الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

No Réf :…… ………

Université Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie ***Département de Mathématiques et Informatiques***

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: *Mathématiques*

Spécialité : *Mathématiques Appliquées*

Équations différentielles fractionnaires non linéaires

Préparé par :

- BOUDJENANA Assala
- BOURIBANE Roubaila

Soutenue devant le jury:

MAA	Boubellouta Khadidja	U.Abd Elhafid Boussouf	Président
MAA	Benaouicha Loubna	U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
MAA	Benhabiles Hanane	U.Abd Elhafid Boussouf	Examinatrice

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciements

En tout premier lieu ,nous remercions le bon dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Nous tenons à éxprimer nos profond remerciements à notre encadreur BENAOUICHA.L qui nous a fourni le sujet de ce mémoire et nous a guides de ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il nous a témoignés tout au long de ce travail.

Nous tenons à gratifier aussi les membres de jury pour l'intéret qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail.

Enfin, nous tenons à remerci tous ceux qui ont contribué, de prés ou de loin, à l'aboutissement de ce mémoire .

Assala et Roubaila

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

À mes chers parents à qui je dois compte tout ce travail est le fruit de leur amour, leurs encouragement et sacrifces.

À mes chères soeurs Amira et chams.

À mes chers frères Hicham et Nabil.

À ma chère grand-mère, que dieu la donne une longue vie.

À toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

A celui que j’aime beaucoup qui m’a soutenue tout au long de ce travail: Bilal et bien sur jad, wassim, meriem, lamis, khawla et besma.

Sans oublier mon binome Assala pour son soutien moral, sa patience tout au long de ce travail.

Roubaila.B

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

À l'ètre le plus cher de ma vie, ma mère.

À celui qui a fait de moi la femme que je suis aujourd'hui, mon cher père, paix à son àme.

À mes chères soeurs Salsabila, Insaf et Aicha, que dieu les protège.

À ma chère grand-mère, que dieu la donne une longue vie.

À ma chère binome, Roubaila.

À tous mes amis qui m'ont soutenu.

À tous les cousins et tous membres de la famille, merci pour leur amour et leurs encouragements.

Assala.B

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. Son histoire remonte à l'hôpital (1693) qui se pose la question d'interpréter la dérivée d'ordre 1/2. C'est l'acroix (1879) qui montre que pour $f(x) = x^a$ et $a > 0$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} f(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} x^{a-\frac{1}{2}}$$

Ensuite, Fourier, Liouville, Riemann, Weyl, Riez, Marchaud et caputo, entre autres,ont contribué au développement du calcul fractionnaire dans lequel on définit les dérivées et intégrales non entières.

Les équations différentielles fractionnaires apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, la médecine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs a étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

Les études sur l'existence et l'unicité des solutions sont très abondantes, entre autres les travaux citer Zhang et Benchohra

Le mémoire se compose de trois chapitres qui s'articulent de la façon suivante :

- Dans la première partie du premier chapitre, nous donnons les notions de base du calcul fractionnaire, nous citons par exemple la fonction Gamma, la fonction bêta nous exposons dans la deuxième partie, les définitions et quelques propriétés de l'intégrale et dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, au sens de Caputo, au sens de Grünwald-Letnikov.
- Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter le concept de la transformée de Laplace et certaines de ces propriété, ainsi que la formulation de la transformée de Laplace pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

et Caputo.
Dans le deuxième section de ce chapitre nous étudions l'existence et l'unicité de solution du problème linéaire au sens de Riemann-Liouville. A la fin de ce chapitre, nous allons présenter le résultat d'existence et d'unicité des solutions pour des équation différentielles fractionnaires linéaires a valeur initial(problème de Cauchy).

• Dans le troisième chapitre on présente quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution pour les équations différentielles fractionnaires non linéaires modèle de type Caputo. Les résultats sont basés sur la théorie du point fixe de Banach.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires pour la bonne compréhension de ce mémoire, il est partagé en deux section. la première section comporte certaines fonctions de base utiles comme la fonction Gamma,la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie de calcul fractionnaire. la dexieme section est consacré pour les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo.

1.1 Fonctions mathématiques utiles

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) dans son objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entières. Plus tard, en raison de sa grande importance, elle a été étudiée par d'autres éminents mathématiciens comme Adrien -Marie Legendre (1752-1833), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Christoph Gudermann (1798- 1852), Joseph Liouville (1809-1882), KarlWeierstrass (1815-1897), Charles Hermite (1822-1901) et beaucoup d'autres. La fonction Gamma appartient à la catégorie des fonctions transcendantes spéciales et nous verrons que certaines constantes mathématiques célèbres se produisent dans son étude. Elle apparaît également dans divers domaines, comme les séries asymptotiques, l'intégration définie, série hypergéométrique, fonction zêta de Riemann, théorie des nombres ...Pour plus de détails sur cette fonction.

Définition 1.1.1. *L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler* $\Gamma(\alpha)$.
La fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ *est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_{+\infty}) = +\infty$, $\Gamma(\alpha)$ *est une fonction strictement décroissante pour* $0 < \alpha \leq 1$.

Propriété 1.1.1. *Une propriété importante de la fonction Gamma* $\Gamma(\alpha)$ *est la relation de récurrence suivante :*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{1.2}$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} t^{(\alpha+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt = \left[-t^{\alpha} e^{-t}\right]_{t=0}^{t=+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha\Gamma(\alpha)$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$ *en effet*
$\Gamma(1) = 1$, *et en utilisant (1.2) nous obtenons :*

$$\begin{array}{lllll}
\Gamma(2) & = & 1.\Gamma(1) & = & 1! \\
\Gamma(3) & = & 2.\Gamma(2) & = & 2.1! \; = 2! \\
\Gamma(4) & = & 3.\Gamma(3) & = & 3.2! \; = 3! \\
... & & ... & & ...
\end{array}$$

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n(n-1)! = n! \tag{1.3}$$

Nous montrons maintenant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *De la définition (1.1) nous avons :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Si nous posons $t = y^2$ *alors* $dt = 2ydy$, *et nous obtenons maintenant*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{1.4}$$

De façon analogue, on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{1.5}$$

Si nous multiplions ensemble (1.4) et (1.5) nous obtenons :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy. \tag{1.6}$$

L'équation (1.6) est un intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}drd\theta = \pi. \tag{1.7}$$

Ainsi, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

L'équation fonctionnelle (1.2) entraine pour les entiers relatifs positifs n,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\\ \Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7...(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\\ \Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9...(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5...(2n-1)}\sqrt{\pi}$$

. Aucune expression de base est connue pour $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ *ou* $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$*, mais il a été prouvé que ces chiffres sont transcendantales (respectivement par le Lionnais en 1983 et Chudnovsky en 1984)*

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 1.772453850905516027298167483341145182797549456122387...\\ \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) &= 2.678938534707747633655692940974677644128689377957301...\\ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) &= 3.625609908221908311930685155867672002995167682880065...\\ \Gamma\left(\frac{1}{5}\right) &= 4.590843711998803053204758275929152003434109998293403...\end{aligned}$$

1.1.2 Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n)} \tag{1.8}$$

Où nous supposons que $Re(\alpha) > 0$

pour prouver (1.8), nous introduisons la fonction auxiliaire suivante :

$$f_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{\alpha-1}dt \tag{1.9}$$

Effectuant maintenant la substitution $\tau = \frac{t}{n}$, puis en répétant l'intégration par partie, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= n^{\alpha} \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{n^{\alpha}}{\alpha} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^{\alpha} d\tau \\ &= \frac{n^{\alpha} n!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)} \int_0^1 \tau^{\alpha+n-1} d\tau \\ &= \frac{n^{\alpha} n!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)(\alpha+n)} \end{aligned} \tag{1.10}$$

En exploitant la limite connue :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \tag{1.11}$$

nous arrivons à :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{\alpha-1}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \tag{1.12}$$

Ce qui termine la preuve de la présentation (1.8) de la fonction Gamma, si la relation (1.12) est justifiée. Pour ce faire, nous estimons la différence

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt - f_n(\alpha) \\ &= \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{\alpha-1}dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Prenons un $\epsilon > 0$ arbitraire. En raison de la convergence de l'intégrale (1.1), il existe un N tel que pour $n \geq N$, on a

$$\left|\int_n^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt\right| \leq \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt < \frac{\epsilon}{3} \qquad (x = Re(\alpha)) \tag{1.14}$$

Fixons maintenant N et considérons $n > N$, nous pouvons écrire Δ comme une somme de trois intégrales :

$$\Delta = \left(\int_0^N + \int_N^n\right)\left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{\alpha-1}dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt \tag{1.15}$$

Le dernier terme est inférieur à $\frac{\epsilon}{3}$ pour le seconde intégrale, nous avons :

$$\left|\int_N^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{\alpha-1}dt\right| \leq \int_N^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{\alpha-1}dt < \int_N^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt < \frac{\epsilon}{3} \tag{1.16}$$

où comme ci dessus, $(x = Re(\alpha))$
Pour l'estimation de la première intégrale dans (1.15) nous besoin de l'inégalité auxiliaire suivante :

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}, \qquad (0 < t < n) \tag{1.17}$$

qui découle, des relations :

$$1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \int_0^t e^{\tau}\left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n}d\tau \tag{1.18}$$

et

$$0 < \int_0^t e^{\tau}\left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n}d\tau < \int_0^t e^{\tau}\frac{\tau}{n}d\tau = e^t\frac{t^2}{2n} \tag{1.19}$$

(La relation (1.18) peut être vérifiée en différenciant les deux cotés).
En utilisant l'intégrale auxiliaire (1.17), nous obtenons pour n assez grand et N fixé :

$$\left|\int_0^N \left[e^{-t}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{\alpha-1}dt\right| < \frac{1}{2n}\int_0^N t^{x+1}dt < \frac{\epsilon}{3} \tag{1.20}$$

En tenant compte des inégalités (1.14), (1.16) et (1.20) et que ϵ arbitraire, nous concluons que (1.12) est justifiée.
Ceci termine certainement la preuve de la formule(1.18)pour $Re(\alpha) > 0$.

À l'aide de (1.2), la condition $Re(\alpha) > 0$. Peut être affaiblie pour $\alpha \neq 0, -1, -2...$ de la manière suivante :
Si $-m < Re(\alpha) < -m + 1$, où m est nombre entier positif, alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+m-1)} \\
&= \frac{1}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+m-1)} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha+m} n!}{(\alpha+m)...(\alpha+m+n)} \\
&= \frac{1}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+m-1)} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-m)^{\alpha+m}(n-m)!}{(\alpha+m)(\alpha+m+1)(\alpha+n)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha} n!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n)} \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Par conséquent, la représentation est vraie pour tout $\alpha, \alpha \neq 0, -1, -2...$

1.1.3 La fonction Bêta

Dans de nombreux cas il est plus commode d'employer la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison des valeurs de la fonction Gamma.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt, \qquad (Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0) \qquad (1.22)$$

Elle peut prendre aussi les formes intégrales suivantes :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{1}{a^{\alpha+\beta-1}} \int_0^{\alpha} \frac{t^{\alpha+1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt$$
$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} \sin^{2\alpha-1}(\theta) \cos^{2\beta-1}(\theta) d\theta$$

Propriété 1.1.2. *la fonction Bêta symétrique c'est-à-dire que* $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$
la fonction Bêta est reliée au fonction Gamma par la relation suivante : $\forall \alpha, \beta > 0$ *on a :*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad (1.23)$$

Preuve. *On montre la première propriété :*
on a :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt; \quad \forall \alpha, \beta > 0$$

on fait le changement de variable :$u = 1 - t$ *donc* $dt = -du$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (u-1)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du = B(\beta,\alpha); \quad \forall \alpha,\beta > 0$$

On montre la deuxième propriété :
soit $\alpha, \beta > 0$ *tel que :*

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t_1^{\alpha-1}t_2^{\beta-1}e^{-t_1}e^{-t_2} \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{\alpha-1}dt_1 \int_0^{+\infty} t_2^{\beta-1}e^{(-t_1+t_2)}dt_2\end{aligned}$$

on fait le changement de variable suivant $t_2' = t_1 + t_2$ *alors :*

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{+\infty} t_1^{\alpha-1}dt_1 \int_0^{+\infty} (t_2' - t_1)^{\beta-1}e^{-t_2'}dt_2' \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'}dt_2' \int_0^{t_1} (t_2' - t_1)^{\beta-1}t_1^{\alpha-1}dt_1\end{aligned}$$

on pose :$t_1' = \frac{t_1}{t_2'}$ donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'}dt_2' \int_0^1 (t_1't_2')^{\alpha-1}(t_2' - t_1't_2')^{\beta-1}t_2'dt_1' \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'}dt_2' \int_0^1 (t_2')^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) \\ &= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

1.1.4 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle $\exp(\alpha)$, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{1.24}$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètre, joue un rôle très important dans la théorie de calcul fractionnaire .Cette fonction a été introduite par

Agarwal et Erdelyi en 1953-1954 et elle définie par un développement en série suivante :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{1.25}$$

A partir de la relation (1.24), on trouve les relations suivantes :

$$E_{\alpha,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(t). \tag{1.26}$$

$$E_{1,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t. \tag{1.27}$$

$$E_{1,2}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^t - 1}{t} \tag{1.28}$$

$$E_{1,3}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+2)!} = \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^t - 1 - t}{t^2}, \tag{1.29}$$

et en général

$$E_{1,p}(t) = \frac{1}{t^{p-1}} \left\{ e^t - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{t^k}{k!} \right\} \tag{1.30}$$

Les cosinus et les sinus hyperboliques sont aussi des cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler(1.24)

$$E_{2,1}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cosh(t) \tag{1.31}$$

$$E_{2,2}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(t)}{t} \tag{1.32}$$

Pour les équation différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

1.2 Dérivées et intégrales fractionnaires

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions.

Dans cette section, on introduira l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les trois définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires à savoir celle de Riemann-Liouville, Grunwald-letnikov et de Caputo, en donnant les propriétés les plus importantes de ces notions.

1.2.1 Dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires.

La dérivée première d'une fonction f au point t est donnée par :

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{1.33}$$

Par dérivation successive de la fonction f, on obtient une généralisation de la formule (1.33) à l'ordre n (n est un entier positif ou nul)de la forme :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh) \tag{1.34}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

La formule(1.34)représente la dérivée d'ordre entier n , si n est positif et l'intégrale répétée n fois si n est négatif.

Grâce à la propriété fondamentale $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, on peut arriver à une expression plus générale dans le cas où n est négatif ou nul

$$(-1)^k \binom{n}{k} = \frac{-n(1-n)...(k-n-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)}$$

On définit donc la dérivée d'ordre non entier α par :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{1.35}$$

et

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{1.36}$$

Les formules (1.35) et (1.36) définissent respectivement les dérivées fractionnaires d'ordre α et d'ordre $(-\alpha)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f, où f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, t]$.
Si f est de classe C^m, des intégrations par parties (1.35) et (1.36) nous permit d'écrire :

$${}_a^G D_t^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \tag{1.37}$$

et

$${}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \tag{1.38}$$

La formule (1.37) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}(t), (k = 1, 2, ..., m)$ sont continues sur l'intervalle fermé $[a, t]$ et que m est un entier vérifiant la condition $m > \alpha$. La plus petite valeur possible de m est déterminée par l'inégalité suivante :

$$m - 1 < \alpha < m$$

Dérivée fractionnaire de $(t-a)^\alpha$

Calculons la dérivée fractionnaire ${}_a^G D_t^p f(t)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction polynômiale

$$f(t) = (t-a)^\alpha$$

où α est un nombre réel.
On va commencer par considérer des valeurs négatives de p, c'est-à-dire qu'on va commencer par évaluer l'intégrale fractionnaire d'ordre $(-p)$.
Utilisons la formule (1.35) :

$${}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau \tag{1.39}$$

et supposons $\alpha > -1$ pour la convergence de l'intégrale.En effectuant dans (1.39), le changement de variables $\tau = a+\xi(t-a)$ et en utilisant la définition (1.22) de la fonction Bêta on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(-p)}(t-a)^{\alpha-p}\int_a^t \xi^\alpha (1-\xi)^{-p-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} B(-p,\alpha+1)(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}, (p<0, \alpha>-1) \end{aligned} \tag{1.40}$$

Considérons maintenant le cas :$0 \leq m \leq p < m+1$.Pour appliquer la formule (1.37) on a besoin d'imposer $\alpha > m$ pour la convergence de l'intégrale dans (1.37). Alors on a :

$${}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^\alpha}{d\tau^{m+1}} d\tau. \tag{1.41}$$

En tenant compte de

$$\frac{d^{m+1}(\tau-a)^\alpha}{d\tau^{m+1}} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-m)(\tau-a)^{\alpha-m+1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha-m}(\tau-a)^{\alpha-m+1}$$

.

et en effectuant le changement de variables $\tau = a+\xi(t-a)$, on arrive à :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-m)\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}(\tau-a)^{\alpha-m-1} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(-p+m+1,\alpha-m)}{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(-p+m+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-p+\alpha+1)}(t-a)^{\alpha-p} \end{aligned} \tag{1.42}$$

Notons que l'expression (1.42) est formellement identique à l'expression (1.40), on peut donc conclure que la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction polynômiale $f(t) = (t-a)^\alpha$ est donnée par la formule :

$${}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-p+\alpha+1)}(t-a)^{\alpha-p}, \tag{1.43}$$

avec $(p<0, \alpha>-1)$ ou bien $(0 \leq m \leq p < m+1, \alpha > m)$.

Dérivée fractionnaire d'une constante

La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'une fonction constante est en général ni nulle ni constante, en effet :
Si $f(t) = C$ et α non entier, on a $f^k(t) = 0$ pour $k = 1, 2, ..., m$ et donc,

$$\begin{aligned}
{}_a^G D_t^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\
&= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}}_{0} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau}_{0} \\
&= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}
\end{aligned}$$

Composition avec les dérivées d'ordre entier

Proposition 1.1. *Soient m un entier strictement positif et p non entier. Alors :*

$$\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^G D_t^p f(t)\right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) \tag{1.44}$$

et

$${}_a^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)} \tag{1.45}$$

Preuve. *Pour $n-1 < p < n$, on a d'une part :*

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^G D_t^p f(t)\right) = &\sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

autrement dit

$$\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^G D_t^p f(t)\right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t)$$

et d'autre part,

$$
\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(m+k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\
&- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}
\end{aligned}
$$

alors,

$$
{}_a^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}
$$

Ce qui veut dire que, la dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, ..., m-1$.

Composition avec les dérivées fractionnaire

Proposition 1.2. *Trois cas sont à distinguer :*
1.Pour $q < 0$ et $p \in \mathbb{R}$, on a :

$$
{}_a^G D_t^p \left({}_a^G D_t^q (f(t)) \right) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)
$$

2.Si $0 \leq m < q < m+1, p < 0$ et la fonction $f(t)$ vérifie les conditions

$$
f^{(k)}(a) = 0, \textit{pour tout } k = 0, 1, 2, ..., m-1
$$

alors

$$
{}_a^G D_t^p \left({}_a^G D_t^q (f(t)) \right) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)
$$

3. Si $0 \leq m < q < m+1, 0 \leq n < p < n+1$ et la fonction $f(t)$ vérifie les conditions

$$
f^{(k)}(a) = 0, \textit{pour tout } k = 0, 1, 2, ..., r-1, \textit{où } \ r = \max(m, n)
$$

alors,

$$
{}_a^G D_t^p \left({}_a^G D_t^q (f(t)) \right) = {}_a^G D_t^q \left({}_a^G D_t^p (f(t)) \right) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)
$$

1.2.2 Dérivées et intégrales fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Dans cette partie, nous citons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Nous allons commencer par la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville.

Intégrale d'ordre arbitraire

soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$(ou à valeurs vectorielles) une fonction continue.b pouvant être fini ou infini.
Une primitive de f est donnée par l'expression

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t)dt \right) ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini ,on peut écrire

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau$$

en itérant, on arrive à :

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau.$$

Définition 1.1. *soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale définie par la formule suivante :*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \tag{1.46}$$

où α est un nombre réel ou complexe.

Remarque 1. *La formule (1.46) est une généralisation de la n-ième primitive avec un ordre de primitivation α non entier.*

Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Soit la fonction$f(t) = (t-a)^{\beta}$ où $\beta > -1$

$$I_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta} d\tau$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variables $\tau = a + (t-a)s$

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} t^{\beta} dt \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} \end{aligned} \tag{1.47}$$

La relation (1.47) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par :

$$ {}_a^R D_t^{-\alpha} C = I_a^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^{\alpha}$$

Et en particulier,si $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\ {}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\ {}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}} \end{aligned}$$

Proposition 1.3. *Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0([a,b])$*

i- $I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f) = I_a^{\alpha+\beta} f, \qquad (Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0)$

ii- $\dfrac{d}{dt}(I_a^{\alpha} f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t), \qquad (Re(\alpha) > 1)$

iii- $\lim_{\alpha \to 0^+} (I_a^\alpha f)(t) = f(t), \qquad (Re(\alpha) > 0)$

Preuve. *i) Pour la démonstration on utilise la fonction Bêta d'Euler. En effet :*

$$[I_a^\alpha (I_a^\beta f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds$$

en utilisant le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$$[I_a^\alpha (I_a^\beta f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right] d\tau$$

Le changement de variable $s = \tau + (t-\tau)\mu$,*nous donnons*

$$\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds = (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu$$
$$= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

D'où

$$[I_a^\alpha (I_a^\beta f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t)$$

ii) Pour justifier la deuxième identité on utilise les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et la relation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler :
$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$.
iii) pour la dernière identité, on considère la fonction $f \in C^0([a,b])$, *on a*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

De l'exemple (1.47) on peut écrire

$$(I_a^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \longrightarrow 1 \; quand \, \alpha \to 0^+$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|(I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t)d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau \qquad (1.48)
\end{aligned}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a,b)$ qui nous permet d'écrire

$$\forall t, \tau \in [a,b), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \varepsilon$$

Ce qui entraine

$$\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau \leq \varepsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \frac{\varepsilon\delta^\alpha}{\alpha} \qquad (1.49)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau)-f(t)|d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1}(|f(\tau)|+|f(t)|)d\tau \\
&\leq 2\sup_{\xi\in[a,t]}|f(\xi)|\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau \quad \forall t \in [a,b) \\
&= 2M\left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha}\right), \text{où } M = \sup_{\xi\in[a,t]}|f(\xi)| \\
&\qquad (1.50)
\end{aligned}$$

Une combinaison de (1.51),(1.52) et (1.53) donne :

$$\begin{aligned}
\left|(I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t)\right| &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}[\varepsilon\delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[\varepsilon\delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)]
\end{aligned}$$

en faisant tendre α vers 0^+ , on obtient :

$$\lim_{\alpha\to0^+}\left|(I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t)\right| \leq \varepsilon$$

autrement dit :
$$\left|\lim_{\alpha\to 0^+}(I_a^\alpha f)(t)-f(t)\right|\leq \varepsilon, \forall\varepsilon>0$$
c'est-à-dire que :
$$\lim_{\alpha\to 0^+}(I_a^\alpha f)(t)=f(t)$$

Dérivées d'ordre arbitraire

Définition 1.2. *Soit $\alpha\in[m-1,m]$ avec $m\in\mathbb{N}^*$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par :*

$$\begin{aligned}{}_a^RD_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m[(I_a^{m-\alpha}f)(t)]\\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau \end{aligned}\tag{1.51}$$

Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Calculons la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)=(t-a)^\beta$. Par la formule (1.47) on peut écrire :

$$\begin{aligned}{}_a^RD_t^\alpha (t-a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta+m-\alpha}\right]\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^m(t-a)^{\beta+m-\alpha}\end{aligned}\tag{1.52}$$

On sait que :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m(t-a)^{\beta+m-\alpha}=(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha}\tag{1.53}$$

Par substitution de (1.56) dans (1.55) on obtient :

$$\begin{aligned}{}_a^RD_t^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha-1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha-1)}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}\tag{1.54}$$

Remarque 2. *i) Pour $\alpha = 1$, la formule de dérivation (1.57) se réduit à*

$$ {}_a^R D_t^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^\beta. \qquad (1.55)$$

ii) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$$ {}_a^R D_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

. C'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas ni nulle ni constante ! mais on a :

$$ {}_a^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

.

Définition 1.3. ***(Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)***

$$\forall t > a, \quad {}_a^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

.

Définition 1.4. ***(Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)***

$$\forall t > a, \quad {}_a^R D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

.

Les deux définitions précédentes utilisent le passé de f c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $a < \tau < t$. Nous pouvons définir des opérateurs similaires, qui utilisent le futur f, c'est-à-dire les valeurs de$f(\tau)$ pour $t < \tau < b$. On définit ensuite les deux opérateurs suivants :

Définition 1.5. ***(Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)***

$$\forall t < b, \quad {}_b^R D_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau - t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau$$

Définition 1.6. ***(Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)***

$$\forall t < b, \quad {}_b^R D_t^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \int_t^b (\tau - t)^{m-\beta-1} f(\tau) d\tau$$

Notons bien que$f$ est une fonction telle que${}_a^R D_t^\alpha f(t)$ et ${}_b^R D_t^\beta f(t)$ sont définies.

Compositions

Proposition 1.4.

1- *(Composition avec les intégrales fractionnaires) Pour $p > 0$ et $t > 0$*

$$ {}_a^R D_t^p ({}_a^R D_t^{-p} f(t)) = {}_a^R D_t^p (I_a^p f(t)) = f(t) \tag{1.56}$$

qui signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville est inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du même ordre.

Preuve. *pour $p = m \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^m ({}_a^R D_t^{-m} f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $m - 1 \leq p < m$ et utilisons le règle de composition des intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, on a donc :

$$ {}_a^R D_t^{-m} f(t) = {}_a^R D_t^{-(m-p)} ({}_a^R D_t^{-p} f(t))$$

d'où

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^m ({}_a^R D_t^{-m} f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m} \{ {}_a^R D_t^{-(m-p)} ({}_a^R D_t^{-p} f(t)) \} \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \{ {}_a^R D_t^{-m} f(t)) \} = f(t) \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de (1.60). Et en général on a :

$$ {}_a^R D_t^p \left({}_a^R D_t^{-q} f(t) \right) = {}_a^R D_t^{p-q} f(t). \tag{1.57}$$

2- *Si la dérivée fractionnaire ${}_a^R D_t^m f(t), (m - 1 < p < m)$, d'une fonction $f(t)$ est intégrable, alors :*

$$ {}_a^R D_t^{-p} \left({}_a^R D_t^p f(t) \right) = f(t) - \sum_{i=1}^{m} [{}_a^R D_t^{p-i} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i}}{\Gamma(p-i+1)}. \tag{1.58}$$

Preuve. *D'une part, on a*

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^{-p} \left({}_a^R D_t^p f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} {}_a^R D_\tau^p f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p} {}_a^R D_\tau^p f(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \tag{1.59}$$

D'autre part, en effectuant des intégrations par parties répétées et en exploitant (1.48), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p {}_a^R D_\tau^p f(\tau)d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p \frac{d^m}{dt^m}\{{}_a^R D_\tau^{-(m-p)} f(\tau)\}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-m}\{{}_a^R D_\tau^{-(m-p)} f(\tau)\}d\tau \\
&\quad -\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{d^{m-i}}{dt^{m-i}}({}_a^R D_t^{-(m-p)} f(t))\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-m}\{{}_a^R D_\tau^{-(m-p)} f(\tau)\}d\tau \\
&\quad -\sum_{i=1}^{m}\left[{}_a^R D_t^{(p-i)} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)} \\
&= {}_a^R D_t^{-(p-m-1)}\left({}_a^R D_t^{-(m-p)} f(t)\right) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{m}\left[{}_a^R D_t^{(p-i)} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)} \\
&= {}_a^R D_t^{-1} f(t) - \sum_{i=1}^{m}\left[{}_a^R D_t^{(p-i)} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)}
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Par substitution de (1.63) dans (1.62) on arrive à la relation (1.61)

3- *Si* $0 \le m-1 \le q \le m$, *on a :*

$$ {}_a^R D_t^{-p}({}_a^R D_t^q f(t)) = {}_a^R D_t^{q-p} f(t) - \sum_{i=1}^{m}\left[{}_a^R D_t^{(q-i)} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-i}}{\Gamma(p-i+1)} \tag{1.61}$$

Preuve. *Pour prouver la relation (1.64), nous exploitons les relations (1.49), (1.61) et (1.62) et nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
{}_a^R D_t^{-p}({}_a^R D_t^q f(t)) &= {}_a^R D_t^{q-p}\left\{{}_a^R D_t^{-q}\left({}_a^R D_t^q f(t)\right)\right\} \\
&= {}_a^R D_t^{q-p}\left\{f(t) - \sum_{i=1}^{m}\left[{}_a^R D_t^{(q-i)} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{q-i}}{\Gamma(q-i+1)}\right\} \\
&= {}_a^R D_t^{q-p} f(t) - \sum_{i=1}^{m}\left[{}_a^R D_t^{(q-i)} f(t)\right]_{t=a} {}_a^R D_t^{q-p}\left\{\frac{(t-a)^{q-i}}{\Gamma(q-i+1)}\right\} \\
&= {}_a^R D_t^{q-p} f(t) - \sum_{i=1}^{m}\left[{}_a^R D_t^{(q-i)} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-i}}{\Gamma(p-i+1)}
\end{aligned}$$

Comme la dérivation et l'intégration d'ordre entier, la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en général.

4- *(Composition avec les dérivées d'ordre entier)*
La composition de la dérivée au sens de Riemann-Liouville avec des dérivées d'ordre entier apparait dans plusieurs problèmes appliqués
En utilisant la définition de (1.54) de la dérivée de Riemann-Liouville, on obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a^R D_t^\alpha f(t)\right) &= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)d\tau\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma((n+m)-(n+\alpha))}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)d\tau \\
&= {}_a^R D_t^{n+\alpha} f(t) \qquad (1.62)
\end{aligned}$$

Maintenant, nous considérons l'ordre inverse des opérateurs. En tenant compte du fait que

$$\begin{aligned}
{}_a^R D_t^{-n} f^{(n)}(t) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau \\
&= f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{\Gamma(i+1)} \qquad (1.63)
\end{aligned}$$

et que

$$ {}_a^R D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^{\alpha+n}\left({}_a^R D_t^{-n} f(t)\right) \qquad (1.64)$$

Une combinaison de (1.66), (1.67) et (1.57) nous donne :

$$\begin{aligned}
{}_a^R D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) &= {}_a^R D_t^{\alpha+n}\left({}_a^R D_t^{-n} f^{(n)}(t)\right) \\
&= {}_a^R D_t^{\alpha+n}\left\{f(t) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{\Gamma(i+1)}\right\} \\
&= {}_a^R D_t^{\alpha+n} f(t) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha-n}}{\Gamma(i+i-\alpha-n)}. \qquad (1.65)
\end{aligned}$$

On déduit alors que la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivation d'ordre entier ne commutent que si $f^{(i)}(a) = 0$, pour tout $i = 0, 1, 2, ..., n-1$

5- *(Composition avec les dérivées fractionnaires)*

Soient $n-1 \leq p < n$ et $m-1 \leq q < m$. En utilisant la définition (1.54) de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, les formules (1.61) et(1.65), on aura :

$$\begin{aligned}
{}_a^R D_t^p \left({}_a^R D_t^q f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_a^R D_t^{-(m-p)}\left({}_a^R D_t^q f(t)\right)\right\} \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_a^R D_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[{}_a^R D_t^{q-i} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{m-p-i}}{\Gamma(1+m-p-i)}\right\} \\
&= {}_a^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[{}_a^R D_t^{q-i} f(t)\right]_{t-a}\frac{(t-a)^{-p-i}}{\Gamma(1+-p-i)}
\end{aligned} \tag{1.66}$$

En permutant p et q, la relation (1.69) donne

$${}_a^R D_t^q \left({}_a^R D_t^p f(t)\right) = {}_a^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{i=1}^{m}\left[{}_a^R D_t^{p-i} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-i}}{\Gamma(1-q-i)} \tag{1.67}$$

Une comparaison des relations (1.69) et (1.70), montre que les deux opérateurs des dérivations fractionnaires ${}_a^R D_t^p$ et ${}_a^R D_t^q$ ne commutent que si $p=q$ ou si les conditions suivantes sont vérifiées simultanément

$$\left[{}_a^R D_t^{p-i} f(t)\right]_{t=a} = 0, \quad \text{pour tout} \;\; i = 0,1,2,...,m \tag{1.68}$$

et

$$\left[{}_a^R D_t^{q-i} f(t)\right]_{t=a} = 0, \quad \text{pour tout} \;\; i = 0,1,2,...,n \tag{1.69}$$

Proposition 1.5. *Soit α, β tels que $n-1 < \alpha \leq n$, $m-1 < \beta \leq m$ tel que $n, m \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Pour $f \in L_1([0,T]), T > 0$, l'égalité :*

$${}_a^R D_t^{\alpha}(I^{\alpha} f(t)) = f(t),$$

est vraie pour presque tout $t \in [0,T]$.

2. *Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L_1([0,T]), T > 0$,la relation :*

$${}_a^R D_t^{\beta}(I^{\alpha} f(t)) = I^{\alpha-\beta} f(t)$$

est vraie presque partout sur $t \in [0,T]$.
En particulier, lorsque $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $\alpha > k$, alors :

$${}_a^R D_t^{k}(I^{\alpha} f(t)) = I^{\alpha-k} f(t).$$

3. Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire ${}_a^R D_t^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a :

$$ {}_a^R D_t^{\beta}(I^{\alpha} f(t)) = {}_a^R D_t^{\beta-\alpha} f(t). $$

4. Pour $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$.Si les dérivées fractionnaires ${}_a^R D^{\alpha} f$ et ${}_a^R D_t^{k+\alpha} f$ existent, alors :

$$ {}_a^R D_t^{\alpha}({}_a^R D_t^{\alpha} f(t)) = D^{k+\alpha} f(t) $$

Remarque 3. *Si f est de classe C^m, alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées on obtient :*

$$ \begin{aligned} {}_a^R D_t^p f(t) &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-p}}{\Gamma(i-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= {}_a D_t^{p-i} f(t) \end{aligned} $$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

1.2.3 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

Dans le développement de la théorie des intégrations et des dérivations fractionnaires ainsi que ses applications en mathématiques pures, la définition de Riemann-Liouville a joué un rôle très important. Néanmoins, les résolutions des problèmes physiques requièrent une certaine révision de cette approche bien établie. Plusieurs travaux sont apparus, notamment en diffusion et en électricité où la dérivation fractionnaire est utilisée pour mieux décrire certaines propriétés physiques.
En général, les problèmes appliqués requièrent des définitions permettant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement.
Malheureusement, la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville conduit à des conditions initiales de types fractionnaires qui sont difficiles à interpréter physiquement. En dépit du fait qu'un tel problème de valeur ou condition initiale peut être bien résolu en utilisant une représentation diffusive. Cependant, Sabatier et al montrent que ni l'approche de Riemann-Liouville, ni l'approche de Caputo ne peuvent être utiliser pour prendre en compte les conditions initiales d'une manière commode d'un point de vue physique. Pour éventuellement pallier à cette situation, Caputo dans propose une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire qui porte d'ailleurs son nom et qui incorpore les conditions initiales de la fonction à traiter, ainsi que ses dérivées entières. Cette approche a été adoptée par Caputo et Mainardi dans leurs travaux en viscoélasticité.

Définition 1.7. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f(t)$ donnée sur l'intervalle $[a,b]$ est définie par la relation suivante :*

$$
{}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(\tau)d\tau \tag{1.70}
$$

avec $m \in \mathbb{N}$ et $m = [\alpha]+1$ où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Remarque 4. *L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.*

Définition 1.8. ***(Dérivées fractionnaire de Caputo à gauche)***

$$
\forall t > a, {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(\tau)d\tau
$$

(**Dérivée fractionnaire de Caputo à droite**)

Définition 1.9.

$$
\forall t < b, {}_{b}^{C}D_{t}^{\beta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)}(-1)^{m}\int_{t}^{b}(t-\tau)^{m-\beta-1}f^{(m)}(\tau)d\tau
$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t)$ et ${}_{b}^{C}D_{t}^{\beta}f(t)$ sont définies.

Les opérateurs dont l'intégrale porte sur $[a,t]$ (respectivement $[t,b]$)seront qualifiés d'opérateurs passés(respectivement opérateurs futurs)

Relation avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{*}, m \in \mathbb{N}^{*}$ et $m = [\alpha]+1$. Si ${}_{a}^{C}D_{t}^{p}f(t)$ et ${}_{a}^{R}D_{t}^{p}f(t)$ existent, alors :

$$
i) \quad {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}f(t) - \sum_{i=0}^{m-1}\frac{f^{i}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}, \tag{1.71}
$$

on déduit que si $f^{i}(a) = 0$ pour tout $i = 0,1,2,...,m-1$, on aura ${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}f(t)$.

$$
ii) \quad {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{i=0}^{m-1}\frac{f^{i}(a)}{i!}(t-a)^{i}\right) \tag{1.72}
$$

2) Si $0 < \alpha < 1$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont définies respectivement par :

$$
\begin{aligned}
{}_a^R D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt}\left({}_a^R D_t^{-(1-\alpha)} f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)d\tau \qquad (1.73)\\
= {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^{-(1-\alpha)}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau)d\tau \qquad (1.74)
\end{aligned}
$$

et on a les propriétés suivantes :

Propriétés

1)

$$
\begin{aligned}
{}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau)d\tau\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + {}_a^C D_t^\alpha f(t) \qquad (1.75)
\end{aligned}
$$

2)

$$
{}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha \left(f(t) - f(a)\right) \qquad (1.76)
$$

3) Si f est continue sur $[a, b]$, alors

$$
{}_a^C D_t^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t) \qquad (1.77)
$$

4) Si $f \in C^m[a, b]$, alors

$$
I_a^\alpha {}_a^C D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^i(a)}{i!}(t-a)^i \qquad (1.78)
$$

Alors, l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Caputo du même ordre, mais il n'est pas un inverse droit.

Exemple 1.2.1. *Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$, m un entier et p un réel tels que $0 \leq m-1 < p < m$ avec $\beta > m-1$*
On a

$$
f^m(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)}(\tau-a)^{\beta-m}
$$

donc

$$
{}_a^C D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-m}d\tau
$$

en effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_t^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-m} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{m-\alpha-1} s^{\beta-\alpha} ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)B(m-\alpha,\beta-m+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \qquad (1.79)
\end{aligned}$$

Remarque 5. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle ,autrement dit : ${}_a^C D_t^{\alpha} C = 0$.*

Propriétés des dérivées fractionnaires

Dans cette partie, nous intéressons aux propriétés de dérivation et d'intégration fractionnaire, qui sont utilisées à la suite de ce mémoire.

1-Linéarité

La dérivation fractionnaire est un opérateur linéaire :

$$D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t) \qquad (1.80)$$

où D^p désigne n'importe quelle approche de dérivation fractionnaire considérée dans ce mémoire.

La linéarité de la dérivation fractionnaire découle de la définition correspondante. Par exemple, pour les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov définies par la formule (1.35), on a :

$$ {}_a D_t^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} (\lambda f(t-rh) + \mu g(t-rh)) \qquad (1.81)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \qquad (1.82) \\
&+ \mu \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} g(t-rh) \qquad (1.83) \\
&= \lambda {}_a D_t^p f(t) + \mu {}_a D_t^p g(t) \qquad (1.84)
\end{aligned}$$

et pour les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $p(k-1 \leq p < k)$ définies par la formule (1.54), on a

$$\begin{aligned}
{}_a^R D_t^p \left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} \left(\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)\right) d\tau \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau \\
&+ \frac{\mu}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} g(\tau) d\tau \\
&= \lambda_a {}_a^R D_t^p f(t) + \mu_a {}_a^R D_t^p g(t).
\end{aligned}$$

2-Règle de Leibniz

En partant de la règle connue de Leibniz pour calculer la dérivée n-ième du produit de deux fonctions $f(t)\ g(t)$, on a pour tout entier n :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t) \tag{1.85}$$

Cette formule se généralise en remplaçant l'entier n par un paramètre réel p. Dans le membre à droite de (1.88) à la formule :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t) - R_n^p(t), \quad n \geq p+1 \tag{1.86}$$

où

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!}\Gamma(-p) \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)(t-\xi)^n d\xi \tag{1.87}$$

avec

$$\lim_{n \to +\infty} R_n^p(t) = 0$$

Si f et g avec toutes ses dérivées sont continues sur $[a, t]$, la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire s'écrit sous la forme.

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t) \tag{1.88}$$

D^p désigne la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov ou au sens de Riemann-Liouville.

CHAPITRE 2

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FRACTIONNAIRE LINÉAIRE

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques théorèmes d'existence et d'unicité de solution de problème à valeurs initiales des EDFs linéaires au sens de Riemann-Liouville, et aussi le problème de Cauchy linéaire d'ordre fractionnaire.

2.1 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

2.1.1 Outils de base de la transformée de Laplace

rappelons quelques outils de base de la transformée de Laplace la fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{2.1}$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$. laquelle est appelée l'originale. pour l'existence de l'intégrale (2.1) la fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel α. Ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que :

$$e^{-\alpha t}|f(t)| \leq M \quad \text{pour tout} \quad t > T$$

En d'autre termes, la fonction $f(t)$ ne doit n croitre ou décroitre n plus vite qu'une certaine fonction exponentielle quand $t \to \infty$.

On notera les transformées de Laplace par des lettres majuscules et les originales par des lettres minuscules. L'originale $f(t)$ peut être reconsituée a partir de la transformée de Laplace $F(s)$ à l'aide de la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \;\; c = Re(s) > c_0 \tag{2.2}$$

Où c_0 réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (2.1).
Le calcul directe de la transformée de Laplace inverse en utilisant la formule (2.2) est "souvent compliqué" ; cependant, parfois elle donne une information utile sur le comportement de l'inconnue originale $f(t)$ qu'on cherche. La transformée de Laplace de la convolution

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \tag{2.3}$$

de deux fonction $f(t)$ et $g(t)$ qui sont égale à zéro pour $t < 0$, est égale au produit de leurs transformée de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s) \tag{2.4}$$

Sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent. On utilisera la propriété (2.4) pour calculer la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.
Une autre propriété utile dont on aura besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire d'un ordre entier n de la fonction $f(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^n(t); s\} &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned} \tag{2.5}$$

qui peut être obtenue de la définition (2.1) par intégration par parties sous l'hypothèse que les intégrales correspondantes existent.
Dans les sections qui suivent sur les transformées de Laplace des dérivées fractionnaires, nous supposerons que la borne inférieure $a = 0$.

2.1.2 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaire de Grünwald-Letnikov

Supposons que f admet une transformée de Laplace $F(s)$, alors, d'après la formule (1.37) avec $a = 0$ on a pour $0 \leq p < 1$.

$$ {}_{0}^{G}D_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau \tag{2.6} $$

alors,

$$ \mathcal{L}\{{}_{0}^{G}D_{t}^{\alpha} f(t); s\} = \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1*p}}(sF(s) - f(0)) = s^{p} F(s) \tag{2.7} $$

Dans les applications, il faut savoir que la formule (2.7) a un sens dans le cas classique seulement pour $0 < p < 1$, mais pour $p > 1$ elle a lieu au sens des distributions.

2.1.3 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$.

$$ {}_{0}^{R}D_{t}^{\alpha} f(t) = \int_{0}^{mat} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) \tag{2.8} $$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$ G(s)\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \tag{2.9} $$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et au sens de Grünwald-Letnikov.

$$ \mathcal{L}\{{}_{0}^{R}D_{t}^{\alpha} f(t); s\} = \mathcal{L}\{{}_{0}^{G}D_{t}^{\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \tag{2.10} $$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$, posons

$$ {}_{0}^{R}D_{t}^{\alpha} f(t) = g^{(n)}(t) \tag{2.11} $$

ce qui entraine

$$ g(t) = {}_{0}^{R}D_{t}^{-(n-\alpha)} f(t) \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, n-1 \leq p < n \tag{2.12} $$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à :

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{n-k-1}(0) \tag{2.13}$$

où

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)} F(s) \tag{2.14}$$

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, il vient :

$$-g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0^R D_t^{-(n-\alpha)} f(t) = {}_0^R D_t^{\alpha-k-1} f(t) \tag{2.15}$$

Par substitutions de (2.14) et (2.15) dans (2.13), nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville,

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0^R D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, n-1 \leq \alpha < n \tag{2.16}$$

l'application pratique de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, est limitée par l'absence d'une interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = 0$. En particulier, si $n = 1$ et $n = 2$, on a respectivement

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - {}_0^R D_t^{\alpha-1} f(0), 0 \leq \alpha < 1 \tag{2.17}$$

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - {}_0^R D_t^{\alpha-1} f(0) - {}_0^R D_t^{\alpha-2} f(0) \tag{2.18}$$

2.1.4 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires de Caputo

Soient $f \in C^{\infty}[a, +\infty[, n-1 \leq \alpha < n$ et $a < 0$
cas $a = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}_0^C D_t^{\alpha} f](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-st} (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) dt d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} u^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) du d\tau \\
&= \left(\int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{u^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} du \right) . \left(\int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau \right) \\
&= \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right](s) . \mathcal{L}[f^{(n)}](s) \\
&= s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f^{(n)}](s)
\end{aligned}$$

Puisque

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0) \tag{2.19}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}_0^C D_t^{\alpha} f](s) &= s^{\alpha-n} [s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)] \\
&= s^{\alpha} \mathcal{L}[f](s) - s^{\alpha-1} f(0) - s^{\alpha-2} f'(0) - ... - f^{(\alpha-1)}(0) \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

cas général :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}_0^C D_t^{\alpha} f](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{t} (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&\int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\alpha}^{0} (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f^{(n)}](s) + \int_{\alpha}^{0} \left(\int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{(t-\tau)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} dt \right) f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f^{(n)}](s) + \int_{\alpha}^{0} \mathcal{L}\left[\frac{(t-\tau)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right](s) f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f^{(n)}](s) + s^{\alpha-n} \int_{\alpha}^{0} e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Une intégration par parties, nous donne :

$$\int_{\alpha}^{0} e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau)d\tau = \int_{\alpha}^{0} se^{-s\tau} f^{(n-1)}(\tau)d\tau + [e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau)]_{\alpha}^{0}$$
$$= s\int_{\alpha}^{0} e^{-s\tau} f^{(n-1)}(\tau)d\tau + f^{(n-1)}(0) - e^{-as} f^{(n-1)}(\alpha)$$

En intégrant encore une fois par parties, on obtient :

$$\int_{\alpha}^{0} e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau)d\tau = s^2\int_{\alpha}^{0} e^{-s\tau} f^{(n-2)}(\tau)d\tau + [sf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)]$$
$$- e^{-\alpha s}\left[sf^{(n-2)}(\alpha) + f^{(n-1)}(\alpha)\right]$$

ce que l'on généralise par parties :

$$s^n\int_{\alpha}^{0} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau + [s^{n-1}f(0) + ... + f^{(n-1)}(0)] - e^{-\alpha s}[s^{n-1}f(\alpha) + ... + f^{(n-1)}(\alpha)] \tag{2.22}$$

Une combinaison de (2.20) et (2.21), en simplifiant les termes en $f^{(k)}(0)$. On obtient finalement

$$\mathcal{L}[{}^{C}D_t^{\alpha}](s) = s^{\alpha}\mathcal{L}[f](s) - e^{-\alpha s}\left[s^{\alpha-1}f(a) + s^{\alpha-2}f'(a) + ... + s^{\alpha-n}f^{(n-1)}(a)\right] \tag{2.23}$$

2.2 Première résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section nous discutons l'existence et l'unicité de solution de problème à valeurs initiales pour des équations différentielles fractionnaire linéaires avec dérivées au sens de Riemann-Liouville.
Considérons le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} {}_0^R D_t^{\alpha} y(t) = f(t), \quad (0 < t < T < \infty) \\ [{}_0^R D^{\alpha-1} y(t)]_{t=0} = b \end{cases} \tag{2.24}$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et $f(t) \in L_1(0,T)$, i.e.

$$\int_0^T |f(t)|dt < \infty.$$

Théorème 2.2.1. *Si $f(t) \in L_1(0,T)$, alors le problème (2.24) admet une unique solution $y(t) \in L_1(0,T)$*

Preuve. *Construisons donc une solution du problème considéré. En appliquant, à la première équation de (2.24), la formule de la transformée de Laplace (2.16) d'une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, à savoir*

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^\alpha y(t); s\} = s^\alpha \mathcal{L}\{y(t); s\} - [{}_0^R D_t^{\alpha-1} y(t)]_{t=0}, \quad \alpha \in]0,1[\tag{2.25}$$

on aura

$$s^\alpha Y(s) - [{}_0^R D_t^{\alpha-1} y(t)]_{t=0} = F(s) \tag{2.26}$$

où $Y(s)$ et $F(s)$ désignent les transformées de Laplace de $y(t)$ et $f(t)$. En s'aidant de la condition initiale introduite dans (2.24), on peut écrire

$$Y(s) = s^{-\alpha} F(s) + s^{-\alpha} b \tag{2.27}$$

et la transformée de Laplace inverse donne

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \tag{2.28}$$

En utilisant la règle de la différentiation fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction polynôme (1.54) ($(t-a)^\beta$ avec $a = 0$ et $\beta = \alpha - 1$), laquelle dans notre cas est nulle, puisque

$${}_0^R D_t^\alpha t^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(0)} t^{-1} \ \ et \ \ \frac{1}{\Gamma(0)} = 0$$

on aura

$${}_0^R D_t^\alpha y(t) = {}_0^R D_t^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau \right)$$

D'autre part, comme

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = {}_0^R D_t^{-\alpha} f(t)$$

c'est-à-dire l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α, et grâce à la propriété fondamentale

$${}_0^R D_t^\alpha ({}_0^R D_t^{-\alpha} f(t)) = f(t)$$

on a alors

$${}_0^R D_t^\alpha y(t) = f(t)$$

ce qui veut dire que notre $y(t)$ défini par (2.28) est bien solution, dans $L_1(0,T)$, de la première équation de (2.24).
Par ailleurs, on sait que (voir la formule (1.54) avec ($\alpha = \beta, \beta = \alpha - 1$))

$${}_0^R D_t^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha) \tag{2.29}$$

Il suit alors, (2.28)

$$\begin{cases} {}_0^R D_t^{\alpha-1} y(t) & = {}_0^R D_t^{\alpha-1} \left(\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) + b \\ & = {}_0^R D_t^{\alpha-1} \left({}_0^R D_t^{-\alpha} f(t) \right) + b \\ & = {}_0^R D_t^{-1} f(t) + b \\ & = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau) d\tau + b \end{cases}$$

D'où $[{}_0^R D_t^{\alpha-1} y(t)]_{t=0}$ c'est à dire que la condition initiale introduite dans (2.24) est bien vérifiée. Par conséquent la fonction construite $y(t)$ est solution du problème (2.24).
Reste à montrer l'unicité de cette dernière. Pour cela, posons

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions (dans $L_1(0,T)$) du problème (2.24). Et donc $z(t)$ sera solution du problème suivant :

$$\begin{cases} {}_0^R D_t^{\alpha} z(t) = 0 \\ [{}_0^R D_t^{\alpha-1} z(t)]_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

En appliquant la transformée de Laplace dans les deux membres de la première équation de (2.30), on obtient

$$Z(s) = \mathcal{L}\{z(t); s\} = 0$$

et donc $z(t) = 0$ pour presque tout $t \in (0,T)$, ce qui prouve que la solution $y(t)$ est l'unique solution dans $L_1(0,T)$ du problème (2.24).

2.3 Deuxième résultat d'existence et d'unicité

dans cette section, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy linéaire pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^C D^{\alpha} y(t) = f(t), \quad t \in [0,T], 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.31}$$

Théorème 2.3.1. *Si $f(t) \in L_1(0,T)$, alors l'équation*

$${}^C D^{\alpha} y(t) = f(t) \tag{2.32}$$

admet une solution unique $y(t) \in L_1(0,T)$, qui vérifié la condition initiale.

Lemme 2.3.1. *Soit* $\alpha > 0$.*Si nous supposons que* $y \in C(0,1) \cap L(0,1)$, *alors l'équation différentielle fractionnaire de type de Caputo :*

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = 0, \tag{2.33}$$

admet une solution unique

$$y(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_{n-1}t^{n-1}. \tag{2.34}$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, *avec* $m = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Preuve. *Soit* $\alpha > 0$, *on a :*

$$^{C}D^{\alpha}t^{m} = 0, \quad pour \;\; m = 0, 1, 2, ..., n-1$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (2.33), admet une solution particulière, comme

$$y(t) = C_m t^m, \quad pour \;\; m = 0, 1, 2, ..., n-1 \tag{2.35}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$. *Donc la solution générale de (2.33), donné comme une somme des solutions particulières (2.35), c-à-d*

$$y(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_{n-1}t^{n-1}.$$

Lemme 2.3.2. *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et* $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue la fonction* y *:*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{2.36}$$

est une solution de l'équation intégrale si et seulement si y *est la solution du problème à valeur initiale (2.31).*

Preuve. *Soit* y *la solution de l'équation intégrale (2.36). On commence par la vérification de la condition initiale, on a d'après (2.36)*

$$|y(t) - y_0| = |\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau|$$

alors

$$\begin{aligned} |y(t) - y_0| &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha} \end{aligned}$$

On prend la limite quand $t \longrightarrow 0$, *et on obtient*

$$y(0) = y_0$$

Donc (2.36) vérifie la condition initiale. Il reste à montrer qu'elle vérifie l'équation

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t), \quad t \in [0, T] \tag{2.37}$$

On a,

$$\begin{aligned} y(t) - y_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= I^{\alpha} f(t) \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur D^{α} *aux deux membres de l'égalité, on aura*

$$D^{\alpha}(y(\tau) - y_0)(t) = f(t)$$

de plus, on a

$$D^{\alpha}(y(\tau) - y_0)(t) = {}^{C}D^{\alpha}y(t)$$

par suite

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t), \ \ t \in [0, T]$$

Inversement on a

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha}[y(\tau) - y_0](t)$$

comme f *est continue, il suit que* $^{C}D^{\alpha}y$ *est continu, et par suite* $I^{1-\alpha}[y(\tau) - y_0]$ *est continu.*
En appliquant l'opérateur I^{α} *aux deux membres de l'égalité précédente, on a*

$$I^{\alpha C}D^{\alpha}y(t) = y(t) - y_0 - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I^{1-\alpha}[y(\tau) - y(0)](t)$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} |I^{1-\alpha}[y(\tau) - y_0](t)| &\leq \frac{\sup\limits_{t \in [0,T]} |y(t) - y_0|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\ &= \frac{\|y - y_0\|_{\infty}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

par suite

$$\lim_{t \to 0} |I^{1-\alpha}[y(\tau) - y(0)](t)| = 0$$

par conséquent

$$I^{\alpha C}D^{\alpha}y(t) = y(t) - y_0$$

On a $f \in C([0,T],\mathbb{R})$, *et par conséquent* I^{α} *est continu.*
Appliquons I^{α} *aux deux membres de (2.37)*

$$I^{\alpha C}D^{\alpha}y(t) = I^{\alpha}f(t)$$

D'après le calcul précédent, on obtient

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + I^{\alpha}f(t) \\ &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

c'est-à-dire $y(t) \in C[0,T]$ *est la solution de l'équation intégrale (2.36).*

CHAPITRE 3

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FRACTIONNAIRE NON-LINÉAIRE

3.1 Théorème du point fixe

Définition 3.1.1. *Soit X un espace de Banach, et $T : X \longrightarrow X$ une application continue, on dit que T est contractante si T est Lipschitzienne de rapport $k < 1$:*

$$\exists k < 1 : \forall u, v \in X : \|T(u) - T(v)\| \leq k\|u - v\|$$

Théorème 3.1.1. ***(Banach)***
Soit X un espace de Banach, et $T : X \longrightarrow X$ un opérateur contractant alors T admet un point fixe unique, c'est-à-dire $\exists! y^* \in X$ tel que :

$$Ty^* = y^*$$

De plus, si $T^k, k \in \mathbb{N}$ est une suite d'opérateur définie par

$$T^1 = T \quad et \quad T^k = TT^{k-1}, k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

alors pour tout $y_0 \in X$ la suite $T^k {y_0}_{k=0}^{\infty}$ converge vers le point fixe y^*

$$\lim_{k \to \infty} \|T^k y_0 - y^*\| = 0.$$

3.2 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section, on s'intéresse par la question d'existence et d'unicité de la solution pour un problème de Cauchy d'une équation différentielle non-linéaire avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivant :

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), t \in \Omega = [0, T], n - 1 < \alpha \leq n \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales

$$y^{k}(0) = b_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, ..., n - 1, n = [\alpha] + 1 \tag{3.2}$$

où $^{C}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f(., y) : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à $t \in \Omega$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $[\alpha]$ est la partie entière de α.

3.2.1 Résultat d'équivalence entre le problème de Cauchy et l'équation intégrale de Volterra

Dans cette partie, on démontre un résultat d'équivalence entre le problème de Cauchy et une équation intégrale de Volterra non-linéaire dans l'espace $C^{n-1}(\Omega)$. Sur la base de ce résultat, l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy considéré sont prouvées.

Théorème 3.2.1. *Soient $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}, n = [\alpha]+1$ et $f(., y) : \Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à $t \in \Omega$ pour $y \in \mathbb{R}$.*
Alors $y \in C^{n-1}(\Omega)$ est une solution du problème de Cauchy (3.1), (3.2) si et seulement si y est une solution de l'équation d'intégrale de Volterra suivante :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!}t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))d\tau, 0 \leq t \leq T \tag{3.3}$$

Démonstration.Soient $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}, n = [\alpha] + 1$.
1)On suppose que $y \in C^{n-1}(\Omega)$ est une solution du problème(3,1), (3,2). Comme $f(., y) \in C(\Omega)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc d'après (3,1) nous avons $^{C}D^{\alpha}y(t) \in C(\Omega)$.
En utilisant la relation (1.77) et (1.78), on obtient :

$$I^{\alpha}(^{C}D^{\alpha}y(t)) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}t^k.$$

Donc,on a :

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} t^k + I^\alpha({}^C D^\alpha y(t)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau
\end{aligned}
$$

2)On suppose que $y \in C^{n-1}(\Omega)$ est une solution d'équation intégrale de Voltera (3.3). En dérivant (3.3) k fois ($k = 0, 1, .., n-1$) et en utilisant la proposition(1.5), on obtient pour tout $k = 0, 1, ..., n-1$,

$$
y^{(k)}(t) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!} t^{j-k} + \frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^1 (t-\tau)^{\alpha-k-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau.
$$

Avec le changement de variable $\tau = ts$, on obtient :

$$
y^{(k)}(t) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!} t^{j-k} + \frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-k-1} f(ts, y(ts)) ds.
$$

par passage à la limite $t \longrightarrow 0$, et en utilisant la continuité de f, nous obtenons les relations (3.2). D'autre part, en appliquant l'opérateur de dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville D^α sur l'équation intégrale de Volterra (3.3) et avec (3.2), nous obtenons :

$$
D^\alpha \left(y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} t^k \right) = D^\alpha I^\alpha f(t, y(t)).
$$

D'après la définition (1.72) et la proposition (1.5), on obtient l'équation(3.1) Ceci complète la preuve du théorème.

Corolaire 3.2.1. *Soient* $0 < \alpha < 1$ *et* $f(., y) : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue par rapport à* $t \in \Omega$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}$*.Alors,* $y \in C(\Omega)$ *est une solution du problème de Cauchy suivant :*

$$
\begin{cases}
{}^C D^\alpha y(t) &= f(t, y(t)), \\
y(0) &= b
\end{cases}
$$

si et seulement si y *est une solution de l'équation intégrale de Volterra suivante :*

$$
y(t) = b + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau
$$

3.2.2 Résultat d'existence et d'unicité de la solution

Maintenant,on va montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (3.1), (3.2) dans l'espace des fonctions $C^{n-1,\alpha}(\Omega)$ défini par :

$$C^{n-1,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^{n-1}(\Omega), {}^{C}D^{\alpha}y \in C(\Omega), n = [\alpha] + 1\}$$

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (3.1), (3.2), nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Si $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$, alors l'opérateur d'intégration fractionnaire*
$I^{\alpha} : C(\Omega) \longrightarrow C^{n-1}(\Omega)$ au sens de Riemann-Liouville est borné c'est-à-dire :

$$\|I^{\alpha}g\|_{C^{n-1}(\Omega)} \leq M\|g\|_{C(\Omega)}, M = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \tag{3.4}$$

Démonstration.Soit $g \in C(\Omega)$.
En utilisant la proposition 1.5, on obtient :

$$D^{k}I^{\alpha}g(t) = I^{\alpha-k}g(t), \text{ pour tout } k = 0, 1, ..., n-1$$

Pour tout $t \in \Omega$,nous avons :

$$\begin{aligned}
\|I^{\alpha}g\|_{C^{n-1}(\Omega)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \|D^{k}I^{\alpha}g\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \|I^{\alpha-k}g\|_{c(\Omega)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|g\|_{c(\Omega)}}{\Gamma(\alpha-k)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{\alpha-k-1} d\tau \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|g\|_{C(\Omega)}}{(\alpha-k)\Gamma(\alpha-k)} t^{\alpha-k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \|g\|_{C(\Omega)}
\end{aligned}$$

On pose :

$$M = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$

on obtient :

$$\|I^{\alpha}g\|_{c^{n-1}(\Omega)} \leq M\|g\|_{c(\Omega)}$$

Ce qui démontre le Lemme

Théorème 3.2.2. *Soient $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$ et G un ouvert de $\mathbb{R}$, On suppose que $f : \Omega \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :*
1) Pour tout $y \in G$ fixé, $f(., y) \in C(\Omega)$.
2) La fonction $f : \Omega \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition de Lipschitz par rapport à y, c'est-à-dire il existe $L > 0$ tel que :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \text{ pour tout } t \in \Omega, y_1, y_2 \in G. \tag{3.5}$$

Si

$$L \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} < 1 \tag{3.6}$$

alors, le problème de Cauchy (3.1), (3.2) admet une unique solution $y \in C^{n-1,\alpha}(\Omega)$.

Démonstration.On commence par montrer l'existence d'une solution unique $y \in C^{n-1}(\Omega)$ du problème (3.1) ,(3.2). Selon le Théorème 3.2.1,il suffit de prouver l'existence d'une solution unique $y \in C^{n-1}(\Omega)$ de l'équation intégrale de Volterra (3.3). Pour cela on utilise le Théorème 3.1.1 du point fixe de Banach dans l'espace $C^{n-1}(\Omega)$ avec la norme suivante :

$$\|y_1 - y_2\|_{C^{n-1}(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \|y_1^{(k)} - y_2^{(k)}\|_{C(\Omega)} \tag{3.7}$$

On réécrit l'équation intégrale (3.3) sous la forme suivante :

$$y(t) = (Ty)(t)$$

où

$$(Ty)(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \tag{3.8}$$

avec

$$y_0(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} t^j \tag{3.9}$$

Pour appliquer le Théorème de Banach, il faut montrer : 1) Si $y \in C^{n-1}(\Omega)$ alors $Ty \in C^{n-}(\Omega)$.
2)Pour chaque $y_1, y_2 \in C^{n-1}(\Omega)$

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C^{n-1}(\Omega)} \leq \omega \|y_1 - y_2\|_{C(\Omega)}, \text{ avec } 0 < \omega < 1 \tag{3.10}$$

Soit $y \in C^{n-1}(\Omega)$.
En dérivant (3.8) k fois ($k = 1, ..., n - 1$) et en utilisant la Proposition 1.5, nous obtenons pour tout $k = 0, 1, ..., n - 1$

$$(Ty)^{(k)}(t) = y_0^{(k)}(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha - k)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-k-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau, \tag{3.11}$$

avec

$$y_0^{(k)}(t) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!} t^{j-k}$$

Pour tout $k = 0, 1, ..., n-1$, le premier terme à droit de (3.11) est une fonction continue sur $[0, T]$, et par le Lemme 3.1, le deuxième terme est continu sur $[0, T]$. Donc, nous avons :

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-k-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\|_{C^{n-1}(\Omega)} \leq \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \|f(\tau, y(\tau))\|_{C(\Omega)} \tag{3.12}$$

pour tout $k = 0, 1, ..., n-1$. Par conséquent $Ty \in C^{n-1}(\Omega)$.
En utilisant (3.7), (3.11) et (3.12) et la condition de Lipschitz (3.5), nous avons :

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\|_{C^{n-1}(\Omega)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \|(Ty_1)^{(k)} - (Ty_2)^{(k)}\|_{C(\Omega)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-k-1} [f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))] d\tau \right\|_{C(\Omega)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \|f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))\|_{C(\Omega)} \\
&\leq L \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{C(\Omega)}
\end{aligned}$$

à l'aide du (3.6), on obtient (3.10), avec

$$\omega = L \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$

Par conséquent, d'après le Théorème du point fixe de Banach 3.1.1, il existe une unique solution $y^* \in C^{n-1}(\Omega)$ de l'équation intégrale de Volterra (3.3) sur l'intervalle $[0, T]$. Par le Théorème de Banach 3.1.1, la solution $y^*(t)$ est une limite de la suite convergente $(T^n y_0^*)(t)$

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n y_0^* - y^*\|_{C^{n-1}(\Omega)} = 0 \tag{3.13}$$

On prend

$$y_0^* = y_0$$

avec $y_0(t)$ définie par (3.9).
D'après (3.8), la suite $(T^n y_0^*)(t)$ est définie par la formule de récurrence

$$(T^n y_0^*)(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, (T^{n-1}y_0^*)(\tau))d\tau, n = 1, 2, ...$$

En notant, $y_n(t) = T^n y_0^*(t)$ alors la relation précédente prend la forme suivante :

$$y_n(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau, n \in \mathbb{N}$$

et (3.13) devient

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_{C^{n-1}(\Omega)} = 0 \tag{3.14}$$

En utilisant ensuite (3.1) et la condition le Lipschitz (3.5), on a :

$$\begin{aligned} \|{}^C D^\alpha y_n - {}^C D^\alpha y\|_{C(\Omega)} &= \|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))\|_{C(\Omega)} \\ &\leq L\|y_n - y\|_{C(\Omega)} \end{aligned}$$

D'après (3.14), nous obtenons :

$$\lim_{n\to\infty} \|{}^C D^\alpha y_n - {}^C D^\alpha y\|_{C(\Omega)} = 0$$

Alors ${}^C D^\alpha y \in C(\Omega)$, et donc $y \in C^{n-1,\alpha}(\Omega)$
Ceci complète la preuve du Théorème.

Exemple 3.2.1. *Considérons le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} {}^C D^{\frac{1}{2}} y(t) &= t^2 - 1, t \in \Omega = [0, 1] \\ y(0) &= 1 \end{cases} \tag{3.15}$$

On cherche une fonction continue $y : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (3.15).
On résout le problème (3.15) on obtient :

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-\tau)^{\frac{-1}{2}} \tau^2 d\tau - \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-\tau) d\tau \\ &= 1 + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.2. *Considérons le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} {}^C D^{\frac{1}{3}} y(t) &= t^2 - 2t + 1, t \in \Omega = [1, 2] \\ y(1) &= 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

On cherche une fonction continue $y : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaisant (3.16).*
On résout le problème (3.16) on obtient :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})}\int_1^t (t-\tau)^{\frac{-2}{3}}(\tau-1)^2 d\tau \\ &= \frac{27}{14\Gamma(\frac{1}{3})}(t-1)^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème de Cauchy pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire non-linéaire au sens de caputo avec conditions initiales.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.Weilbeer, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background. 2005

[2] B.TELLAB, K.HAOUAM, Résolution des équations différentielles fractionnaires, 2018, Université frère Mentouri-Constantine.

[3] I.Podlubny, An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, 1999.

[4] K.Haouam, Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires, l'université de Constantine, 2007.

[5] M.Bekkari, A.Benamara, Quelque équation différentielles d'ordre fractionnaire, 2019.

[6] M.Djaballah, Approximation des équations différentielles d'ordre fractionnaires, 2019, Université Mohamed Boudiaf-m'sila.

[7] M.kaddouri, Problèmes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, 2017, Université Dr Tahar Moulay-saida.

[8] A.Khalouta, Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques : extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire, 2019.

[9] A.Kilbas, H. M. Srivastava, et J. J. Trujillo. Theory and Application of fractional Differential equations. Elsevier, North-Holland, 2006.

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires sont des généralisation des équations différentielles classiques.

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence de la solution de certains problèmes de Cauchy fractionnaires. Nous avons traité le cas linéaire par la transformée de Laplace des dérivées fractionnaires, aussi le problème de Cauchy, et le cas non linéaires avec le théorème de point fixe de Banach.

Mots clés: cacul fractionnaire, problème à valeur initial, dérivée fractionnaire, existence et unicité.

Abstract

Fractional differential equations are generalization of classical differential equations.

In this memory, we study the existence results of the solution of some fractional Cauchy problems. We have treated linear cases by Laplace transform of fractional derivatives and also Cauchy problem, and nonlinear cases with Banach's fixed point theorem.

Keywords: fractional calculus, initial value problem, fractional derivative, existence and uniqueness.

ملخص

المعادلات التفاضلية الكسرية هي تعميم للمعادلات التفاضلية العادية.

حيث .في هذه المذكرة, قمنا بدراسة وجود الحل لبعض مشاكل كوشي الكسري عالجنا الحالة الخطية بواسطة تحويل لابلاس للمشتقات الكسرية وكذا مسألة كوشي والحالة الغير خطية بواسطة نظرية النقطة الثابتة لبناخ،

الكلمات المفتاحية: الحساب الكسري, قيم إبتدائية, مشتقة كسرية, الوجود و الوحدانية.