) sont vérifiées.

Egalement, nous avons pour $t \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{aligned} \Delta_{v-N}^v y(t) &= \Delta^N \Delta_{v-N}^{-(N-v)} y(t), \\ &= \Delta^N \sum_{s=v-N}^{t-(N-v)} h_{N-v-1}(t, \sigma(s)) y(s), \\ &= \Delta^N \sum_{s=v}^{t-(N-v)} h_{N-v-1}(t, \sigma(s)) y(s), \end{aligned}$$

Où dans la dernière étape, nous avons utilisé la condition initiale (2.52). Donc :

$$\begin{aligned}
 \Delta_{v-N}^v y(t) &= \Delta^N \Delta_v^{-(N-v)} y(t), \\
 &= \Delta^N \Delta_{0+v}^{-(N-v)} \Delta_0^{-v} f(t), \\
 &= \Delta^N \Delta_0^{-N} f(t), \\
 &= f(t).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, y est la solution de l'équation aux différences d'ordre fractionnaire (2.51). □

Exemple 2.3.1.

Réolvons le problème à valeur initiale fractionnaire

$$\Delta_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y(t) = 5, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

$$y\left(\frac{-1}{2}\right) = 3\sqrt{\pi}.$$

La solution de ce problème à valeur initiale fractionnaire est définie sur $\mathbb{N}_{\frac{-1}{2}}$. L'équation aux différences d'ordre fractionnaire correspondante

$$\Delta_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

a une forme générale

$$\Delta_{a+v-N}^v y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}_a.$$

D'après le théorème (2.3.3), nous avons

$$a = 0, v = \frac{1}{2}, N = 1, a + v - N = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $t^{-\frac{1}{2}}$ est la solution de l'équation homogène fractionnaire $\Delta_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y(t) = 0$. En utilisant le théorème (2.3.4), la solution de l'équation aux différences d'ordre fractionnaire $\Delta_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y(t) = 5$ est donnée par

$$\begin{aligned}
 y(t) &= ct^{-\frac{1}{2}} + \Delta_0^{\frac{-1}{2}} 5, \\
 &= ct^{-\frac{1}{2}} + 5\Delta_0^{\frac{-1}{2}} 1,
 \end{aligned}$$

Sachant que

$$\Delta_0^{-\frac{1}{2}} 1 = \Delta_0^{-\frac{1}{2}} t^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}},$$

déterminons $\Gamma(\frac{3}{2})$:

Nous avons

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}), \text{ (D'aprsl la formule } \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)\text{),}$$

sachant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ alors $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Donc

$$\Delta_0^{-\frac{1}{2}} 1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}.$$

Il s'ensuit que :

$$y(t) = ct^{-\frac{1}{2}} + \frac{10}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant la condition initiale $y(-\frac{1}{2}) = 3\sqrt{\pi}$, nous obtenons $c = 3$, par conséquent, la solution générale de ce problème à valeur initiale fractionnaire est donnée par

$$y(t) = 3t^{-\frac{1}{2}} + \frac{10}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}, t \in \mathbb{N}_{-\frac{1}{2}}.$$

Théorème 2.3.5.

Soit $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'ordre exponentiel $r \geq 1$ et $v > 0$ avec $N - 1 < v \leq N$.

Considérons l'équation aux différences fractionnaires

$$\Delta_{a+v-N}^v y(t) = f(t), t \in \mathbb{N}_a, \quad (2.53)$$

alors la solution générale de l'équation non homogène fractionnaire (2.53) est donnée par

$$y(t) = \sum_{k=1}^N c_k (t-a)^{v-k} + \Delta_a^{-v} f(t), t \in \mathbb{N}_{a+v-N}.$$

Exemple 2.3.2.

Réolvons le problème à valeur initiale

$$\begin{aligned}\Delta_{a-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}y(t) &= h_{\frac{1}{2}}(t, a), t \in \mathbb{N}_a, \\ y(a - \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

D'après le théorème (2.3.5), nous avons

$$v = \frac{1}{2}, a + v - N = a - \frac{1}{2}, N = 1.$$

La solution générale de l'équation aux différences d'ordre fractionnaire $\Delta_{a-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}y(t) = h_{\frac{1}{2}}(t, a)$ est donnée

$$\begin{aligned}y(t) &= c_1(t-a)^{v-1} + \Delta_a^{-v}f(t), \\ &= c_1(t-a)^{-\frac{1}{2}} + \Delta_a^{-\frac{1}{2}}h_{\frac{1}{2}}(t, a).\end{aligned}$$

Calculons $\Delta_a^{-\frac{1}{2}}h_{\frac{1}{2}}(t, a)$

$$\Delta_a^{-\frac{1}{2}}h_{\frac{1}{2}}(t-a) = \Delta_a^{-\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Delta_a^{-\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{1}{2}},$$

avec

$$\Delta_a^{-\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}(t-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(t-a).$$

Donc

$$\Delta_a^{-\frac{1}{2}}h_{\frac{1}{2}}(t, a) = (t-a),$$

alors $y(t) = c_1(t-a)^{-\frac{1}{2}} + (t-a)$.

D'après la condition initiale, nous obtenons $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, par conséquent la solution du problème à valeur initial est : $y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(t-a)^{-\frac{1}{2}} + (t-a), t \in \mathbb{N}_{a-\frac{1}{2}}$.

Théorème 2.3.6.

Supposons que $f : \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$ est d'ordre exponentiel $r \geq 1$ et soit $v > 0$ avec $N-1 < v \leq N$. Considérons l'équation aux différences d'ordre v -fractionnaire suivante

$$\Delta_{a+v-N}^v y(t) = f(t), \tag{2.54}$$

alors le problème aux valeurs initiales fractionnaire ci-dessus

$$\begin{cases} \Delta_{a+v-N}^v y(t) = f(t), \\ \Delta^i y(a+v-N) = A_i, i \in \{0, 1, \dots, N-1\}, A_i \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.55)$$

admet une unique solution donnée par

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (t-a)^{i+v-N} + \Delta_a^{-v} f(t), t \in \mathbb{N}_{a+v-N}, \quad (2.56)$$

Où $\alpha_i, i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ sont des constantes réelles telle que

$$\alpha_i = \sum_{p=0}^i \sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} (i-k)^{N-v} \binom{i}{p} \binom{i-p}{k} A_p.$$

Pour la démonstration de ce théorème, consulter [10].

Exemple 2.3.3.

Considérons le problème aux valeurs initiales d'ordre 2.7 suivant

$$\begin{cases} \Delta_{-0.3}^{2.7} y(t) = t^2, t \in \mathbb{N}_0 \\ y(-0.3) = 2, \Delta y(-0.3) = 3, \Delta^2 y(-0.3) = 5. \end{cases} \quad (2.57)$$

Notons que le problème (2.57) est un cas spécial du problème (2.55), avec

$$\begin{aligned} a &= 0, v = 2.7, N = 3, f(t) = t^2, \\ A_0 &= 2, A_1 = 3, A_2 = 5. \end{aligned}$$

Donc, la solution du problème (2.57) est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (t-a)^{i+v-N} + \Delta_a^{-v} f(t), t \in \mathbb{N}_{a+v-N}, \\ &= \sum_{i=0}^2 t^{i-0.3} + \Delta_0^{-2.7} t^2, t \in \mathbb{N}_{-0.3}. \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0^{0.3}A_0, \\ \alpha_1 &= 1^{0.3}A_1 - (0^{0.3} - 1^{0.3})A_0, \\ \alpha_2 &= \frac{2^{0.3}}{2}A_2 - (1^{0.3} - 2^{0.3})A_1 + \frac{0^{0.3} - 2 \cdot 1^{0.3} + 2^{0.3}}{2}A_0,\end{aligned}$$

avec : $0^{0.3} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0.7)} = 0.770$, $1^{0.3} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.7)} = 1.100$, $2^{0.3} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.7)} = 1.295$, donc

$$\alpha_0 \approx 1.541, \alpha_1 \approx 3.962, \alpha_2 \approx 3.684.$$

En utilisant la relation (1.32) pour calculer $\Delta_0^{-2.7}t^2$, nous obtenons

$$\Delta_0^{-2.7}t^2 = \Delta_2^{-2.7}t^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5.7)}t^{4.7} \approx 0.0276t^{4.7}.$$

Alors, l'unique solution du problème (2.57) est approximée à

$$y(t) \approx 1.541t^{-0.3} + 3.962t^{0.7} + 3.684t^{1.7} + 0.0276t^{4.7}, t \in \mathbb{N}_{-0.3}.$$

Remarque 2.3.1.

Le théorème (2.3.6) est aussi démontré en utilisant la méthode de transformée de Laplace (pour plus de détail, voir [6]), tout en appliquant des règles de puissance et de composition fractionnaire.

2.3.2 Résolution des équations aux différences fractionnaires non linéaire de Caputo

Considérons le problème à valeur initiale suivante [12] :

$$\begin{cases} \Delta_*^\alpha x(t) = f(t + \alpha - 1, x(t + \alpha - 1)), t \in \mathbb{N}_{1-\alpha}, 0 < \alpha \leq 1, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.58)$$

Où $\Delta_*^\alpha = \Delta_p^\alpha$ ($\alpha = v$) est un opérateur de différences fractionnaires de Caputo donné par la relation (1.30), $f : [0, \infty) \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est une fonction continue avec $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach réel muni de la norme $\| x \| = \{\sup \| x(t) \|, t \in \mathbb{N}\}$.

Théorème 2.3.7.

[13] Soit f est une fonction définie sur $\mathbb{N}_a, a \in \mathbb{N}$.

Pour $\mu > 0, \mu$ non entier, $m = [\mu], [\mu]$ désigne la partie entière de μ , alors la formule de différences de Taylor fractionnaire est donnée par :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} \Delta f(a) + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{s=a+m-\nu}^{t-\mu} (t-s-1)^{\mu-1} \Delta_*^\mu f(s), t \in \mathbb{N}_{a+m}, \quad (2.59)$$

en particulier , lorsque $0 < \mu < 1$ et $a = 0$, nous avons [13]

$$f(t) = f(0) + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{s=1-\mu}^{t-\mu} (t-s-1)^{\mu-1} \Delta_*^\mu f(s). \quad (2.60)$$

Où Δ_*^μ est l'opérateur de différences fractionnaire de Caputo d'ordre μ .

Pour la démonstration de ce théorème , consulter [14].

Lemme 2.3.1.

[12] $x(t) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{X}$ est une solution du problème à valeur initiale (2.58) si et seulement si $x(t)$ est une solution de la formule de Taylor fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{\alpha-1} f(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)), 0 < \alpha \leq 1, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.61)$$

Démonstration.

Supposons que $x(t), t \in \mathbb{N}$ est une solution du problème à valeur initiale (2.58), alors nous obtenons (2.61) selon le théorème (2.3.7) . Inversement, nous supposons que $x(t)$ est la solution de (2.61), alors

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{\alpha-1} f(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)), \quad (2.62)$$

d'autre part, le théorème (2.3.7) résulte que

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{\alpha-1} \Delta_*^\alpha x(s), \quad (2.63)$$

en comparant les deux équations (2.62), (2.63), nous obtenons

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{\alpha-1} [\Delta_*^\alpha x(s) - f(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1))] = 0, \quad (2.64)$$

$t = 1, 2, \dots$, respectivement, nous avons $\Delta_*^\alpha x(s) = f(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1))$, $t \in \mathbb{N}_{1-\alpha}$, ce qui implique $x(t)$ est une solution de (2.58). \square

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par introduire les différents types d'équations aux différences d'ordre entier, le théorème d'existence et unicité de la solution, ensuite leurs méthodes de résolution.

Finalement, nous avons présenté des méthodes de résolution de quelques problèmes aux valeurs initiales d'ordre fractionnaire qui seront utiles pour la suite de notre travail.

CHAPITRE 3

LE CHAOS DANS L'APPLICATION FRACTIONNAIRE DE LOZI

Le chaos est un véritable théorie scientifique. Elle repose sur la représentation des solutions des équations différentielles dans l'espace des phases associé : représenter les solutions sous forme de trajectoire dans l'espace plutôt, dans ce chapitre on étudions un type de chaos qui est représenté dans le chaos dans l'application fractionnaire de Loi.

3.1 L'application chaotique de Lozi d'ordre fractionnaire

L'application chaotique de Lozi a été introduite par René Lozi en [14] et est donnée par

$$\begin{cases} x(n+1) = -\alpha|x(n)|+y(n) + 1, \\ y(n+1) = \beta x(n), \end{cases} \quad (3.1)$$

où (x,y) est l'espace d'état de l'application, et α et β sont des paramètre. C'est l'application itérative inversible de dimension 2 qui donne un attracteur chaotique appelé l'attracteur de Lozi obtenu pour $\alpha = 1.4$ et $\beta = 0.3$ (par exemple), comme montre la figure 3.1. la

différence de premier ordre de (3.1) peut être facilement formulée comme :

$$\begin{cases} \Delta x(n) = -\alpha|x(n)|+y(n) + 1 - x(n), \\ \Delta y(n) = \beta x(n) - y(n), \end{cases} \quad (3.2)$$

En utilisant la différence delta de type caputo défini en (1.30) avec a comme point de départ, l'application de Lozi d'ordre fractionnaire peut être donnée par :

$$\begin{cases} {}^c\Delta_a^\nu x(n) = -\alpha|x(t-1+\nu)|+y(t-1+\nu) + 1 - x(t-1+\nu), \\ {}^c\Delta_a^\nu y(n) = \beta x(t-1+\nu) - y(t-1+\nu). \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour $0 < \nu \leq 1$ et $\mathbb{N}_{a+1-\nu}$ notez que les ordre fractionnaires des deux différences fractionnaires en (3.3) sont identiques conduisant à ce que l'on appelle communément un système proportionné.

En utilisant (2.58), (2.61) nous pouvons obtenir

$$\begin{cases} x(t) = x(a) + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a+1}^{t-\nu} (t-s-1)^{\nu-1} (-\alpha|x(t-1+\nu)|+y(t-1+\nu) + 1 - x(t-1+\nu)), \\ y(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a+1}^{t-\nu} (t-s-1)^{\nu-1} (\beta x(t-1+\nu) - y(t-1+\nu)). \end{cases} \quad (3.4)$$

où $\frac{(t-s-1)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}$ est la fonction discrète de noyau $\frac{(t-s-1)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} = \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(\nu)\Gamma(t-s-\nu+1)}$ et $a = 0$ donne la formule numérique :

$$\begin{cases} x(n) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+\nu)}{\Gamma(n-j+\nu)} (-\alpha|x(j-1)|+y(j-1) + 1 - x(j-1)), \\ y(n) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+\nu)}{\Gamma(n-j+\nu)} (\beta x(j-1) - y(j-1)). \end{cases} \quad (3.5)$$

Nous notons que le calcul fractionnaire apporte l'ajout majeur d'une mémoire infinie. Ceci peut être clairement observé en (3.5) où la solution $x(n)$ dépend de toutes les valeurs précédentes $x(0), \dots, x(n)$.

Ce n'est bien entendu pas le cas avec le système d'ordre entier (3.1), pour $\nu = 1$, nous pouvons dériver l'attracteur étrange de l'application de Lozi en traçant la solution $(x(n), y(n))$ dans le plan $x - y$ comme le montre la figure 3.1 (b) .

Les conditions initiales et les paramètres de bifurcation ont été choisis comme

$x(0) = y(0) = 0$ et $(\alpha, \beta) = (1.7, 0.5)$ respectivement.

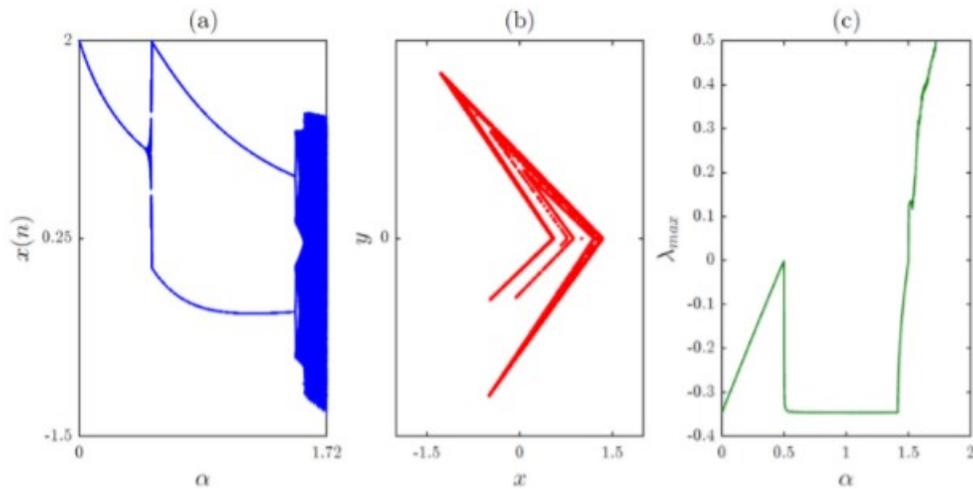


FIGURE 3.1 – (a) Diagramme de bifurcation de l'application de Lozi standard avec $x(0)=y(0)=0$ et $(\alpha, \beta) = (1.7, 0.5)$, (b) les attracteur dans le plan $x - y$, et (c) le plus grand exposant de Lyapunov calculé au moyen de la méthode jacobienne

La figure 3.1 (a) montre le diagramme de bifurcation avec α comme paramètre de bifurcation et la figure 3.1 (b) montre le plus grand exposant de Lyapunov en fonction de α calculé au moyen de la méthode jacobienne. Ces figures confirment l'existence du chaos. Dans ce qui suit, nous choisissons nous fixons $x(0) = y(0) = 0$ et $(\alpha, \beta) = (1.7, 0.5)$ et de faire varier l'ordre fractionnaire ν dans l'intervalle $(0, 1)$.

Nous avons exécuté l'application fractionnaire de Lozi pour 6000 points et nous avons tracé la solution $(x(n), y(n))$ dans le plan $x - y$ pour l'ordre fractionnaire $\nu \in \{0.98, 0.93, 0.9, 0.86\}$. Comme on peut l'observer sur la figure 3.2,

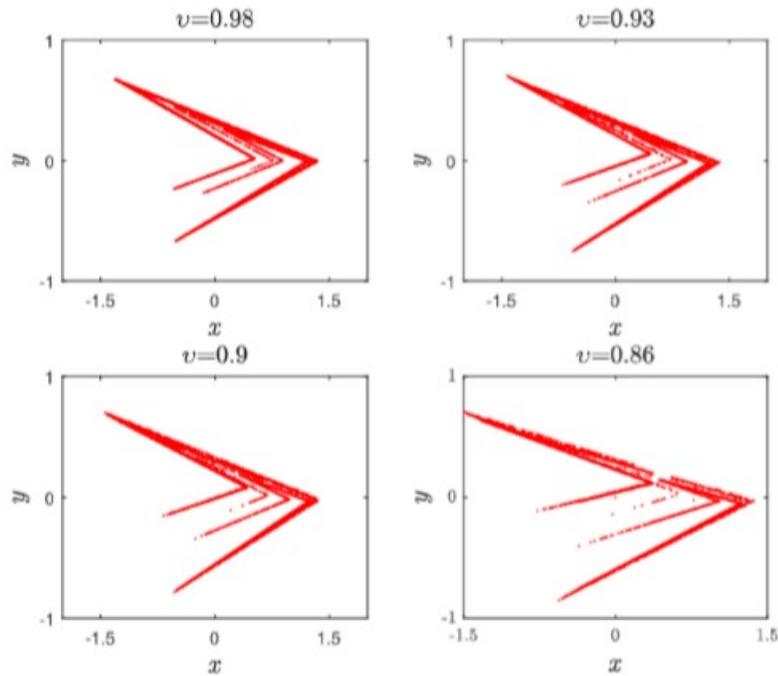


FIGURE 3.2 – Attracteur de l'application de Lozi fractionnaire dans le plan $x - y$ avec $x(0) = y(0) = 0$, $(\alpha, \beta) = (1.7, 0.5)$ et différents ordres fractionnaires

les attracteurs changent chaque fois que l'ordre fractionnaire v change. Dans tous les cas, l'espace des phase converge vers un attracteur qui reste borné. Lorsque v décroît, nous pouvons voir que la solution s'approche de certains ensemble de point de consigne jusqu'à un nombre minimum d'itérations n_0 et ensuite diverge généralement vers l'infini. Par exemple, lorsque $v = 0,654$, $n_0 = 1854$ (voir figure 3.3). À partir des solutions numériques illustrées aux figure 3.2 et 3.3 ,

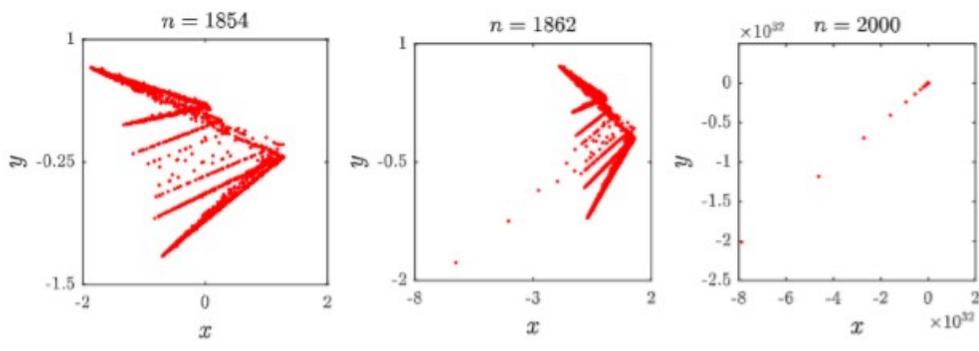


FIGURE 3.3 – Instantanés du plan $x - y$ appartenant à l'application fractionnaire de Lozi avec $v = 0.654$ pris en $n = 1845$, $n = 1862$ et $n = 2000$

il est clair que la solution numérique $(x(n), y(n))$ dépend de l'ordre fractionnaire v . Afin de mieux comprendre le comportement de l'application fractionnaire de Lozi (3.3), nous utilisons des diagrammes de bifurcation avec α comme paramètre critique. Nous faisons varier α sur l'intervalle $[0, 1.72]$ par pas de $\Delta\alpha = 0.001$ et choisissons les conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$ et $\beta = 0.5$. Les diagramme de bifurcation sont représentés sur la figure 3.4

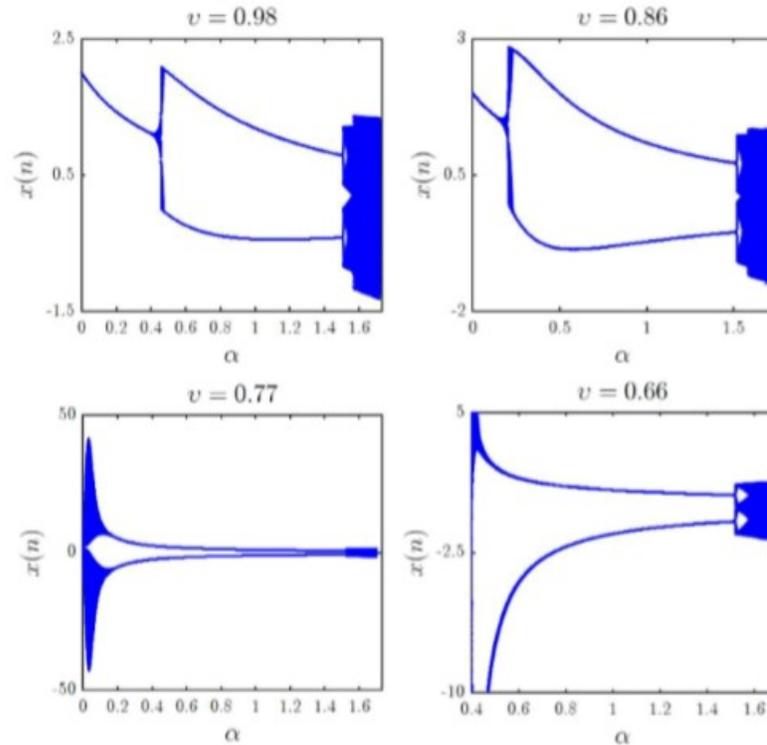


FIGURE 3.4 – Diagrammes de bifurcation de l'application de Lozi fractionnaire avec α comme paramètre critique et x pour différents ordres fractionnaires v

pour $v \in \{0.98, 0.86, 0.77, 0.66\}$. Lorsque $v = 1$, l'application de Lozi présente le comportement dynamique montré sur la figure 1 (a), qui, comme prévu, coïncide avec le résultat de bifurcation standard rapporté dans la littérature.

Dans l'intervalle $0 \leq \alpha \leq 0.5$, l'application converge vers un seul point fixe. Ensuite, comme $0.5 < \alpha \leq 1.503$, nous observons une solution périodique à deux points. Il est bien connu que la dynamique de l'application de Lozi passe directement d'une orbite périodique stable de la période 4 à un régime chaotique pleinement développé, ce qui est soutenu par la figure 3.1(a).

Comme le montre la figure 3.4, la valeur de l'ordre fractionnaire v affecte le diagramme de bifurcation à la fois en termes de sa forme générale et de la durée de l'intervalle chaotique. Pour $v = 0.98$, le diagramme de bifurcation est similaire au diagramme entier correspondant à l'exception d'un petit élargissement de l'intervalle où le chaos est observé. Lorsque v décroît, on constate que lorsque $0 \leq \alpha \leq 0.5$ l'orbite non plus va à un point fixe. En fait, à mesure que n augmente, nous observons que la trajectoire devient illimitée (voir figure 3.2 pour $v=0.77, 0,66$). Une différence majeure entre le diagramme de bifurcation des application entière et fractionnaire réside dans l'intervalle sue lequel le chaos est observer. L'intervalle devient légèrement plus petit à mesure que v diminue. La figure 3.5

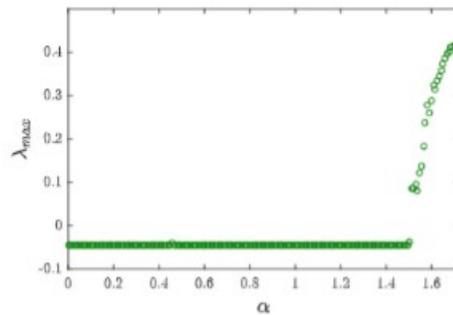


FIGURE 3.5 – Le plus grand Lyapunov de l'application fractionnaire de Lozi obtenue pour les mêmes paramètres. Conditions initiales et ordres fractionnaires de la figure 3.4

montre l'exposant de Lyapunov maximum de l'application fractionnaire de Lozi calculée au moyen de la méthode jacobienne fractionnaire rapportée dans [15]. Ce graphique est obtenu en utilisant les mêmes paramètre et conditions initiales précédents et avec $v = 0.98$. Le résultat concorde parfaitement avec le diagramme de bifurcation correspondant. Par souci d'exhaustivité, le figure 3.6

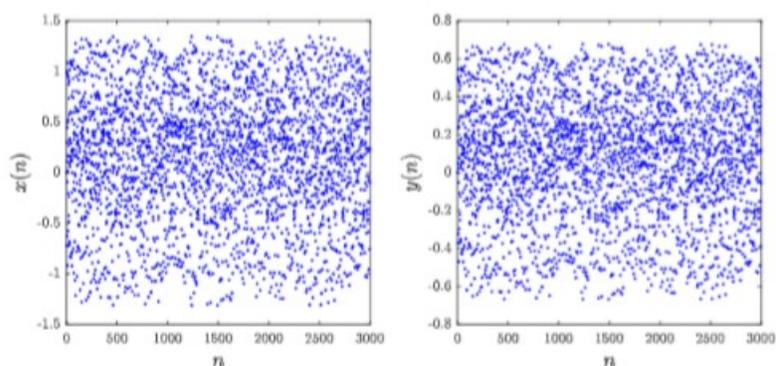


FIGURE 3.6 – Evolution temporelle discrète des états pour l'application de Lozi fractionnaire avec $x(0) = y(0) = 0$, $(\alpha, \beta) = (1.7, 0.5)$, $v=0.98$

montre les états de l'application fractionnaire de Lozi avec 300 itérations, $x(0) = y(0) = 0$, $(\alpha, \beta) = (1.7, 0.5)$ et $v = 0.98$, pour $v = 0.98$ et $v = 0.974$ dans le plan $x - y$. L'application converge clairement vers un attracteur borné. De la même manière que l'application fractionnaire de Lozi, lorsque l'ordre fractionnaire v est inférieur ou égal à 0.973, les trajectoire divergent à l'infini. Garder $\lambda = -1.7$, $v = 0.98$ et $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ et faire varier θ dans l'intervalle $[-0.1, 0.1]$ par pas de $\Delta\theta = -0.001$ donne la diagramme bifurcation représenté sur la figure 3.7 (a), qui montre que l'application d'écoulement fractionnaire est chaotique dans l'intervalle $[-0.1, 0.1]$. Cela concorde complétement avec le plus grand exposant de lyapunov en figure 3.7 (b).

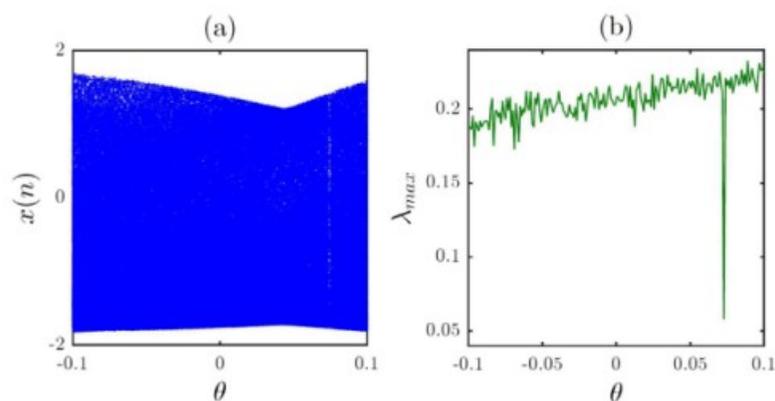


FIGURE 3.7 – (a) Diagramme de bifurcation de l'application d'écoulement fractionnaire avec $\lambda = -1.7$, $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ et ordres fractionnaires $v = 0.98$; (b) Le plus grand exposant Lyapunov correspondant.

La nature chaotique des états étant donné ces ordre fractionnaires est confirmée par les graphiques d'évolution temporelle de la figure 3.8 .

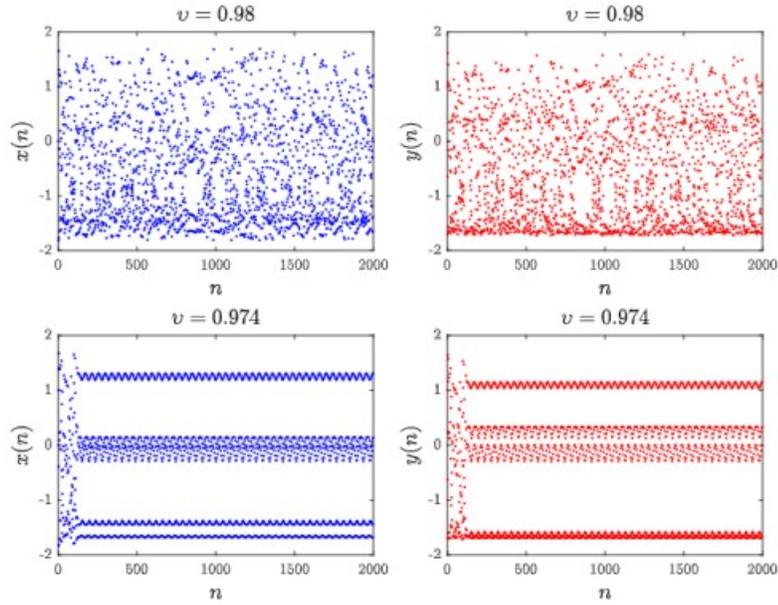


FIGURE 3.8 – Evolution temporelle de l'application d'écoulement fractionnaire avec $\theta = -0.1$, $\lambda = -1.7$, $(\alpha, \beta) = (1.7, 0.5)$. Et les ordres fractionnaires $v=0.98$ et $v=0.973$

Conclusion

Conclusion dans ce chapitre, nous avons présentés L'application chaotique de Lozi a été introduite par René Lozi en [14], après en utilisant la différence delta de type caputo pour écrire l'application de Lozi d'ordre fractionnaire, nous avons présentés aussi la caractérisé de le comportement chaotique, les exposants de Lozi, et les attracteurs étranges.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté une étude sur les équations aux différences fractionnaire de Riemann et de Caputo, pour atteindre l'objectif de cette étude, nous avons rappelé au début quelques notions et définitions des fonctions spécifiques ainsi que calcul de différence, somme et différence fractionnaire. Ensuite nous avons abordé la théorie des équations aux différences d'ordre entier et d'ordre fractionnaire où nous avons présenté des problèmes d'existence et unicité de solutions et des méthodes de résolution pour ces types d'équations avec des conditions initiales. Enfin nous avons présentés différent outil mathématique qui nous servent à caractériser le comportement chaotique, les exposants de Lozi, et les attracteurs étranges.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I.Podlubny.Fractional equations : an introduction to fractional derivatives,fractional differential equations,to methodes of their solution and some of their application. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, London, 1999.
- [2] A.A.Kilbas,H.M.Srivastava, and J.J.Trujillo. Theory and Application of Fractional Differential Equations, Volume 204(North-Holland Mathematics Studdies).Elsevier Science Inc.,New York,NY, USA, 2006.
- [3] J.Diblik, M, Feckan, and M. Pospisil. Nonexistence of periodic solutions and sasymptotically periodic solutions in fractional difference equation. Appl. Math. Comput.,257(C) :230-240,2015.
- [4] C.Goodrich and A.C.Peterson. Discrete Fractional Calculs . Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [5] M.Atici.Farhan and W. Eloe. paul A transform method in discrete fractional calculs. International Journal Différence Equation, 2(2) : 165-176-2007.
- [6] Y. Liu. Discrete chaos in Fractional HénonMap . International Journal of Nonlinear Science ,18(3) : 170-175, 2014.
- [7] M.T.Holm. The laplace transform in discrete fractional calculs. Computers and Mathematics With Application, 62(3) :1591-1601, 2011.
- [8] S.Elaydi. An Introduction to Différence Equations. Undergraduate Texts in Mathematics. Springes, Third Edition, New York, 2005.

- [9] V. Lakshmikantham and D. Trigiante. Theory of difference Equations : Numerical Methods and Applications. Pure and Applied Mathematics. CRC Press, Second Edition, New York, June 12, 2002.
- [10] M. T. Holm. The Theory of Discrete Fractional Calculus : Development and Application. PhD thesis, University of Nebraska-Lincoln, 2011.
- [11] S. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, 3rd es, Springer, New York , 1999.
- [12] F. Chen, X. Luo, and Y. Zhou. Existence results for nonlinear fractional difference equation. Advances in Difference Equations, 2011(1) :713201, 2010.
- [13] A. George and Anastassion. Discrete Fractional Calculus with Inequalities, pages 575-585. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [14] Lozi R. Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon. J physique 1978 ;39 ;9-10.
- [15] Wu JC, Baleanu D. Jacobian matrix algorithm for Lyapunov exponents of the discrete fractional maps. Commun Nonlinear Sci Numer Simulta 2015 ;22 ;95 ;-100.