الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre universitaire Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

Filière: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquées

Thème:
Singularité des Solutions d'un problème de Dirichlet pour le bilaplacien dans un polygone du plan

Préparé par :

- **Allouache Amira**
- **Sidhoum Rania**

Devant le jury :

- **Fadel Wahida (MAA)**	**C.U.Abdelhafid Boussouf**	**Président**
- **Benhabiles Hanane(MAA)**	**C.U.Abdelhafid Boussouf**	**Rapporteur**
- **Benaouicha Loubna (MAA)**	**C.U.Abdelhafid Boussouf**	**Examinateur**

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciement

Premièrement et avant tout nous remercions le Dieu le plus gracieux et le plus misécordieux, le plus clément qui nous a donner la force, la patience et le courage pour accomplir ce travail, et qui nous a procurés cette réussite, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Nous adressons également notre remerciements particuliers à notre encadreur Mme BENHABILES HANANE, pour ses précieux conseils, ses encouragements, et sa gentillesse avec nous, vraiment un grand merci pour sa longue patience pendant sa supervision sur ce travail.

Nous tenons à remercier vivement Mme FADEL WAHIDA, enseignante aux centre universitaire Abdelhafid BOUSSOUF,MILA, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'être président du jury, nous lui exprimons notre profond respect et notre sincère reconnaissance.

Notre gratitude et reconnaissance à Mme BENAOUICHA LOUBNA, enseignante aux centre universitaire Abdelhafid BOUSSOUF,MILA, nous vous sommes trés reconnaissant de la spontanéité et de l'amabilité avec lesquelles vous avez accepté de juger notre travail.

Et affin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui nous a aidé à la réalisation de ce modeste travail.

Merci

DÉDICACE

J'ai l'honneur de dédier ce modeste travail :

À celle qui m'a éclairé ma vie, au symbole de la tendresse

À vous ma chère maman

À ce qui m'a soutenu durant tout mon cycle d'étude, au la fleur de ma vie

À vous mon cher père

je vous remercie mes parents pour tout le soutient et l'amour qui vous me porter depuit mon enfance.

À mon conseiller et amis fidèle, qui m'a assisté dans les moments difficiles

À mon cher Khaled

merci pour tout, vous êtes le seul qui m'a pris doucement par la main pour traverser ensembles toutes les difficultés qui m'ont fait face

À mes chers et adorables frères

Islam et Bassem

À ma petite et seule sœur, la prunelle de mes yeux

À toi ma belle Khouloud

À mes amis toujours : Rania (ma collègue de travail), Roufia, Soumia, Selma, Rim et Hadjira (les sources de ma force)

À toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce travail et à tous ceux que j'ai oublié de citer

À tous ceux qui m'aiment et que j'aime

AMIRA

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail à l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutient moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour mes moir réussir, que dieu te garde pour nous, MON CHÈR PAPA

À la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flame de mon coeur, ma vie et mon bonheur. MAMAN que j'adore

À mes chères soeurs qui mon toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes cotés et qui mont accompagnaient durant mon chemin d'études, et sans oublier mes plus belles nièces LOUDJAYNE et DJINANE

À qui m'a donné son intérêt et sa confiance, qui m'a encouragé et m'a rempli mon chemin d'espoir, à qui a mis une empreinte de dignité qui m'a conduis au succés, à mon fiancé FARES

À mes aimables amies, Amira(ma collègue), Roufia, Imane, Manel, Selma

RANIA

TABLE DES MATIÈRES

Notations géométriques

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: un ouvert borné.

$\partial\Omega = \Gamma$: frontièrede Ω ; ds mesure de longueur sur Γ.

Γ_i : une partie(segment)de Γ ; $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Gamma}_i$.

ω_j : l'ouvert de l'angle que font Γ_j et Γ_{j+1} vers l'intérieur de Ω.

S_i : les sommets de Γ.

f : la densité des forces volumiques données.

η : le vecteur unitaire normal sortant.

L : opérateur différentiel.

$\frac{\partial u}{\partial \eta}$: dérivée normale.

v : le coefficient de poisson des plaques.

∇ : le gradient.

div : divergence.

Δ : le laplacien.

Δ^2 : le bilaplacien.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

Espaces fonctionnels

$D(\Omega)$: l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.

$D'(\Omega)$: l'espace des distributions sur Ω.

C^k : l'espace des fonctions k fois continument différentiables.

$L^p(\Omega)$: l'espace des fonctios de puissances p-ième intégrable sur Ω pour la mesure de lebesgue.

$L^\infty(\Omega)$: l'espace des fonctions (classes) essentiellement bornées.

$W_p^s(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre s ($W_2^s(\Omega) = H^s(\Omega)$).

$H^s(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre s, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

$H_0^s(\Omega)$: l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.

$H_0^s(\overline{\Omega})$: l'espace des restrictions à Ω des éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

$\widetilde{H}^s(\Omega)$: un sous-espace de $H^s(\Omega)$ formé des u fonctions dont le prolongement $\widetilde{u}$ par zéro hors de Ω appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$.

$H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$: l'espace des fonctions $u \in L^2(\Gamma)$ tel que :

$$\iint_{\Gamma\Gamma} |u(x) - u(y)|^2 \frac{dS(x)dS(y)}{||x-y||^2} < \infty.$$

INTRODUCTION

DAns ce travail nous allons étudier l'existance, l'unicité et la régularité de la solution d'un problème aux limites non linéaires, gouvernés par l'opérateur bilaplacien. Plus précisément, dans un ouvert plan Ω borné et à frontière polygonale Γ.

ce problème est donné par :

$$(P) : \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = M(u) = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

c'est un problème d'une plaque simplement supportée telque :

$$M(u) = v\Delta u + (1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

on désignera par v le coéficient de poisson du matériau homogène de la plaque et $M(u)$ est le moment de flexion. La condition $u \in H^2(\Omega)$ permet de donner à notre problème un sens variationnel et dans ces équations on désigné par u le déplacement perpendiculairement à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petit déplacement) et enfin on désigne par f la densité des forces volumique.

L'objet de ce mémoire est l'étude du comportement singulier des solutions du problème (P) au voisinage des sommets de Ω lorsque le second membre f est donné dans $L^2(\Omega)$.

Ce mémoire se subdivise en trois chapitres, il est structurée de la manière suivante :

- **Le premier chapitre**, est consacré essentiellement aux rappels des principales notations, quelques outils et définitions de l'analyse fonctionnelle et notamment sur l'essentiel des espaces de Sobolev classiques pour mieux comprendre le contenu de ce travail.

  Et a la fin de ce chapitre, on rappelle quelques résultats théoriques généraux que nous utiliserons.

- **Le second chapitre**, est consacré à l'étude du problème (P) dans un ouvert fixé Ω, où nous donnons une formulation variationnelle et nous montrons l'exsistance et l'unisité de la solution du problème variationnel dans l'espace $H^2(\Omega)$.

- **Au troisième chapitre**, nous étudierons en détaille le comportement singulier de la solution du problème (P) gouverné par l'opérateur bilaplacien dans un corps de $\mathbb{R}^2$.

  On considère Ω un corps homogène, élastique et isotrope occupant un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, à frontière polygonale $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{J} \overline{\Gamma_j}$.

  Les Γ_j sont des segments de droites ouverts, et on note par Γ_{j-1} les côtés $]S_j, S_{j-1}[$ et probable que Ω contient des fissures **(comme Fig.1)**

  L'ouvert défini ainsi est un domaine polygonal, et tout les résultats sur ce type de domaine sont valables ici.

Pour calculer les solutions singulières, il est commode, en coordonnées polaires, de travailler à l'origine.

Donc, par translation suivie d'une rotation, on peut ramener S_j, Γ_j et Γ_{j-1} respectivement à O_x et O_{y_ω} ver l'intérieur de Ω **(voir Fig.2)**.

Dans toute la suite, il suffit de restreindre notre étude sur le problème que l'on considère, dans le secteur Ω_ω plan de sommet O, de rayon ρ, d'ouverture ω, et de frontière $\Gamma = \overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_\omega} \cup \overline{\Gamma_\rho}$ **(voir Fig.2)**. Sur l'arc Γ_ρ, délimitant le secteur Ω_ω, on n'aura pas besoin de conditions aux limites, étant donné qu'on s'intéresse à un voisinage v du sommet O où les solutions sont à support compact.

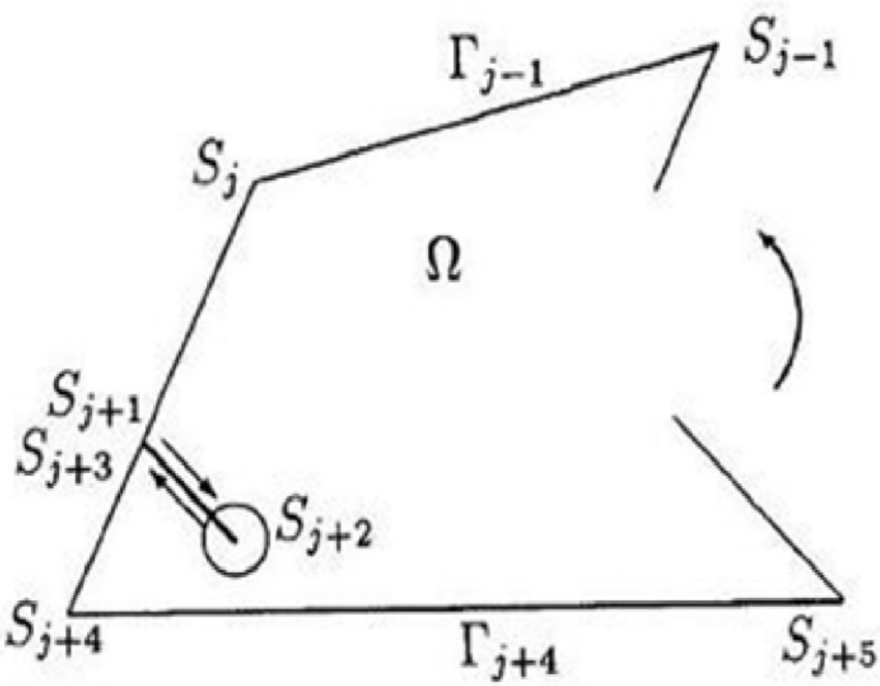

FIG.1

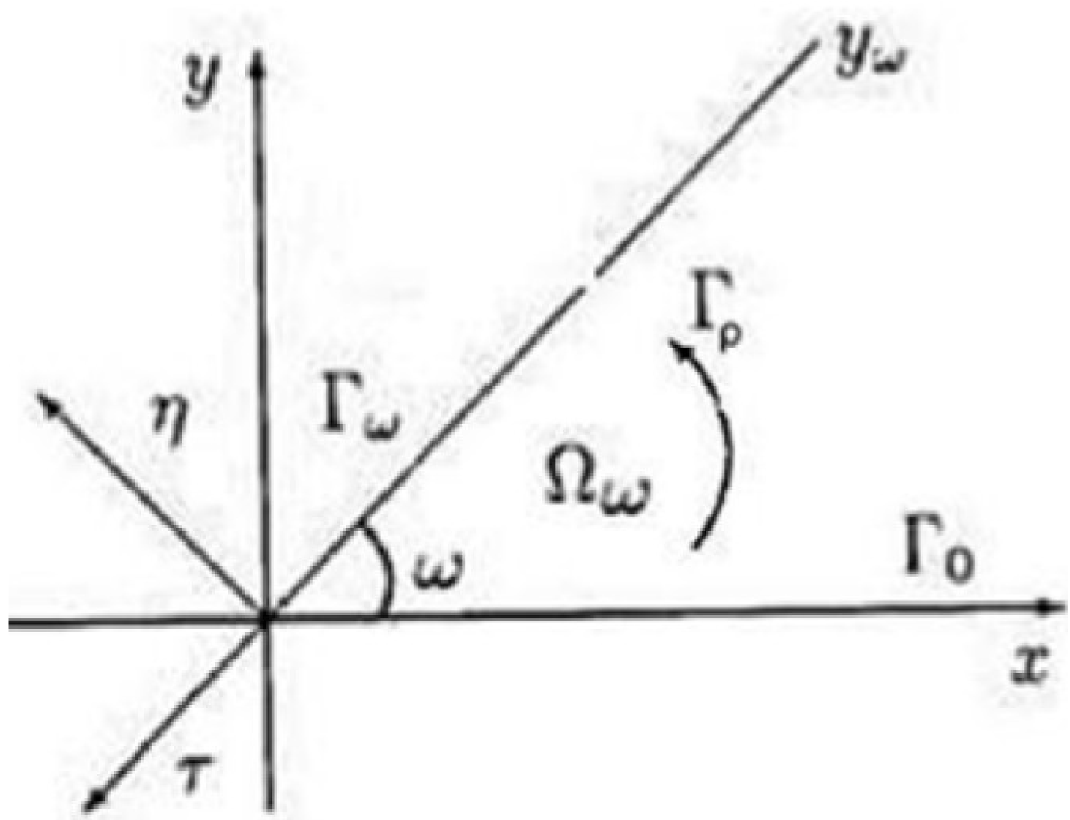
y
y_ω
Γ_ρ
η
Γ_ω
Ω_ω
ω
Γ_0
x
τ

FIG.2

La notation de "η" et "S" est la normale unitaire sortante et la tangente unitaire dans le sens positive, respectivement, sur la frontière Γ de Ω.

Pour l'etude du problème (P), ça veut dire , on étudie toutes les fonctions u qui sont appartenir à $H^2(\Omega)$ comme solutions de ce type de problème.

On démontre que le comportement singulier de solution du problème (P) est gouverné par l'équation transcendante suivante :

$$\sin^2(\alpha-1)\omega-\sin^2\omega=0.$$

Finalement, nous calculons la solution singulière de notre problème.

Ainsi, on démontre une condition nécessaire sur S de $\mathbb{R}$, à savoir $S-1<Re\alpha$, pour que u_α appartient à $H^s(\Omega)$, avec $u_\alpha(r,\theta)=r^\alpha\phi_\alpha(\theta)$. Donc , nous réalise ce qu'on appelle régularité maximale de u_α.

CHAPITRE 1

RAPPEL SUR LES ESPACES DE SOBOLEV

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des définitions et des notions qui seront utilisées dans les autres chapitres, c'est-à-dire de donner quelques résultats fondamentaux qui concernent les espaces de Sobolev qui nous permettent de mieu comprendre le contenu de ce travail.

1.1 Définitions de base

Les espaces de Sobolev peuvent être définis de différentes manières lorsque l'ouvert considéré est à frontière régulière. Les définitions correspondantes peuvent conduire à des espaces différents lorsque la frontière de Ω est peu régulière.

Pour cela, nous avons préciser les difinitions qu'on aura besoin d'utiliser dans notre travail.

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ.

Définition : 1.1.1 *On note $H^S(\Omega)$l'espace de toutes les distributions u définies dans Ω telles que :*

$$H^s(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n \ \ et \ \ |\alpha| \leq m\} \tag{1.1}$$

et :

1. $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, *pour* $|\alpha| \leq m$, *où* $s = m$ *étant entier positif.*

2. $u \in H^m(\Omega)$ *et* $\displaystyle\int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{\| x - y \|^{n+2\sigma}} \ dxdy < +\infty, |\alpha| = m.$

Dans le cas où $s = m + \sigma$ étant réel positif non entier, où $D^\alpha = D_2^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.

La norme usuelle de $H^s(\Omega)$ est définie par :

$$\| u \|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

dans le cas (1).

et par :

$$\| u \|_{s,r} = \left\{ \| u \|^2_{m,\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{\| x-y \|^{n+2\sigma}} \; dxdy \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3}$$

dans le cas (2).

Définition : 1.1.2 *On note* $H^s_0(\Omega)$ *la fermeture dans* $H^s(\Omega)$ *de l'espace* $D(\Omega)$.

Définition : 1.1.3 *On note* $H^{-s}(\Omega)$ *l'espace dual de* $H^s_0(\Omega)$.

Proposition 1.1.1 $H^s(\Omega)$ *est un espace de Hilbert muni de la norme* $\| \, . \, \|_{s,\Omega}$

Proposition 1.1.2 H^s_0 *est un sous-espace fermé de* $H^s(\Omega)$ *(*$H^s(\Omega)$ *est un espace complet).*

Définition : 1.1.4 *On note* $\widetilde{H}^s(\Omega)$ *le sous-espace de* $H^s(\Omega)$ *qui est formé des fonctions u dont le prolongement* $\widetilde{u}$ *par zéro hors de* Ω *et appartient à* $H^s(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Domaines polygonaux

On dira qu'un ouvert plan borné Ω est un domaine polygonal si sa frontière Γ est la réunion d'un nombre fini de segments de droite.

On suppose que Ω soit d'un seul côté de sa frontière, ceci permet des coupures comme sur la FIGURE 1.

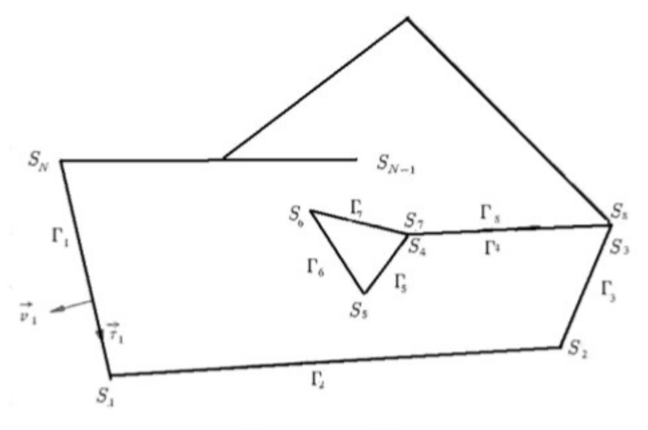

FIGURE 1

Dans le cas particulier oú il n'y a pas de coupure (tous les $w_j < 2\pi$), on dira que Ω est un domaine strictement polygonal.

1.3 Resultats de densités

Définition : 1.3.1 *On note par :*

$$C^k(\bar{\Omega}) = \{f|_{\bar{\Omega}} \text{ où } f \in C^k(\mathbb{R}^n), \text{pour tout } k \text{ un entier positif}\}. \tag{1.4}$$

le sous-ensemble des fonctions $f \in C^k(\bar{\Omega})$ telle que le support de f est borné.

Théorème 1.3.1 *Soit Ω un ouvert à frontière lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$, alors :*

a) $D(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^s(\Omega)$, pour tout $s \geq 0$.

b) $D(\Omega)$ est dense dans $\widetilde{H}^s(\Omega)$,pour tout $s \geq 0$.

Pour s suffisament petit, on a :

Théorème 1.3.2 *Soit Ω un ouvert à frontière lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$, alors $D(\Omega)$ est dense dans $H^s(\Omega)$ pour $s \in [0, \frac{1}{2}[$.*

Théorème 1.3.3 *Soit Ω un ouvert à frontière lipschitiènne (Ω est strictement polygonal), il a donc la propriété du prolongement,ie :*

$$H^s(\bar{\Omega}) = H^s(\Omega), \text{ pour tout } s > 0.$$

Théorème 1.3.4 *Soit $\varphi \in C_0^k(\bar{\Omega})$ tel que $k \geq s$, alors $\varphi u \in H^s(\Omega)$ pour tout $u \in H^s(\Omega)$ et il existe une constante $k(\varphi, s)$ telle que :*

$$\| \varphi u \|_{s,\Omega} \leq k \| u \|_{s,\Omega} .$$

Définition : 1.3.2 *On appelle l'espace de Sobolev d'ordre* 1 *sur Ω, l'espace :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \forall i = 1, \cdots, n \right\},$$

muni de la norme :

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} = \langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} = \| u \|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2}.$$

Définition : 1.3.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.On note $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ au sens de la norme $\|\,.\,\|_{H^1(\Omega)}$ et on a :*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u_{/\Gamma} = 0 \right\}.$$

(Γ : est la fraontière de Ω).

Proposition 1.3.1 *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$.Alors le sous-espace $H^m(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$ est dense dans $H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$ pour tout entier $m \geq 2$.*

Proposition 1.3.2 *Si ω est lipschitizien alors $C^\infty(\Omega)$ est dense dans $H^s(\Omega)$.*

Démonstration.
Soit $u \in H^s(\Omega)$ et $(v_n) \in D(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers $P(u)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Alors les restrictions à Ω de v_n convergent vers la restriction de $P(u)$ à Ω qui n'est autre que u.■

Remarque 1.3.1 *Si le domaine Ω est lipschitizien, la définition (1.1.4) est équivalente à :*

$$\widetilde{H}(\Omega) = \left\{ u \in H_0^s(\Omega) : \frac{D^\alpha u}{\rho^\sigma} \in L^2(\Omega), |\alpha| = m \right\}. \tag{1.5}$$

où $\rho(x)$ désigne la distance de x à la frontière Γ de Ω, et $s = m + \sigma$ pour un entier m et $\sigma \in [0,1[$.

On peut définir une norme de $\widetilde{H}^s(\Omega)$ comme suit :

$$\| u \|_{\sim,s,\Omega} = \left(\| u \|_{s,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x)|^2}{\rho(x)^{2\sigma}} dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.6}$$

Lemme 1.3.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitiziènne. Alors $D(\overline{\Omega})$ dense dans $E(\Delta, L^2(\Omega))$.*

1.4 Traces des éléments $H^s(\Omega)$

On définit par $v|_\Omega$ la restriction à Ω de toute distributions v définie dans $\mathbb{R}^n$.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est suffisament régulière, et Soit $v \in H^1(\Omega)$.

Il est claire qu'il n'est pas évident de définir la valeur d'une fonction $v \in H1(\Omega)$ au bord de $v|_\Gamma$ car pour $n \geq 2$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas en générale continues, pour surmonter cette difficulté,on va donner une caractérisation de l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ des restrictions à Γ des fonctions de $H^1(\Omega)$.

Notation : Soit ds la mesure de la longueur sur Γ.

Définition : 1.4.1 *On note $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace des fonctions $f \in L^2(\Gamma)$ telle que :*

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^2} \; ds(x)ds(y) < \infty. \tag{1.7}$$

cet espace est appelé l'espace des traces sur Γ des fonctions de $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.4.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière, alors $D(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'application :*

$$\gamma : u \longmapsto \gamma u = u|_\Gamma.$$

de $D(\bar{\Omega})$ dans $C^0(\Gamma)$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

- *L'application γ est appelé trace de u sur Γ.*

Théorème 1.4.2 *L'application de trace :*

$$u \longmapsto \left\{\gamma_j u\right\}_{j=1}^{N}.$$

a une extention continue unique comme un opérateur de $H^1(\Omega)$ sur $\prod_{j=1}^{n} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$.

Maintenant, nous considérons un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière polygonale Γ.
Nous aurons besoin d'espace H et $\widetilde{H}$ sur les côtés Γ_j sur lesquels ne sont pas définis toujours.

Dans ce cas, on considère Γ_j comme un segment de droite ouvert.

Pour une fonction régulière u définie sur $\bar{\Omega}$ nous dénotons par $\phi_j u$ sa restriction a Γ_j.

Théorème 1.4.3 *L'application "trace" $u \longmapsto u|_\Gamma$ qui est bien définie sur $C^\infty(\bar{\Omega})$ se prolonge par densité en un opérateur linéaire surjectif ϕ de $H^1(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ dont le noyau est l'espace $H_0^1(\Omega)$.*

Il est instructif de découper l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *en morceaux correspondant à chacun des cotés* Γ_j*. On pose cela :*

$$f_j = f|_{\Gamma_j}.$$

c'est la restriction de f *à* Γ_j*. Il découle de la définition (1.4.1) que* $f_j \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ *(*Γ_j *est un segment de droite donc est un ouvert de* $\mathbb{R}$*).*
Les fonctions f_j *ne sont pas toujours indépendantes entre elles.*

Proposition 1.4.1 *La fonction* f *appartienne à* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *si et seulement si :*

$$f_j \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \text{ pour tout } j$$

et on a en plus :

$$\int_0^{\varepsilon} |f_j(x_j(-\sigma)) - f_{j+1}(x_j(\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} < +\infty, 1 \leq j \leq N.$$

(pour ε *assez petit).*

où $x_j(\sigma)$ *(resp* $x_j(-\sigma)$*) désigne le point de* Γ_{j+1} *(resp* Γ_j*) à distance* σ *du sommet* S_j*. Ces points sont "symétrique" par rapport à* S_j *le long de* Γ*.*
La figure ci-dessous indique cette explication.

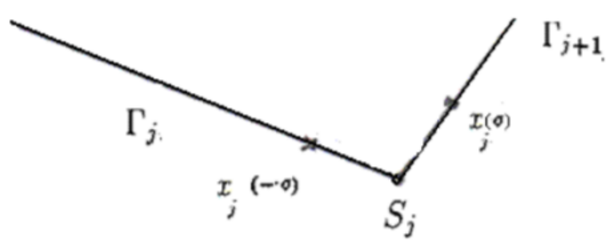

FIGURE 2

La condition donnée exprime que les fonctions f_j *et* f_{j+1} *coïncidents en* s_j *dans un sens* *faible. on la notera pour alléger :*

$$f_j \underset{S}{\sim} f_{j+1}. \tag{1.8}$$

Il sera également commode de définir l'opératreur linéaire continu surjectif γ_j *de* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ *par :*

$$\gamma_j u = (\gamma u) \mid_{\Gamma_j} . \tag{1.9}$$

Cette applicaion est définit la trace d'une fonction sur Γ_j*.*

Proposition 1.4.2 *Soit* Ω *est un polygone du plan. Alors l'application :*

$$u \mapsto \{\gamma_j u, \gamma_j \partial n_j u\}, \forall j \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

qui est définit pour $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ *se prolonge de façon continue en une application linéaire et surjective de* $H^2(\Omega)$ *sur* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$*.*

Corollaire 1.4.1 *Soit* $\gamma_{0j}u = g_i$ *et* $\gamma_{1j}u = h_j$*,alors l'application trace :*

$$u \mapsto \{g_j, h_j\}.$$

est un opérateur linéaire continu surjectif de $H^2(\Omega)$ *sur le sous espace de* $\prod_{j=1}^{N} H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ *défini par les conditions de raccord suivantes :*

$$g_j(s_j) = g_{j+1}(s_j), \textit{pour tout } j. \tag{1.11}$$

et :

$$g'_j \underset{S_j}{\sim} -\cos\omega_j g'_{j+1} + \sin\omega_j h_{j+1}. \tag{1.12}$$

$$h_j \underset{S_j}{\sim} -\sin\omega_j g'_{j+1} - \cos\omega_j h_{j+1}. \tag{1.13}$$

pour tout j.

Les signes $(')$ *désignent la différentiation tangentielle et* $\left(\underset{S_j}{\sim}\right)$ *désige l'équivalence en* (s_j)*.*

Remarque 1.4.1 *Ce resultat est en fait un cas particulier du théorème des traces des fonctions de $H^m(\Omega)$ pour m un entier.*

Théorème 1.4.4 *(Inégalité de Poincaré) : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.*
Alors il existe une constante $c(\Omega)$ qui ne depend que du diamètre de Ω telle que : $\forall v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|v\|_{L^2} \leq c(\Omega) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\| \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.14}$$

1.5 la formule de Green

Le nom de formule de Green est le nom donné à plusieurs formules dont l'iterêt est d'exprimer une intégrale sur une surface comme une intégrale curviligne sur le bord de cette surface.

Nous rappelons quelques formules de Green qui généralisent au cas multi-dimensionnel.

Théorème 1.5.1 *On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe C^1 par morceaux alors :*
Si $u, v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_\Omega uv\gamma_i d\Gamma. \tag{1.15}$$

Théorème 1.5.2 *Sous les mêmes hypothèses sur Ω , on a la demi-formule de Green :*

$$\int_\Omega u\Delta v dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega \gamma u \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial u} \right) d\sigma, \forall u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^2(\Omega). \tag{1.16}$$

Ainsi que la formule de Green est :

$$\int_\Omega u\Delta v dx - \int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega \gamma u \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) \sigma - \int_\Omega \gamma v \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma, \forall u, v \in H^2(\Omega) \tag{1.17}$$

telle que : $\frac{\partial u}{\partial n} := \sum_{i=1}^{N} \gamma_0 \left(\frac{\partial u}{x_i} \right) n_i$ *où :* $n = (n_1, \ldots, n_N)^T$.

Théorème 1.5.3 *L'application :*

$$u \mapsto \left\{ \gamma_j u, \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \nu_j} \right\}. \tag{1.18}$$

qui est définie sur $D(\overline{\Omega})$ se prolonge de façon unique et continue en un opérateur de $D(\Delta, L^2(\Omega))$ dans $\widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j)$.

Démonstration.
Considérons, pour j fixé, l'espace :

$$\upsilon_j = \{u \in H^2(\Omega) : \gamma_k u = 0, \gamma_k \partial_{n_k} u = 0, \forall k \neq j\}.$$

Étant donnés $(g_j, h_j) \in \widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$, posons $g_k = h_k = 0$.
Nous allons montrer que les fonctions $(g_k, h_k)_{k=\overline{1,N}}$ vérifiant les conditions de raccord $(1.11), (1.13)$.
En effet ,$g_j \in \widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$, signifie que $g_j \in H_0^1(\Gamma_j)$ et $\dfrac{g_j'}{\sqrt{\rho}} \in L^2(\Gamma_j)$ où ρ désigne la distance entre x et $\partial\Gamma_j$. Alors $g_j(M_j) = g_j(M_{j-1}) = 0$ et (1.11) suit.

D'autre part, montrer que (1.12)vérifiée

$$I_k = \int_0^{\varepsilon} |g_k'(x_k(-\sigma)) - (-\cos(\omega_k) g_{k+1}' + \sin(\omega_k) h_{k+1})(x_k(+\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

converge pour tout $k = \overline{1,N}$.Or pour $k \neq j$ et $K \neq j-1$ on a :

$$g_k = g_{k+1} = h_{k+1} = 0.$$

Et par conséquent , les intégrales convergent .Il nous reste à traiter les cas $k = j$ et $k = j-1$.
On a :

$$I_j = \int_0^{\varepsilon} |g_j'(x_j(-\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

$$j-1 = \int_0^{\varepsilon} |\cos(\omega_{j-1}) g_j'(x_{j-1}(+\sigma)) - \sin(\omega_{j-1}) h_j(x_{j-1}(+\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$\leq 2\int\limits_0^{\varepsilon}|g_j'(x_{j-1}(+\sigma))|^2\frac{d\sigma}{\sigma}+2\int\limits_0^{\varepsilon}|h_j(x_{j-1}(+\sigma))|^2\frac{d\sigma}{\sigma}$$

Remarquant que Γ_j peut être décomposé comme suite :

$$\Gamma_j=\Gamma_j^1\cup\Gamma_j^2.$$

où

$$\Gamma_j^1=\{x\in\Gamma_j,d(x,\partial\Gamma_j)=d(x,M_j)\}.$$

$$\Gamma_j^2=\{x\in\Gamma_j,d(x,\partial\Gamma_j)=d(x,M_{j-1})\}.$$

Comme $\dfrac{g_j'}{\sqrt{\rho}}\in L^2(\Gamma_j)$, alors :

$$\int_{\Gamma_j^i}\frac{|g_j'(x)|^2}{\rho(x)}dx<\int_{\Gamma_j}\frac{|g_j'(x)|^2}{\rho(x)}dx<+\infty, i=1,2.$$

Ou en utilisant les notation $x_j(+\sigma)$ et $x_j(-\sigma)$,on peut écrire :

$$\int_{\Gamma_j^1}\frac{|g_j'(x)|^2}{\rho(x)}dx=\int_0^{\frac{mes(\Gamma_j)}{2}}\frac{|g_j'(x_j(-\sigma))|^2}{\sigma}d\sigma.$$

et

$$\int_{\Gamma_j^2}\frac{|g_j'(x)|^2}{\rho(x)}dx=\int_0^{\frac{mes(\Gamma_j)}{2}}\frac{|g_j'(x_{j-1}(+\sigma))|^2}{\sigma}d\sigma.$$

On a aussi $h_j\in\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}$ et donc :

$$\int_{\Gamma_j}\frac{|h_j(x)|^2}{\rho(x)}dx<+\infty.$$

Le même raisonnement précédent implique alors la convergence des intégrales

$$\int_0^{\frac{mes(\Gamma_j)}{2}}\frac{|h_j(x_j(-\sigma))|^2}{\sigma}d\sigma.$$

et

$$\int_0^{\frac{mes(\Gamma_j)}{2}} \frac{|h_j(x_j(-\sigma))|^2}{\sigma} d\sigma.$$

par conséquent, il suffit de choisir $\varepsilon < \frac{mes(\Gamma_j)}{2}$ pour assurer la convergence de I_j et I_{j-1}.D'aprés le théorème de trace il existe un relèvement continu,$u \in \upsilon_j$ telle que :

$$\gamma_j u = g_j \ \text{ et } \ \gamma_j \delta_{n_j} u = h_j.$$

Soit maintenant $v \in D(\Delta, L^2(\Omega))$, posons :

$$l_v(g_j, h_j) = (u, \Delta v)_\Omega - (\Delta u, v)_\Omega$$

Ceci définit une forme linéaire et continue sur $\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$.
En effet ,
en appliquany l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité :

$$\sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

On obtient :

$$|l_v(g_j, h_j)| \leq \|u\|_{0,\Omega} \|\Delta v\|_{0,\Omega} + \|\Delta u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega}$$

$$\leq (\|u\|_{0,\Omega}^2 \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}} (\|v\|_{0,\Omega}^2 \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Alors :

$$|l_v(g_j, h_j)| \leq \sqrt{3} \|v\|_{D(\Delta, L^2(\Omega))} \|u\|_{2,\Omega}.$$

Par conséquent :

$$|l_v(g_j, h_j)| \leq C_v(\|g_j\|_{\frac{1}{2},\Gamma_j}^2 + \|h_j\|_{\frac{3}{2},\Gamma_j}^2)^{\frac{1}{2}}$$

D'aprés la continuitée du relèvement u,avec une constante générique C_v qui dépend de v.

Ainsi , $l_v(.,.) \in \widetilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j)$, le dual de $\widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$
d'autre part, pour une fonction $v \in H^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} l_v(g_j,h_j) &= \sum_k \left\{(\gamma_k u, \gamma_k \partial_{n_k} v)_{\Gamma_k} - (\gamma_k v, \gamma_k \partial_{n_k} u)_{\Gamma_k}\right\} \\ &= (\gamma_j u, \gamma_j \partial_{n_j} v)_{\Gamma_j} - (\gamma_j v, \gamma_j \partial_{n_j} u)_{\Gamma_j} \\ &= (\gamma_j \partial_{n_j} v, g_j)_{\Gamma_j} - (\gamma_j v, h_j)_{\Gamma_j} \end{aligned}$$

D'aprés la deuxième formule de Green , la densitè de $H^2(\Omega)$dans $D(\Delta, L^2(\Omega))$ permet de donner un sens à $(\gamma_j u, \gamma_j \partial_{n_j} v)$ dans $\widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j)$,par

$$(\gamma_j v, \gamma_j \partial_{n_j} v) : (h_j, g_j) \mapsto l(g_j,h_j) = \langle \gamma_j \partial_{n_j} v, g_j \rangle_{\frac{-3}{2},\sim} - \langle \gamma_j v, h_j \rangle_{\frac{-1}{2},\sim}$$

où $\langle .,. \rangle_{\frac{-3}{2},\sim} \Big(resp \;\; \langle .,. \rangle_{\frac{-1}{2},\sim} \Big)$ désigne le produit de dualité dans $\widetilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$ $\Big(resp \;\; \widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j) \Big)$ ■

Dans le cas d'un ouvert à frontière régulière, on peut donner un sens à la deuxième formule de Green pour $v \in D(\Delta, L^2(\Omega))$ et $u \in H^2(\Omega)$. Ici , la présence des coins oblige à restreindre l'espace où varie u afin de pouvoir utiliser le théorème précédent.

Ainsi on a la proposition suivante :

Proposition 1.5.1 *soit $v \in D(\Delta, L^2(\Omega))$. Alors :*

$$(u, \Delta v)_\Omega - (v, \Delta u)_\Omega = \sum_j \left\{ \langle \gamma_j \partial_{n_j} v, \gamma_j u \rangle_{\frac{-3}{2},\sim} - \langle \gamma_j v, \gamma_j \partial_{n_j} u \rangle_{\frac{-1}{2},\sim} \right\}. \tag{1.19}$$

$\forall u \in H^2(\Omega)$ telle que :

$$\gamma_j u \in \widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$$

et

$$\gamma_j \partial_{n_j} u \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$$

pour $1 \leq j \leq N$.

Démonstration.
pour u et $v \in H^2(\Omega)$, l'égalité (1.19) n'est en fait que la formule de Green, on veut étendre cette égalité pour $v \in D(\Delta, L^2(\Omega))$.Pour une telle fonction v, il existe une suite $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de

$H^2(\Omega)$ qui converge vers v dans $D(\Delta, L^2(\Omega))$. Pour v_m la formule de Green est valable quel que soit $v \in H^2(\Omega)$ tel que : $\gamma_j u \in \widetilde{H}^{\frac{3}{2}}, \gamma_j \partial_{n_j} \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}$,

$$(u, \Delta v_m)_\Omega - (v_m, \Delta u)_\Omega = \sum_j \left\{ \langle \gamma_j \partial_{n_j} v_m, \gamma_j u \rangle_{\frac{-3}{2},\sim} - \langle \gamma_j v_m, \gamma_j \partial_{n_j} u \rangle_{\frac{-1}{2},\sim} \right\}. \tag{1.20}$$

Remarquons d'abord que la forme linéaire :

$$v \to (u, \Delta v)_\Omega - (v, \Delta u)_\Omega.$$

est continue sur $D(\Delta, L^2(\Omega))$ puisque (d'aprés la preuve précédente) :

$$|(u, \Delta v)_\Omega - (v, \Delta u)_\Omega| \leq \sqrt{3} \|u\|_{2,\Omega} \|v\|_{D(\Delta, L^2(\Omega))}.$$

et par conséquent :

$$(u, \Delta v_m)_\Omega - (v_m, \Delta u)_\Omega \text{ converge vers } (u, \Delta v)_\Omega - (v, \Delta u)_\Omega. \tag{1.21}$$

D'autre part ,d'aprés le théorème (1.5.3) l'application :

$$v \to (\gamma_j v, \gamma_j \partial_{n_j} v).$$

est linéaire continue de $D(\Delta, L^2(\Omega))$ dans $\widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j)$.
il s'ensuit alors que :

$$\begin{cases} \gamma_j v_m \to \gamma_j v & \text{dans} \quad \widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j), \\ \\ \gamma_j \partial_{n_j} v_m \to \gamma_j \partial_{n_j} v & \text{dans} \quad \widetilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j). \end{cases}$$

On sait que la convergence forte implique la convergence faible,d'où :

$$\begin{cases} \langle \gamma_j v_m, \varphi \rangle \to \langle \gamma_j v, \varphi \rangle & ; \forall \varphi \in \widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j), \\ \\ \langle \gamma_j \partial_{n_j} v_m, \psi \rangle \to \langle \gamma_j \partial_{n_j} v, \psi \rangle & ; \forall \psi \in \widetilde{H}^{\frac{-3}{2}}(\Gamma_j). \end{cases} \tag{1.22}$$

En passant à la limite dans (1.20) et en utilisant (1.21) et (1.22) on obtient l'égalité cherchée.■

D'une façon similaire ,il est possible d'écrire la première formule de Green pour une fonction $v \in H^1(\Omega)$ dont le Laplacien appartient à $L^2(\Omega)$. Posons :

$$E(\Delta, L^2(\Omega)) = \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega)\}.$$

c'est un espace de Banach pour la norme :

$$v \mapsto (\|v\|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta v\|_{0,\Omega})^{\frac{1}{2}}.$$

De plus $D(\overline{\Omega})$est dense dans $E(\Delta, L^2(\Omega))$.

Proposition 1.5.2 *soit $v \in H^1(\Omega)$ et $\Delta v \in L^2(\Omega)$.Alors ,l'application :*

$$v \to \gamma_j \partial_{n_j} v.$$

qui est bien définie pour les fonctions dans $H^2(\Omega)$ permet un prolongement unique et continu en une application de l'espace $E(\Delta, L^2(\Omega))$ dans $\widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j)$.
De plus , on a :

$$(\Delta v, u)_\Omega = -(\nabla v, \nabla u) + \sum_{j=1}^{N} \langle \gamma_j \partial_{n_j} v, \gamma_j u \rangle_{\frac{-1}{2},\sim}. \tag{1.23}$$

$\forall u \in H^2(\Omega)$ telle que $\gamma_j u \in \widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}$ pour tout $1 \leq j \leq N$.

Démonstration.
pour $u \in H^2(\Omega)$ et $\varphi_j \in \widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j)$, j fixé on considéré l'application :

$$L(\varphi_j) = \int_{\Gamma_j} \varphi \gamma_j \partial_{n_j} v dv.$$

considérons $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ où $\varphi_k = 0$ pour $k \neq j$, on montre que les fonctions φ_k vérifient les conditions de compatibilité :

$$\varphi_k \equiv \varphi_{k+1} \text{ au point } k, \forall k.$$

Appliquant le théorème de trace ,on déduit l'existence d'un fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} \gamma_j u = \varphi_j & \text{sur} \quad \Gamma_j, \\ \\ \gamma_k u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_j, \forall k \neq j. \end{cases}$$

De plus ,$\exists c > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\Omega} &\leq c \|\varphi_j\|_{\frac{1}{2},\Gamma_j} \\ &\leq \|\varphi\|_{\sim,\frac{1}{2},\Gamma_j}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$L(\varphi_j) = \int_{\Gamma_j} \gamma_j u \gamma_j \partial_{n_j} v d\sigma.$$

D'autre part puisque $u \in H^1(\Omega), v \in H^1(\Omega)$, on a alors grâce à la formule de Green :

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= (\gamma_j u, \gamma_j \partial_{n_j} v)_{\Gamma_j} \\ &= \sum_k (\gamma_k u, \gamma_k \partial_{n_k} v)_{\Gamma_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (u,\Delta v)_\Omega + (\nabla u, \nabla v)_\Omega \\
&\leq \|u\|_{0,\Omega}\|\Delta v\|_{0,\Omega} + |u|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} \\
&\leq \|u\|_{0,\Omega}\|\Delta v\|_{0,\Omega} + |u|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \\
&\leq (\|u\|^2_{0,\Omega} + |u|^2_{1,\Omega})^{\frac{1}{2}}(\|v\|^2_{1,\Omega} + \|\Delta v\|^2_{0,\Omega})^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{E(\Delta,L^2(\Omega))} \\
&\leq c\|v\|_{E(\Delta,L^2(\Omega))}\|\varphi_j\|_{\sim,\frac{1}{2},\Gamma_j}.
\end{aligned}$$

Par conséquent , l'application :

$$\gamma_j\partial_{n_j} : v \to L.$$

est linéaire continue de $H^2(\Omega)$ muni de la norme induite par celle de $E(\Delta, L^2(\Omega))$ dans $\widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j)$ muni de la norme duale.

Donc on vertu de la densité de $H^2(\Omega)$ dans $E(\Delta, L^2(\Omega))$, cette application peut être prolongée continument de façon unique en une application linéaire encore notée $\gamma_j\partial_{n_j}$ de $E(\Delta, L^2(\Omega))$ dans $\widetilde{H}^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j)$.

Maintenant, pour $v \in H^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ tell que $\gamma_j u \in \widetilde{H}^{\Gamma_j}, 1 \leq j \leq N$, l'égalité (1.23), n'est en fait que la formule de Green (1.19). La formule (1.23) s'obtient alors par densité de $H^2(\Omega)$ dans $E(\Delta, L^2(\Omega))$. ■

1.6 coupures et fissures

Nous avons jusqu'à présent ignoré les domaines avec coupures, c'est-à-dire exclu l'angle 2π.

Cependant les propriétés des espaces de Sobolev sur des domaines polygonaux généraux se déduisent aisément des propriétés sur des domaines strictement polygonaux à l'aide du procédé suivant.

On l'explique dans un cas simple pour ne pas alourdir les notations.

Pour cela on considère un domaine Ω dont la frontière Γ est la réunion d'un quadrilatère Q contenant l'origine en son intérieur et de l'intersection de Q avec le demi-axe positif des abscisses.

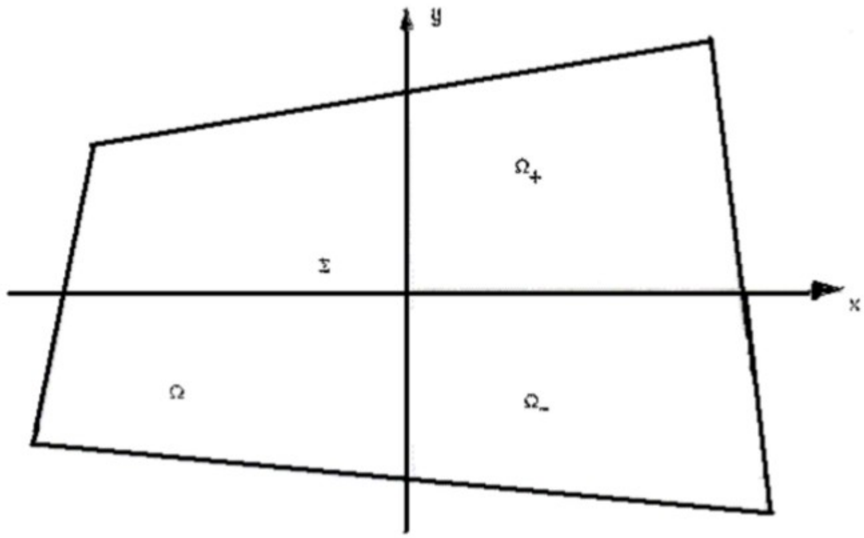

FIGURE 3

Notons :

$$\Omega_+ = \Omega \cap \{y > 0\},$$
$$\Omega_- = \Omega \cap \{y < 0\},$$
$$\Sigma = \Omega \cap \{y = 0\}.$$

Les frontières de Ω_+ et Ω_- sont strictement polygonales. On connait donc les propriétés de $W_p^m(\Omega_+)$ et $W_p^m(\Omega_-)$.Les propriétés de $W_p^m(\Omega)$ s'en déduisent en " recollant " ces espaces conformément au théorème suivant pour lequel il convient d'introduire quelques notations supplémentaires. On désigne par $\gamma_+ (resp^t \gamma_-)$ l'opérateur de trace sur Σ à partir de $\Omega_+ (resp^t \Omega_-)$.C'est donc un opérateur linéaire continu de $W_p^1(\Omega_+)(resp^t W_p^1(\Omega_-))$.

CHAPITRE 2

POSITION DU PROBLÈME, EXISTANCE ET UNICITÉ

Pour ce chapitre, on va donner généralement une formulation variationnelle et on va montrer l'existance et l'unicité de la solution du problème variationnel dans l'espace $H^2(\Omega)$.

2.1 Formulation du problème

Définition : 2.1.1 *Pour $u \in H^2(\Omega)$, nous définissons :*

$$M(u) = v\Delta u + (1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

$$N(u) = -\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\Delta u + (1-v)\frac{\partial^3 u}{\partial \eta \partial \tau^2}\right).$$

tel que :

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}. \quad et \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}.$$

Où : $v \in]0,1[$ est un nombre réel appelé coéfficient de poisson du matériau constituant la plaque .
η la normale unitaire sortante et τ la tengente unitaire dans le sens positif sur la frontière Γ (les sommets sont exclux).

Lemme 2.1.1 *Pour u et v deux fonctions de $H^2(\Omega)$, on donne la formulation variationnelle suivante :*

$$\int_\Omega \Delta^2 u \nu dx = a(u,\nu) - \left(\int_\Gamma \left[\gamma_0 M(u)\gamma_0 \frac{\partial \nu}{\partial \eta} + \gamma_0 N(u)\gamma_0 \nu\right] d\gamma\right).$$

tel que :

$a(u,\nu)$ est une forme bilinéaire définie sur $H^2(\Omega)\times H^2(\Omega)$ comme suit :

$$a(u,\nu) = \int_\Omega \Delta u \Delta \nu \; dx - \int_\Omega (1-v)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2}\right) \; dx.$$

Démonstration.

On choisit la décomposition suivante du bilaplacien :

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left[2(1-v)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(v\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(v\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right).$$

d'où :

$$\int_\Omega \Delta^2 u v dx = \int_\Omega \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left[2(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right\} v dx.$$

Par l'application de la formule de Green [1] deux fois à chaque terme de l'intégrale séparément, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) v\, dx &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) v\eta_1\, d\gamma \\ &= \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\eta_1\, d\gamma + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) v\eta_1\, d\gamma.\end{aligned}$$

et par la même méthode avec les autres termes d'intégration, on aura :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) v\, dx &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2}\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) v\eta_2\, d\gamma \\ &= \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\eta_1\, d\gamma \\ &\quad + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) v\eta_2\, d\gamma.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) v\, dx &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) v\eta_1\, d\gamma \\ &= \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\eta_2\, d\gamma \\ &\quad + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) v\eta_1\, d\gamma.\end{aligned}$$

1. $\int_\Omega (\Delta u) v\, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega=\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v\, d\gamma$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}\right) \nu dx &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \nu}{\partial x_1}\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\nu\eta_1\, d\gamma \\ &= \int_\Omega v\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2}\, dx - \int_\Gamma v\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial \nu}{\partial x_1}\eta_1\, d\gamma + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_1}\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\nu\eta_1\, d\gamma.\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}\right)\nu dx = \int_\Omega v\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2}\, dx - \int_\Gamma v\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial \nu}{\partial x_1}\eta_2\, d\gamma + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_2}\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\nu\eta_2\, d\gamma.$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\nu dx = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2}\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2}\eta_2\, d\gamma + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\nu\eta_2\, d\gamma.$$

Par sommation on obtient :

$$\int_\Omega \Delta^2 u\nu dx = a(u,\nu) + I_1 + I_2.$$

où :

$$\begin{aligned}I_1 = \int_\Gamma \Big\{ &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\eta_1 + (1-v)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)\eta_2 + (1-v)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)\eta_1 \\ &+ v\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\eta_1 + v\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\eta_2\Big\}\nu\, d\gamma. \\ I_2 = -\int_\Gamma \Big\{ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial \nu}{\partial x_1}\eta_1 + (1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial \nu}{\partial x_2}\eta_1 + (1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial \nu}{\partial x_1}\eta_2 \\ &+ v\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial \nu}{\partial x_1}\eta_1 + v\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial \nu}{\partial x_2}\eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial \nu}{\partial x_2}\eta_2\Big\}\, d\gamma.\end{aligned}$$

Alors le calcule de I_1 est trés simple , donc il suffit de donner directement le résultat :

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_\Gamma \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\eta_2\right\}\nu\, d\gamma \\ &= \int_\Gamma \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta u)\eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta u)\eta_2\right\}\nu d\gamma = \int_\Gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial \eta}\, d\gamma.\end{aligned}$$

Pour calculer I_2, on aura besoin d'exprimer les dérivées par rapport à x_1 et x_2 en fonction des dérivées suivant la normale η et la tangent s.

En effet :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x_1}\eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\eta_2 \\ \\ \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x_1}\eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\eta_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial}{\partial s}\eta_2 \\ \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \eta}\eta_2 - \frac{\partial}{\partial s}\eta_1 \end{cases}$$

On applique ces formules pour obtenir :

$$\begin{aligned} I_2 = & -\int_\Gamma \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial v}{\partial s}\eta_2\right)\eta_1 + (1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta_2 + \frac{\partial v}{\partial s}\eta_1\right)\eta_1 \right. \\ & +(1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial v}{\partial s}\eta_2\right)\eta_2 + v\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial v}{\partial s}\eta_2\right)\eta_1 \\ & \left. +v\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta_2 + \frac{\partial v}{\partial s}\eta_1\right)\eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta_2 + \frac{\partial v}{\partial s}\eta_1\right)\eta_2 \right\} d\gamma \\ = & -\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1^2 + 2(1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1\eta_2 + v\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1^2 + v\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_2^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_2^2\right] d\gamma \\ & -\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s}\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1\eta_2 + (1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\eta_1^2 - \eta_2^2) - v\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2 \right. \\ & \left. +v\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1\eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2\right] d\gamma \\ = & -\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\eta_1^2 + v\eta_2^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(v\eta_1^2 + \eta_2^2) + 2(1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1\eta_2\right] d\gamma \\ & -\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s}\left[-(1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1\eta_2 + (1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\eta_1^2 - \eta_2^2) \right. \\ & \left. +(1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2\right] d\gamma. \end{aligned}$$

$$I_2 = -\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\eta_1^2 + v\left(1-\eta_1^2\right)\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(v\left(1-\eta_1^2\right) + \eta_2^2\right) + 2(1-v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1\eta_2\right] d\gamma$$

$$+\int_{\Gamma}(1-\nu)\frac{\partial v}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1\eta_2-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\left(\eta_1^2-\eta_2^2\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2\right]\,d\gamma$$

$$=-\int_{\Gamma}\frac{\partial v}{\partial \eta}\left[(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\eta_1\eta_2+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_2^2\right)+\nu\Delta u\right]\,d\gamma$$

$$+\int_{\Gamma}(1-\nu)\frac{\partial v}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1^2\eta_2^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\left(\eta_1^2-\eta_2^2\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2\right]\,d\gamma.$$

La seconde intégrale de I_2 peut être calculée par parties. Etant donné qu'elle est prise sur un contour fermé, les limites d'intégration sont confondues en un point, on obtient tout simplement :

$$I_2=-\int_{\Gamma}\frac{\partial v}{\partial \eta}\left[\nu\Delta u+(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\eta_1\eta_2+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_2^2\right)\right]\,d\gamma$$

$$-(1-\nu)\int_{\Gamma}v\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1\eta_2-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\left(\eta_1^2-\eta_2^2\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_1\eta_2\right]\,d\gamma.$$

Finalement on obtient :

$$\int_{\Omega}\Delta^2 u v\,dx=a(u,v)-\left(\int_{\Gamma}\left[\gamma_0 M(u)\gamma_0\frac{\partial v}{\partial \eta}+\gamma_0 N(u)\gamma_0 v\right]d\gamma\right) \tag{2.1}$$

■

2.2 Existance et unicité de la solution du problème (P)

On considère ici un problème de transmission aux limites gouverné par l'opérateur bilaplacien, c'est-à-dire : étant donné $f\in L^2(\Omega)$, on cherche si possible à $u\in H^4(\Omega)$ solution du problème suivant :

$$(P):\begin{cases}\Delta^2 u=f \ \text{ dans } \ \Omega,\\[2ex] u=M(u)=0 \ \text{ sur } \ \Gamma\end{cases}$$

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion.

Ce problème présente un modèle mathématique d'une plaque :$u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacement) , f est la densité de force et les conditions au bord sur Γ signifient que la plaque est simplement supportée.

Sur Ω, la méthode variationnelle usuelle est applicable pour s'assurer de l'existance et de l'unicité d'une solution $u \in H^4(\Omega)$.

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème (P), en utilisant le Lemme $(2.1.1)$ et les conditions aux limites, alors le problème (P) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$(P_\nu) : \begin{cases} \text{Trouver } \ u \in V \ \text{ tel que} \\ \\ a(u,\nu) = F(\nu), \ \ \forall \nu \in V \end{cases} \tag{2.2}$$

Où :

$$V = \left\{ \nu \in H^2(\Omega) : \nu = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma \right\}$$

et :

$$a(u,\nu) = \int_\Gamma \Delta u \Delta \nu \, dx - \int_\Gamma \left[(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} \right) \right] \, dx.$$

et :

$$F(\nu) = \int_\Gamma f(x) \nu(x) \, dx.$$

Grâce au lemme de Laxe-Milgrame , le problème (P_ν) a une solution unique $u \in H^2(\Omega)$.

En effet, la linéarité des formes a et F et la continuité de a sont faciles à vérifier.

La coercivité de la forme a est une conséquence du Lemme suivant :

Lemme 2.2.1 $\exists\alpha > 0$ *qui vérifié :*

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2_{H^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in V. \tag{2.3}$$

Démonstration.
En effet, par la définition de a , on a pour $v \in H^2(\Omega)$:

$$a(u,u) = \int_\Omega \left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|^2 + 2\nu \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| + 2(1-\nu)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|^2 \right] dxdy.$$

En utilisant l'inégalité :

$$2Re(ab) \geq -(|a|^2 + |b|^2).$$

vérifier par deux nombres complexes arbitraires a et b tel que :

$a = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$ et $b = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

On conclut que :

$$a(u,u) \geq (1-\nu)\int_\Omega \left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|^2 + 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right| \right].$$

Si on pose : $\alpha = (1-\nu)$, on trouve que :

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2_{H^2(\Omega)}$$

tel que : $\|u\|^2_{H^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}$.
C'est exactement la relation (2.3) ∎

2.3 Interprétation de la solution du problème (P_ν)

On va montrer que la solution u du problème (P_ν) est bien solution du problème (P).
Tout d'abord en choisissant $v = \varphi \in D(\Omega)$ dans (2.2), on obtient immédiatement :

$$\Delta^2 u = f \;\text{ dans }\; D'(\Omega) \tag{2.4}$$

D'aprés la définition de V, on a :

$$u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{2.5}$$

(ie : $u_{|\Gamma} = 0$).

Il reste maintenant de justifier la second condition , ça veut dire que nous allons montrer que (2.2) implique :

$$M(u) = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{2.6}$$

Soit :

$$H(\Delta^2, \Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega) : \Delta^2 v \in L^2(\Omega) \right\}$$

est un espace de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{H(\Delta^2,\Omega)} = \left(\|v\|^2_{H^2(\Omega)} + \|\Delta^2 v\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Démontrons maintenant que l'application trace :

$$\begin{array}{rcl} T : D(\overline{\Omega}) & \to & D(\Gamma) \\ u & \mapsto & T(u) = \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \eta_j} \end{array}$$

se prolonge en une application linéaire continue et surjective de V dans $\prod_{j=1}^{n} \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ (voir **GRISVARD**).

Soit $u \in D(\overline{\Omega})$ et $u = 0$ sur Γ, et pour $\omega \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$, on définit :

$$l(\omega) = \sum_j \int_{\Gamma_j} M_j(u)\omega \quad d\sigma, \qquad j = \overline{0,n}$$

D'aprés le corollaire $(1.4.1)$ [12] et la définition $(1.1.1)$ (voir **GRISVARD**), il existe $v \in H^2(\Omega)$ tel que :

$$\omega = \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \eta_j}$$

et :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|\omega\|_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)}$$

où c est une constante indépendante de ω.

Alors , par l'utilisation de la formule de Green , on obtient :

$$l(\omega) = a(u,v) - \int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx \tag{2.7}$$

et donc d'aprés l'inégalité de Schwartz, on a :

$$|l(\omega)| \leq c\|u\|_{H(\Delta^2,\Omega)}\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|u\|_{H(\Delta^2,\Omega)}\|\omega\|_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)}$$

et avec la densité de $D(\overline{\Omega})$ dans $H(\Delta^2,\Omega)$ (Lemme $(1.3.1)$) voir [12]. Ce qui prouve que :

$$l \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j), \qquad j = \overline{0,n}$$

Et de plus l'application :

$$T : u \in D(\overline{\Omega}) \to l \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$$

est bornée sur $D(\overline{\Omega})$ muni de la norme de $H(\Delta^2,\Omega)$ elle peut être donc prolongé par densité en une application linéaire continue de $H^2(\Delta^2,\Omega)$ dans $\prod_{j=1}^{n} \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$.

Pour $u \in H(\Delta^2,\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$, on a la formule de Green dans le Lemme suivant :

Lemme 2.3.1 *Pour $u \in H(\Delta^2,\Omega)$, M(u) est bien définie en tant qu'application de $H(\Delta^2,\Omega)$ dans $\prod_{j=1}^{n} \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ et on a la formule de Green suivante :*

$$\int_\Omega (\Delta^2 u)v dx - \int_\Omega \Delta u \Delta v dx + \int_\Omega \left[(1-v)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1^2}\right)\right] dx$$

$$= -\sum_{j=0}^{n} \left\langle \gamma_j M(u), \gamma_j \frac{\partial \nu}{\partial \eta} \right\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j)\times \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)}, \qquad \forall v \in V$$

dans un autre sens :

$$\langle Tu, \nu \rangle = -\sum_{j=0}^{n} \left\langle \gamma_j M(u), \gamma_j \frac{\partial \nu}{\partial \eta} \right\rangle_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j)\times \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)} \tag{2.8}$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne les crochets de dualité.

Démontrons à présent que (2.6) a bien lieu si u est la solution du problème (2.2) .

D'aprés (2.4), on voit que $u \in H(\Delta^2,\Omega)$, la formule de Green généralisée (2.8) entraîne :

$$\int_\Omega (\Delta^2 u)\nu \, dx - \langle Tu, \nu \rangle = \int_\Omega f(x)\nu(x) \, dx \tag{2.9}$$

pour $v \in H^2(\Omega)$. *D'aprés* (2.4) *, on a donc :*

$$\langle Tu, v\rangle = 0, \qquad \forall v \in H^2(\Omega)$$

d'où :

$$\gamma_j M(u) = 0 \quad dans \quad H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j), j = \overline{0,n}$$

L'interprétation du problème variationnel (2.2) *en termes de problème aux limites est donc la suivante :*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & dans\ \ \Omega,\ \ u \in H(\Delta^2, \Omega), \\ u = 0 & dans\ \ H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), \\ \gamma_j M(u) = 0 & dans\ \ H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_j),\ \ j = \overline{0,n}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Donc les problèmes (2.2) *et* (2.7) *ont exactement les même solutions.*

Théorème 2.3.1 *Pour* $f \in L^2(\Omega)$ *le problème* (2.9) *a une unique solution* $u \in H(\Delta^2, \Omega)$.

CHAPITRE 3

CALCUL DES SOLUTIONS SINGULIÈRES

DAns ce travail on donnera une description explicite de la singularité de la solution faible de problème aux limites gouverné par le bilaplacien dans un polygone plan borné.

On montre que le comportement singulier de la solution est gouverné par une équation transcendante.

3.1 formulation du problème

On considère ici un problème gouverné par l'opérateur bilaplacien.
Etant donné $f \in L^2(\Omega_\omega)$, on cherche u si possible dans $H^4(\Omega_\omega)$solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = M(u) = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans le 2$^{\text{ème}}$ chapitre, nous avons confirmé l'existance et l'unicité d'une solution variationnelle du problème (3.1). c'est pourquoi dans ce qui suit nous cherchons d'une solution $u \in H^2(\Omega)$.

3.2 Transformation du problème

Supposons que la solution $u \in H^2(\Omega_\omega)$. Pour etudier le comportement de la solution du problème (3.1), il suffit de considéré le problème homogène et de séparé les variables en coordonnées polaires.
Soit :

$$u = r^\alpha \phi_\alpha(\theta)$$

Donc, on cherche $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $\alpha \in H^2(\Omega_\omega)$ mais $\alpha \notin H^4(\Omega_\omega)$.

La régularité de u dépend de la partie réelle de α, avec α est la solution de l'équation transcendante du problème (1.1).

3.2.1 passage en coordonnées polaires

Proposition 3.2.1 *En coordonnées polaires et dans ce genre de problèmes on a :*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

En coordonnées polaires $M(u)$ et s'écrivent :

$$M(u) = v\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Démonstration.

On commence par l'expression de Laplacien. On pose alors : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}.$$

En faisant la somme des seconds nombres des $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ nous obtenons le résultat pour le Laplacien.

On démontre maintenant l'expression de Bilaplacien :
on sait que $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$
Alors :

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Delta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Delta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\Delta.$$

On dérive par rapport à r, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r}\Delta = \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} \tag{3.2}$$

Par dérivation un autre fois par rapport à r on trouve :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Delta = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{4}{r^3}\frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{6}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{3.3}$$

Et de la même manière avec la dérivée par rapport à θ, on aura :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4}{\partial \theta^4}. \tag{3.4}$$

Finalement, on multiplie l'equation $(3,2)$ par $\frac{1}{r}$ et en additionnant les formules précédentes, on obtient alors l'expression de Bilaplacien en coordonnées polaires.

Passons maintenant à la démonstration de $M(u)$:

$$\begin{aligned}
M_0(u) = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\eta_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1\eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\eta_2^2 \\
& = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(\sin^2\omega\sin^2\omega + 2\cos^2\omega\sin^2\omega + \cos^2\omega\cos^2\omega) \\
& + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(\sin^2\omega\cos^2\omega - 2\cos^2\omega\sin^2\omega + \sin^2\omega\cos^2\omega) \\
& + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}(-\sin^2\omega\sin\omega\cos\omega + 2\sin^2\omega\sin\omega\cos\omega) \\
& + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\sin\omega\cos\omega\cos^2\omega - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}2\sin\omega\cos\omega\cos^2\omega \\
& + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}(2\sin^2\omega\sin\omega\cos\omega - 2\sin\omega\cos\omega(\sin^2\omega - \cos^2\omega)) \\
& - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}(-\sin^2\omega\sin\omega\cos\omega - 2\cos^2\omega\sin\omega\cos\omega + \sin\omega\cos\omega\cos^2\omega) \\
& + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}(\sin^2\omega\sin^2\omega + 2\cos^2\omega\sin^2\omega\cos^2\omega\cos^2\omega)
\end{aligned}$$

Donc et aprés un calcul simple on en déduit :

$$M_0(u) = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\right)(\cos\omega\sin^3\omega + \cos\omega\cos^3\omega).$$

et par suit, vu que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}$, on a :

$$M_0(u) = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

Finalement, on obtient l'expression de $M(u)$ en coordonnées polaires. ■

3.3 Séparation des variables en coordonnées polaires

Il suffit de considérer le problème homogène suivant :

$$\Delta^2 u = 0. \tag{3.5}$$

Cette dernière équation devient l'orsque on applique le bilaplacien en coordonnés polaires, en posant :

$$u(r,\theta) = r^\alpha \phi(\theta).$$

on obtient :

$$\frac{\partial^4}{\partial r^4}(r^\alpha\phi(\theta)) + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}(r^\alpha\phi(\theta)) + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha\phi(\theta)) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^\alpha\phi(\theta)) + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3}(r^\alpha\phi(\theta)) + \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(r^\alpha\phi(\theta)) -$$

$$\frac{2}{r^3}\frac{\partial^3}{\partial r\partial\theta^2}(r^\alpha\phi(\theta)) + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4}{\partial r^2\partial\theta^2}(r^\alpha\phi(\theta)) = 0.$$

qui ce implique que :

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)r^{\alpha-4}\phi(\theta) + r^{\alpha-4}\phi^{(4)}(\theta) + \alpha r^{\alpha-4}\phi(\theta) - (\alpha^2-\alpha)r^{\alpha-4}\phi(\theta) +$$

$$2(\alpha^2-\alpha)(\alpha-2)r^{\alpha-4}\phi(\theta) + 4r^{\alpha-4}\phi^{(2)}(\theta) - 2\alpha r^{\alpha-4}\phi^{(2)}(\theta) + 2(\alpha^2-\alpha)r^{\alpha-4}\phi^{(2)}(\theta) = 0.$$

on obtient donc :

$$r^{\alpha-4}\left[\phi^{(4)}(\theta) + (2\alpha^2-4\alpha+4)\phi^{(2)}(\theta) + (\alpha^4-4\alpha^3+4\alpha^2)\phi(\theta)\right] = 0.$$

Donc nous obtenons une équation différentielle ordinaire dépend d'un paramètre complexe α :

$$\phi^{(4)}(\theta) + (2\alpha^2-4\alpha+4)\phi^{(2)}(\theta) + (\alpha^4-4\alpha^3+4\alpha^2)\phi(\theta) = 0.$$

Alors, on va chercher une solution générale de cette equation :
le polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2(\alpha^2-2\alpha+2)\lambda^2 + \alpha^2(\alpha-2)^2.$$

Alors :

$$\lambda^4 + 2(\alpha^2-2\alpha+2)\lambda^2 + \alpha^2(\alpha-2)^2 = 0.$$

Les solutions de cette equation sont :
$\lambda_1 = \alpha i$,

$\lambda_2 = -\alpha i,$

$\lambda_3 = (\alpha - 2)i,$

$\lambda_4 = -(\alpha - 2)i = (2 - \alpha)i.$

Donc :

* Si $\alpha \in \{0,1,2\}$: la solution générale est donnée par :

$$\phi(\theta) = c_1 \sin \alpha\theta + c_2 \cos \alpha\theta + c_3 \sin(\alpha - 2)\theta + c_4 \cos(\alpha - 2)\theta.$$

* Si $\alpha \in \{0,2\}$: l'equation différentielle devient :

$$\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} + 4\frac{\partial^2\phi(\theta)}{\partial\theta^2} = 0.$$

alors :

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + 4).$$

Alors : $\lambda_1 = 0$ (double) ,

$\lambda_3 = 2i,$

$\lambda_4 = -2i.$

et donc :

$$\phi(\theta) = c_1 + c_2\theta + c_3 \sin(2\theta) + c_4 \cos(2\theta).$$

* Si $\alpha = 1$: l'equation devient :

$$\frac{\partial^4\phi(\theta)}{\partial\theta^4} + 2\frac{\partial^2\phi(\theta)}{\partial\theta^2} + \phi(\theta) = 0.$$

le polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2.$$

il est admet les deux racines double suivants :$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$
Donc : la solution générale dans ce cas est :

$$\phi(\theta) = c_1 \sin\theta + c_2\theta\sin\theta + c_3\cos\theta + c_4\theta\cos\theta.$$

Avec : c_1, c_2, c_3, c_4 dans tous les cas précédents sont des constantes.

3.4 Equation transcendante gouvernant le comportement singulier

On vient vérifier que ϕ est une solution d'un problème aux limites homogène pour une équation différentielle ordinaire d'ordre 4 dans $]0, \omega[$.
Soit :

$$(\mathrm{E})\begin{cases} \phi^{(4)}(\theta) + (2\alpha^2 - 4\alpha + 4)\phi^{(2)}(\theta) + (\alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2)\phi(\theta) = 0 \ \text{ dans } \ \Omega_\omega \\ \left.\begin{array}{l} \phi(\theta) = 0 \\ \phi^{(2)}(\theta) + [v\alpha^2 + \alpha(1-v)]\phi(\theta) = 0 \end{array}\right\} \ \text{sur } \ \Gamma_0, \\ \left.\begin{array}{l} \phi(\omega) = 0 \\ \phi^2(\omega) + [v\alpha^2 + \alpha(1-v)]\phi(\omega) = 0 \end{array}\right\} \ \text{sur } \ \Gamma_\omega. \end{cases}$$

Ce problème dépend analytiquement u paramètre complexe α.
Nous allons déterminer S l'ensemble de leurs valeurs singulières , c'est-à-dire les valeurs α telle que notre problème admet une solution ϕ non identiquement nulle. Cette solution est définie par :

Proposition 3.4.1 *Le problème (E) détermine u lorsque $\alpha \neq (0,1,2)$ est solution de l'équation caractéristique :*

$$\sin^2(\alpha - 1)\omega = \sin^2\omega. \tag{3.6}$$

Les valeurs exceptionnelles $\alpha = 0, 1, 2$ donnent :

$$\begin{cases} \sin 2\omega = 0, \omega \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\} & ,pour \alpha = 0 \\ 2\omega\sin 2\omega = 0 & ,pour \alpha = 2 \\ \sin^2\omega \ \ , \omega \in \{\pi, 2\pi\} & ,pour \alpha = 1 \end{cases}$$

Démonstration.

D'aprés les conditions aux limites pour $\alpha \neq (0,1,2)$ on obtient pour $\theta = 0$, sur Γ_0 le système d'équation homogène suivant :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ (1-v)(\alpha-\alpha^2)c_2 + [(1-v)\alpha^2 - (v+3)\alpha]c_4 = 0 \\ \sin\alpha\omega c_1 + \cos\alpha\omega c_2 + \sin(\alpha-2)\omega c_3 + \cos(\alpha-2)\omega c_4 = 0 \\ (1-v)(\alpha-\alpha^2)\sin(\alpha\omega)c_1 + (1-v)(\alpha-\alpha^2)\cos(\alpha\omega)c_2 + [-\alpha^2(1-v)+\alpha(5-v)-4] \\ \sin(\alpha-2)\omega c_3 + (-\alpha^2(1-v)+\alpha(5-v)-4)\cos(\alpha-2)\omega c_4 = 0 \end{cases}$$

La structure de ces équation permet de définir une solution non identiquement nulle si et seulement si le déterminant est null.

Pour calculer le déterminant , on pose :

$A = (1-v)(\alpha-\alpha^2).$

$B = -\alpha^2(1-v)+\alpha(5-v)-4.$

$C = (1-v)\alpha^2-(v+3)\alpha.$

Donc le déterminant sera comme suit :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & A & 0 & C \\ \sin\alpha\omega & \cos\alpha\omega & \sin\alpha-2\omega & \cos(\alpha-2)\omega \\ A\sin\alpha\omega & A\cos\alpha\omega & B\sin(\alpha-2)\omega & B\cos(\alpha-2)\omega \end{vmatrix} =$$

$$\sin\alpha\omega\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ A & 0 & C \\ A\cos\alpha\omega & B\sin(\alpha-2)\omega & B\cos(\alpha-2)\omega \end{vmatrix} -$$

$$A\sin\alpha\omega\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ A & 0 & C \\ \cos\alpha\omega & \sin(\alpha-2)\omega & \cos(\alpha-2)\omega \end{vmatrix} =$$

$\sin\alpha\omega[-BC\sin(\alpha-2)\omega+AB\sin(\alpha-2)\omega]-A\sin\alpha\omega[-C\sin(\alpha-2)\omega+A\sin(\alpha-2)\omega]=$

$\sin\alpha\omega[-BC\sin(\alpha-2)\omega+AB\sin(\alpha-2)\omega+AC\sin(\alpha-2)\omega-A^2\sin(\alpha-2)\omega]=$

$\sin\alpha\omega\sin(\alpha-2)\omega(-BC+AB+AC-A^2)=0$

Donc : $\sin\alpha\omega\sin(\alpha-2)\omega=0$

$\Longleftrightarrow \sin\alpha\omega\sin(\alpha\omega-2\omega)=0$

$\Longleftrightarrow \sin\alpha\omega(\sin\alpha\omega\cos2\omega-\sin2\omega\cos\alpha\omega)=0$

$\Longleftrightarrow \sin^2\alpha\omega\cos2\omega-\sin\alpha\omega\cos\alpha\omega\sin2\omega=0$

$\Longleftrightarrow \sin^2\alpha\omega(\cos^2\omega-\sin^2\omega)-\sin\alpha\omega\cos\alpha\omega(2\sin\omega\cos\omega)=0$

$\Longleftrightarrow \sin^2\alpha\omega\cos^2\omega-\sin^2\alpha\omega\sin^2\omega-2\sin\alpha\omega\cos\alpha\omega\sin\omega\cos\omega=0$

$\Longleftrightarrow \sin\alpha\omega\cos\omega(\sin\alpha\omega\cos\omega-2\cos\alpha\omega\sin\omega)-\sin^2\alpha\omega\sin^2\omega=0$

$\Longleftrightarrow \sin\alpha\omega\cos\omega(\sin(\alpha-1)\omega-\cos\alpha\omega\sin\omega)-\sin^2\alpha\omega\sin^2\omega=0$

$\Longleftrightarrow (\sin(\alpha-1)\omega+\sin\omega\cos\alpha\omega)(\sin(\alpha-1)\omega-\cos\alpha\omega\sin\omega)-\sin^2\alpha\omega\sin^2\omega=0$

$\Longleftrightarrow \sin^2(\alpha-1)\omega - \sin(\alpha-1)\omega\cos\alpha\omega\sin\omega + \sin\omega\cos\alpha\omega\sin(\alpha-1)\omega - \sin^2\omega\cos^2\alpha\omega - \sin^2\alpha\omega\sin^2\omega = 0$

$\Longleftrightarrow \sin^2(\alpha-1)\omega - \sin^2\omega(\cos^2\alpha\omega + \sin^2\alpha\omega) = 0$

$\Longrightarrow \sin^2(\alpha-1)\omega = \sin^2\omega$

D'où l'équation réquise.

Pour $\alpha = 0,1,2$ les calculs sont simples. ■

3.5 Régularité maximale

Soit α_k, k entier ≥ 1 , une énumération des racines de l'équation (3.6) et v_k la multiplicité correspondante , $r^\alpha\phi(\theta)$ étant calculée explicitement une condition nécessaire pour qu'elle soit $H^\sigma(\Omega_\omega)$ est $\sigma - 1 \leq \alpha$ (c-à-d :**régularité maximale)** .

Elle est suffisante si on applique la méthode à la **Kondratiev** ou à la **Grisvard** dans le cas général. On à le :

Théorème 3.5.1 *Soit u une solution variationnelle de (E) qui appartienne à $W_2^2(\Omega_\omega)$, avec $f \in W_p^2(\Omega_\omega)$, alors $u \in W^{m+4}(\Omega_\omega)$ dés que l'équation (3.6) n'à aucune racine α_k dans la bande :*

$$1 < Re\alpha_k \leq m + 4 - \frac{2}{p}. \tag{3.7}$$

Proposition 3.5.1 *Soit $\omega = 2\pi$. Alors la solution variationnelle $u \in W_2^2(\Omega)$ du problème (E)appartienne à $W_p^4(\Omega)$ dés que :*

$$p < \frac{4}{3}.$$

Démonstration.
Soit $\omega = 2\pi$ .Alors l'équation (3.6) devient :

$$\sin^2(\alpha-1)2\pi = 0 \tag{3.8}$$

Donc la racine est explicitement le nombre :

$$\alpha_k = \frac{l}{2}, l \in \mathbb{Z}$$

Evidemment il n'y a aucune racine dans la bande :

$$1 < Re\alpha_k < \frac{3}{2}.$$

C'est-à-dire $p < 4$ et $\omega = 2\pi$. ■

Remarque 3.5.1 *On voit que* $u \in W_2^2(\Omega)$ *dés que* $\omega \leq \frac{\pi}{2}$.

3.6 Solution singulière du problème (E)

La présence d'un coin dans la frontière du domaine Ω considéré ici,provoque certainement des singularité qui se traduisent généralement par valeurs "élevées" voir "infinies" de certaines composantes de u.

Il est bien connu pour ce type du problème que les solutions singulières dans un voisinage V du sommet O du secteur Ω sont de la forme :

$$U(r,\theta) = r^{\alpha}\phi(\theta).$$

où :

$$V(r,\theta) = r^{\alpha}[\log r\phi(\theta) + \partial_{\alpha}\phi(\theta)].$$

telle que α est une racine simple ou double de l'équation (3.6) et $\phi \in C^{\infty}([0,\omega])$ est une solution du problème homogène correspondant,pour plus de précisions,on va voir la proposition suivante :

Proposition 3.6.1 *Sot* α_k *une énumération des racines de l'équation* (3.6)*, avec* $\alpha_k \notin 0,1,2$.*Alors la solution singulière de* (E)*est données par :*

$$U_k(r,\theta) = r^{\alpha_k}\phi(\theta). \tag{3.9}$$

et :

$$V(r,\theta)=\begin{cases} r^{\alpha_k}[\log r\phi(\theta)+\partial_{\alpha_k}\phi(\theta)] & ,si\ \omega<2\pi. \\ \\ r^{\alpha_k}\phi(\theta) & ,si\ \omega=2\pi. \end{cases} \tag{3.10}$$

où α_k *est telle que :* $1<Re\alpha_k\leq m+4-\frac{2}{p}$ *et* ϕ *est de classe* C^∞ *sur* $[0,\omega]$.

Dans ce qui suit nous allons déteréminer les solutions singulières de notre problème, au début on va déteréminer la solution singulière du problème homogène (E)*, et par la suite celles du problème non homogène correspondant et ceci dans les deux cas :*
domaine fissuré et domaine non fissuré*.*

a) **<u>si $\omega<2\pi$:</u>**

$$\phi(\theta)=(\rho_0+4)\sin(\alpha-2)\omega\sin\alpha\theta-\rho_0\sin\alpha\omega\sin(\alpha-2)\theta \tag{3.11}$$

b) **<u>si $\omega=2\pi$:</u>**

$$\phi(\theta)=\sin\alpha\theta+\sin(\alpha-2)\theta \tag{3.12}$$

Proposition 3.6.2 *Dans le cas où* $\alpha=0,1,2$*, la solution de* (E) *est régulière et on a :*

* *Pour* $\alpha=0$ *et* 2 :

$$\phi(\theta)=\sin 2\theta c_3,\ \ \omega\in\{\pi,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},2\pi\}.\ \ \textit{telle que}:\ c_3\neq 0 \tag{3.13}$$

* *Pour* $\alpha=1$:

$$\phi(\theta)=\sin\theta c_4,\ \ \omega\in\{\pi,2\pi\}.\ \ \textit{telle que}:\ c_4\neq 0 \tag{3.14}$$

Démonstration.

I)Solution singulières du problème (E) **:**

a) $\underline{\omega < 2\pi :}$

Soit α_k une énumérétion des racines $(\neq 0,1,2)$de l'équation (3.6) dans la bande :

$$1 < Re\alpha_k \leq m+4-\frac{2}{p}. \tag{3.15}$$

Une solution générale de l'equation $\phi^{(4)}(\theta)+(2\alpha^2-4\alpha+4)\phi^{(2)}(\theta)+(\alpha^4-4\alpha^3+4\alpha^2)\phi(\theta)=0$ est donnée par : $\phi(\theta)=c_1\sin\theta+c_2\theta\sin\theta+c_3\cos\theta+c_4\theta\cos\theta$.
En utilisant les conditions au bord, en $\theta=0$, cela implique :

$$c_4=-c_2=0. \tag{3.16}$$

où :

$$\rho_0=-\alpha(1-v) \tag{3.17}$$

et par suite (3.16) donne le système d'inconnues c_1 et c_3 suivant :

$$(S_D)\begin{cases} (\sin\alpha\omega)c_1+(\sin(\alpha-2)\omega)c_3=0. \\ \\ (-\rho_0\sin\alpha\omega)c_1+[(\rho_0+4)\sin(\alpha-2)\omega]c_3=0. \end{cases}$$

(S_D) admet une solution non identiquement nulle si et seulement si son déteréminant est nul. Cela donne bien l'équation caractéristique (3.6) Donc pour tout $(\alpha\neq 0,1,2)$ réelle ou complexe, solution de (3.6) les solutions du sustème (S_D) décrivent bien une droite.
Donc le choix de c_1,par exemple ,détermine bien les autres $c_i, i=2$ à 4.
Soit :

$$c_1=\sin(\alpha-2)\omega \text{ ou bien } c_1=(\rho_0+4)\sin(\alpha-2)\omega. \tag{3.18}$$

où ρ_0 est donné par (3.12).
Donc :

$$c_3 = \sin\alpha\omega \quad \text{ou bien} \quad c_3 = -\rho_0 \sin\alpha\omega. \tag{3.19}$$

c_2 et c_4 (d'aprés (3.11)) d'où (3.9) et par conséquent (3.7) et (3.8) dans le cas où $\omega < 2\pi$ et $(\alpha \neq 0,1,2)$

b) $\underline{\omega = 2\pi :}$ (cas de la fissure)

Dans ce cas la solution générale $\phi(\theta) = \sin\alpha\omega c_1 + \cos\alpha\omega c_2 + \sin(\alpha-2)\omega c_3 + \cos(\alpha-2)\omega c_4$ de $\phi^{(4)}(\theta) + (2\alpha^2 - 4\alpha + 4)\phi^{(2)}(\theta) + (\alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2)\phi(\theta) = 0$ devient d'aprés l'utilisation de la condition au limite en $\theta = 0$

$$\phi(\theta) = \sin\alpha\theta c_1 + \sin(\alpha-2)\theta c_3. \tag{3.20}$$

reste à utiliser la condition au bord $\theta = 2\pi$, on a $\phi(2\pi) = 0$ équivalente à $(\sin 2\alpha\pi)c_3 = 0$
Donc c_1 ou c_3 est non nulle si et seulement si $\sin 2\alpha\pi = 0$
c'est-à-dire :

$$\sin 2\alpha_k\pi = 0. \tag{3.21}$$

les racines de (3.14) sont les nombres $\alpha_k = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

On démontre maintenant la proposition (3.6.2)

1) $\underline{\alpha = 0,2}$

Dans ce cas la solution générale est donnée par :

$$\phi(\theta) = c_1 + \theta c_2 + \cos 2\theta c_3 + \sin 2\theta c_4.$$

donc les conditions au bord en $\theta = 0$, donne :

$$c_3 = -c_1 \tag{3.22}$$

Les conditions au bord en $\theta = \omega$ et (3.15) donnent le système d'inconnues c_2 et c_4 suivant :

$$(S_0)\begin{cases} \omega c_2 + \sin 2\omega c_4 = 0 \\ \\ (v\alpha^2 + \alpha(1-v))\omega c_2 + (v\alpha^2 + \alpha(1-v) - 4)\sin 2\omega c_4 = 0 \end{cases}$$

Alors c_1 ou c_2 non nulle si et seulement si $det(S_0) = 0$, c'est-à-dire : $-4\omega \sin 2\omega = 0$. cela implique que : $\sin 2\omega = 0$.
D'où le résultat.

2) $\underline{\alpha = 1 :}$

On sait que dans ce cas la solution générale est donnée par :

$$\phi(\theta) = \cos\theta c_1 + \theta\cos\theta c_2.$$

et que les conditions au bord en $\theta = 0$ donne :

$$c_1 = c_4 = 0 \tag{3.23}$$

Donc les conditions au bord en $\theta = \omega$ et (3.16) donnent le système d'inconnues c_2 et c_3 suivant :

$$(S_1)\begin{cases} \omega\cos\omega c_2 + \sin\omega c_3 = 0 \\ \\ ((v\alpha^2 + \alpha(1-v) - 1)\omega\cos\omega - 2\sin\omega)c_2 + ((v\alpha^2 + \alpha(1-v) - 1)\sin\omega)c_3. \end{cases}$$

Alors c_2 ou c_3 est non nulle si et seulement si $det(S_1) = 0$.
c'est-à-dire : $2\sin^2\omega = 0 \Longrightarrow \sin^2\omega = 0$.
Ce qui donne bien : $\sin\omega = 0$. ■

3.7 Développement singulier de la solution variationnelle du problème (E)

C'est ici que se manifestent l'utilité des résultats des paragraphes précédents. Donc placons nous dans le cadre des hypothèses et résultats de la proposition (3.6.2) On dispose donc de tous les ingrédients du Théorème (de régularité et décomposition).

Théorème 3.7.1 *(De régularité et décomposition) :*
Soit $u \in W_2^2(\Omega_\omega)$ solution de (E), avec : $f \in W_p^m(\Omega_\omega)^2$,alors il existe deux nombres c_k et d_k,

telle que :

$$u - \sum_{\substack{1<Re\alpha_k<m+4-\frac{2}{p} \\ (v_k=1)}} c_k U_k - \sum_{\substack{1<Re\alpha_k<m+4-\frac{2}{p} \\ (v_k=2)}} d_k V_k \in W_p^{m+4}(V). \tag{3.24}$$

à condition qu'aucun des $Re\alpha_k$ ne soit égal à $m+4-\frac{2}{p}$.

Démonstration.

la preuve est classique et utilise les techniques de la transformation de **Fourier** avec **Plancherel** dans le cas L^2 et **Mikhlin** dans le cas générale.

a) Cas de la fissure : Dans le cas particulier où l'angle ω vaut 2π , l'équation transcendante (3.6) prend la forme :

$$\sin^2 2(\alpha-1)\pi = 0.$$

dont les racines sont : $\alpha_k = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$
Donc le développement (3.17) prend la forme :

$$u - \sum_{1<Re\alpha_k<m+\frac{4}{3}-\frac{2}{p}} (c_{2k+1}U_{2k+1} + d_{2k+1}V_{2k+1}) \in W_p^{m+4}(V). \tag{3.25}$$

En cas particulier, nous avons :

$$u - c_k U_k - d_k V_k \in W_p^{m+4}(V).$$

pour vu que $\frac{3}{2} > m+4-\frac{3}{2}$, ce qui revient à $m=0$ et $p \in]1,8[$.

b)Autres angles :$(\omega < 2\pi)$
Pour $\omega < 2\pi, u \in W_2^4(V)$, et pour $\omega = \pi$ (cas d'un angle plat) et $\omega = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$, on a des pôles simples : $\alpha = 0, 1$ et 2 (proposition (3.6.2))

Reste donc à regarder le cas où :$\omega \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\cup]\pi, \frac{3\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$.
Une étude simple de l'équation (3.6) montre que les racines sont explicitement les nombres réels :

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{\omega} \pm 1,\ \ k \in \mathbb{Z}\ \ /\ \ \omega \neq \frac{lp}{2},\ \ l \in \mathbb{Z}^*.$$

Ils sont toutrs de multiplicité égale à 1 , et par conséquent la seconde somme du développement (3.17) est superflu et on a :

$$u - \sum_{1<\frac{k\pi}{\omega}-1<m+4-\frac{2}{p}} c_k U_k - \sum_{1<\frac{k\pi}{\omega}+1<m+4-\frac{2}{p}} c_k U_k \in W_p^{m+4}(V).$$

■

3.8 Principaux résultats

Pour compléter ce travail et dans l'espoir de faciliter encore la tache du lecteur on présente dans les pages qui suivent les principaux résultats sous forme de tables. Les notations utilisées dans le corps des tables sont celles des paragraphes précédents. Les solutions sont considérées localement au voisinage V dun des sommets du polygone considéré Ω_ω.Les coordonnées sont les coordonnées polaires relatives à ce sommet, cest-à-dire que le sommet est situé en $r=0$ et ses côtés sont portés par les l'axes $\theta=0$ et $\theta=\omega$ (avec $0<\omega\leq 2\pi$).On considère seulement la solution variationnelle. La signification des différentes colonnes du tableau est :

1ère colonne : Elle spécifie les hypothèses sur la mesure ω de langle considéré.

2ème colonne : Elle indique la condition au bord en $\theta=0$.

3ème colonne : Elle indique la condition au bord en $\theta=\omega$.

4ème colonne : Elle décrit en coordonnées polaires dans V (et à une constante près) la (ou les) solution(s) variationnelle(s) du problème considéré, correspondant à des données régulières, qui a le moins de régularité. Autrement dit elle(s) indique(nt) les termes les plus singuliers d'un développement de toute solution variationnelle au voisinage du sommet.

5ème colonne : Elle donne le plus petit nombre σ tel que la (ou les) fonction(s) indiquée (s) dans la quatrième colonne appartiens (nent) à $H^s(V)$ pour tout $s<\sigma$ .En particulier toute solution variationnelle correspondant à des données régulières, appartenant à $H^s(V)$ por tout $s<\sigma$ (régularité maximale).

6ème colonne : Elle donne le plus petit nombre τ tel que la différence entre toute solution variationnelle et les termes les plus singuliers de son développement appartienne à $H^s(V)$ pour tout $s<\tau$. Autrement dit, soit u une solution variationnelle correspondant à des données régulières et soientV_i les solutions indiquées en colonne 4, on a :

$$\begin{cases} u\in H^s(V) \ \text{ pour tout } \ s<\sigma, V_i\in H^s(V) \ \text{ pour tout } \ s<\sigma, \\ \\ V_i\in H^s(V) \ \text{ et } \ \exists c_i\in\mathbb{R} \ \text{ tels que } \ u-\sum\limits_i c_iV_i\in H^s(V) \ \text{ pour tout } \ s<\tau. \end{cases}$$

7ème colonne : Elle contient des renseignements complémentaires difficiles à tabuler.

$\omega \prec 2\pi$	$u = M(u)$ / $u = M(u)$ donnés	$r^{\alpha}\left[\alpha^2\nu + \alpha(1-\nu) - (\alpha-2)^2\right] \times$ $\sin\alpha\theta \sin(\alpha-2)\omega +$ $r^{\alpha}\left[\alpha^2(\nu-1) + \alpha(1-\nu)\right] \times$ $\sin\alpha\omega \sin(\alpha-2)\theta$ où α est la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de : $\begin{cases} \sin^2(\alpha-1)\omega = \sin^2\omega, \\ \operatorname{Re}\alpha \succ 1. \end{cases}$	$1 + \operatorname{Re}\alpha$		
$\omega = 2\pi$		& $r^{\frac{3}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$ $r^{\frac{3}{2}} \sin\frac{3\theta}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	la solution est appartient à $W_p^2(V)$ avec $p \prec 4$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ADAMS, Sobolev spaces, Academic Press, (1975).

[2] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differenntiel equations satisfying genéral boundary conditions I, Communications on Pur and Applied Maths, $12, (1959) P.623-727$ et II même journal $17, (1964) p.35-92$.

[3] H.BENHABILES,Singularité des solutions du problème mêlé pour le bilaplacien dans un polygone plan, thèse de Magister à l'université de Ferhat Abbas, Alger,(2012).

[4] H.BENSERIDI, Régularité de quelques problèmes aux limites linéaires et non linéaires dans des domaines non réguliers et non homogènes, Thèse de Doctorat, Univ-Ferhat Abbas de Sétif, Algérie,Juil (2005).

[5] H. BLUM et RANNACHER, On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners, Math.Methods.App.Sc., $2, (1980), P.556-581$.

[6] H. BREZIS, Analyse fonctionnelle, Théorie et Application. Masson (1983).

[7] CÉDRIC CAMIER, Modélisation et étude numérique de vibrations non-linéaire des plaques circulaires minces imparfaites, Application aux cymbales. Thèse Présentée et soutenue publiquement le 2 février (2009) pour l'obtention du Docteur de l'Ecole Polytechnique.

[8] W. CHIKOUCHE et A. AIBECHE, Coefficients of singularities of the biharmonic problem of Neumann type : case of the crack. IJMMS $(2003) : 5, 305-313$, Hindawi Publishing Corp.

[9] W. CHIKOUCHE, Etude spectrale du problème de bilaplacien, Thèse de Magister à l'université de constantine, Alger, (2000).

[10] M. DERGUINE, Sur la régularité des solutions de quelques problèmes aux limites dans des domaines homogènes, Mémoire de Magister à l'université de Farhat Abbas, Alger, (2010).

[11] P. GRISVARD, G. GEYMONAT- Singularities and constructive methods for treatment ,Proceeding Oberwalfach, Springer-Verlag, $(1983), p.123-126$.

[12] P.GRISVARD, Elliptic problems in nonsmooth domains. T. 12. Monographs et studies in Mathematics 21, Pitman, Boston, (1985).

[13] P. GRISVARD, Résolvante du Laplacien dans un polygone et singularités des équations elliptiques ou paraboliques, CRAS, Paris, t.301 Serie I No $5, (1985) p.181-183$.

[14] P. GRISVARD, Boundary value problems in plan polygons. Instructions for use, E.D.F., Bulletin de la Diréction des études et Recherche, serie C, Mathématique No.$1, (1986)$, P.$21-59$.

[15] P. GRISVARD, Le problème de Dirichlet pour les équations de Lamé, C. R. A. S. t.103, p.$71-73, (1986)$.

[16] V.A. KONDRATEV, Boundary problems for Elliptic equation in domains with conical or angular points, Trans. Moscow Maths. SOS., $(1967), P.227-313$.

[17] J. LIONS et E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes III et IV, Annadi Scuola Normale Seperiore di Pisa, Vol. $15, (1961) p.39-101$ et $p.311-326$.

[18] R. LOZI, Résultats numériques de régularité du problème de Stokes et du Laplacien itéré dans un polygone, R.A.I.R.O, Analyse Numérique, Vol. $126=3, (1978), p267-282$.

[19] M. MAFLAH, Calcul des solutions singulières par le système de Lamé dans un polygone plan, Thèse de Magister à l'université de Ferhat Abbas, Alger, (1995).

[20] M. MERIGOT, Régularité L_p des problèmes elliptique dans un secteur plan. Thèse de Doctorat d'état à l'université de Nice, France, (1974).

[21] B. MEROUANI, Comportements singuliers des solutions du système de l'élasticité dans un polygone, Thèse de doctorat, U.S.T.H.B., Alger, (1990).

[22] B. MEROUANI, Quelques problèmes aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan, C.R.A.S., t. 304, série I, No. $13, (1987)$.

[23] B. MEROUANI, Solutions singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour diférentes conditions aux limites, Maghreb math, Rev, Vol 5, Nos 1 et 2, (1996), pp.$95-112$.

[24] B. MEROUANI and R. BOUFENOUCHE, Trigonometric series adapted for the study of dirichlet boundary-value problems of lamé systems ; electronic journal of differential equations, vol. 2015(2015), No. 181, pp. $1-6$. issn : $1072-6691$.

[25] M.A. MOUSSAOUI, Etude dans les espaces de Holder, des problèmes elliptiques dans un secteur plan et dans les espaces de Sobolev d'un problème à dérivée publique dans un polygone plan, Thèse de Doctorat d'état à l'université de Rennes I, (1987).

[26] J. NECAS, Les méthodes directes en Théorie des équations elliptiques, Masson, Paris,(1967).

[27] M. SALMANI, Comportement singulier des solutions du laplacien, bilaplacien et du systeme de Lamé dans un polygone, Thèse de Magister à l'université de Ferhat Abbas, Alger, (1995).

[28] A. TAMI, Etude d'un problème pour le bilaplacien dans une famille d'ouverts du plan, Thèse de Doctorat d'état à l'université d'Aix-Marseille, France, (2016).

[29] D. TENIOU, Divers Problèmes théoriques et numériques liés au système de l'élasticité dans des Domaines non réguliers, Thèse de Doctorat d'état à l'université de Nice, France, (1977).

Abstract:

The aim of this memorandum is to contribute to the study of one of boundary problems gouverned by the bilaplacian in a polygonal bounded domain. In the first, we recall some basic results of the Sobolev space. Then, we consider the boundary problem. And finally, we calculate the singular functions for each case(including the case of the angles π and 2π) in order to gather the main results in a table intended for the users' purpose, thus extending the results of P.Grisvard [14] for the Dirichlet problem. We also calculate the coefficients of singularities in the crack sector ($\omega=2\pi$) and prove convergence of the serie. We give an explicit description of the singularitie of the solution to the Dirichlet problem, then we prove that the singular behavior of solution is gouverned by a transcendental equation similar to that found for the thin plates.

Key-words: Bilaplacian, Diriclet, Transcendental equations, Sobolev spaces, Crack sector, Plate, Polygon, Singularity, Singular functions.

Résumé :

Le but de cette mémoire est de proposer une contribution à l'étude d'un problème aux limites gouvernée par le Bilaplacien dans un polygone plan. Pour cela, on commence à donner quelques propriétés sur les espaces de Sobolev, dans un polygone, dont on aura besoin.

Puis, on pose notre problème aux limites sur lequel on a l'étudier et on montre l'existence et l'unicité de la solution.

À la fin, on calcule les solutions singulières pour chaque cas (y compris les cas des angles π et 2π) dans le but de dresser un tableau, pour ces solutions, prolongeant celui de P.Grisvard [14] concernant le problème de Dirichlet.

On calcule aussi les coefficients de singularité dans le cas de la fissure ($\omega=2\pi$) avec la démonstration de la convergence de la série. On donnera une description explicite des solutions du problème de Dirichlet, tel que on montre que le comportement singulier de la solution est gouverné par une équation transcendante analogue à celle trouvée dans le contexte des plaques.

Mots-clés : Bilaplacien, Dirichlet, Equation transcendante, Espace de Sobolev, Fissure, Plaques, Polygone, Singularité, Solution singulière.

ملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو المساهمة في دراسة أحد المسائل الحدية التي يحكمها مؤثر لابلاس الثنائي في مضلع مستوي و لهذا قمنا أولا بالتذكير ببعض المفاهيم الأساسية لفضاءات سوبوليف و التي نحتاجها خلال هذا العمل ثم طرحنا المسألة الحدية التي نعمل على دراستها، فنبرهن بذلك وجود و وحدانية الحل. و في الأخير تطرقنا لحساب الحلول الشاذة في كل حالة (بما في ذلك حالة الزاويتين π و 2π) من أجل إعداد جدول لهذه الحلول مكملا لجدول ب.قريزفارد [14] الخاص بمسألة ديريكليه. كما نحسب معاملات الشذوذية في حالة الإنشطار ($\omega=2\pi$) مع برهان تقارب هذه السلسلة ، كما نعطي وصفا دقيقا لحلول مسألة ديريكليه، حيث نبين أن السلوك الشاذ للحلول يخضع لمعادلة سامية مشابهة لتلك التي نجدها في موضوع الصفائح.

الكلمات المفتاحية: مؤثر لابلاس الثنائي، الحلول الشاذة، الصفائح، المعادلات السامية، مضلع، تقويم الشذوذية، حالة الإنشطار، ديريكليه، فضاءات سوبوليف.