الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Université Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques appliquées

Décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint

Préparé par

- **BOUMENAKH Hayete**
- **BOULHELA Sabah**

Devant le jury

SEKHANE Chafika	U. Abelhafid Boussouf-Mila	Président
HEDJADJ Mourad	U. Abelhafid Boussouf-Mila	Rapporteur
AHMED YEHIA Rakia	U. Abelhafid Boussouf-Mila	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

Dédicace

Avec joie, fierté et respect je dedie ce modest travail :

À mes chers parents Abdelhakime et Fatima, sans vous rien n'aurait pu être possible, que Dieu vous protège et vous prête une longue vie pleine de santé et de prospérité

Noura, Loubna, Alima, Besma et Djihad, source d'éspoir et de motivation.

À mes chers frères Mesbah , Radouane et Sami, pour leurs appui et leurs encouragement.

À mon cher mari Housni Beldi. **À** la famille de mon mari.

À la femme de mon frère Nesrine.

À nos poussins de maison, mes chers,

Ritadj, Noursin , Aryame , Abrar, Ranime et Sadjid.

À toute la famille Boumenakh grande et petite.

À ma chère binome Sabah avec qui j'ai passé de trés bons moments.

Je ne saurai terminer sans citer mes chers amies , Soumia ,Rim, Chahrazed, Ines Ghada, Yousra, Meriem, Khawla, Manel...

et tant d'autres

Merci pour tous les bons moments passés ensemble.

Hayete

Dédicace

Avec joie, fierté et respect je dedie ce modest travail :

À mes chers parents Atemane et Charifa, sans vous rien n'aurait pu être possible, que Dieu vous protège et vous prête une longue vie pleine de santé et de prospérité

Hanan, Samia, Rima, Mouna, Ikrame, source d'éspoir et de motivation.

À mes chers frères Houcine et Youssef, pour leurs appui et leurs encouragement.

À nos poussins de maison, mes chers,

Salaheddine, Meriem , Mouhemed, Khadidja.

À toute la famille Boulhela grande et petite.

À ma chère binome Hayete avec qui j'ai passé de trés bons moments.

Je ne saurai terminer sans citer mes chers amies , Soumia ,Rim, Chahrazed, Ines Ghada, Yousra, Meriem, Khawla, Manel...

et tant d'autres

Merci pour tous les bons moments passés ensemble.

Sabah

Remerciements

Avant tout nous remercions ALLAH le tout puissant et miséricordieux qui m'a donné la force, la réussite et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous sommes très sensibles à l’intérêt qu’ont bien voulu porter à ce travail Monsieur Hadjadj Mourad, maître de conférences au centre niversitaire Abdelhafid Boussouf de Mila. Nous tenons à le remercier pour m’avoir fait l’honneur d’être rapporteur de ce mémoire.

Nous tenons à remercier également, Madame Rakia Ahmed Yahia maître assistant au centre universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila et Madame sekhane chafika maitre assistant au centre universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila pour m’avoir fait l’honneur d’être membre de mon jury.

Nous remercions également l’ensemble du personnel du département de mathématiques et informatique de centre universitaire.

Table des matières

Notations

$\mathbb{K}$ Le corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$.

$\|.\|$ Une norme.

$\langle .,. \rangle$ Produit scalaire.

H^* L'espace dual de H.

$\ker(T)$ Le noyau de l'opérateur T.

$Im(T)$ L'image de l'opérateur T.

T^* L'adjoint de l'opérateur T.

T^{-1} L'inverse de l'opérateur T.

$D(T)$ Le domaine de l'opérateur T.

$K(E)$ L'espace des opérateurs compacts de E.

$\sigma(T)$ Le spectre de l'opérateur T.

$\sigma_p(T)$ Le spectre ponctuel de l'opérateur T.

$r(T)$ Le rayon spectral de l'opérateur T.

$\rho(T)$ L'ensemble résolvante de l'opérateur T.

$Gr(T)$ Le graphe de l'opérateur T.

$\ell(E, F)$ Applications linéaires continues de E dans F.

$\ell(E)$ Applications linéaires continues de E dans lui même.

$\ell(E, K)$ $\{$Formes linéaires continues de E dans K $\} = E^*$ où $K = \mathbb{R} =$ ou $\mathbb{C}$. E^* est appelé dual de E.

$C(X)$ L'ensemble des fonctions continues.

$F(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires fermés de domaines denses.

$\ell(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires bornés.

$H^1(\mathbb{R}), H^2(\mathbb{R})$ Les espaces de Sobolev.

$\oplus$ La somme directe.

$L^2(\Omega)$ Espace de Lebesgue.

Introduction Générale

La "**décomposition spectrale**" est un appareil analytique efficace qui permet d'étudier les opérateurs auto-adjoints et qui est fort utile dans les problèmes où ces interviennent.

Dans ce mémoire, nous avons étudié la décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert.

Plusieurs questions et conjectures au sujet des opérateurs auto-adjoints ont été inspirées de la théorie spectrales des opérateurs auto-adjoints.

Depuis plus de soixante ans plusieurs travaux sont étudiés déjà dans ce domaine, et beaucoup des questions restent encore sans réponse.

Notre but dans ce mémoire vient pour clarifier quelques points dans cette théorie.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre on va donner les éléments de base de l'analyse fonctionnelle : espaces vectoriels normés, espace de Banach. On y étudie les espaces de Hilbert (définitions, propriétés élémentaires, projection et orthogonalité, dual d'un espace de Hilbert, sommes Hilbertienne et base Hilbertienne). Nous y ajoutons les opérateurs linéaires continues et leurs propriétés, on va donner quelque théorèmes fondamentaux (théorème de graphe fermé, théorème de Hahn-Banach, etc).

Dans le deuxième chapitre on présente la théorie élémentaire des opérateurs non bornés et leurs propriétés, et aussi les opérateurs adjoints, inversibles et compacts. On donne la notion de spectre des opérateurs et résolvent. En particulier, rayon spectral, théorie spectrale des opérateurs compacts.

Le troisième chapitre examine la théorie spectrale d'un opérateur auto-adjoint, définition, exemples et propriétés, la décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert. Ainsi la fonction spectrale d'un opérateur auto-adjoint.

Finalement dans le quatrième chapitre nous étudions en détails l'opérateur Laplacien sur un ouvert borné et discutons les divers conditions au bord (Dirichlet, Neumann, Robin, périodique, Born-von Karman), et la forme quadratique du Laplacien et application.

Chapitre 1

Préliminaire

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Le chapitre est composer de trois sections, la première section, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces vectoriels normées et les espaces de Banach, la deuxième section, contient un aperçu sur les espaces de Hilbert. La dernière section, nous donnons quelque définitions et résultats sur les Opérateurs linéaires continus.

1.1 Rappel sur l'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1. *On appelle espace topologique un couple (X, τ) où X est un ensemble et τ une famille de parties de X vérifiant :*
1) $\varnothing \in \tau, X \in \tau$,
2) *Une intersection finie d'éléments de τ appartient à τ,*
3) *Une reunion quelconque d'éléments de τ appartient à τ.*
On appelle τ la topologie sur X.

Définition 1.2. *Norme*

Soit X un espace vectoriel réel ou complexe. une norme sur X est une application, le plus souvent notée $\|.\|$:

$$\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$$

ayant les trois propriétés suivantes :

1. *a) $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in X$ et b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;*
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K})$ *(homogènéité) ;*

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$ *(inégalité triangulaire).*

Si on suprime le 1.b), on dit que $\|.\|$ est une semi-norme.

Définition 1.3. *Espace vectoriel normé*
Lorsqu'un espace vectoriel X est muni d'une norme et de la topologie associée à cette norme, on dit que c'est un espace vectoriel normé, ou, plus simplement, un espace normé $(E, \|.\|)$.

1.1.2 Espaces de Banach

Définition 1.4. *Une suite$(x_k)_k$ d'élément d'un espace normé X est dite suite de Cauchy si :*

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad (\exists N \geq 1) \qquad k, l \geq N \Longrightarrow \|x_k - x_l\| \leq \varepsilon$$

Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 1.5. *On dit qu'un espace normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente. On appelle espace de Banach tout espace normé complet.*[2]

Lemme 1.1. *Tout espace normé $(E, \|.\|)$ de dimension fini est un espace de Banach.*

Proposition 1.1.1. caractérisaton des Banach
Un espace normé $(E, \|.\|)$ est de Banach si et seulement si tout série de $(E, \|.\|)$ absolument convergente est convergente.[6]

1.2 Espace de Hilbert

1.2.1 Produit Scalaire et Espace de Hilbert

Définition 1.6. *Soit X un espace vectoriel réel, resp. complexe. On appelle produit scalaire sur X toute forme sesquilinéaire, resp. hermitienne, qui est définie positive. On notera $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in X$.*

Cela signifie que l'application :

$$\langle ., . \rangle : X \times X \to \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{C}$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

vérifie :
1) pour tout $y \in X$, l'application $x \in\mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire ;

2) pour tous $x, y \in X$, on a :

$$\begin{cases} \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle & \text{si l'espace est réel;} \\ \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} & \text{si l'espace est complexe ;} \end{cases}$$

3) pour tout $x \in X$, on a $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ et $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.[2]

Remarque 1.2.1. Notons que dans le cas complexe, on a donc, pour $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle.$$

Proposition 1.2.1. Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit X un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. pour tous $x, y \in X$ on a :

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.[5]$$

Définition 1.7. *Espace préhilbertien*

Si l'espace vectoriel X est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace ***espace préhilbertien****.*[2]

Corollaire 1.2. *Soit X un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. La relation $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ définit une norme sur X.*[5]

Définition 1.8. *Espace de Hilbert*
Si un espace Préhilbertien est complet, pour sa norme hilbertienne, on dit que c'est un espace de ***Hilbert****.*[2]

1.2.2 Propriétés élémentaires

Proposition 1.2.2. Pou tous $x, y \in H$, H un espace préhilbertien :
a) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ (cas réel) ;
b) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle$ (cas complexe).
[2]

Proposition 1.2.3. Si x et y sont deux éléments quelconques d'un espace préhilbertien, alors

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

[5]

1.2.3 Projection ; Orthogonalité

Orthogonalité

Définition 1.9. *Deux éléments x et y d'un espace de Hilbert H sont dits orthogonaux si lorsque leurs produit scalaire est nul : $\langle x, y\rangle = 0$. Nous noterons cela $x \perp y$.*
Deux parties $A, B \in H$ sont dites ***Orthogonales*** *si $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$. Nous noterons cela $A \perp B$.*

Théorème 1.3. *(Théorème de Pythagore)*
Si x et y sont orthogonaux, alors on a l'igalité $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.[3]

Définition 1.10. *L'orthogonal d'une partie $A \in H$ est l'ensemble :*

$$A^{\perp} = \{y \in H; y \perp x, \forall x \in A\}$$

Projection

Définition 1.11. *Soit C une partie d'un espace vectoriel est dite* ***convexe*** *si le segment $[x, y]$ est contenu dans C dés lorsque $x, y \in C$:*

$$x, y \in C \Longrightarrow [x, y] \subseteq C,$$

où $[x, y] = tx + (1 - t)y; \quad t \in [0, 1]$. Tout sous-espace vectoriel est convexe ; toute boule est convexe.

Théorème 1.4. *Téorème de projection*
Soit H un espace de Hilbert et soit C une partie convexe et fermée, non vide, de H. Alors, pour tout $x \in H$, $\exists$ un unique $y \in C$ tel que :

$$\|x - y\| = dist(x, C)$$

on dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C. Il est caractériser par la propriété :

$$y \in C \quad et \quad Re(x - y|z - y) \leq 0, \forall z \in C \tag{1.1}$$

Démonstration. 1.**Existence**
Soit $x \in H$. Démontrons d'abord l'existence de la projection de x sur C. Par définition de $\delta = d(x, c) = \inf_{z\in C} \|x - z\|$, il existe une suite (y_n) de C telle que

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \|x - y_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{n}$$

En appliquant l'identité du parallélogramme aux vecteurs $x - y_n$ et $x - y_p$, pour $n, p \geq 1$, on obtient

$$\left\| x - \frac{y_n + y_p}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_n - y_p}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2 \right).$$

Puisque C est convexe, $(\frac{y_n+y_p)}{2}$ est un point de C et donc

$$\frac{1}{4}\|y_n - y_p\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right),$$

La suite (y_n) est par conséquent une suite de Cauchy. Comme H est complet, elle converge donc vers un élément $y \in H$. qui vérifie certainement $\|x - y\|^2 = \delta$.

2.**Unicité**

Si $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \delta,\ y_1, y_2 \in C$, alors, comme ci-dessus, l'identité du parallélogramme donne :

$$\begin{aligned} \delta^2 + \|\frac{y_1 - y_2}{2}\|^2 &\leq \frac{1}{2}(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2) \\ \frac{1}{4}\|y_1 - y_2\|^2 &\leq \frac{1}{2}(\delta^2 + \delta^2) - \delta^2 \end{aligned}$$

d'où $\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$, ce qui n'est possible que si $y_1 = y_2$.

3.**Preuve de** (1.1)

a) Si $z \in C$ on a $(1-t)y + tz \in C$ pour $0 \leq t \leq 1$, par la convexité de C ; donc :

$$\|x - (1-t)y - tz\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

soit en développant $\|x - (1-t)y - tz\|^2 = \|(x - y) + t(y - z)\|^2$, avec la proposition 1.2.2

$$t^2\|y - z\|^2 + 2tRe\langle x - y, y - z\rangle \geq 0.$$

Pour $t \neq 0$, divisons par t, puis faisons ensuite tendre t vers 0 ; il vient $Re\langle x - y, y - z\rangle \geq 0$, soit :

$$Re\langle x - y, z - y\rangle \leq 0.$$

b) Réciproquement, si y vérifie (1.1), on a, pour tout $z \in C$:

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2Re\langle x - y, y - z\rangle$$

$$= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 - 2Re\langle x - y, z - y\rangle \geq \|x - y\|^2$$

donc $y = P_C(x)$, par unicité.

[2] $\square$

Conséquences

Proposition 1.2.4. Sous les hypothèses du théorème 1.4, on a

$$\forall x_1, x_2 \in H \quad \|p_c(x_1) - p_c(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Démonstration. Notons $y_1 = p_c(x_1)$ et $y_2 = p_c(x_2)$; d'après la condition (1.1) donne :

$$\begin{cases} Re\langle x_1 - y_1, z - y_1\rangle \leq 0 & \forall z \in C; \\ Re\langle x_2 - y_2, z' - y_2\rangle \leq 0 & \forall z' \in C. \end{cases}$$

En prenant $z = y_2$ et $z' = y_1$, et en additionnant, il vient :

$$Re\langle [x_1 - y_1] - [x_2 - y_2], y_2 - y_1\rangle \leq 0.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 = Re\|y_1 - y_2\|^2 &= Re\langle [y_2 - x_2] + [x_2 - x_1] + [x_1 - y_1], y_2 - y_1\rangle \\ &= Re\langle [x_1 - y_1] - [x_2 - y_2], y_2 - y_1\rangle + Re\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle \\ &\leq Re\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle \\ &\leq |\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle| \leq \|x_2 - x_1\|\|y_2 - y_1\| \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il en résulte, en divisant par $\|y_2 - y_1\|$ (que l'on peut supposer non nul, car sinon le résultat est évident), que l'on a bien
$\|y_1 - y_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$. □

Proposition 1.2.5. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors P_F est un opérateur linéaire de H sur F. Si $x \in H$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in F$ tel que :

$$y \in F \quad et \quad x - y \in F^{\perp}$$

.

Corollaire 1.5. *Pour tout sous-espaces vectoriel fermé F de H ;*

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

et le projecteur sur F associe à cette somme directe est P_F.[5]

Corollaire 1.6. *Soit H un espace de Hilbert, et F sous-espace vectoriel de H. Alors F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = 0$.*

1.2.4 Le dual d'un espace de Hilbert

Rappelons que le dual est :

$$H^* = Q : H \to \mathbb{K}; Q \quad \text{linéaire continue}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est le corps de base.
Savoir donner une représentation "concréte" du dual d'un espace fonctionnel permet souvent de résoudre du problèmes sur l'espace lui-même. Dans le cas des espaces de Hilbert, c'est particulièrement simple.

Rappelons d'abord que nous avons vu que, pour tout $y \in H$, la forme linéaire $Q_y : x \in H \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue, c'est-à-dire est un élément du dual H^*, et que $\|Q_y\| = \|y\|$. Il s'avère que tous les éléments du dual sont de cette forme.

Théorème 1.7. *Théorème de représentaion de Riesz-Fréchet*

Soit H un espace de Hilbert. pour tout $Q \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ tel que $Q(x) = \langle x, y\rangle$ pour tout $x \in H$.

Ce théorème est de dire que l'application :

$$J : H \longrightarrow H^*$$

$$y \longmapsto Q_y = J(y)$$

est **surjective**. Elle est donc bijective car c'est une isométrie (au sens des espaces métriques) : $\|J(y) - J(y')\| = \|Q_y - Q_{y'}| = \|Q_{y-y'}\| = \|y - y'\|$.
Notons que dans le cas réel, J est linéaire, mais que dans le cas complexe elle n'est que semi-linéaire.

Démonstration. Démonstration Nous savons déjà que J est une isométrie métrique ; cela prouve l'unicité.
Soit $Q \in H^*$, non nulle. comme Q est continue, le sous-espace vectoriel $F = \ker Q$ est fermé. Donc :

$$H = (\ker Q) \oplus (\ker Q)^{\perp}.$$

Mais comme Q est une forme linéaire non nulle, $\ker Q$ est de codimension 1 ; donc $(\ker Q)^{\perp}$ est de dimension 1.
Soit $u \in (\ker Q)^{\perp}$, de norme 1, et posons $y = \overline{Q(u)}u$. Alors, comme $y \in (\ker Q)^{\perp}, Q_y$ est nulle sur $\ker Q$; mais, d'autre part :

$$Q_y(u) = \langle u, y\rangle = Q(u)\langle u, u\rangle = Q(u) \parallel u \parallel^2 = Q(u).$$

Ainsi l'on a bien $Q = Q_y$ [2] $\square$

1.2.5 Base Hilbertienne, Somme Hilbertienne

Définition 1.12. *On appelle base Hilbertienne (ou simplement base s'il n' ya pas des confusion possible) une suite $(e_n)_n$ d'éléments de H tel que :*
(i) $|e_n| = 1 \quad \forall n, \quad \langle e_m, e_n \rangle = 0, \quad \forall m, n, \quad m \neq n.$

(ii) l'espace vectoriel engendré par les $(e_n)_n$ est dense dans H.

Corollaire 1.8. *Il résulte que si $(e_n)_n$ est une base Hilbertienne alors tout $u \in H$ s'écrit :*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k \rangle e_k \qquad i.e., u = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k$$

avec

$$|u|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, e_k \rangle|^2.$$

Inversement étant donnée une suite $(\alpha_k) \in L^2$, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ converge vers un élément $u \in H$; on a

$$\langle u, e_k \rangle = \alpha_k \quad et \quad |u|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2.$$

Définition 1.13. *Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-espaces fermés de H. On dit H est somme Hilbertienne des $(E_n)_n$ et on note $H = \oplus_n E_n$ si :*
(i) Les E_n sont deux à deux orthogonaux i.e.

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in E_m, \quad \forall v \in E_n, \quad m \neq n.$$

(ii) L'espace vectoriel engendré par les $(E_n)_n$ est dense dans H.
[4]

1.3 Opérateurs linéaires continus

1.3.1 Opérateurs linéaires sur les espaces vectoriels topologiques

Définition 1.14. *Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques (réels ou complexes) et T une application de E dans F.*
On dit que T est additif si $T(x + y) = Tx + Ty$ pour tout $(x, y) \in E \times E$
On dit que T est homogène si $T(\lambda x) = \lambda Tx$ pour tout scalaire λ

On dit que T est linéaire si T est additif et homogène
On notera :
$\ell(E, F) = \{$*Applications linéaires continues de E dans F* $\}$
$\ell(E) = \{$*Applications linéaires continues de E dans lui même* $\}$
$\ell(E, K) = \{$*Formes linéaires continues de E dans K* $\} = E^*$ *où* $K = \mathbb{R} =$ *ou* $\mathbb{C}$. E^* *est appelé dual de E.*

Proposition 1.3.1. Soit T un opérateur linéaire de E dans F. Si T est continus à l'origine alors il est uniformément continu.

Démonstration. T est continu en 0 si pour tout voisinage V de 0 dans F il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $T(U) \subset V$.
Soient x et y dans E tels que $x - y$ reste dans U, alors on déduit de la continuité à l'origine de T que $T(x - y)$ appartient à V, puis par linéarité de T on obtient que $Tx - Ty$ appartient à V. $\square$

Remarque 1.3.1. Si T est continu alors pour toute suite $x_n \longrightarrow x$ quand $n \longrightarrow \infty$, on a $Tx_n \longrightarrow Tx$ quand $n \longrightarrow \infty$. La réciproque est fausse en général, néanmoins elle est vraie sur les espaces vectoriels normés.

Théorème 1.9. *Soit T un opérateur additif, continu et défini sur un espace vectoriel topologique réel alors T est homogène.*

Démonstration. Cas 1
$T(nx) = T(x + x + \dots\dots\dots + x) = Tx + Tx + \dots\dots\dots + Tx = nTx$
Cas 2 Comme $T(0) = 0$ car $T(x + 0) = T(x) + T(0)$ on a :
$T(-nx + nx) = 0$ donc $T(-nx) = -nT(x)$
Cas 3 Soit $P = \frac{m}{n}$ alors $T(\frac{mx}{n}) = mT(\frac{x}{n}) = mT(\xi)$ avec $\xi = \frac{x}{n}$ c'est-à-dire
$x = n\xi$ et donc $Tx = T(n\xi) = nT(\xi) = nT(\frac{x}{n})$ d'où : $T(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}Tx$.
Cas 4 Soit λ un nombre irrationnel donc $\lambda = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} r_n$, où r_n est une suite rationnelle.
Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} r_n = \lambda$, alors $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} r_n x = \lambda x$ et comme T est continu, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} T(r_n x) = T(\lambda x)$; or $T(r_n X) = r_n Tx$ qui converge vers λTx quand $n \longrightarrow \infty$ et en déduit que $T(\lambda x) = \lambda Tx$.

$\square$

Exemple 1.3.1. Soit $E = C[0, 1]$ muni de la norme : $\| u \| = \sup_{0 \leq x \leq 1} | u(x) |$, E est un espace vectoriel normé. On définit l'opérateur T de E dans lui même par :

$Tu(x) = \int_0^1 K(x,t)u(t)dt$ où $K(x,t)$ est une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$. Il est facile de vérifier que :

1) Si $u \in E$ alors $Tu \in E$.
2) $T(u+v) = Tu + Tv \;\; \forall u \in E \;\; \forall v \in E$.
3) $T(\lambda u) = \lambda Tu$ pour tout scalaire λ.
4) Supposons que $(u_n(x))_n$ converge uniformément vers $u(x)$. Puisque dans ce cas on peut passer à la limite sous le signe d'intégration, il vient :
   $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \int_0^1 K(x,t)u_n(t)dt = \int_0^1 K(x,t)u(t)dt$, c'est-à-dire :
   $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} Tu_n = Tu$, ce qui prouve la continuité de T.

Remarque 1.3.2. Soit $E = C[0,1]$ muni de la norme : $\| u \| = \sup_{0 \leq x \leq 1} | u(x) |$. E est un espace vectoriel normé. On définit l'opérateur T dans E par $Tu(x) = u^{'}(x)$.

1) Cet opérateur n'est pas défini sur E tout entier, il faut donc lui associer un domaine, par exemple $D(T) = C^1[0,1]$.
2) $D(T)$ est dense dans E.
3) Il est facile de vérifier que :
   i) Si $u \in D(T)$ alors $Tu \in E$.
   ii) $T(u+v) = Tu + Tv \;\; \forall u \in D(T), \;\; \forall v \in D(T)$.
   iii) $T(\lambda u) = \lambda Tu$ pour tout scalaire λ.

Soit $u_n \in D(T)$ tel que $u_n(x) \longrightarrow u(x)$; rien ne peut obliger la suite des dérivées à être convergente et même si elle convergeait vers une fonction $v(x)$, on n'a pas en général $v(x) = u^{'}(x)$.
Il en résulte que T est linéaire mais il n'est pas continu.

Remarque 1.3.3. (Anneau des opérateurs linéaires continus)
Soit $T \in \ell(E)$ et $B \in \ell(E)$.
On définit :

1) $I(x) = x$ pour tout x dans E.
2) $(T \circ B)x = T(Bx)$ pour tout x dans E.
3) $T^2 = T \circ T$
4) $\underbrace{T^n = T \circ T \circ \ldots\ldots\ldots\ldots \circ T}_{nfois}$
5) $P(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n T^n$ appelé polynôme opératoriel.

Remarque 1.3.4. La construction des fonctions matricielles par réduction des matrices à leur forme diagonale a été généralisé au cas des matrices infinies et ensuite au cas des opérateurs hermitiens arbitraires dans un espace hilbertien.

On vérifie facilement que :

1) Le produit de deux opérateurs linéaires continus est un opérateur linéaire continu.
2) L'ensemble $\ell(E)$ est un anneau unitaire.
3) $\ell(E)$ n'est pas commutatif.

1.3.2 Opérateurs linéaires sur les espaces vectoriels normés

Définition 1.15. *Soient E un espace vectoriel normé et T un opérateur linéaire de E dans lui même.*
On dit que T est continu si $\| Tx_n - Tx \| \longrightarrow 0$ lorsque $\| x_n - x \| \longrightarrow 0$.
On dit que T est borné s'il existe une constante $M > 0$; $\| Tx \| \leq M \| x \| \ \forall x \in E$.

Théorème 1.10. *Pour qu'un opérateur T linéaire soit continu il est nécessaire et suffisant qu'il soit borné.*

Démonstration. Soit T continu, supposons T non borné c'est-à-dire : pour tout $M > 0$, il existe x_M tel que $\| Tx_M \| > M \| x_M \|$; en particulier pour tout entier n, il existe x_n tel que $\| Tx_n \| > n \| x_n \|$. Posons $\xi_n = \dfrac{x_n}{n \| x_n \|}$, on a $\xi_n \longrightarrow 0$ dans E quand $n \longrightarrow \infty$.
Comme T est continu on en déduit que :
$\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \| T\xi_n \| = 0$; or $\| T\xi_n \| = \dfrac{1}{n \| x_n \|} \| Tx_n \| > \dfrac{n \| x_n \|}{n \| x_n \|} = 1$. Ce qui est en contradictoire avec ce qui précède.
Réciproquement, soit T borné et x_n une suite telle que $\| x_n - x \| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.
Alors $\| T(x_n - x) \| \leq M \| x_n - x \|$ et par suite $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \| Tx_n - Tx \| = 0$. □

Définition 1.16. *Pour un opérateur borné, la plus petite constante M telle que $\| Tx \| \leq M \| x \| \ \forall x \in E$ est appelée norme de T et sera notée $\| T \|$ ou $||| T |||$.*

Proposition 1.3.2. 1) $\forall x \in E$, on a $\| Tx \| \leq \| T \| . \| x \|$.
2) $\forall \varepsilon > 0$, il existe x_ε tel que $\| Tx_\varepsilon \| > (\| T \| - \varepsilon) \| x_\varepsilon \|$.
3) $\| T \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| Tx \|$ et $\| T \| = \sup_{\|x\| \neq 0} \dfrac{\| Tx \|}{\| x \|}$.

Démonstration. 1)
2) Il suffit d'appliquer la définition de l'Inf dans la définition précédente.
3) Si $\| x \| \leq 1$ alors $\| Tx \| \leq \| T \| . \| x \| \leq \| T \|$ d'où $\sup_{\|x\| \leq 1} \| Tx \| \leq \| T \|$.
$\forall \varepsilon > 0$, il existe x_ε tel que $\| Tx_\varepsilon \| > (\| T \| - \varepsilon) \| x_\varepsilon \|$.
Posons $\xi_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}$ donc $\| T\xi_\varepsilon \| = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|} \| Tx_\varepsilon \| > \frac{(\|T\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} = \| T \| - \varepsilon$.
Comme $\| \xi_\varepsilon \| = 1$ et $\sup_{\|x\| \leq 1} \| Tx \| \geq \| T\xi_\varepsilon \| \geq \| T \| - \varepsilon \ \ \forall \varepsilon$, il en résulte que $\| T \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| Tx \|$, la suite est triviale.

Norme d'un opérateur intégral à noyau continu

Sur $C[0,1]$ muni de la norme $\| u \| = \sup_{0\leq x\leq 1} | u(x) |$, on définit l'opérateur : $Ku(x) = \int_0^1 N(x,t)u(t)dt$, où $N(x,t)$ est une fonction continue sur $[0,1]\times[0,1]$

On a $\| Ku \| = \max_{0\leq x\leq 1} | \int_0^1 N(x,t)u(t)dt |$

$$\leq \max_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 | N(x,t) | \sup_{0\leq t\leq 1} | u(t) | dt$$

$$\leq \| u \| \max_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 | N(x,t) | dt.$$

D'où $\dfrac{\| Ku \|}{\| u \|} \leq \max_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 | N(x,t) | dt$ et donc

$\sup_{\|u\|\neq 0} \dfrac{\| Ku \|}{\| u \|} \leq \max_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 | N(x,t) | dt.$

La fonction $\int_0^1 N(x,t)dt$ étant continue atteint son maximum, il existe donc x_0 tel que

$\max_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 N(x,t)dt = \int_0^1 N(x_0,t)dt.$

Posons $V_0(t) = signN(x_0,t)$ et soit $V_n(t)$ une fonction continue telle que $| V_n(t) | \leq 1$ et $V_n(t) = V_0(t)$ partout sauf sur un ensemble E_n de mesure inférieure à $\dfrac{1}{2Mn}$ où $M = \max_{0\leq x,t\leq 1} N(x,t)$.

on a $| V_n(t) - V_0(t) | \leq 2$ partout sur E_n.

Par ailleurs on a :

$| \int_0^1 N(x,t)V_0(t)dt - \int_0^1 N(x,t)V_n(t)dt | \leq$

$\int_0^1 | N(x,t) || V_0(t) - V_n(t) | dt \leq 2M \int_{E_n} dt \leq \frac{1}{n}$ qui tend vers zéro, d'où

$| \int_0^1 N(x,t)V_0(t)dt | \leq | \int_0^1 N(x,t)V_n(t)dt | + \frac{1}{n} \leq \| K \| . \| V_n \| + \frac{1}{n}$

En posant $x = x_0$ dans ces inégalités on obtient :

$\int_0^1 | N(x_0,t) || V_0(t) | dt \leq \| K \| . \| V_n \| + \frac{1}{n}$ or $\| V_n \| \leq 1$ d'où l'on déduit :

$\int_0^1 | N(x_0,t) | dt \leq \| K \| + \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $\max_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 | N(x,t) | dt \leq \| K \|$.

Il en résulte que :

$\| K \| = \max_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 | N(x,t) | dt.$ □

Définition 1.17. *Soient E un espace vectoriel normé, D un sous-espace vectoriel de E et T un opérateur linéaire agissant sur D. On dit que T est borné sur D, s'il existe une constante $M > 0$ telle que $\| Tx \| \leq M \| x \| \ \forall x \in D$.*

La plus petite de ces constantes M s'appelle norme de l'opérateur T sur D et se note $\| T \|_D$.

Théorème 1.11. *Soient E un espace vectoriel normé complet (Banach), D un sous-espace vectoriel de E dense dans E et T un opérateur linéaire de D dans E, borné sur D. Alors T est prolongeable à tout E sans accroissement de sa norme.*

Démonstration. On va définir un opérateur $\ddot{T}$ de E dans lui même tel que $\ddot{T}x = Tx$ pour tout x dans D et $\| \ddot{T} \|_E = \| T \|_D$.

Soit x n'appartenant pas à D, comme D est dense dans E alors il existe une suite $(x_n)_n$ dans D convergeant vers x et par conséquent la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, c'est-à-dire $\| x_n - x_m \|$ tend vers zéro à partir d'un certain rang. On a donc
$\| Tx_n - Tx_m \| = \| T(x_n - x_m) \| \leq \| T \|_D \| x_n - x_m \|$ qui tend vers zéro ; il en résulte que la suite (Tx_n) est une suite de Cauchy. Comme E est complet, elle est convergente ; nous notons $\ddot{T}x$ sa limite.

Soit y_n une autre suite de D convergeant vers x, alors on a :
$\| x_n - y_n \| \leq \| x_n - x \| + \| x - y_n \|$ qui tend vers zéro.

Comme $\| T(x_n - y_n) \| \leq \| T \|_D \| \| x_n - y_n \|$, on en déduit que
$\| Ty_n - \ddot{T}x \| \leq \| Ty_n - Tx_n \| + \| Tx_n - \ddot{T}x \|$ qui tend vers zéro. Par conséquent $Ty_n \longrightarrow \ddot{T}x$, ce qui exprime que $\ddot{T}x$ est défini de façon unique sur E.

Si x est dans D, on prend $x_n = x$ pour tout n et donc $\ddot{T}x = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} Tx_n = Tx$.

L'opérateur $\ddot{T}$ est linéaire :

Si $x_1, x_2 \in E; (x_n^1); (x_n^2)$ dans D tels que $x_1 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n^1;\ x_2 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n^2$ alors :

$$\begin{aligned} \ddot{T}(x_1 + x_2) &= \lim_{n \longrightarrow \infty} T(x_n^1 + x_n^2) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} (Tx_n^1 + Tx_n^2) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} Tx_n^1 + \lim_{n \longrightarrow \infty} Tx_n^2 \\ &= \ddot{T}x_1 + \ddot{T}x_2 \end{aligned}$$

$\ddot{T}(\lambda x) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} T(\lambda x_n) = \lambda \ddot{T}x.$

L'opérateur $\ddot{T}$ est borné sur E :

$\| Tx_n \| \leq \| T \|_D \| x \|$. Par passage à la limite, on déduit que :
$\| \ddot{T}x \| \leq \| T \|_D \| x \|$ d'où $\| \ddot{T} \|_E \leq \| T \|_D$.

D'autre part pour $\| x \| \neq 0$, on a :
$\sup_{x \in E} \dfrac{\| \ddot{T}x \|}{\| x \|} \geq \sup_{x \in D} \dfrac{\| \ddot{T}x \|}{\| x \|} = \sup_{x \in D} \dfrac{\| Tx \|}{\| x \|}$, c'est-à-dire $\| \ddot{T} \|_E \geq \| T \|_D$.
Il en résulte que $\| \ddot{T} \|_E = \| T \|_D$. $\square$

1.3.3 La topologie de la convergence uniforme

Soient E et F deux espaces vectoriels normés.
Soit $T \in \ell(E,F)$, on pose $||| \, T \, |||= \sup_{\|x\|\leq 1} \dfrac{\| \, Tx \, \|}{\| \, x \, \|}$.

Proposition 1.3.3. $(\ell(E,F), ||| \, . \, |||)$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration. On vérifie facilement d'une part que $\ell(E,F)$ est un espace vectoriel et d'autre part que :
1) $||| \, T \, |||= 0$ si et seulement si $T = 0$.
2) $||| \, \lambda T \, |||=| \, \lambda \, |||| \, T \, |||$.
3) $||| \, T + B \, |||\leq||| \, T \, ||| + ||| \, B \, |||$.

□

Définition 1.18. *Soient $T_n \in \ell(E,F)$ et $T \in \ell(E,F)$. On dit que T_n converge uniformément vers T si $||| \, T_n - T \, |||\longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.*

Théorème 1.12. *Soient E et F deux espaces vectoriel normés.*
Si F est complet alors $\ell(E,F)$ est complet par rapport à la norme $||| \, . \, |||$.

Démonstration. Soit une suite de Cauchy $(T_n)_n$ dans $\ell(E,F)$ par rapport à la norme $||| \, . \, |||$, c'est-à-dire $||| \, T_n - T_m \, |||\longrightarrow 0$ à partir d'un certain rang, alors pour tout x dans E an a :
$\| \, T_n x - T_m x \, \|\leq||| \, T_n - T_m \, ||| \, . \, \| \, x \, \|$ qui converge vers zéro.

Il en résulte que la suite $(T_n x)_n$ est aussi de Cauchy ; comme F est complet, cette suite est convergente pour x fixé ; on note y sa limite.

Définissons une application T qui à x associe cette limite y et posons $Tx = y$.

a) Montrons que T est linéaire .

$T(u+v) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n(u+v) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n u + \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n v = Tu + Tv$.
$T(\lambda u) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n(\lambda u) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \lambda T_n u = \lambda \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n u = \lambda T u$.

b) Montrons que T est borné

par hypothèse on a $||| \, T_n - T_m \, |||\longrightarrow 0$. donc $| \, ||| \, T_n \, ||| - ||| \, T_m \, ||| \, |\longrightarrow 0$; la suite numérique $(||| \, T_n \, |||)_n$ est donc de Cauchy. Elle est en particulier bornée c'-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $||| \, T_n \, |||\leq M$ pour tout n. On en déduit que $\| \, T_n x \, \|\leq M \, \| \, x \, \|$ et par passage à la limite que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \| \, T_n x \, \|\leq M \, \| \, x \, \|$, d'où $\| \, Tx \, \|\leq M \, \| \, x \, \|$.

c) Montrons que T est la limite de la suite $(T_n)_n$ pour la convergence en norme dans l'espace des opérateurs linéaires continus.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\| T_{n+p}x - T_n x \| \leq \varepsilon$ pour tout P et tout x tel que $\| x \| \leq 1$. On fait tendre P vers l'infini pour obtenir $\| Tx - T_n x \| \leq \varepsilon$ pour tout x tel que $\| x \| \leq 1$; il s'en suit que $\sup_{\|x\| \leq 1} \| Tx - T_n x \| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire que $||| T - T_n ||| \leq \varepsilon$. Ceci n'est autre que la convergence en norme dans l'espace des opérateurs linéaires continus. □

Corollaire 1.13. *Le dual E^* d'un espace vectoriel normé est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire E^* est un espace de Banach.*

1.3.4 Théorème de Banach-Steinhaus

Définition 1.19. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés.*
Soient $T_n \in \ell(E, F)$ et $T \in \ell(E, F)$.
On dit que T_n converge simplement vers T si $T_n x \longrightarrow Tx$ pour tout x dans E.

Lemme 1.14. 1) *La convergence en norme entraîne la convergence simple.*
2) *La réciproque est fausse en général.*

Démonstration. 1) $\| T_n x - Tx \| \leq ||| T_n - T ||| \,.\, \| x \|$ qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

2) Soit H un espace de Hilbert muni d'une base orthonormée $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$. Pour tout x dans H on définit une suite d'opérateurs par :
$T_n x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Considérons la convergence simple, on a :
$\lim_{n \longrightarrow \infty} T_n x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = x$, c'est-à-dire T_n converge simplement vers l'identité notée I.

Calculons $T_n e_{n+1}$:

$$T_n e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \langle e_{n+1}, e_i \rangle e_i = \langle e_{n+1}, e_1 \rangle e_1 + \langle e_{n+1}, e_2 \rangle e_2 + \ldots\ldots + \langle e_{n+1}, e_n \rangle e_n = 0$$

Calculons $T_{n+p} e_{n+1}$:

$$T_{n+p} e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+p} \langle e_{n+1}, e_i \rangle e_i =$$
$$\langle e_{n+1}, e_1 \rangle e_1 + \ldots\ldots + \langle e_{n+1}, e_n \rangle e_n + \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle e_{n+1} + \ldots\ldots = e_{n+1}$$

Il en résulte que $\| T_{n+p} e_{n+1} - T_n e_{n+1} \| = \| e_{n+1} \| = 1$ et la suite T_n ne converge pas en norme dans la boule $\| x \| \leq 1$.

Dans la suite on note $L_s(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus muni de la convergence simple.

□

Théorème 1.15. *Si E et F sont deux espaces vectoriels normés complet (Banach) alors $L_s(E,F)$ est un espace vectoriel normé complet (Banach).*

Démonstration. Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy par rapport à la convergence simple (c'est-à-dire la suite $(T_nx)_n$ est une suite de Cauchy pour tout x dans E). Comme F est complet alors la suite $(T_nx)_n$ est convergente, on note y sa limite.

Construisons un opérateur T qui à x associe y : $Tx = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_nx$, alors T est linéaire de façon triviale.
T est-il borné ? Ce résultat se déduit du théorème suivant □

Théorème 1.16. *(de Banach-Steinhaus)*

Si une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs linéaires continus est bornée par rapport à n en chaque point x de E c'est-à-dire si $\| T_nx \|\leq M_x$ où M_x est indépendant de n, alors il en est de même de la suite $(|||\, T_n \,|||)_n$ de leurs normes.

Démonstration. Montrons qu'il existe une boule$B(x_0,r_0)$ telle que $\| T_nx \|$ soit bornée pour tout x dans $B(x_0,r_0)$. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose que $\| T_nx \|$ n'est inclue dans aucune boule fermée.

Soit $B(x_0,\varepsilon_0)$ une boule fermée quelconque, alors il existe x_1 dans $B(x_0,\varepsilon_0)$ et un rang n_1 tels que $\| T_{n_1}x_1 \|\geq 1$; cette inégalité a lieu dans une boule $B_1(x_1,\varepsilon_1)\subset B(x_0,\varepsilon_0)$ alors il existe x_2 et un rang n_2 tels que $\| T_{n_2}x_2 \|\geq 2$ et ainsi de suite pour l'existence de x_k et n_k tels que $\| T_{n_k}x_k \|\geq k$ sur la boule $B_k = B(x_k,\varepsilon_k)$. On peut choisir $\varepsilon_k \longrightarrow 0$ lorsque $k\longrightarrow\infty$, il existerait alors un point x^* appartenant à toutes les boules B_k tel qu'en ce point on ait $\| T_{n_k}x^* \|\geq k$, ce qui contredit la condition $\| T_nx \|\leq M_x$ pour tout n. Par conséquent, il existe une boule $B(x_0,r_0)$ telle que $\| T_nx \|$ soit bornée pour tout x dans $B(x_0,r_0)$. On en déduit qu'il existe M_0 tel que $\| T_nx \|\leq M_0$ pour tout x dans $B(x_0,r_0)$.
Pour x dans $B(0,1)$, posons $x' = r_0x + x_0$ c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{r_0}(x' - x_0)$; il est clair que x' appartient à $B(x_0,r_0)$ et par suite que $\| T_nx' \|\leq M_0$. En outre, on a :
$\| T_nx \|= \dfrac{1}{r_0} \| T_nx' - T_nx_0 \|\leq \dfrac{1}{r_0}(M_0+ \| T_nx_0 \|) \leq \dfrac{1}{r_0}(M_0 + M_{x_0}) = M$ et ceci est valable pour tout n. Donc $|||\, T_n \,|||= \sup_{\|x\leq 1\|} \| T_nx \|\leq M$. □

Corollaire 1.17. *Si une suite d'opérateurs linéaires bornés est de Cauchy en chaque point d'un espace de Banach E, la suite des normes de ces opérateurs est bornée.*

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'une suite de Cauchy $(T_nx)_n$ est une suite bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante M_x dépendant uniquement de x telle que

$\| T_n x \| \leq M_x$, puis d'appliquer le théorème de Banach-Steinhaus pour déduire le résultat. $\square$

Théorème 1.18. *Pour qu'une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs converge simplement vers un opérateur T, il nécessaire et suffisant que :*

a) La suite $(\| T_n \|)_n$ soit bornée.

b) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} T_n x = Tx$ pour tout x d'un ensemble D dont les combinaisons linéaires des éléments sont partout denses dans E.

Démonstration. L'implication dans le sens direct est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus.

Pour la réciproque, soit $M = \sup_n \| T_n \|$ et soit $\bar{D}$ L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de D. Soit x n'appartenant pas à $\bar{D}$, alors de la densité de ce dernier dans E, on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x_ε tel que :

$\| x - x_\varepsilon \| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$

Alors

$$\begin{aligned} \| T_n x - Tx \| &\leq \| T_n x_\varepsilon - Tx_\varepsilon \| + \| T_n x - T_n x_\varepsilon \| + \| Tx_\varepsilon - Tx \| \\ &\leq \| T_n x_\varepsilon - Tx_\varepsilon \| + (\| T_n \| + \| T \|) \| x_\varepsilon - x \| \\ &\leq \| T_n x_\varepsilon - Tx_\varepsilon \| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Comme $T_n x_\varepsilon \longrightarrow Tx_\varepsilon$ à partir d'un certain rang, alors on a :

$\| T_n x_\varepsilon - Tx_\varepsilon \| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $\| T_n x - Tx \| \leq \varepsilon$.

Revenons à la démonstration du théorème de complétude de $L_s(E, F)$.

$Tx = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} T_n x$, l'inégalité $\| T_n x \| \leq M \| x \|$ résulte du corollaire 1.17 et donc $\| Tx \| \leq M \| x \|$. Ainsi toute suite de Cauchy d'opérateurs linéaires bornés converge vers un opérateur linéaire borné ce qui exprime que l'espace des opérateurs linéaires bornés est complet pour la convergence simple. $\square$

1.3.5 Théorème du graphe fermé et de l'application ouverte

Définition 1.20. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés complets (Banach) et D un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble $\{(x, Tx); x \in D\} \subset E \times F$ est appelé graphe de l'opérateur T . Il sera noté $Gr\ T$.*

Proposition 1.3.4. 1) Si $D = E$, on vérifie que $Gr(T)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.

2) Si T est continu, alors le sous-espace vectoriel $Gr(T)$ est fermé.

Démonstration. 1) Evident.

2) En effet $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(x_n, Tx_n) = (x, y)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} Tx_n = y$. Comme T est continu alors $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} Tx_n = Tx$ et donc $Tx = y$, d'où (x, y) appartient à $Gr(T)$.

□

Théorème 1.19. *(du graphe fermé)*
Si le graphe d'un opérateur linéaire T d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est fermé dans $E \times F$ alors cet opérateur est continu.

Démonstration. Comme $Gr(T)$ est un sous-espace fermé de $E \times F$ alors il est complet donc c'est un espace de Banach.
Soit $P_1 : Gr(T) \longrightarrow E$

$$(x, Tx) \longrightarrow P_1(x, Tx) = x$$

P_1 est un opérateur linéaire continu appliquant bijectivement $Gr(T)$ sur E, alors il existe un opérateur inverse $P_1^{-1} : E \longrightarrow Gr(T)$ qui est linéaire et continu.
Soit $P_2 : Gr(T) \longrightarrow F$

$$(x, Tx) \longrightarrow P_2(x, Tx) = Tx$$

P_2 est linéaire et continu. Il en résulte que l'opérateur $T = P_2 \circ P_1^{-1}$ est continu. □

Remarque 1.3.5. (importante)
Dans la démonstration ci-dessus, l'affirmation "il existe un opérateur inverse $P_1^{-1} : E \longrightarrow Gr(T)$ linéaire et continu" résulte d'un théorème important appelé théorème d'homéomorphisme de Banach rappelé ci dessous :

Théorème 1.20. *(d'homéomorphisme de Banach)*
Si un opérateur linéaire continu T applique bijectivement un espace de Banach E sur un espace de Banach F. Alors il existe un opérateur linéaire continu T^{-1} inverse de T de F sur E.

Définition 1.21. *On dit qu'une application f d'un espace topologique E dans un espace topologique F est ouverte si l'image par f de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

Théorème 1.21. *(de l'application ouverte)*
Toute application linéaire T (opérateur linéaire) continue et surjective d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est ouverte modulo son noyau $\ker T$.

Démonstration. Soit $\ker T = \{x \in E; Tx = 0\}$. Comme T est continu, $\ker T$ est un sous-espace fermé de E et l'espace quotient $E_{|\ker T}$ est un espace de Banach.
On construit un opérateur :
$\ddot{T} : E_{|\ker T} \longrightarrow F$

$\tilde{x} \longrightarrow \ddot{T}\tilde{x} = Tx = T(x+y)$ où $y \in \ker T$; $\tilde{x} = x + \ker(T)$.

La suite de la démonstration se déduit du lemme suivant □

Lemme 1.22. 1) $\ddot{T}$ *est un opérateur linéaire.*

2) $\ddot{T}$ *est continu.*

3) $\ddot{T}$ *est bijectif.*

4) $\ddot{T}^{-1}$ *est continu de* F *dans* $E_{|\ker T}$

1.3.6 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

Définition 1.22. *Soient* E *un espace vectoriel topologique,* D *un sous-espace vectoriel dense dans* E *et* f *une forme linéaire sur* D*. Une forme linéaire* $\tilde{f}$ *définie sur* E *est appelée un prolongement de* f *si* $\tilde{f}(x) = f(x)$ *pour tout* x *dans* D*.*

Théorème 1.23. *(de Hahn-Banach)*

Soient E *un espace vectoriel réel,* D *un sous-espace vectoriel de* E *et* f *une forme linéaire continue définie sur* D*. On suppose qu'il existe une application* P *de* E *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant suivantes :*

1) $P(\lambda x) = \lambda P(x)$ *pour tout* X *dans* E *et tout* λ *positif.*

2) $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$ *pour tout* x *et tout* y *dans* E*.*

3) $f(x) \leq P(x)$ *pour tout* x *dans* D*.*

Alors f *se prolonge à* E *tout entier et son prolongement* $\tilde{f}$ *vérifie* $\tilde{f}(x) \leq P(x)$ *pour tout* x *dans* E*.*

Remarque 1.3.6. i) Le prolongement d'une forme linéaire d'après le théorème de Hahn-Banach ne sera généralement pas unique.

ii) Une fonctionnelle P définie sur E vérifiant 1) et 2) du théorème de Hahn-Banach est dite homogène convexe.

iii) Si P est une fonctionnelle homogène convexe, on a :
$P[ty + (1-t)x] \leq tP(y) + (1-t)P(x)$ pour tous $x, y \in E$ et $t \in [0,1]$.

Corollaire 1.24. *Soit* E *un espace vectoriel topologique muni d'une semi norme* $P(x)$*. Si sur un sous-espace vectoriel* D *de* E *est définie une forme linéaire* $f(x)$ *telle que* $|f(x)| \leq P(x)$*, alors* $f(x)$ *se prolonge à* E *tout entier avec préservation de l'inégalité mentionnée.*

Théorème 1.25. *(de Hahn-Banach dans un espace vectoriel normé)*

Soient E un espace vectoriel normé (réel ou complexe), D un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire définie sur D. Alors f se prolonge en une forme linéaire $\tilde{f}$ définie sur E et telle que $\| \tilde{f} \|_E = \| f \|_D$.

Démonstration. Il suffit de prendre $P(x) = \| f \|_D \,.\, \| x \|$. □

Corollaire 1.26. *Soient $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé et $x_0 \neq 0\,;x_0 \in E$. Alors il existe une forme linéaire f définie sur E tout entier telle que :*
1) $\| f \| = 1$
2) $f(x_0) = \| x_0 \|$

Démonstration. Considérons l'ensemble D des éléments tx_0 où $t \in \mathbb{R}$ ($t \in \mathbb{C}$ si E est complexe), D est un sous-espace vectoriel de E engendré par x_0.

Définissons une forme linéaire f sur D de la manière suivante :
Si $x = tx_0$ alors $f(x) = t \| x_0 \|$
Il est évident que :
1) $f(x_0) = \| x_0 \|$
2) $| f(x) | = | t | \| x_0 \| = \| tx_0 \| = \| x \|$ d'où $||| f ||_D = 1$
En prolongeant la forme linéaire f à E tout entier en préservant la norme, on obtient une forme linéaire douée des propriétés requises. □

Remarque 1.3.7. Une application de ce corollaire est la démonstration du théorème des accroissements finis.

Corollaire 1.27. *Soit D un sous-espace d'un espace vectoriel normé E et x_0 un élément de E situé à une distance $d > 0$ de D. Alors il existe une forme linéaire f définie partout sur E telle que :*
1) $f(x) = 0$ *pour tout x dans D*
2) $f(x_0) = 1$
3) $||| f ||| = \dfrac{1}{d}$

Remarque 1.3.8. Ce corollaire est important car il permet de dire qu'il est possible d'approcher un élément donné x_0 de E par des combinaisons linéaires d'autres éléments $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de D.
Plus exactement, une condition nécessaire et suffisante pour que x_0 soit limite d'une suite de combinaisons linéaires de la forme $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ est que $f(x_0) = 0$ pour toutes les formes linéaires f nulles en $x_1, \dots, x_n$

Définition 1.23. *On appelle hyper sous-espace H de E, le complémentaire d'une droite Soit $x_0 \in E$, le translaté $H + x_0$ de l'hyper sous-espace s'appelle hyperplan passant par le point x_0.*
L'hyper sous-espace H est souvent appelé hyperplan passant par l'origine.

Lemme 1.28. 1) *A tout hyperplan H est associée une forme linéaire f non nulle, éventuellement non continue, telle que $x \in H$ si et seulement si $f(x) = 0$.*
Réciproquement, toute forme linéaire f non nulle définie un hyperplan d'équation $f(x) = 0$.

2) *Pour tout hyperplan H il existe une forme linéaire f non nulle et un nombre α tels que $H = \{x \in E; f(x) = \alpha\}$.*
Réciproquement, toute forme linéaire non nulle f définit un hyperplan d'équation $f(x) = \alpha$.

3) *Pour qu'un hyperplan $H_\alpha = \{x; f(x) = \alpha\}$ soit fermé, il est nécessaire et suffisant que la forme linéaire f soit continue.*

Théorème 1.29. *Soient E un espace vectoriel topologique réel. C un ensemble convexe ouvert dans E et P un hyperplan dans E ne rencontrant pas C. Il existe alors dans E un hyperplan fermé H passant par P et ne rencontrant pas C.*

Démonstration. Le translaté d'un ouvert étant encore un ouvert, on peut admettre que P est un sous-espace. Soit x_0 un point intérieur de C alors $C - x_0$ est un voisinage ouvert de 0 convexe et par suite est un ensemble absorbant. Si P_C est fonctionnelle de Minkowski de l'ensemble $C - x_0$ alors $C = \{y; P_C(y - x) < 1\}$. Comme P ne rencontre pas C, il s'ensuit que $P_C(y - x) \geq 1$ pour tout y dans P.

On considère le sous-espace $L = P + tx_0$ où $-\infty < t < \infty$ et on définit sur L une forme linéaire f par $f(y + tx_0) = -t$. Alors :
$f(y + tx_0) \leq 0 \leq P_C(y + tx_0)$ si $t \geq 0$ et $f(y + tx_0) = -t \leq (-t)P_C(\frac{y}{t} - x_0) = P_C(y + tx_0)$ si $t < 0$ puisque $P_C(\frac{y}{t} - x_0) \geq 1$.
Il en résulte que $f(z) \leq P_C(z)$ pour tout z dans L. D'après le théorème de Hahn-Banach, la forme linéaire $f(z)$ se prolonge à E tout entier en une forme linéaire $\tilde{f}(z)$ telle que $\tilde{f}(z) \leq P_C(z)$.
Comme $P_C(z) < 1$ dans un voisinage V de 0 contenu dans $C - x_0$, on en déduit que $\tilde{f}(z)$ est bornée sur V et par suite continue.
Soit $H = \{x; \tilde{f}(x) = 0\}$, c'est un hyperplan fermé contenant P et pour tout z dans H on a :
$0 = \tilde{f}(z) = \tilde{f}(z - x_0) + \tilde{f}(x_0) \leq P_C(z - x_0) - f(x_0) = P_C(z - x_0) - 1$ d'où $P_C(z - x_0) \geq 1$

pour z dans H et donc $H \bigcap C = \varnothing$. $\square$

Lemme 1.30. *Toute forme linéaire continue non nulle est une application ouverte.*

Théorème 1.31. *Soient E un espace vectoriel topologique réel, A un ensemble ouvert convexe et B un ensemble convexe, A et B disjoints. Alors il existe une forme linéaire continue f et un nombre b tels que $f(x) < b$ pour $x \in A$ et $f(x) \geq b$ pour $x \in B$.* [1]

Chapitre 2

Théorie Spectrale des Opérateurs

Ce chapitre contient deux partie, la première partie nous donnons quelques définitions et résultats sur les opérateurs non bornés et les opérateurs (adjoints, inversibles, compacts). la deuxième partie, on définit les notions du spectre et de valeurs propres des opérateurs sur des espaces vectoriels et on donne les propriétés spectrales des opérateurs compacts.

2.1 Théorie des Opérateurs

2.1.1 Opérateurs linéaires non bornés

Généralités

Définition 2.1. *Soit H un espace de Hilbert séparable.*

- *Un opérateur linéaire dans H est un couple $(D(T), T)$ où $D(T)$ est un sous espace vectoriel de H et T une application linéaire de $D(T)$ dans E.*
- *On dit qu'un opérateur T est borné si $\exists\, c > 0$ tel que $\| T\varphi \| \leq c \| \varphi \| \quad \forall \varphi \in D(T)$. Dans le cas contraire, l'opérateur T est dit non borné.*
- *On appelle Graphe de T, le sous espace vectoriel $Gr(T)$ de $H \times H$ défini par : $Gr(T) = \{(\varphi, \psi) \in H \times H; \varphi \in D(T) \text{ et } T\varphi = \psi\}$.*
- *On dit que l'opérateur $(D(T), T)$ est fermé si son graphe est fermé, ou bien si pour $\varphi_n \in D(T)$ tel que φ_n tend vers φ dans H et $T\varphi_n$ tend vers ψ dans H lorsque n tend vers l'infini, on a $\varphi \in D(T)$ et $T\varphi = \psi$.*

  Fixons maintenant quelques notations :

  $F(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires fermés de domaines denses.

  $\ell(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires bornés.

Définition 2.2. *Soit $T \in F(H)$. On appelle ensemble résolvant :*

$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - T$ *est inversible et* $(\lambda I - T)^{-1} \in \ell(H)\}$
L'opérateur $R(\lambda) = R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ *est appelé résolvante.*
On dit qu'un point λ *du plan complexe est un point régulier de l'opérateur* T *si* λ *appartient à* $\rho(T)$.

Définition 2.3. *On appelle spectre de* T *le complémentaire de* $\rho(T)$ *dans* $\mathbb{C}$ *et on le note par* $\sigma(T)$.

Proposition 2.1.1. i) l'ensemble résolvant $\rho(T)$ est toujours un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$.
ii) Si λ et μ sont dans $\rho(T)$, alors $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda.\ R_\mu$ (appelée identité de la résolvante ou identité de Hilbert).
iii) Si $\rho(T) \neq \varnothing$ alors la résolvante $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ est analytique sur $\rho(T)$. De plus, si $\lambda_0 \in \rho(T)$ et $\mid \lambda - \lambda_0 \mid < \parallel R_{\lambda_0} \parallel^{-1}$ alors $\lambda \in \rho(T)$, et $R_\lambda = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda - \lambda_0)^k[R_{\lambda_0}]^{k+1}$, la série converge en norme dans $\ell(H)$.

Démonstration. i) Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$ alors l'opérateur $\lambda_0 I - T$ est continûment inversible.
Considérons l'opérateur $\lambda I - T$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\lambda I - T &= \lambda I - \lambda_0 I + \lambda_0 I - T\\ &= (\lambda_0 I - T)[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}]\\ &= (\lambda_0 I - T)[I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1}]\end{aligned}$$

Puisque $(\lambda_0 I - T)$ est inversible, l'opérateur $\lambda I - T$ est continûment inversible chaque fois que l'opérateur $[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}]$ est continûment inversible ce qui est le cas si $\mid \lambda - \lambda_0 \mid \parallel (\lambda_0 I - T)^{-1} \parallel < 1$; ainsi pour $\lambda_0 \in \rho(T)$, on a $\lambda \in \rho(T)$ dès que :
$\mid \lambda - \lambda_0 \mid \leq \dfrac{1}{\parallel (\lambda_0 I - T)^{-1} \parallel}$.

ii) pour tout $\lambda \in \rho(T), R(\lambda)$ commute avec T sur le domaine de T. En effet, comme $(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)\varphi = \varphi\ \ \forall \varphi \in D(T)$ alors
$R(\lambda)T\varphi = \lambda R(\lambda)\varphi - \varphi$ d'où $\lambda R(\lambda)\varphi - TR(\lambda)\varphi = \varphi$ donc $TR(\lambda)\varphi = \lambda R(\lambda)\varphi - \varphi$, c'est-à-dire :
$R(\lambda)T = TR(\lambda)\ \ \forall \lambda \in \rho(T)$. Il en résulte que $R(\lambda)$ commute avec
$T - \mu I;\ \ \forall \lambda \in \rho(T),\ \ \forall \mu \in \mathbb{C}$.
$R(\lambda)$ commute avec $R(\mu)\ \ \forall \lambda \in \rho(T),\ \ \forall \mu \in \rho(T)$, en effet, on a
$R(\lambda) = (\mu I - T)^{-1}(\mu I - T)R(\lambda) = (\mu I - T)^{-1}R(\lambda)(\mu I - T)$.
En multipliant les deux membres de cette égalité par $(\mu I - T)^{-1}$, on obtient
$R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}R(\mu) - R(\lambda) &= R(\mu)(\lambda I - T)R(\lambda) - R(\mu)(\mu I - T)R(\lambda)\\ &= \lambda R(\mu)R(\lambda) - R(\mu)TR(\lambda) - \mu R(\mu)R(\lambda) + R(\mu)TR(\lambda)\end{aligned}$$

$= (\lambda - \mu)R(\mu)R(\lambda)$

iii) Rappelons qu'une fonction opératorielle $F(\lambda)$ est dite analytique au point λ_0 si elle se développe, dans un voisinage du point λ_0, en une série entière $F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k F_k$ convergente dans ce voisinage en norme de $\ell(H)$.

Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$, on a $\lambda I - T = \lambda I + \lambda_0 I - \lambda_0 I - T$

$$= (\lambda_0 I - T)[I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0)]$$

or pour $\mid \lambda_0 - \lambda \mid . \parallel R(\lambda_0) \parallel < 1$, l'opérateur $I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0)$ est inversible et d'inverse borné ; alors $\lambda I - T$ est inversible et d'inverse borné pour

$\mid \lambda_0 - \lambda \mid < \dfrac{1}{\parallel R(\lambda_0) \parallel}$; il en résulte que :

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)^{-1} &= [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0)]^{-1}(\lambda_0 I - T)^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k [R(\lambda_0)]^k . R(\lambda_0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k [R(\lambda_0)]^{k+1}\end{aligned}$$

On a donc $\lambda \in \rho(T)$ et $dist(\lambda_0, \sigma(T)) \geq \dfrac{1}{\parallel R(\lambda_0) \parallel}$ où $dist(\lambda_0, \sigma(T))$ désigne la distance entre λ_0 et $\sigma(T)$.

Soit maintenant $T \in \ell(H)$, considérons :

$(\lambda I - T)^{-1} = \{\lambda(I - \dfrac{1}{\lambda}T)\}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{T^k}{\lambda^{k+1}}$, cette série est convergente si $\mid \lambda \mid > \parallel T \parallel$, on a alors pour $\mid \lambda \mid > \parallel T \parallel$ l'égalité $R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{T^k}{\lambda^{k+1}}$; c'est un développement de $R(\lambda)$ au voisinage d'un point à l'infini, il s'ensuit en particulier que le point à l'infini est aussi un point régulier, c'est-à-dire appartient à $\rho(T)$.

□

Lemme 2.1. *Soit $T \in \ell(H)$ alors $\{\lambda \in \mathbb{C}; \mid \lambda \mid > \parallel T \parallel\} \subset \rho(T)$*

Démonstration. Soit $\lambda I - T = \lambda(I - \dfrac{1}{\lambda}T)$, alors si $\parallel \dfrac{1}{\lambda}T \parallel < 1$ on en déduit que l'opérateur $\lambda I - T$ est continûment inversible et donc que $\lambda \in \rho(T)$. □

Corollaire 2.2. *Si T est un opérateur borné alors $\rho(T)$ est non vide et il est non borné.*

Remarque 2.1.1. Il en découle que le spectre d'un opérateur linéaire T est un ensemble fermé et que si T est borné, alors son spectre est inclus dans $\{\lambda \in \mathbb{C}; \mid \lambda \mid \leq \parallel T \parallel\}$ et est compact.

Théorème 2.3. *Soit $T \in \ell(H)$ où H est un espace de Hilbert, la suite $\parallel T^n \parallel^{\frac{1}{n}}$ admet une limite finie. On note $r(T) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel T^n \parallel^{\frac{1}{n}}$.*

Le réel positif $r(T) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel T^n \parallel^{\frac{1}{n}}$ s'appelle rayon spectral de T.

On a aussi la relation suivante $\inf_{n \geq 1} \parallel T^n \parallel^{\frac{1}{n}} = r(T) \leq \parallel T \parallel$

Démonstration. Soit $u_n = \| T^n \|^{\frac{1}{n}}$ c'est-à-dire $u_1 = \| T \|, u_2 = \| T^2 \|^{\frac{1}{2}} \ldots$
Soit $r = \inf \| T^n \|^{\frac{1}{n}}$ la borne inférieure de u_n, c'est-à-dire :
$\forall\ \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\| T^m \|^{\frac{1}{m}} \leq r + \varepsilon$ ou bien $\| T^m \| \leq (r+\varepsilon)^m$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors il existe $a_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{N}$ tel que $n = a_n m + b_n$ avec $b_n \leq m-1$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\| T^n \|^{\frac{1}{n}} &= \| T^{ma_n + b_n} \|^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \| T^m \|^{\frac{(a_n)}{n}} \| T \|^{\frac{(b_n)}{n}} \\ &\leq (r+\varepsilon)^{\frac{(ma_n)}{n}} \| T \|^{\frac{(b_n)}{n}}\end{aligned}$$

Comme $b_n \leq m-1$ alors $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{b_n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{ma_n}{n} = 1$.
par passage à la limite, on obtient :
$r(T) \leq \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} \leq r + \varepsilon$ c'est-à-dire
$r(T) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}}$. □

Remarque 2.1.2. Pour $T \in \ell(H)$, on a $r(T) \leq \| T \|$.

Définition 2.4. *Soit T un opérateur linéaire de domaine $D(T)$ dense dans H.*
On appelle image numérique de T et on note $\oplus(T)$ l'ensemble défini comme l'adhérence de $\{\langle T\varphi, \varphi \rangle ; \varphi \in D(T)$ *et* $\| \varphi \| = 1\} \subset \mathbb{C}$.

Théorème 2.4. *(Hausdorf)*
$\oplus(T)$ *est convexe.*

Théorème 2.5. *Soit $T \in F(H)$ de domaine dense dans H. On considère l'ensemble :*
$F = \oplus(T) \cup \oplus(T^*)$, *alors* $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $dist(\lambda, F) \neq 0$, *on a :*
$\lambda \in \rho(T)$ *et* $\| (\lambda I - T)^{-1} \| \leq \dfrac{1}{dist(\lambda, F)}$

Démonstration. On a $dist(\lambda, F) = \inf_{z \in F} \mid \lambda - z \mid \leq \mid \lambda - z \mid \quad \forall z \in F$.
D'où $\forall \varphi \in D(T), \| \varphi \|^2 dist(\lambda, F) \leq \mid \lambda \| \varphi \|^2 - z \| \varphi \|^2 \mid \leq \mid \lambda \langle \varphi, \varphi \rangle - \langle T\varphi, \varphi \rangle \mid \leq \mid \langle (\lambda I - T)\varphi, \varphi \rangle \mid \leq \| (\lambda I - T)\varphi \| \,.\, \| \varphi \|$.
Par conséquent, $\forall \varphi \in D(T)$ on a $\| \varphi \| dist(\lambda, F) \leq \| (\lambda I - T)\varphi \|$, il en résulte que $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ et que $Im(\lambda I - T)$ est fermée dans E. De façon similaire, pour tout $\varphi \in D(T^*)$ on obtient $\| \varphi \| dist(\lambda, F) \leq \| (\lambda I - T^*)\varphi \|$; il en résulte que $\ker(\lambda I - T^*) = \{0\}$. Ce dernier n'est autre que l'orthogonal de l'image de $(\lambda I - T)$, par conséquent $\lambda I - T$ est surjectif. En conclusion $\lambda \in \rho(T)$ et
$\| (\lambda I - T)^{-1}\psi \| dist(\lambda, F) \leq \| \psi \|; \ \psi \in H$. □

Remarque 2.1.3. Le spectre d'un opérateur linéaire non borné T est un ensemble fermé et peut être vide ou tout $\mathbb{C}$; par contre si T est borné alors le spectre de T est non vide, il

est compact et inclus dans $\{\lambda \in \mathbb{C}; \mid \lambda \mid \leq \parallel T \parallel\}$.
Si un opérateur linéaire T a un ensemble résolvant non vide, alors il est fermé.

Définition 2.5. *Un opérateur linéaire T est fermable s'il est la restriction d'un opérateur linéaire A fermé, c'est-à-dire si $D(T) \subset D(A)$ et $A\varphi = T\varphi$ pour tout $\varphi \in D(T)$. Dans ce cas A est appelé extension linéaire fermée de T.*

Proposition 2.1.2. Soit $\bar{G}_T$ l'adhérence du graphe de T.
Un opérateur linéaire T est fermable si et seulement si $(0, y) \in \bar{G}_T$ implique $y = 0$.

Démonstration. Supposons que A est une extension linéaire fermée de T et que $(0, y) \in Gr(T)$ alors $(0, y) \in Gr(A)$ et par conséquent $y = A0 = 0$; en d'autre termes supposons qu'il existe $(0, y)$ n'appartenant pas à $Gr(T)$ lorsque $y \neq 0$.
Posons $D = \{x \in H;\ \exists\ y_x \in H \textit{ tel que } (x, y_x) \in Gr(T)\}$. Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de H et pour tout x dans D, il ya précisément un seul $y_x \in H$ tel que $(x, y_x) \in Gr(T)$. On définit une application B de H dans lui même par $D(B) = D$ et $Bx = y_x$, alors B est bien défini comme opérateur linéaire et $Gr(B) = Gr(T)$, par conséquent B est fermé.
Si $x \in D(T)$ alors $(x, Tx) \in Gr(T)$, ceci entraîne que $x \in D(B)$ et que $Bx = Tx$ donc B est une extension linéaire fermée de T. □

Définition 2.6. *Soit T un opérateur linéaire fermable. L'opérateur B construit dans la démonstration précédente est appelée extension linéaire minimale fermée de T et notée $\bar{T}$.*

Remarque 2.1.4. Comme $G_{\bar{T}} = \bar{G}_T$, alors toute extension linéaire fermée de T est aussi une extension de $\bar{T}$.

2.1.1.1 Notion d'adjoint d'un opérateur

Rappelons que pour un opérateur linéaire borné T sur un espace de Hilbert H, l'adjoint T^* de T est défini comme suit :
Pour tout y dans H la forme linéaire $F_y(x) = \langle Tx, y\rangle$ est bornée sur H, et d'après le théorème de représentation de Riesz il existe un unique $z \in H$ tel que
$\langle Tx, y\rangle = F_y(x) = \langle x, z\rangle, x \in H$.
On définit $T^*y = z, T^*$ est alors un opérateur linéaire borné de H dans lui même et
$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ pour tout x dans H et tout y dans H.
Supposons maintenant que T est de domaine dense mais non borné, alors pour y dans H la forme F_y définie sur $D(T)$ par $F_y(x) = \langle Tx, y\rangle$ peut être non bornée et le théorème de

représentation de Riesz ne peut plus être appliqué. On doit modifier la définition ci-dessus pour définir T^*.
Pour cela on pose $D(T^*) = \{y \in H;\ \sup_{x\in D(T)} \dfrac{|\langle Tx, y\rangle|}{\| x \|} < \infty\}$.
Soit y dans $D(T^*)$, comme $D(T)$ est dense dans H, la forme F_y a une unique extension linéaire $\bar{F}_y$ sur tout H et le théorème de Riesz assure l'existence d'un unique point z dans H tel que $\bar{F}_y(x) = \langle x, z\rangle, x \in D(T)$.

Définition 2.7. *On suppose que $\bar{D}(T) = H$, on appelle adjoint de T, l'opérateur T^* défini par :*
$D(T^*) = \{\psi \in H; \exists\ c_\psi > 0, |\langle T\varphi, \psi\rangle| \leq c_\psi \| \varphi \| \quad \forall \in D(T)\}$
et T^* est une application linéaire de $D(T^*)$ dans H telle que
$\langle T\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, T^*\psi\rangle\ \ \forall\varphi \in D(T)$.

Remarque 2.1.5. L'ensemble $D(T^*)$ donné dans la définition précédente peut être réduit à $\{0\}$.

Proposition 2.1.3. Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur linéaire de domaine dense dans H. Alors on a :
i) T est fermable si et seulement si $D(T^*)$ est dense dans H. Dans ce cas $T = (T^*)^*$ et $T^* = (\bar{T})^*$ où $\bar{T}$ est l'extension linéaire minimale fermée de T.
ii) $(ImT)^\perp = \ker T^*$ et $\overline{ImT} = (\ker T^*)^\perp$.
si de plus T est fermable, alors $\ker T = (ImT^*)^\perp \cap D(T)$, où ImT et $\ker T$ désignent respectivement l'image et le noyau de T, $(ImT)^\perp$ et $(\ker T)^\perp$ leur orthogonal.
iii) Si T est fermé, T est inversible si et seulement si son adjoint T^* est inversible et dans ce cas on a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Définition 2.8. *Soit $T \in F(H)$ de domaine dense.*
T est dit symétrique si $\langle T\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, T\psi\rangle\ \forall\varphi \in D(T),\ \forall\psi \in D(T)$.
T est dit auto-adjoint si T est symétrique et $D(T) = D(T^*)$.
T est dit normal si :
- $T^*T = TT^*$
- $D(T^*T) = D(TT^*)$
- *$D(TT^*)$ est dense dans H.*

Lemme 2.6. *Pour $T \in \ell(H)$, on a $\| T^*T \| = \| T \|^2$*

Démonstration. Pour $\varphi \in H$ et $\psi \in H$ tels que $\| \varphi \| = \| \psi \| = 1$, on a :
$\| T^*T \| = \sup_\varphi \| T^*T\varphi \| = \sup_{\varphi,\psi} |\langle T^*T\varphi, \psi\rangle|$

or $\sup_{\varphi,\psi} \mid \langle T^*T\varphi, \psi\rangle \mid = \sup_{\varphi,\psi} \mid \langle T\varphi, T\psi\rangle \mid$
$\geq \sup_{\varphi} \mid \langle T\varphi, T\varphi\rangle \mid = \parallel T \parallel^2$
comme $\parallel T^*T \parallel \leq \parallel T^* \parallel . \parallel T \parallel = \parallel T \parallel^2$ alors on a l'égalité. □

Théorème 2.7. *Soit T un opérateur borné et normal alors $r(T) = \parallel T \parallel$.*

Démonstration. Montrons d'abord que si $T = T^* \in \ell(H)$, on a $\parallel T^n \parallel = \parallel T \parallel^n$ pour $n = 2^m$.
D'après le lemme précédent, $\parallel T^2 \parallel = \parallel T \parallel^2, \parallel T^4 \parallel = \parallel T \parallel^4$ ....
d'où $\parallel T^n \parallel = \parallel T \parallel^n$ pour $n = 2^m$.
Soit T un opérateur normal borné, alors $\parallel T^n \parallel^2 = \parallel T^{*n}T^n \parallel = \parallel (T^*T)^n \parallel$. Comme T^*T est auto-adjoint, on obtient pour $n = 2^m, \parallel T^n \parallel^2 = \parallel T^*T \parallel^n = \parallel T \parallel^{2n}$ et on en déduit que $\parallel T^n \parallel = \parallel T \parallel^n$ pour $n = 2^m$.
$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists \ m$ tel que $2^m = n + s$ avec $s \geq 0$, il en résulte que :
$\parallel T \parallel^{n+s} = \parallel T^{n+s} \parallel \leq \parallel T^n \parallel . \parallel T \parallel^s$ d'où $\parallel T \parallel^n \leq \parallel T^n \parallel$.
Comme $\parallel T^n \parallel \leq \parallel T \parallel^n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\parallel T^n \parallel = \parallel T \parallel^n$ et $r(T) = \parallel T \parallel$. □

Théorème 2.8. *Soit T un opérateur linéaire de domaine dense $D(T)$.*
i) Si T est auto-adjoint alors il est fermé, son spectre est réel et
$\parallel (\lambda I - T)^{-1} \parallel \leq \dfrac{1}{\mid Im\lambda \mid}$, $Im\lambda \neq 0$ où $Im\lambda$ désigne la partie imaginaire de λ.
ii) $I + T^*T$ est inversible avec $\parallel (I + T^*T)^{-1} \parallel \leq 1$.
iii) T^*T est auto-adjoint, de domaine $D(T^*T)$ dense dans E.

Lemme 2.9. *Soient $U : H \times H \longrightarrow H \times H$ et $V : H \times H \longrightarrow H \times H$*
$(\varphi, \psi) \longrightarrow (\psi, \varphi)$ $\qquad (\varphi, \psi) \longrightarrow (\psi, -\varphi)$
Alors on a :
i) $U \in L(H \times H)$ et $V \in L(\times)$.
ii) U et V sont deux opérateurs surjectifs.
iii) $\parallel U(\varphi, \psi) \parallel = \parallel V(\varphi, \psi) \parallel = \parallel (\varphi, \psi) \parallel$.
iv) $UV = -VU$ et $U^2 = -V^2 = I$.

Lemme 2.10. *Soit $T \in F(H)$ de domaine dense dans E d'adjoint T^*, alors on a :*
$Gr(T^*) = [V(Gr(T))]^{\perp}$
pour montrer l'assertion (ii), on considère $\varphi \in D(T^*T)$, alors :
$\langle (I + T^*T)\varphi, \varphi\rangle = \langle \varphi, \varphi\rangle + \langle T^*T\varphi, \varphi\rangle$
$= \parallel \varphi \parallel^2 + \parallel T\varphi \parallel^2 \leq \parallel (I + T^*T)\varphi \parallel \parallel \varphi \parallel$
On en déduit que :

$$\| \varphi \| \leq \| (I + T^*T)\varphi \| \quad \forall \varphi \in D(T^*T). \tag{2.1}$$

Il résulte de cette inégalité que $I + T^*T$ est injectif et d'image fermée. Il nous reste à montrer qu'il est surjectif.
Soit $H \times H = Gr(T^*) \oplus V(Gr(T))$ alors :
$\forall \ \psi \in H, \ \exists \ \psi_1 \in D(T^*)$ *et* $\exists \ \varphi_1 \in D(T)$ *tels que :*
$(0, \psi) = (\psi_1, T^*\psi_1) + (T\varphi, -\varphi_1)$.
On obtient :
$0 = \psi_1 + T\varphi_1$ *et* $\psi = T^*\psi_1 - \varphi_1$ *d'où* $\psi_1 = -T\varphi_1$ *et* $\psi = (I + T^*T)(-\varphi_1)$.
Montrons maintenant que $\varphi_1 \in D(T^*)$, en effet $T\varphi_1 = \psi_1$ et $\psi_1 \in D(T^*)$ il en résulte donc que $T^*T\varphi_1 \in E$ c'est-à-dire que $\varphi_1 \in D(T^*T)$.
Soit $\psi \in H, \ \exists \ \varphi \in D(T^*T)$ tel que $\psi = (I + T^*T)\varphi$, on en déduit que $\varphi = (I + T^*T)^{-1}\psi$.
En appliquant l'inégalité a priori précédente (2.1), on obtient :
$\| (I + T^*T)^{-1}\psi \| \leq \| \psi \|$, *il en résulte que $(I + T^*T)^{-1}$ est borné et continu.*
Comme $\| (I + T^*T)^{-1}\psi \| \leq \| \psi \| \ \ \forall \ \psi \in H$ alors $\| (I + T^*T)^{-1} \| \leq 1$.
Ce qui achève la preuve de (ii).
De plus, $(I + T^*T)^{-1}$ est auto-adjoint, en effet on a :
$\langle (I + T^*T)^{-1}\psi, (I + T^*T)(I + T^*T)^{-1}\varphi \rangle$
$= \langle (I + T^*T)^{-1}\psi, (I + T^*T)^{-1}\varphi \rangle + \langle T(I + T^*T)^{-1}\psi, T(I + T^*T)^{-1}\varphi \rangle$
$= \langle (I + T^*T)^{-1}\psi, (I + T^*T)^{-1}\varphi \rangle + \langle T^*T(I + T^*T)^{-1}\psi, (I + T^*T)^{-1}\varphi \rangle$
$= \langle (I + T^*T)(I + T^*T)^{-1}\psi, (I + T^*T)^{-1}\varphi \rangle$
$= \langle \psi, (I + T^*T)^{-1}\varphi \rangle$
Enfin, pour montrer que T^*T est auto-adjoint il suffit d'appliquer le lemme :

Lemme 2.11. *Soit T un opérateur auto-adjoint inversible alors T^{-1} est auto-adjoint et on a :*
$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.
Pour démontrer que $D(T^*T)$ est dense dans E, il suffit d'appliquer le lemme :

Lemme 2.12. *Soit T un opérateur fermé de domaine $D(T)$ dense dans H alors :*
i) $D(T^*)$ est dense dans H.
ii) $(T^*)^* = T$.

2.1.1.2 Projection de Riesz et valeur propres

Définition 2.9. *Etant donnés un opérateur linéaire T agissant sur un espace de Hilbert H et M un sous-espace de H, M est dit T -invariant si $T(M \cap D(T)) \subset M$.*
Dans ce cas, on désigne par $T|_M$ l'opérateur de domaine $M \cap D(T)$ et d'image inclus dans M.

Théorème 2.13. *Soit T un opérateur linéaire fermé dont le spectre $\sigma(T)$ se décompose de la façon suivante :*
$\sigma(T) = \sigma \cup \tau$ où σ est inclus dans un domaine borné $\triangle$ tel que $\triangle \cap \tau = \varnothing$. Soit F_r la frontière de $\triangle$, alors :
i) $P_\sigma = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{F_r} (\lambda I - T)^{-1} d\lambda$ est une projection.
ii) Les sous espaces $M = ImP_\sigma$ et $N = \ker p_\sigma$ sont T -invariants.
iii) Le sous espace M est inclus dans $D(T)$ et $T_{|_M}$ est borné.
iv) $\sigma(T_{|_M}) = \sigma$ et $\sigma(T_{|_N}) = \tau$.

Démonstration. Les propriétés (i) et (iv) se démontrent comme dans le cas borné. Pour montrer (ii) et (iii), on considère pour $\varphi \in E$:
$P_\sigma \varphi = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{F_r} (\lambda I - T)^{-1} \varphi d\lambda$
et
$\int\limits_{F_r} T(\lambda I - T)^{-1} \varphi d\lambda = \int\limits_{F_r} [-\varphi + \lambda(\lambda I - T)^{-1}\varphi] d\lambda$
En utilisant l'hypothèse que T est fermé et une approximation de ces intégrales par des sommes de Riemann, on en déduit que :
$P_\sigma \varphi \in D(T)$ et $TP_\sigma \varphi = \int\limits_{F_r} [-\varphi + \lambda(\lambda I - T)^{-1}\varphi] d\lambda$
Maintenant si $\varphi \in M$ alors $T\varphi = TP_\sigma \varphi = P_\sigma T \varphi \in M$ ce qui montre que M est T -invariant. Comme $TP_\sigma \varphi = P_\sigma T\varphi$ si $\varphi \in D(T)$, ceci montre aussi que N est T -invariant. Enfin l'égalité $TP_\sigma \varphi = \int\limits_{F_r} [-\varphi + \lambda(\lambda I - T)^{-1}\varphi] d\lambda$ entraîne que $T_{|M}$ est borné. □

Définition 2.10. *Un point $\lambda_0 \in \sigma(T)$ est appelé une valeur propre de multiplicité finie si λ_0 est un point isolé du spectre de T et si la projection associée $P_{\{\lambda_0\}}$ est de rang fini, où la projection $P_{\{\lambda_0\}}$ est définie par :*
$P_\sigma \varphi = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{F_r} (\lambda I - T)^{-1} \varphi d\lambda \quad$ *avec $\sigma = \{\lambda_0\}$.*

Théorème 2.14. *Soit λ_0 une valeur propre de multiplicité finie alors la résolvante R_λ admet le développement suivant :*
$$\begin{aligned} R_\lambda &= (\lambda I - T)^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda - \lambda_0} P_{\{\lambda_0\}} + \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda - \lambda_0)^{-k-1} B^k - \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k C^{k+1} \end{aligned}$$

où p est un entier positif, $B = (T - \lambda_0 I)P_{\{\lambda_0\}}$ *et* $C = -\dfrac{1}{2i\pi}\int_{F_r}(\lambda-\lambda_0)^{-1}(\lambda I - T)^{-1}d\lambda$, F_r *désignant le contour d'un petit disque de centre* λ_0 *qui ne contient aucune autre valeur propre de* T*.*

Démonstration. Soit $P_0 = P_{\{\lambda_0\}}, T_0 = T_{|ImP_0}$ et $M = ImP_0$, on a $\sigma(T_0) = \{\lambda_0\}$ et $\sigma(\lambda_0 - T_0)$ et par conséquent :
$(\lambda I - T)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{-k-1}(T_0 - \lambda_0 I)^k$ converge dans $\ell(M)$ pour tout $\lambda \neq \lambda_0$.
Comme $(\lambda I - T)^{-1}P_0\varphi = (\lambda I - T_0)^{-1}\varphi = P_0(\lambda I - T)^{-1}\varphi$ pour tout $\varphi \in M$, il s'ensuit que pour $\lambda \notin \sigma(T)$, on a :
$(\lambda I - T)^{-1}P_0\varphi = \dfrac{1}{\lambda - \lambda_0}P_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{-k-1}B^k$ où
$B = (T - \lambda_0 I)P_0 = \dfrac{1}{2i\pi}\int_{F_r}(\lambda-\lambda_0)(\lambda I - T)^{-1}d\lambda \in \ell(H)$
Comme B est de rang fini, il existe un entier p tel que $B^p = 0$. Soit C comme défini ci-dessus, puisque T est un opérateur fermé alors il en est de même par $T - \lambda_0 I$.
De façon similaire au cas borné, on montre que :

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)C &= (T-\lambda_0 I)C - (\lambda-\lambda_0)C\\ &= I - P_0 - (\lambda-\lambda_0)C, \quad P_0 C = 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)C &= (I-P_0) - (\lambda-\lambda_0)(I-P_0)C\\ &= (I-P_0)[I-(\lambda-\lambda_0)C].\end{aligned}$$

pour λ assez proche mais différent de λ_0, les opérateurs $\lambda I - T$ et $[I - (\lambda - \lambda_0)C]$ sont inversibles, alors on obtient :

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)^{-1}(I-P_0) &= -C[I-(\lambda-\lambda_0)C]^{-1}\\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k C^{k+1} + 1.\end{aligned}$$

[1] □

Théorème 2.15. *(Théorème de Riesz,* 1918*). Si un espace normé* $(E, \|.\|)$ *possède une boule compacte* $B(x_0, r)$*, de rayon* $r > 0$*, alors il est de dimension finie.*

Lemme 2.16. *(Lemme de Riesz). Soit* F *un sous-espace vectoriel fermé d'un espace normé* $(E, \|.\|)$*, qui n'est pas* $(E, \|.\|)$ *tout entier. Alors, pour tout nombre* δ *tel que* $0 < \delta < 1$*, il existe* $x \in (E, \|.\|)$ *tel que :*

$$\begin{cases}\|x\| = 1\\ dist(x, F) \geqslant 1 - \delta.\end{cases}$$

[2]

2.1.2 opérateur inversible

Comme E est complet, le Théorème des isomorphismes de Banach dit que si $T \in \ell(E)$ est bijectif, alors T^{-1} est automatiquement continu ; T est donc inversible, en tant qu'élément de l'algèbre $\ell(E)$. On a une condition simple d'inversibilité : cela arrive si T est proche de l'identité.

Théorème 2.17. *Si $\|I - T\| < 1$, alors T est inversible.*

Corollaire 2.18. *Le groupe $GL(E)$ des éléments inversibles de $\ell(E)$ est ouvert dans $\ell(E)$.*

2.1.3 opérateur compact

Définition 2.11. *Soit E, F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur linéaire continue. On dit que T est compact si l'image par T de la boule-unité B_E de E est relativement compacte dans F : $\overline{T(B_E)}$ est compact dans F.*

Remarque 2.1.6. Comme tout compact est borné, la condition "$\overline{T(B_E)}$ compact dans F"assure en fait la continuité de T ; il n'y aurait donc pas besoin de la supposer au départ.

Proposition 2.1.4. L'ensemble $K(E, F)$ des opérateurs compacts $T : E \to F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\ell(E, F)$.

Démonstration. C'est un sous-espace vectoriel car :

$$\overline{(S + T)(B_E)} \subseteq \overline{S(B_E)} + \overline{T(B_E)}$$

et que cette somme est compacte (image du produit de deux compacts par l'application continue $(x, y) \mapsto (x + y)$.

Soit $T_n \in K(E, F)$ tels que $\|T_n - T\|_{\ell(E,F)} \longrightarrow 0$. Nous allons voir que $T(B_E)$ est relativement compact.

Rappel Soit X un espace métrique complet. Une partie A de X est relativement compacte si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, A peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $\leq \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geq 1$ tel que $\|T_n - T\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $x \in B_E$ et $n \geqslant N$ on a donc $\|T_n x - Tx\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On peut écrire : $T_n(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} B(x_j, \varepsilon/2)$. Alors : $T(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} B(x_j, \varepsilon)$. □

Corollaire 2.19. *Si $T \in \ell(E, F)$ est limite, en norme, d'une suite d'opérateurs de rang fini, alors T est compact.*

Théorème 2.20. *Soit E, F des espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur compact. Alors l'image $R(T) = T(E)$ de E par T est fermée si et seulement si T est de rang fini.*

Démonstration. Si $T(E)$ est fermé dans F, c'est un espace de Banach. Le Théorème de l'application ouverte pour $T : E \to R(T)$ s'applique : il existe un ouvert U, de $R(T)$, non vide, tel que $T(B_E) \supseteq U$.

Soit B une boule fermée, de rayon > 0, de $R(T)$, contenue dans U. On a :

$$B \subseteq U \subseteq T(B_E) \subseteq \overline{T(B_E)}$$

qui est compact. Donc $R(T)$ est de dimension finie, par le Théorème de Riesz. □

Une propriété importante, mais facile à vérifier, des opérateurs compacts est la suivante.

Proposition 2.1.5 (propriété d'idéal)**.** Soit E,F,G trois espaces de Banach et $T \in \ell(E, F), S \in \ell(F, G)$. Alors :

- $T \in K(E, F) \Rightarrow S \circ T \in K(E, G)$;
- $S \in K(F, G) \Rightarrow S \circ T \in K(E, G)$.

2.1.4 opérateur adjoint

Proposition 2.1.6. Si $T \in \ell(E, F)$, il existe $T^* \in \ell(F^*, E^*)$ tel que :

$$\langle \varphi, Tx \rangle_{F^*,F} = \langle T^*\varphi, x \rangle_{E^*,E}, \ \forall x \in E \ \ \forall \varphi \in F^*.$$

T^* est appelé l'opérateur adjoint de T.

Notons que cela correspond à la notion d'opérateur adjoint sur les espaces de Hilbert H, lorsque l'on a identifié le dual H^* à H, via l'isométrie bijective $J : x \mapsto \Phi_x$ (voir le commentaire suivant le Théorème de représentation de Fréchet-Riesz).

Démonstration. Pour toute $\varphi \in F^*$, l'application $x \mapsto \langle \varphi, Tx \rangle$ est une forme linéaire continue sur E, donc un élément $T^*\varphi \in E^*$. La linéarité de $T^* : F^* \to E^*$ est facile à vérifier, et sa continuité vient de :

$$\|T^*\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^*\varphi, x \rangle| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \varphi, Tx \rangle| \leq \|\varphi\| \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|c\| \|T\|.$$

□

Remarque 2.1.7. On a donc $\|T^*\| \leq \|T\|$. En effet,

$$\|Tx\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle \varphi, Tx \rangle| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle \varphi, T^*x \rangle| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle T^*\varphi, x \rangle| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |T^*\varphi| \|x\| = \|T^*\| \|x\|.$$

Théorème 2.21. *(Théorème de Schauder)*

L'opérateur $T : E \to F$ est compact si et seul ement si son adjoint $T^* : F^* \to E^*$ est compact.

On utilisera le :

Théorème 2.22. *(Théorème d'Ascoli)*

Soit X un espace métrique et compact, et $\tilde{F} \subseteq C(X)$. Alors $\tilde{F}$ est relativement compacte dans $C(X)$ si et seulement si $\tilde{F}$ est bornée et est équicontinue.

Rappelons que $\tilde{F}$ équicontinue signifie que :
$(\forall\ x \in X)(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0) : d(x, y) \leq \delta \Rightarrow [|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, \forall\ f \in \tilde{F}]$. Notons que comme X est compact, il y a en fait équicontinuité uniforme :
$(\forall\ x \geq 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall\ x, y \in X) : d(x, y) \leq \delta \Rightarrow [|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, \forall\ f \in \tilde{F}]$.

Démonstration. **preuve du Théorème de Schauder.** Condition nécessaire. Supposons T compact. On veut montrer que $T^*(B_E)$ est relativement compacte, c'est-à-dire que si $\|\varphi_n\|_{F^*} \leq 1$, on peut extraire de $(T^*\varphi_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite convergente. Prenons $X = T(B_E)$; c'est un espace métrique compact. Posons :

$$f_n : X \to \mathbb{K}$$

$$y \mapsto f_n(y) = \langle \varphi_n, y \rangle_{F^*,F}.$$

Alors $\tilde{F} = \{f_n ; n \geq 1\}$ est borné :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{y\in X} |\langle \varphi_n, y \rangle| = \sup_{y\in X} |\langle \varphi_n, Tx \rangle| \leq \|T\|,$$

et est équicontinu : $|f_n(y) - f_n(y')| \leq \|y - y'\|$ pour tout $n \geq 1$.

Grâce au Théorème d'Ascoli, on peut extraire de $\tilde{F}$ une suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente :

$$\|f_{n_k} - f\|_{C(X)} \longrightarrow 0 \ \text{ lorsque } \ k \to +\infty$$

. Alors, pour tout $x \in B_E$:

$$\langle T^*\varphi_{n_k}, x \rangle = \langle \varphi_{n_k}, Tx \rangle = f_{n_k}(Tx) \longrightarrow f(Tx) \ \text{ lorsque } \ k \to +\infty.$$

Pour tout $x \in E, \psi(x) = \lim_{k\to\infty} \langle T^*\varphi_{n_k}, x \rangle$ existe donc ; $\psi : E \to \mathbb{K}$ est linéaire et $\psi_{|B_E} = f \circ T$. Comme

$$\|\psi(x)\| = \lim_{k\to\infty} \|T^*\varphi_{n_k}(x)\| \leq \|T^*\|\|\varphi_{nk}\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|,$$

ψ est continue. Donc $\psi \in E^*$. De plus :

$$\|T^*\psi_{n_k} - \psi\|_E = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*\varphi_{n_k} - \psi, x\rangle| = \|f_{n_k} - f\|_\infty \to 0 \;\; \text{lorsque} \;\; k \to +\infty$$

. Condition suffisante. Si T^* est compact, alors, d'après ce que l'on vient de montrer, $T^{**} : E^{**} \to F^{**}$ est compact, c'est-à-dire que $\overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$ est compact. Mais, puisque $(T^{**})_{|E} = T$:

$$\overline{T(B_E)} \subseteq \overline{T^{**}(B_E)} \subseteq \overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$$

est donc aussi compact. Donc T est compact. □

2.2 Spectre

2.2.1 Spectre d'un Opérateur

Définition 2.12. 1) *On dit qu'un nombre réel ou complexe λ est une valeur propre de T s'il existe $x \in E$, non nul, tel que $Tx = \lambda x$; autrement dit si $\lambda I - T$ n'est* ***pas injectif****.*
2) *On dit que le scalaire λ est une valeur spectrale de T si $\lambda I - T$ n'est pas inversible (ou, de façon équivalente, pas bijectif).*

L'ensemble des valeurs spectrales de T est noté $\sigma(T)$ et est appelé le spectre de T ; l'ensemble des valeurs propres est noté $\sigma_p(T)$ et est appelé le spectre ponctuel de T. On a évidemment $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$, et il y a égalité si E est de dimension finie. En dimension infinie, ce n'est plus vrai car T peut être injectif sans être surjectif.

Définition 2.13. 1) *L'ensemble $\rho(T) = \mathbb{K} - \sigma(T)$ est appelé l'ensemble résolvant de T.*
2) *La fonction $R_T : \rho(T) \to \ell(E)$ définie par :*

$$R_T(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$$

est appelée la résolvante de T.

Remarque 2.2.1. On trouve aussi souvent la résolvante définie par $R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$.

Théorème 2.23. *$\sigma(T)$ est une partie compacte de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $|\lambda| \leq \|T\|$ pour tout $\lambda \in \sigma(T)$.*

Démonstration. L'application $\tilde{T} : \lambda \in \mathbb{K} \mapsto (\lambda I - T) \in \ell(E)$ étant continue, l'ensemble résolvant $\rho(T) = \tilde{T}^{-1}[GL(E)]$ est ouvert, grâce au Corollaire 2.18. Plus précisément,si $\lambda_0 \in \rho(T)$ et $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|R_T(\lambda_0)\|}$, on a

$\|(\lambda I - T) - (\lambda_0 I - T)\| = |\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|R_T(\lambda_0)\|} = \dfrac{1}{\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|}$, et alors $\lambda I - T$ est inversible (voir le théorème 2.5), c'est-à-dire que $\lambda \in \rho(T)$. Le spectre $\sigma(T)$ est donc fermé. D'autre part, si $|\lambda| > \|T\|$, alors :

$$\|I - \frac{1}{\lambda}(\lambda I - T)\| = \frac{1}{|\lambda|}\|T\| \leq 1;$$

donc $\dfrac{1}{\lambda}(\lambda I - T)$ est inversible, par le Théorème 2.8 ; il en donc est de même pour $\lambda I - T$. Cela signifie que $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $\sigma(T) \subseteq \overline{B(0, \|T\|)}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; en particulier $\sigma(T)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\square$

Théorème 2.24. *(Stone). Si l'espace E est complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors le spectre $\sigma(T)$ n'est jamais vide.*

C'est bien sûr faux si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: prendre $E = \mathbb{R}^2$ et pour T une rotation d'angle $\not\equiv 0$ modulo π. La preuve du Théorème 2.24 résulte du lemme suivant.

Lemme 2.25. *Pour toute $\Phi \in [\ell(E)]^*$, la fonction $\Phi \circ R_T : \rho(T) \to \mathbb{C}$ est analytique et tend vers 0 à l'infini.*

2.2.2 Rayon spectral

Définition 2.14. *Lorsque $\sigma(T) \neq 0$, on appelle rayon spectral de T le nombre*

$$r(T) = \sup|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(T).$$

Comme $\sigma(T)$ est compact, cette borne supérieure est atteinte.

Exemple 2.2.1. Lorsque $E = \ell([0,1])$ et $(Tf)(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$, on a $\sigma(T) = 0$ et donc $r(T) = 0$.

On a déjà vu, dans le Théorème 2.7, que $r(T) \leq \|T\|$. En fait, on a mieux(noter que $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, et donc $\|T\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|$) :

Théorème 2.26. *(Formule du rayon spectral).*
1) La limite $\lim_{n\to\infty}\|T^{\frac{1}{n}}\|$ existe, et elle est égale à $\inf_{n\geqslant 1}\|T\|^{\frac{1}{n}}$.
2)
a) On a $r(t) \leq \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.
b) Si l'espace E est complexe, alors $r(T) = \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Démonstration. 1) Posons $l = \inf_{n\geqslant 1}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geqslant 1$ tel que :

$$\|T^N\|^{\frac{1}{N}} \leqslant l + \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant N$, faisons la division euclidienne de n par N :

$$n = p_n N + q_n, 0 \leqslant q_n \leqslant N - 1$$

On a, en utilisant la sous-multiplicativité de la norme des puissances de T :

$$\|T^n\| \leqslant \|T^N\|^{p_n}\|T^{q_n}\|;$$

d'où :

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|T^N\|^{\frac{p_n}{n}}\|T\|^{\frac{q_n}{n}}.$$

Comme $0 \leqslant q_n \leqslant N - 1$, on a :

$$\frac{q_n}{n} \longrightarrow 0, \quad lorsque \quad n \to \infty; \quad \text{d'où} \quad \frac{p_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{N}, \quad lorsque \quad n \to \infty.$$

Il en résulte que :

$$\lim_{n\to\infty} \sup\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|T^N\|^{\frac{1}{N}} \leqslant l + \varepsilon,$$

et donc, puisque $\varepsilon > 0$ était arbitraire :

$$\lim_{n\to\infty} \sup\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant l.$$

Comme on a évidemment $l \leqslant \lim\inf\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, cela prouve l'existence de la limite. De plus elle est égale à $l = \inf_{n\geqslant 1}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, (bien que la suite $(\|T^n\|^{\frac{1}{n}})_n$ ne soit pas décroissante, en général).

2) *a*) Si $\lambda \in \sigma(T)$, l'égalité :

$$\lambda^n I - T^n = -(\lambda I - T)(T^{n-1} + \lambda T^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-2}T + \lambda^{n-1}I)$$

montre que $\lambda^n I - T^n$ n'est pas inversible (car sinon, $\lambda I - T$ le serait). Cela signifie que $\lambda^n \in \sigma(T)^n$. donc $|\lambda^n| \leqslant r(T^n) \leqslant \|T^n\|$ (voir Théorème 2.23). On a par conséquent $|\lambda| \leqslant \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, d'où $r(T) \leqslant \inf_{n\geqslant 1}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} = l$.

b) Pour terminer, dans le cas complexe, remarquons, comme nous l'avons déjà fait, que pour $|\lambda| > \|T\|$, on a :

$$R_T(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}T^n,$$

et donc, pour toute $\Phi \in [\ell(E)]^*$:

$$(\Phi \circ R_T)(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}\Phi(T^n).$$

Soit $r > \|T\|$ et C_r le cercle de centre 0 et de rayon r, orienté positivement. On peut intégrer terme à terme sur C_r :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \lambda^k (\Phi \circ R_T)(\lambda) d\lambda = -\Phi(T^k) \tag{2.2}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Mais $\Phi \circ R_T$ est holomorphe pour $|\lambda| > r(T)$ (par définition de $r(T)$). Le Théorème de Cauchy permet donc de dire que la formule (2.2) reste en fait vraie pour tout $r > r(T)$. Alors :

$$|\Phi(t^k)| \leqslant r^{k+1} \sup_{|\lambda|=r} |\Phi \circ R_T(\lambda)| \leqslant r^{k+1} \|\Phi\| \sup_{|\lambda|=r} \|R_T(\lambda)\|;$$

et donc, en prenant la borne supérieure sur toutes les $\Phi \in [\ell(E)]^*$:

$$\|T^k\| \leqslant r^{k+1} \sup_{|\lambda|=r} \|R_T(\lambda)\|.$$

Il en résulte :

$$\|t^k\|^{\frac{1}{k}} \leqslant r^{\frac{k+1}{k}} \left[\sup_{|\lambda|=r} \|R_T(\lambda)\|\right]^{\frac{1}{k}},$$

et donc :

$$l = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \leqslant r.$$

Comme c'est vrai pour tout $r > r(T)$, on obtient $l \leqslant r(T)$, ce qu'il fallait démontrer.

□

2.2.3 Propriétés spectrales des opérateurs compacts

E sera un espace de Banach, et on notera $K(E,E)$ par $K(E)$. Rappelons que l'identité Id_E de E est notée par I. Rappelons aussi que l'image $T(E)$ d'un opérateur T est notée $R(T)$.

Le théorème suivant est en fait une préparation au théorème principal. Il exprime qu'une "petite" perturbation (par un opérateur compact) de l'identité garde en mémoire certaines de ses propriétés.

Théorème 2.27. *Si $U \in K(E)$, alors :*

1) $\ker(I-U)$ *est de dimension finie ;*

2) $R(I-U)$ *est fermée ;*

3) *Si $(I-U)$ est injectif, alors $(I-U)$ est inversible.*

Démonstration. 1) Notons que $x \in N = \ker(I - U)$ si et seulement si $x = Ux$; donc si B_N est la boule unité de N, on a $B_N = U(B_N)$. Mais $N = \ker(I - U)$ est un sous-espace vectoriel fermé, et donc B_N, qui est fermée dans N, est fermée dans E ; par conséquent $B_N = U(B_N) \subseteq \overline{U(B_E)}$ est compacte, et N est de dimension finie, par le Théorème de Riesz.
2) Soit $x_0 \in \overline{R(I - U)}$.
Il existe des $X_n \in E$ tels que $X_n - Ux_n \longrightarrow x_0$, lorsque $n \to \infty$. Séparons deux cas :
<u>1^{er} cas</u> : $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée.

Comme U est compact, il existe une sous-suite telle que
$Ux_{n_k} \longrightarrow y \in E$, lorsque $k \to \infty$. Alors :

$$x_{n_k} = (x_{nk} - Ux_{n_k}) + Ux_{n_k} \longrightarrow x_0 + y, \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty..$$

Par continuité : $Ux_{n_k} \longrightarrow U(x_0 + y)$, lorsque $k \to \infty$. Donc $U(x_0 + y) = y$, et par conséquent :

$$x_0 = x_0 + y - y = x_0 + y - U(x_0 + y) = (I - U)(x_0) + y \in R(I - U)$$

<u>$2^{ème}$ cas</u> : $(x_n)_{n \geqslant 1}$ n'est pas (nécessairement) bornée.
Posons :

$$d_n = dist(x_n, \ker(I - U)).$$

Il existe $y_n \in N$ tel que $\|y_n - x_n\| \leqslant 2d_n$ (lorsque $d_n = 0$, alors $X_n \in \ker(I - U)$ puisque ce dernier est fermé, et $y_n = x_n$ convient).

- On va montrer que la suite $(d_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée.

Si ce n'était pas le cas, en la remplaçant au besoin par une sous-suite, on aurait $0 < d_n \longrightarrow \infty$, lorsque $n \to \infty$.

Si l'on pose $Z_n = \dfrac{x_n - y_n}{2d_n}$ on a $\|z_n\| \leqslant 1$. Donc, puisque U est compact, on a, en remplaçant au besoin $(z_n)_{n \geqslant 1}$ par une sous-suite : $Uz_n \longrightarrow z \in E$, lorsque $n \to \infty$. Mais alors, puisque $X_n - Ux_n \longrightarrow x_0$, lorsque $n \to \infty$, on aurait :

$$\begin{aligned} z_n &= (I - U)(z_n) + Uz_n \\ &= \frac{1}{2d_n}(I - U)(x_n) + Uz_n \qquad \mathit{car} \quad y_n \in \ker(I - U) \end{aligned}$$

$$z_n \longrightarrow 0{+}z, \text{ lorsque } n \to \infty. \text{ car } (I{-}U)x_n \longrightarrow x_0, \text{ lorsque } n \to \infty.$$

$$\text{et} \quad 1/d_n \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

La continuité de U entraînerait $Uz_n \longrightarrow Uz$, lorsque $n \to \infty$.

On aurait donc $z \in N = \ker(I - U)$.

Mais, comme

$$\left\| \frac{x_n - y_n}{2d_n} - z \right\| = \|z_n - z\| \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty$$

on aurait, pour n assez grand, $\|z_n - z\| < 1/2$, soit :

$$\|x_n - y_n - 2d_n z\| < d_n,$$

ce qui contredirait la définition de d_n, puisque $y_n - 2d_n z \in N$.

• Maintenant, puisque $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée, $(x_n - y_n)_{n\geqslant 1}$ aussi. Alors, comme $y_n \in \ker(I - U)$, on a $(I - U)(x_n - y_n) \longrightarrow x_0$, lorsque $n \to \infty$. On est donc ramené au 1^{er} cas et on en déduit donc $x_0 \in R(I - U)$.

Preuve du 3) .

Par le Théorème des isomorphismes de Banach, cela revient à montrer que $(I - U)$ est surjectif.

Supposons que non, c'est-à-dire que $R(I - U) = E_1 \neq E$.

Posons, pour $n \geqslant 1$:

$$E_n = R[(I - U)^n] = [(I - U)^n](E).$$

Comme $E_{n+1} = (I - U)(E_n)$, on obtient, par récurrence, puisque $E_1 \subseteq E_0 = E$:

$$E \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$$

D'autre part, comme $(I - U)$ est injectif et $E_1 \neq E$, on a, par récurrence : $E_{n+1} \neq E_n$.

Tous les E_n sont fermés par le 2), car

$$(I - U)^n = I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k U^k = I - V$$

avec $V \in K(E)$.

On peut alors utiliser le Lemme de Riesz : il existe $x_n \in E_n$ de norme 1 tel que $dist(x_n, E_{n+1}) \geqslant 1/2$. Alors, pour $n > m$, on écrit :

$$Ux_n - Ux_m = x_n - (I - U)x_n + (I - U)x_m - x_n.$$

On a :

$$\begin{cases} x_n \in E_n \subseteq E_{m+1} \\ (I - U)x_n \in E_{n+1} \subseteq E_{m+1} \\ (I - U)x_m \in E_{m+1}; \end{cases}$$

donc

$$x_n - (I - U)x_n + (I - U)x_m \in E_{m+1},$$

et par conséquent :

$$\|Ux_n - Ux_m\| \geqslant \quad \text{dist} \quad (x_m, E_{m+1}) \geqslant 1/2.$$

On ne peut donc extraire de $(Ux_n)_{n\geqslant 1}$ de sous-suite convergente. Il en résulte que $U(B_E)$ n'est pas relativement compacte. □

Corollaire 2.28. *(alternative de Fredholm). Si $U \in K(E)$, alors :*
– soit l'équation $x - Ux = 0$ a une infinité de solutions ;
– soit pour tout $y \in E$, l'équation $x - Ux = y$ a une solution unique.
Le théorème principal est le suivant :

Théorème 2.29. *Soit E un espace de Banach de dimension infinie, et $T \in K(E)$. Alors :*

1) $0 \in \sigma(T)$.

2) *Toute valeur spectrale λ non nulle de T est une valeur propre de T :*
$\sigma(T) = \{0\}U\sigma_p(T)$*, et le sous-espace propre $E_\lambda = \ker(\lambda I - T)$ associé à une valeur propre non nulle λ est de dimension finie.*

3) *$\sigma(T)$ est **dénombrable**, et, s'il est infini, on peut indexer les éléments de $\sigma(T)\backslash\{0\}$ en une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ **tendant vers** 0.*

Remarque 2.2.2. Dans le 2), rien n'empêche que 0 soit aussi une valeur propre. Bien sûr, le sous-espace propre associé $E_0 = \ker T$ peut alors être de dimension infinie.

.[2]

Chapitre 3

les Opérateurs Auto-Adjoints

Dans ce chapitre nous fournissons les éléments de base concernant la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert. En particulier, nous étudions l'existence et l'unicité de la fonction spectrale de l'opérateur auto-adjoint.

3.1 Les séries dans $\ell(X,Y)$. Espace $\ell(X)$

En vertu de la définition générale d'une série convergente, la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in \ell(X,Y)$, est uniformément convergente si la suite de ses sommes partielles $S^n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$ est uniformément convergente.

La séries $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k$ est absolument convergente si la série numérique $\sum\limits_{k=1}^{n} \|A_k\|$ est convergente. On définit sans difficulté les critères de convergence uniforme et absolue (Cauchy) d'une série dans $\ell(X,Y)$ pour le cas où $\ell(X,Y)$ est un espace de Banach.

Théorème 3.1. *Soit $\ell(X,Y)$ un espace de Banach. Si la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ est absolument convergente, elle est aussi uniformément convergente.*

Lemme 3.2. *Soit $\{A_n\} \subset \ell(X), \{B_n\} \subset \ell(X), A, B \in \ell(X)$.*
Si $A_n \to A$ et $B_n \to B$ pour $n \to \infty$, Alors $A_nB_n \to AB$.

3.2 Fonction vectoriel à variation bornée et intégrale de Stieltjes.

Dans cette section nous compléterons un peu la notion d'intégrale de Riemann en introduisant l'intégrale de Stieltjes (plus exactement de Riemann-Stieltjes) qui se trouve, elle aussi, des emplois multiples et utiles. Nous nous servirons en particulier de l'intégrale de Stieltjes dans le paragraphe suivant pour construire les décompositions spectrales des opérateurs auto-adjoints.

Introduisons d'abord la notion de fonction vectorielle à variation bornée. Soit sur $[a, b]$ une fonction vectorielle $y(t)$ à valeurs dans un espace de Banach Y. Soit $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{N}$ une subdivision de $[a, b]$. Faisons la somme

$$V_\tau(y) = \sum_{i=1}^{N} \|y(t_i) - y(t_{i-1})\|.$$

Définition 3.1. *On appelle variation totale de la fonction $y(t)$ sur $[a, b]$ le nombre $V_a^b(y) = \sup_\tau V_\tau(y)$.*

Définition 3.2. *Si $V_a^b(y) < +\infty$, on dit que la fonction vectorielle $y(t)$ est à variation bornée.*

Définition 3.3. *On dite que la fonction $x(t)$ est intégrable au sens de Stieltjes sur $[a, b]$ par rapport à la fonction $y(t)$ s'il existe un élément $s \in Z$ tel que pour toute suites subdivisions de $[a, b]$*

$$\tau_n = \{t_i^{(n)}\}_{i=0}^{N_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

dont le module $\lambda(\tau_n) \to 0$ pour $n \to \infty$, et pour toute familles de points intermédiaires $\theta_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, N_n$, on a la relation

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n} = s.$$

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que s est l'intégrable de Stieltjes de la fonction $x(t)$ sur $[a, b]$ par rapport à la fonction $y(t)$ et on note

$$s = \int_a^b x(t)dy(t).$$

L'existence de l'intégrale de Stieltjes fait l'objet du théorème suivant :

Théorème 3.3. *Si la fonction vectorielle $x(t)$ est continue sur $[a, b]$ et la fonction vectorielle $y(t)$ est à variation bornée sur $[a, b]$, alors $x(t)$ est intégrable de Stieltjes sur $[a, b]$ par rapport à $y(t)$.*[8]

3.3 Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert

3.3.1 opérateurs auto-adjoints

Rappelons qu'un opérateur T sur un espace de Hilbert H est dit **auto-adjoint** si $T^* = T$, c'est-à-dire si $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ pour tous $x, y \in H$. Dans le cas où l'espace est complexe, on dit aussi qu'il est hermitien. Lorsque T est auto-adjoint, on a $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$ (car $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$).

Proposition 3.3.1. Pour tout opérateur auto-adjoint T sur un espace de Hilbert H, on a $\|T\| = \sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|$.

Démonstration. posons $C = \sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|$. Pour tout $x \in H$, on a $|\langle tx, x\rangle| \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|^2$; donc $C \leq \|T\|$. Inversement, soit $x, y \in H$. On a $|T(x+y), x+y| \leq C\|x+y\|^2$, ainsi que $|T(x-y), x-y| \leq C\|x-y\|^2$. or

$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 2[\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle],$$

et$\langle Ty, x\rangle = \overline{\langle x, Ty\rangle} = \overline{\langle T^*x, y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle}$, car T est auto-adjoint. Il en résulte que :

$$4Re\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle$$

$$\leq |\langle T(x+y), x+y\rangle| + |\langle T(x-y), x-y\rangle|$$

$$\leq C[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2]$$

$$= 2C(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

par l'identité du parallélogramme.

Soit alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $|\langle Tx, y\rangle| = e^{i\theta}\langle Tx, y\rangle$. On obtient :

$$|\langle Tx, y\rangle| = e^{i\theta}\langle Tx, y\rangle = \langle Tx, e^{-i\theta y}\rangle = Re\langle Tx, e^{-i\theta y}\rangle$$
$$\leq (\frac{C}{2})(\|x\|^2 + \|e^{-i\theta}y\|^2) = (\frac{C}{2})(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Prenons maintenant $t > 0$, et remplaçons x par tx et y par y/t ; on obtient

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq (C/2)[t^2\|x\|^2 + (1/t^2)\|y\|^2].$$

Si $x, y \neq 0$, la plus petite valeur du second membre est obtenue pour $t = \sqrt{\|y\|x\|}$; on obtient, pour tous $x, y \in H$:

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq C\|x\|\|y\|.$$

Cela termine la preuve, puisqu'alors $\|tx\|^2 \leq C\|x\|\|tx\|$, et par conséquent $\|Tx\| \leq C\|x\|$.[2] □

Définition 3.4. *On dit que l'opérateur auto-adjoint Test positif, si $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in H$.* [8]

3.3.2 Spectre des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert

Soit $U : H \to H$ un opérateur sur un espace de Hilbert H, et U^* son adjoint. Il est clair que U^* est inversible si et seulement si U l'est, et qu'alors on a $(U^*)^{-1} = (u^{-1})^*$. Il en résulte que pour tout opérateur $T : H \to H$, on a :

$$\sigma(T^*) = \overline{\lambda}, \lambda \in \sigma(T)$$

car $\overline{\lambda}I - T^*$ est l'adjoint de $\lambda I - T$. Il en résulte que le spectre d'un opérateur auto-adjoint est symétrique par rapport à l'axe réel. En fait, on a mieux.

Théorème 3.4. *Si T est un opérateur auto-adjoint, son spectre $\sigma(T)$ est contenu dans $\mathbb{R}$ Plus précisément, si l'on pose :*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle,$$

alors $\sigma(T) \subseteq [m, M]$.

Remarque 3.3.1. Il est facile de voir que, lorsque T est auto-adjoint, ses valeurs propres sont réelles. En effet, si λ est une valeur propre de T et x un vecteur propre associé, on a d'une part, $\langle Tx, x\rangle = \lambda\|x\|^2$, et d'autre part $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\lambda}\|x\|^2$, d'où $\lambda = \overline{\lambda}$ puisque $x \neq 0$.

Pour la preuve, on utilisera deux résultats auxiliaires.

Lemme 3.5. *Soit H un espace de Hilbert.*

1) *Pour tout opérateur V sur H, on a* $\ker V = [Im(V^*)]^\perp$.
2) *Pour tout opérateur U sur H, on a* $\overline{Im(U)} = [\ker(U^*)]^\perp$.

Démonstration. 1) On a $Vy = 0$ si et seulement si $\langle Vy, x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$. Comme $\langle Vy, x\rangle = \langle y, V^*x\rangle$ cela donne le résultat. 2) On applique le 1) à $V = U^*$; puisque $U^{**} = U$ on obtient $[\ker(U^*)]^\perp = [ImU]^{\perp\perp} = \overline{ImU}$. □

Proposition 3.3.2. Un opérateur auto-adjoint U sur un espace de Hilbert H est inversible si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|Ux\| \geqslant c\|x\| \quad \forall x \in H. \tag{3.1}$$

Démonstration. Il est clair que l'inversibilité entraîne (3.1), avec $c = 1/\|U^{-1}\|$ Inversement, notons d'abord que la condition (3.1) entraîne l'injectivité de U. Si l'on montre que U est surjective, cela terminera la preuve, grâce au Théorème des isomorphismes de Banach. Tout d'abord, U est à image dense, puisque, par le 2) du lemme, cela revient à dire que U^* est injectif, et que $U = U^*$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que l'image de U est fermée. Soit $y \in \overline{ImU}$. Il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de H telle que $y = \lim_{n\to\infty} Ux_n$. La suite $(Ux_n)_{n\geqslant 1}$ est en particulier une suite de Cauchy. Comme, par (3.1)

$$\|x_n - x_k\| \leqslant (1/c)\|Ux_n - Ux_k\|,$$

la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est aussi de Cauchy. Comme H est complet, cette suite converge. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, la continuité de U nous donne $y = \lim_{n\to\infty} Ux_n = Ux$. Donc $\operatorname{im} U$ est fermée. □

Démonstration. du théorème 3.4
1) Soit $\lambda = \alpha + i\beta$ un nombre complexe ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), et supposons que $\beta \neq 0$. On va montrer que $\|T - \lambda I\|(x) \geqslant |\beta|\|x\|$ pour tout $x \in H$, ce qui impliquera, grâce à la Proposition 3.3.2, que λ n'est pas une valeur spectrale de T. Pour $x \in H$, on a :

$$\langle Tx - \lambda x, x\rangle - \langle x, Tx - \lambda x\rangle = 2iIm[\langle Tx, x\rangle - \lambda\|x\|^2] = -2i\beta\|x\|^2$$

car $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, puisque T est auto-adjoint. D'autre part,

$$\begin{aligned} |\langle Tx - \lambda x, x\rangle - \langle x, Tx - \lambda x\rangle| &\leqslant |\langle Tx - \lambda x, x\rangle| + |\langle x, Tx - \lambda x\rangle| \\ &= 2|\langle Tx - \lambda x, x\rangle| \\ &\leqslant 2\|Tx - \lambda x\|\|x\|; \end{aligned}$$

ce qui donne bien $\|Tx - \lambda x\| \geqslant |\beta|\|x\|$ 2) Comme on vient de voir que le spectre est réel, il s'agit maintenant de montrer que pour tout $d > 0, \lambda = m - d$ n'est pas une valeur spectrale (on montre de même, ou en remplaçant T par $-T$, que $M + d$ n'en est pas une). Or, pour $\|x\| = 1$:

$$\langle Tx - \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\|x\|^2 \geqslant m - \lambda = d;$$

comme $|\langle Tx - \lambda x, x\rangle| \leqslant \|Tx - \lambda x\|\|x\| = \|Tx - \lambda x\|$, on obtient $\|Tx - \lambda x\| \geqslant d$. Par homogénéité, on a $\|Tx - \lambda x\| \geqslant d\|x\|$ pour tout $x \in H$, ce qui donne le résultat, au vu de la Proposition 3.3.2. □

Théorème 3.6. *Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H. Alors les valeurs $m = \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ et $M = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ sont dans le spectre de T.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $M \in \sigma(T)$ (la preuve de $m \in \sigma(T)$ étant analogue ; de façon alternative, on peut aussi remplacer T par $-T$). Par la Proposition 3.3.2, il suffit de montrer que $\inf_{\|x\|=1}\|T - MI\| = 0$.

Comme $\sigma(T - aI) = \sigma(T) - a$, on peut, en remplaçant T par $T + aI$, supposer que $0 \leqslant m \leqslant M$. Alors $\|T\| = M$, par la Proposition 3.3.1.

Soit $x_n \in H$, avec $\|x_n\| = 1$ tels que $\langle Tx_n, x_n\rangle \longrightarrow_{n\to\infty} M$ On a :

$$0 \leqslant \|(T - MI)(x_n)\|^2 = \langle Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n\rangle$$

$$= \|Tx_n\|^2 + M^2\|x_n\|^2 - 2M\langle Tx_n, x_n\rangle \quad \text{(car } T \text{ est auto-adjoint)}$$

$$\leqslant \|T^2\| + M^2 - 2M\langle Tx_n, x_n\rangle \longrightarrow_{n\to\infty} \|T\|^2 + M^2 - 2M.M = 0,$$

puisque $\|T\| = M$. Donc $\|(T - MI)(x_n)\| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ et cela termine la preuve. □

Corollaire 3.7. *Le spectre d'un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert n'est jamais vide.*

Corollaire 3.8. *Pour tout opérateur T auto-adjoint sur un espace de Hilbert, son rayon spectral est égal à sa norme : $r(T) = \|T\|$.·*

Démonstration. Le Théorème 3.4 et le Théorème 3.6 impliquent que l'on a $r(T) = \max\{|M|, |m|\} = \sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|$. Il suffit alors ensuite d'utiliser la Proposition 3.3.1. □

Remarque 3.3.2. Lorsque l'espace de Hilbert est complexe, on peut en fait donner une preuve simple directe de ce corollaire. En effet, pour tout opérateur T, on a $\|T^*T\| = \|T\|^2$, puisque, d'une part $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$, et que, d'autre part, pour tout $x \in H$, on a $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \|T^*T\|\|x\|^2$. Donc si T est auto-adjoint, on a $\|T^2\| = \|T\|^2$, et, par récurrence, $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$ pour tout $k \geqslant 0$. Il en résulte puisque, l'espace étant complexe, $r(T) = \lim_{k\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, que $r(t) = \lim_{k\to\infty}\|T^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|T\|$

[2]

Définition 3.5. *(Opérateurs à résolvante compacte).*

Soit T un opérateur, défini sur $D(T) \subset H$. On dit que T est à résolvante compacte lorsque $(T + I)^{-1}$ est compact.

Définition 3.6. *(Diagonalisation dans une base orthonormée)*

. *On dit qu'un opérateur auto-adjoint T défini sur $D(T) \subset H$ est diagonalisable dans une base orthonormée s'il existe une base orthonormée (v_n) de H qui sont tous des vecteurs propres de T, c'est-à-dire vérifiant $v_n \in D(T)$ et $Tv_n = \lambda_n v_n$.*

Théorème 3.9. *(Spectre des opérateurs diagonalisables dans une base orthonormée).*

Soit T un opérateur auto-adjoint défini sur $D(T) \subset H$ et qui peut être diagonalisé dans une base orthonormée $(v_n) \subset D(T)$ avec $Tv_n = \lambda_n v_n$. Alors

$$D(T) = \left\{ v \in H \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 1} (\lambda_n)^2 |\langle v_n, v\rangle_H|^2 < \infty \right\}. \tag{3.2}$$

et, pour tout $v \in D(T)$, on a

$$Tv = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n \langle v_n, v\rangle_H v_n. \tag{3.3}$$

Finalement, le spectre de T est la fermeture de l'ensemble des valeurs propres :

$$\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n, n \geqslant 1\}}.$$

Réciproquement, tout opérateur T sous la forme (3.3) avec $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H et $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une famille de réels, T est auto-adjoint sur le domaine (3.2) et son spectre est la fermeture de l'ensemble des λ_n.[7]

3.4 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints

Dans ce paragraphe nous établirons la représentation intégrale d'un opérateur auto-adjoint borné T dans un espace de Hilbert H sous forme d'une intégrale de Stieltjes. Une telle représentation s'appelle **décomposition spectrale** de l'opérateur auto-adjoint. Un rôle important dans cette décomposition sera joué par une fonction opératorielle $P(\lambda)$, dite **fonction spectrale** de T. les valeurs de $P(\lambda)$ sont les orthoprojecteurs dans H, étroitement liées au spectre de T. [8]

Proposition 3.4.1. Tout opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert non réduit à 0 possède au moins une valeur propre.

Démonstration. On peut supposer cet opérateur T non nul (car s'il est nul, le résultat est clair). Alors l'une des valeurs spectrale m ou M de T définies dans le Théorème 3.6 est non nulle, par le théorème 2.29. T étant compact, toute valeur spectrale non nulle de T est une valeur propre. □

Remarque 3.4.1. Si T est auto-adjoint, son spectre n'est pas vide, mais sans l'hypothèse de compacité on ne peut affirmer l'existence de valeurs propres.

Lemme 3.10. *Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H.*

1) *Les sous-espaces propres de T correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

2) *Si F est un sous-espace invariant par T, alors $F^{\perp}$ est aussi invariant par T et $\sigma(T) = \sigma(T_{|F}) \bigcup \sigma(T_{|F^{\perp}})$.*

Démonstration. 1) Si λ et λ' sont deux valeurs propres distinctes de T, et x et x' deux vecteurs propres associés, on a :

$$\lambda\langle x, x'\rangle = \langle \lambda x, x'\rangle = \langle Tx, x'\rangle = \langle x, Tx'\rangle = \langle x, \lambda' x'\rangle = \lambda'\langle x, x'\rangle$$

(rappelons que $\lambda' \in \mathbb{R}$) ; donc $\langle x, x'\rangle = 0$.

2) Soit $y \in F^{\perp}$. Pour tout $x \in F$, on a $\langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = 0$ puisque $Tx \in F$; donc $Ty \in F^{\perp}$.

Il est clair que $T_{|F}$ et $T_{|F^{\perp}}$ sont aussi auto-adjoints (sur F et $F^{\perp}$ respectivement). Si $\lambda \in \sigma(T_{|F})$, on a, par la Proposition 3.3.2 : $\inf_{x\in H, \|x\|=1} \|T - \lambda I_H\| \leqslant \inf_{x\in F} \|T - \lambda I_F\| = 0$; donc $\inf_{x\in H, \|x\|=1} \|T - \lambda I_H\| = 0$ et $\lambda \in \sigma(T)$. De même $\sigma(T_{|F^{\perp}}) \subseteq \sigma(T)$.

Soit maintenant $\lambda \notin \sigma(T_{|F}) \bigcup \sigma(T_{|F^{\perp}})$. Il existe alors, toujours par la Proposition 3.3.2, une constante $c > 0$ telle que $\|Ty - \lambda y\| \geqslant c\|y\|$ pour tout $y \in F$ et $\|Tz - \lambda z\| \geqslant c\|z\|$ pour tout $z \in F^{\perp}$. Or tout $x \in H$ s'écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Comme $Ty - \lambda y \in F$ et $Tz - \lambda z \in F^{\perp}$ sont orthogonaux, on obtient :

$$\begin{aligned}\|Tx - \lambda x\|^2 = \|(Ty - \lambda y) + (Tz - \lambda z)\|^2 &\geqslant \|Ty - \lambda y\|^2 + \|Tz - \lambda z\|^2 \\ &\geqslant c^2\|y\|^2 + c^2\|z\|^2 = c^2\|x\|^2,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lambda \notin \sigma(T)$. □

Nous pouvons donc maintenant énoncer le résultat principal.

Théorème 3.11. *Soit T un opérateur auto-adjoint et compact sur un espace de Hilbert séparable H non réduit à 0. Alors il existe une base orthonormée $(e_n)_{n\geqslant 1}$ de H formée de vecteurs propres de T et l'on a, pour tout $x \in H$:*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n,$$

où λ_n est la valeur propre associée à e_n.

Démonstration. 1) Nous avons vu que l'ensemble des valeurs propres de T n'est pas vide. D'autre part, nous savons, grâce à la compacité de T, que cet ensemble est dénombrable. Pour chaque $\lambda \in \sigma_p(T)$, prenons une base orthonormée B_λ, du sous-espace propre $\ker(\lambda I - T)$ (rappelons qu'il est de dimension finie si $\lambda \neq 0$). Comme les sous-espaces propres sont deux-à-deux orthogonaux, $b = \bigcup_{\lambda\in\sigma_p(T)} B_\lambda$ est un système orthonormé. Pour montrer que c'est une base orthonormée, il ne reste plus qu'à voir que le sous-espace fermé F engendré par B, c'est-à-dire par $\bigcup_{\lambda\in\sigma_p(T)} \ker(\lambda I - T)$, est égal à H. Or s'il n'était pas égal à H, son orthogonal $F^\perp$ serait non réduit à 0. Mais, F étant invariant par T, $F^\perp$ l'est aussi et, par la Proposition 3.4.1, $T_{|F^\perp}$ possèderait au moins une valeur propre. Une telle valeur propre est valeur propre de T. Les vecteurs propres associés seraient à la fois dans F et dans $F^\perp$, ce qui n'est pas possible.

Pour finir, notons $e_n, n \geqslant 1$ les éléments de la base B, et λ_n la valeur propre associée à e_n. Comme $|\lambda_n| \leqslant r(T) = \|T\|$ pour tout $n \geqslant 1$, l'opérateur $U : H \to H$ défini par $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n$ est bien défini (car $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \infty$ entraîne $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2|\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty$) et est continu :

$$\|Ux\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2|\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \|T\|^2\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2 = \|T\|^2\|x\|^2.$$

Comme $U(e_n) = \lambda_n e_n = T(e_n)$ pour tout $n \geqslant 1$, on a $U = T$.[2] □

3.4.1 Fonction spectrale de l'opérateur auto-adjoint

soit T un opérateur auto-adjoint de $\ell(H)$. supposons qu'à chaque nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ soit associé un orthoprojecteur $P(\lambda)$ dans H.

Définition 3.7. *Une fonction opératorielle $P(\lambda)$ est appelée fonction spectrale de T si elle vérifie les conditions suivantes :*

1) $P(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda < m = \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$.
$P(\lambda) = I$ pour tout $\lambda \geqslant M = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$;

2) $P(\lambda)$ est une fonction croissante de λ, i.e. pour $\lambda < \mu$ on a $P(\lambda) \leqslant P(\mu)$;

3) $P(\lambda)$ est une continue à droite au sens de la convergence forte dans H, i.e. pour tout $x \in H$ on a

$$\lim_{\mu\to\lambda+0} P(\mu)x = P(\lambda)x;$$

4) pour tout λ l'opérateur $P(\lambda)$ est permutable à tout opérateur de $\ell(H)$ permutable à T ;

5) pour tout $\varepsilon > 0$ on a la formule de la décomposition spectrale sous forme d'une intégrale de stieltjes

$$T = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda dP(\lambda). \tag{3.4}$$

Remarque 3.4.2. Le nombre ε dans (3.4) intervient pour tenir compte d'un saut éventuel de $P(\lambda)$ en m.

Exemple 3.4.1. Soit T un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert complexe H de dimension finie n. L'opérateur T admet des valeurs propres qui sont toutes réelles. Faisons la suite strictement croissante des valeurs propres de T.

$$m = \lambda_1 < \lambda_2 \ldots \lambda_p = M \qquad (1 \leqslant p \leqslant n).$$

Soit H_i l'espace propre de T associé a la valeur propre λ_i, $(i = 1, \ldots, p)$. On a la décomposition orthogonale

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_p.$$

Soit ensuite P_i orthoprojecteur de H sur H_i. Montrons que la fonction spectrale de T se laisse définir comme suit :

$$P(\lambda) = \begin{cases} 0 & \textit{pour} \quad \lambda < \lambda_1, \\ p_1 & \textit{pour} \quad \lambda_1 \leqslant \lambda < \lambda_2, \\ P_1 + P_2 & \textit{pour} \quad \lambda_2 \leqslant \lambda < \lambda_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ P_1 + p_2 + \cdots + P_{p-1} & \textit{pour} \quad \lambda_{p-1} \leqslant \lambda < \lambda_p, \\ I & \textit{pour} \quad \lambda_p \leqslant \lambda. \end{cases} \tag{3.5}$$

Soit H_i l'espace propre de T associé a la valeur propre λ_i, $(i = 1, \ldots, p)$.

Lemme 3.12. *Si C est permutable à T, on a $CH_i \subset H_i$, $C^* H_i \subset H_i$.*

Remarque 3.4.3. Soit T un opérateur auto-adjoint et C permutable à T alors C^* permutable à T

Ainsi donc, les P_i sont permutables à C, d'où il découle que $P(\lambda)$ est aussi permutable à C.

Nous venons de montrer que la formule (3.5) définit effectivement la fonction spectrale $P(\lambda)$ de l'opérateur T. Dans le cas considéré, $P(\lambda)$ est une fonction opératorielle constante par morceaux qui admet des sauts aux points correspondant aux valeur propres de T.

Avant d'examiner un autre exemple de fonction spectrale, donnons une définition qui généralise celle de sous-espace propre d'un opérateur linéaire :

Définition 3.8. *Soit T un opérateur linéaire (peut-être non borné) défini sur une partie $D(T)$ d'un espace de Banach X, à valeurs dans X. La variété linéaire (sous-espace) M de X est appelée variété linéaire invariante (sous-espace invariant) de T si $TM \subset M$.*

Exemple 3.4.2. Soit dans l'espace de Hilbert $\ell_2[0,1]$ de fonction $x(t)$ un opérateur T défini par la formule

$$Tx = tx(t)$$

3.4.2 Existence de la racine carrée d'un opérateur positif

Soit U un opérateur auto-adjoint. Nous avons vu au définition 3.4 que l'opérateur U^2 est positif, $U^2 \geqslant 0$.

Cherchons la solution de l'équation quadratique la plus simple

$$U^2 = T \tag{3.6}$$

dans laquelle T est un opérateur positif donné. Il sera montré plus tard que cette équation admet une solution positive que nous désignerons par $\sqrt{T}$. Notons que l'équation (3.6) n'a aucune autre solution positive ; autrement dit, le problème d'extraction de la racine carrée d'un opérateur positive T a toujours une solution unique dans la classe des opérateurs positifs.

Pour prouver l'existence de $\sqrt{T}$, procédons par approximations successives. Ce faisant, nous utiliserons essentiellement, en la généralisant aux opérateurs auto-adjoints, la propriété de Weierstrass bien connue en analyse : toute suite croissante et majorée de nombres réels a une limite. Pour commencer, définissons les notions de suite croissante et de suite majorée pour les opérateurs auto-adjoints.

Définition 3.9. *On dit que la suite $(T_n)_n$ d'opérateurs auto-adjoints est croissante si pour tout entier naturel n on a $T_n \leqslant T_{n+1}$.*

Définition 3.10. *On dit que la suite d'opérateurs auto-adjoints $(T_n)_n$ est bornée supérieurement, ou plus exactement majorée par un opérateur auto-adjoint bornée C, si pour tout n on a $T_n \leqslant C$.*

Faisons deux remarques élémentaires.

Remarque 3.4.4. Pour que la suite d'opérateurs auto-adjoints T_n soit majorée, il faut et il suffit qu'il existe une constante c telle que $T_n \leqslant cI$, où I est l'opérateur identique.

En effet, si $T_n \leqslant C$, on a pour tout $x \in H$

$$\langle T_n x, x\rangle \leqslant \langle Cx, x\rangle \leqslant \| C \| \langle x, x\rangle = \langle \| C \| Ix, x\rangle,$$

i.e $T_n \leqslant \| C \| I$. La réciproque est évidemment varie : il suffit de poser $C = cI$.

Remarque 3.4.5. Si $(\|T_n\|)_n$ est bornée (les T_n étant auto-adjoints), $(T_n)_n$ est majorée.

En effet,

$$\langle T_n x, x\rangle \leqslant \| T_n \| \langle x, x\rangle \leqslant c\langle x, x\rangle = \langle cIx, x\rangle.$$

Lemme 3.13. *(Propriété de Weierstrass).*

Toute suite croissante et majorée d'opérateurs positifs converge fortement vers un opérateur positifs.

Démonstration. Soit une suite d'opérateurs positifs $(T_n)_n$ croissante,
$0 \leqslant T_n \leqslant T_{n+1}, n = 1, 2, \dots,$ et majorée, $T_n \leqslant cI, n = 1, 2, \dots$ Considérons la suite des nombres réels $((T_n x, x))_n$ dans laquelle $x \in H$ est fixé. Elle est croissante et majorée : il existe donc $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n x, x)$. Montrons que la suite $(T_n x)_n$ est alors convergente. Puisque $T_{n+p} - T_n \geqslant 0$ pour p, n entiers naturels quelconques, on obtient en appliquant l'inégalité généralisée de Cauchy-Bouniakovski pour tout $y \in H$

$$| \langle T_{n+p}x - T_n x, y\rangle |^2 \leqslant \langle (T_{n+p} - T_n)x, x\rangle \langle (T_{n+p} - T_n)y, y\rangle \leqslant$$
$$\leqslant c \| y \|^2 \{\langle T_{n+p}x, x\rangle - \langle T_n x, x\rangle\}. \tag{3.7}$$

Nous avons utilisé les inégalités suivantes :

$$\langle (T_{n+p} - T_n)x, x\rangle \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant \langle (T_{n+p} - T_n)y, y\rangle = \langle T_{n+p}y, y\rangle - \langle T_n y, y\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \langle T_{n+p}y, y\rangle \leqslant c \| y \|^2,$$

$$\langle T_n y, y\rangle \geqslant 0.$$

Posons maintenant dans l'inégalité démontrée (3.7)

$$y = T_{n+p}x - T_n x$$

Pour obtenir après simplification

$$\| T_{n+p}x - T_n x \|^2 \leqslant c\{\langle T_{n+p}x, x\rangle - \langle T_n x, x\rangle\}.$$

Puisque $((T_n x, x))_n$ est suite de Cauchy, il en découle que $(T_n x)_n$est aussi une suite de Cauchy. Comme H est complet, la limite de $(T_n x)_n$ existe. Posons

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Il est évident que Test linéaire. Ensuite, $\langle T_n x, y\rangle = \langle x, T_n y\rangle$, d'où pour $n \to \infty$ on déduit que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, i.e : que T est auto adjoint. Passant à la limite dans la double inégalité $0 \leqslant \langle T_n x, x\rangle \leqslant c\langle x, x\rangle$, on obtient $0 \leqslant \langle Tx, x\rangle \leqslant c\langle x, x\rangle$, d'où $0 \leqslant T \leqslant cI$.
Le lemme 3.13 est démontré. □

Passons maintenant à l'extraction de la racine carrée positive d'un opérateur positifs T. Remarquons tout de suite qu'il suffit d'envisager le cas où $\| T \| \leqslant 1$ et $T \neq 0$: en effet, le cas général se réduit à celui-ci, car $T = \| T \| \frac{T}{\|T\|}$, et si l'on connaît déjà la racine carrée positive $\sqrt{T/ \| T \|}$, on a évidemment $\sqrt{T} = \sqrt{\| T \|}\sqrt{T/ \| T \|}$. Considérons donc l'équation $U^2 = T$, où $0 \leqslant T \leqslant I$. Faisons dans cette équation le changement de la variable $U = I - V$ et posons $T = I - B$. Pour obtenir V, on a l'équation $I - 2V + V^2 = I - B$ que l'on transcrira sous la forme

$$V = \frac{1}{2}(B + V^2), \tag{3.8}$$

où $0 \leqslant B \leqslant I$. Procédons par approximations successives :

$$V_n = \frac{1}{2}(B + V_{n-1}^2), n = 1, 2, \dots, \tag{3.9}$$

en prenant comme approximation initiale $V_0 = 0$. Faisons quelques premières approximations successives à partir de (3.9) :

$$V_1 = \frac{1}{2}B;$$

$$V_2 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}V_1^2; \quad \text{d'où} \quad V_2 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2;$$

$$V_3 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}V_2^2, \quad \text{d'où} \quad V_3 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2 + \frac{1}{16}B^3 + \frac{1}{132}B^4.$$

Ces formule montrent que $0 \leqslant V_1 \leqslant V_2 \leqslant V_3$. De plus V_1, V_2, V_3 sont des plynômes en B à coefficients positifs. Montrons par récurrence que la suite $(V_n)_n$ est croissante, majorée par I et se compose d'opérateurs positifs. En effet, $0 \leqslant V_1 \leqslant B \leqslant I$. Supposons démontré que les $V_1, \dots, V_{n-1}$ sont positifs et majorés par I. Alors

$$0 \leqslant V_n = \frac{1}{2}(B + V_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2}(I + I) = I.$$

Montrons que $V_n \leqslant V_{n+1}$ pour n quelconque. A cette effet, montrons que tout $V_{n+1} - V_n$ est un polynôme en B à coefficients positifs. Notons tout d'abord que si V_n est un polynôme en B à coefficients positifs, alors $V_{n+1} = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}V_n^2$ l'est aussi, car V_n^2 est un polynôme en B à coefficients positifs. Ensuite, $V_2 - V_1$ est un polynôme en B à coefficients positifs. Soit par hypothèse de récurrence $V_n - V_{n-1}$ polynôme en B à coefficients positifs. Alors

$$V_{n+1} - V_n = \tfrac{1}{2}(B + V_n^2) - \tfrac{1}{2}(B + V_{n-1}^2) = \tfrac{1}{2}(V_n^2 - V_{n-1}^2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(V_n - V_{n-1})(V_n + V_{n-1}).$$

Lemme 3.14. *Si $T \geqslant 0$, alors pour $\langle Tx, x\rangle = 0$ on a $Tx = 0$.*

Démonstration. Des égalités successives

$$0 = \langle Tx, x\rangle = \langle(\sqrt{T})^2x, x\rangle = \langle\sqrt{T}x, \sqrt{T}x\rangle$$

on déduit que $\sqrt{T}x = 0$. A l'aide de $\sqrt{T}$ on obtient $Tx = 0$. Le lemme est démontré. □

Supposons maintenant que l'équation quadratique $U^2 = T$ admet deux solutions positives $U = \sqrt{T}$ et U_2. Remarquons que $U_2T = U_2U_2^2 = U_2^2U_2 = TU_2$; autrement dit, U_2 est permutable à T, auquel cas U_2 l'est aussi à U_1. Donc

$$0 = \langle(U_1^2 - U_2^2)x, (U_1 - U_2)x\rangle = \langle(U_1 + U_2)y, y\rangle = \\ = \langle U_1y, y\rangle + \langle U_2y, y\rangle,$$

où $y = (U_1 - U_2)x$. Puisque U_1, U_2 sont positifs, il en ressort que $\langle U_1y, y\rangle = 0$ et $\langle U_2y, y\rangle = 0$ tout aussi bien. En vertu du lemme 3.14 on a $U_1y = 0$ et $U_2y = 0$. Or, puisque $y = (U_1 - U_2)x$ et que x est arbitraire, on a

$$U_1(U_1 - U_2) = 0, \quad U_2(U_1 - U_2) = 0.$$

On n'a aucune difficulté à achever la démonstration :

$$\| (U_1 - U_2)x \|^2 = \langle(U_1 - U_2)x, (U_1 - U_2)x\rangle = \\ = \langle(U_1 - U_2)^2x, x\rangle = \langle U_1(U_1 - U_2)x, x\rangle + \\ + \langle U_2(U_1 - U_2)x, x\rangle = 0.$$

Donc $U_1 = U_2$. Nous venons de démontré un

Théorème 3.15. *Tout opérateur positifs T admet une racine carrée positive unique $\sqrt{T}$, ladite racine étant permutable à un opérateur $C \in \ell(H)$ si et seulement si C est permutable à T.*

3.4.3 Sur un orthoprojecteur particulier

Soit T un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert complexe H. Introduisons les notations

$$\mid T \mid = \sqrt{T^2}; \qquad T^+ = \frac{1}{2}\{\mid T \mid + T\}; \qquad T^- = \frac{1}{2}\{\mid T \mid - T\},$$

où $\sqrt{T^2}$ est la racine carrée positive de T^2.

Soit P l'orthoprojecteur sur $\ker(T^+)$:

Lemme 3.16. *Le projecteur P a les propriétés suivantes :*

1) *P est permutable à tout opérateur $C \in \ell(H)$ qui est permutable à T, en particulier P est permutable à T, à $\mid T \mid$, à T^+ et à T^- ;*

2) *Si* $Tx = 0$*, on a* $Px = x$*, i.e.* $\ker(T) \subset \ker(T^+)$ *;*

3)
$$T^- = PT^- = -PT = P \mid T \mid \geq 0, \tag{3.10}$$

$T^- = 0$ *si et seulement si* $T \geq 0$ *;*

4)
$$T^+ = (I-P)T^+ = (I-P)T = (I-P) \mid T \mid \geq 0, \tag{3.11}$$

$T^+ = 0$ *si et seulement si* $T \leq 0$ *;*

5) $T = (I-2P) \mid T \mid$.

Démonstration. 1) Soit C un opérateur permutable à T. Alors, en vertu de la définition de $\mid T \mid$ et d'après le théorème 3.15, C et permutable à $\mid T \mid$, à T^- et à T^+. Ensuite, pour tout $x \in H$ on a $T^+CPx = CT^+Px = 0$, car $Px \in \ker(T^+)$. On a donc $CPx \in \ker(T^+)$. d'où $PCx = CPx$ pour tout $x \in H$, ie.
$$PCP = CP \tag{3.12}$$
Remarquons à présent que l'opérateur adjoint C^* est aussi permutable à T (voir la remarque 3.4.3. A côté de (3.12), on a alors $PC^*P = C^*P$. Passant aux adjoints dans les deux membres de cette dernière égalité, on obtient $PCP = PC$, d'où, compte tenus de (3.12), il ressort que $CP = PC$.

2)Soit $Tx = 0$. On a alors $\mid T \mid x = 0$. Donc, $T^+ = \frac{1}{2}(\mid T \mid + T)x = 0$, i.e. $x \in \ker(T^+)$. Par définition de P, on a alors $Px = x$.

3) Puisque $T^+T^-x = 0$ pour tout $x \in H$, on a $T^-x \in \ker(T^+)$, d'où $PT^-x = T^-x$ d'après la propriété 2). Donc, $PTx = P(T^+ - T^-)x = -PT^-x = -T^-x$. Enfin, $P \mid T \mid x = P(T^+ + T^-)x = T^-x$. Comme x est arbitraire, on en déduit la formule (3.10) : $T^- \geq 0$, car on a déjà $P \geq 0$ et $\mid T \mid \geq 0$.

5)$(I-2p) \mid T \mid = (I-2P)(T^+ + T^-) = T^+ + T^- - 2pT^+ - 2PT^- = T^+ - T^- + 0 - 2T^- = T^+ - T^- = T$.

Le lemme est démontré. □

Définition 3.11. *On dit que la fonction* $x(t)$ *est uniformément continue sur* $[a,b]$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $\delta > 0$ *tel que pour tous* $t', t'' \in [a,b]$ *tels que* $|t' - t''| < \delta$

$$\|x(t') - x(t'')\| < \varepsilon.$$

Théorème 3.17. *soient* P_1, P_2 *deux projecteurs sur les sous-espaces* M_1, M_2 *respectivement. Les cinq conditions suivantes sont équivalentes :*

– [1°] $M_2 \subset M_1$ *;*

- [2°] $P_1P_2 = P_2$;
- [3°] $P_2P_1 = P_2$
- [4°] $\|P_2x\| \leq \|P_1x\|$ *pour tout* $x \in H$;
- [5°] $\langle P_2x, x\rangle \leq \langle P_1x, x\rangle$ *pour tout* $x \in H$.

Lemme 3.18. *Le produit de deux projecteurs est un projecteur si et seulement si les projecteurs multipliés sont permutables.*

3.4.4 Tout opérateur auto-adjoint a une fonction spectrale

Utilisant la construction indiquée dans la section 3.4.1, montrons que tout opérateur auto-adjoint $T \in \ell(H)$ a une fonction spectrale. Introduisons les notations (voir la section 3.4.3)

$$T_\lambda = T - \lambda I, \quad T_\lambda^+ = (T_\lambda)^+, \quad T_\lambda^- = (T_\lambda)^-.$$

Soit ensuite $P(\lambda)$ orthoprojecteur de H sur le sous-espace $\ker(T_\lambda^+) \equiv N_\lambda$. Montrons que $P(\lambda)$ est fonction spectrale de T. A cet effet, montrons que toutes les conditions 1) à 5) de la définition de la fonction spectrale (voir la définition 3.7) sont vérifiées. Commençons par la la propriété 4). Le projecteur $P(\lambda)$ est permutable à tout opérateur C qui l'est à T. On a en particulier $P(\lambda)P(\mu) = P(\mu)P(\lambda)$.

Montrons maintenant que $P(\lambda)$ est une fonction croissante de λ. (propriété 2)). Soit $Q = P(\lambda)[I - P(\mu)]$. Il suffit de montrer que $Q \equiv 0$ pour $\lambda < \mu$, auquel cas $P(\lambda) = P(\lambda)P(\mu)$ et on a $P(\lambda) \leq P(\mu)$ d'après le théorème 3.17.

Remarquons d'abord que Q est projecteur, car $P(\lambda)$ et $I - P(\mu)$ sont permutables d'après le lemme 3.18. Montrons que pour $\lambda < \mu$ l'égalité $Qx = x$ implique la nullité de x, ce qui signifie que le sous-espace d'arrivée de Q se réduit à 0.

Théorème 3.19. *Tout opérateur auto-adjoint borné admet une fonction spectrale.*

3.4.5 Fonction d'un opérateur auto-adjoint. Unicité de la fonction spectrale.

Nous avons vu que les séries convergentes d'opérateurs de $\ell(X)$. La formule démontrée ci-dessus permet de donner une définition indépendante de la convergence des séries d'opérateurs.

Définition 3.12. *Soit $f(\lambda)$ une fonction continue sur $[a,b]$. Par fonction d'un opérateur auto-adjoint T on entend l'expression*

$$f(T) = \int_{m-\varepsilon}^{M} f(\lambda)dP(\lambda).$$

(Il faut bien sûr que $[a,b] \supset [m-\varepsilon, M]$ pour un $\varepsilon > 0$).

En particulier

$$I = \int_{m-\varepsilon}^{M} dP(\lambda), \quad \sqrt{T} = \int_{m-\varepsilon}^{M} \sqrt{\lambda}\, dP(\lambda).$$

La première formule est évidente. La validité de la seconde implique $m \geqslant 0$ .On montre que cette nouvelle définition de $\sqrt{T}$ coïncide avec celle donnée section 3.4.2.

Notons qu'on a aussi

$$T^2 = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda^2 dP(\lambda).$$

D'où

$$\| Tx \|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^2x, x\rangle = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda^2 d\langle P(\lambda)x, x\rangle. \tag{3.13}$$

Nous pouvons maintenant démontrer l'unicité de la fonction spectrale, dont l'existence a été démontrée dans la section précédent. Supposons qu'en plus de $P(\lambda)$ l'opérateur auto-adjoint T admet encore une fonction spectrale $Q(\mu)$. On a alors

$$T = \int_{m-\varepsilon}^{M} \mu\, dQ(\mu)$$

De plus

$T_\lambda = T - \lambda I = \int_{m-\varepsilon}^{M} (\mu-\lambda)dQ(\mu), \quad T_\lambda^+ = \int_{m-\varepsilon}^{M} (\mu-\lambda)^+ dQ(\mu),$

où

$$(\mu-\lambda)^+ = \begin{cases} \mu-\lambda & si \quad \mu \geqslant \lambda, \\ 0 & si \quad \mu < \lambda \end{cases}$$

Donc

$$T_\lambda^+ = \int_{\lambda}^{M} (\mu-\lambda)dQ(\mu).$$

Soit $N_\lambda = \ker(T_\lambda^+)$. Si $x \in N_\lambda$, alors (voir (3.13))

$$\| T_\lambda^+ x \|^2 = \int_{\lambda}^{M} (\mu-\lambda)^2 d\langle Q(\mu)x, x\rangle = 0.$$

Cette égalité n'est possible que si $\langle Q(\mu)x, x\rangle \equiv \langle x, x\rangle$ pour tout $\mu \geqslant \lambda$. En particulier, il en ressort que $\langle Q(\lambda)x, x\rangle = \langle x, x\rangle$. On a alors

$\| Q(\lambda)x - x \|^2 = \langle Q(\lambda)x - x, Q(\lambda)x - x \rangle = \langle Q(\lambda)x, x \rangle - 2\langle Q(\lambda)x, x \rangle + \langle x, x \rangle = 0$, i.e. $Q(\lambda)x = x$. Par conséquent, $Q(\lambda)$ réalise aussi la projection de H sur N_λ. Etant équivalents, $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$ sont égaux. Nous venons donc de montrer que tout opérateur auto-adjoint borné dans un espace de Hilbert complexe admet une fonction spectrale et une seule. [8]

Chapitre 4

Application : Laplaciens de Dirichet, Neumann et Robin : diagonalisation

Le but de ce travail dans cet chapitre est étudier plus en détails le Laplacien sur un domaine Ω souvent supposé borné pour simplifier, et discutons les divers conditions au bord (Dirichlet, Neumann, Robin, périodique, Born-von Karman).

4.1 Laplaciens de Dirichet, Neumann et Robin : diagonalisation

On considère le problème $-\Delta f = \lambda f$ sur Ω. On définit $-\Delta_{R,\theta}$ par :
$-\Delta_{R,\theta} = -\Delta f$ pour f dans le domaine
$D(-\Delta_{R,\theta}) = \{f \in H^2(\Omega) : \cos(\pi\theta) f_{|\partial\Omega} + \sin(\pi\theta)\partial_n f_{|\partial\Omega} = 0\}$
avec $\partial_n f_{|\partial\Omega} = 0$ ie : $\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}|_{\partial_\Omega} = 0, \ \forall \ i : 1 \leqslant i \leqslant d.$

Corollaire 4.1. *(Laplacien sur $\mathbb{R}$).*

L'opérateur $T = -\Delta$ défini sur $D(T) = H^2(\mathbb{R}) \subset H = L^2(\mathbb{R})$ est auto-adjoint et son spectre est $\sigma(-\Delta) = [0, +\infty[$.

Théorème 4.2. *(Laplacien de Robin)*

Soit $-\Delta_{R,\theta}$ le Laplacien avec condition au bord de Robin, sur un domaine borné Ω vérifiant les conditions :

- *$\partial\Omega$ forme une variété de co-dimension 1 de classe C^2 ;*
- *$\partial\Omega$ est l'union d'un nombre fini de telles hypersurfaces, et Ω est strictement convexe au voisinage des divers singularité du bord.*

Cet opérateur est à résolvante compacte, et il peut donc être diagonalisé dans une base orthonormée. Par ailleurs, $-\Delta_{R,\theta}$ est un opérateur réel, et toutes ses fonctions propres *peuvent être choisies à valeurs réelles.*

Remarque 4.1.1. Le Laplacien périodique est aussi réel, mais le Laplacien de Born-von Karman ne l'est pas pour $k \neq 0$ modulo π. Dans ce cas, travailler avec des fonctions à valeurs complexes est incontournable.

4.2 Formes quadratiques

4.2.1 Théorème de Lax-Milgram

Soit donc T un opérateur auto-adjoint. On appelle forme quadratique associée à T celle définie par

$$q_T(v) := \langle v, Tv \rangle, \qquad v \in D(T).$$

On peut aussi regarder la forme polaire associée, qui vaut

$$\varphi_T(v, w) := \langle v, Tw \rangle, \qquad v, w \in D(T).$$

Dans cette section on fait l'hypothèse que q_T est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel quel

$$\langle v, Tv \rangle_H \geqslant \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in D(T). \tag{4.1}$$

Par suite $\sigma(T) \subset [a, \infty[$. En fait, par le théorème spectral les deux propositions sont même équivalentes dés que T est autoadjoint, Bien sûr, ce dont nous avons réellement besoin est que $q_T(x) \geqslant -C\|x\|_H^2$, ce qui correspond au fait que $\sigma(T)$ est minoré, et ensuite on peut se ramener à (4.1) en remplaçant T par $T + a$ avec $a > C$. Sous l'hypothèse (4.1), nous voyons que $x \in D(T) \mapsto \sqrt{q_T(x)}$ définit une norme, et que φ_T définit un produit scalaire. En général, l'espace $D(T)$ n'est pas fermé pour cette norme. En complétant $D(T)$ pour le produit scalaire φ_T, on trouve un nouvel espace $Q(T)$ tel que

$$D(T) \subset Q(T) \subset H.$$

Par extension, on trouve également une forme quadratique continue sur cet espace, qui étend q_T de façon unique et que l'on note de la même façon. De même, on trouve un produit scalaire φ_T pour lequel $Q(T)$ est un espace de Hilbert.
L'inégalité (4.1) garantie que $Q(T)$ s'identifie à un sous-espace de l'espace de Hilbert ambient H, avec injection continue $Q(T) \hookrightarrow H$. Par construction, $D(T)$ est dense dans $Q(T)$ pour la norme induite par q_T et on a donc

$$\varphi_T(v, w) = \langle v, Tw \rangle, \quad \forall v \in Q(T), \quad w \in D(T).$$

Ainsi, $q_T(v) \leqslant \|v\|_H \|Tv\|_H \leqslant \|v\|^2_{D(T)}$ et l'injection $D(T) \hookrightarrow Q(T)$ est également continue.

Définition 4.1. *(Forme quadratique)*

Soit T un opérateur auto-adjoint, tel que $\langle x, Tx\rangle \geqslant \alpha\|x\|^2_H$ pour tout $x \in D(T)$. On appelle forme quadratique associée à T l'unique forme quadratique q_T définie précédemment sur son domaine $Q(T)$. La forme polaire associée est notée φ_T.

Si T vérifie $\langle v, Tv\rangle_H \geqslant -C\|v\|^2_H$ pour tout $x \in D(T)$, on pose de façon similaire $q_{T+a} - a\|.\|^2_H$ pour $a > C$.

Exemple 4.2.1. (Laplacien sur $\mathbb{R}^d$). Considérons l'opérateur $T = -\Delta$ qui est auto-adjoint sur $H^2(\mathbb{R}^d)$,par intégration par parti. Alors on a

$$q_T(F) = -\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)}\Delta f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2 dx, \qquad \forall\ f \in H^2(\mathbb{R}^d).$$

Comme q_T est positive, on peut regarder par exemple $T + 1$ de sorte que

$$q_{T+1}(f) = \|f\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \geqslant \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

est coercive. Nous voyons que le procédé de complétion fournit simplement la forme quadratique

$$q_T(f) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2 dx \quad \text{sur} \quad Q(T) = H^1(\mathbb{R}^d),$$

puisque $H^2(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ pour la norme de $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Nous verrons que la forme quadratique q_T est un objet qui peut être plus facile à manipuler que l'opérateur T lui-même. Il est cependant légitime de se demander quelle relation il y a entre T et q_T. Peut-on retrouver T à partir de q_T ?. La réponse est positive et justifie l'introduction de la notion de forme quadratique.

Théorème 4.3. *(Caractérisation du domaine).*

Soit T un opérateur auto-adjoint vérifiant

$$\langle v, Tv\rangle_H \geqslant -C\|v\|^2_H, \quad \forall v \in D(T),$$

et soit φ_T la forme polaire associée. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $v \in Q(T)$ et il existe $z \in H$ tel que $\varphi_T(v, h) = \langle z, h\rangle_H$ pour tout $h \in Q(T)$;
(ii) $v \in D(T)$ et $Tv = z$.

Nous pouvons maintenant utiliser le résultat précédent pour donner une caractérisation variationnelle de l'équation $(T + a)v = z$.

Théorème 4.4. *(Lax-Milgram).*

Soit T un opérateur auto-adjoint vérifiant

$$\langle v, Tv\rangle_H \geqslant -C\|v\|_H^2, \qquad \forall\ v \in D(T),$$

et $a > C$. Soit $z \in H$ quelconque. Alors, le problème de minimisation

$$\inf_{w\in Q(T)} \left\{\frac{1}{2}q_T(w) + \frac{a}{2}\|w\|_H^2 - \Re(w,z)_H\right\}; \tag{4.2}$$

admet pour unique minimiseur $v = (T-a)^{-1}z \in D(T)$. Ce dernier est aussi caractérisé par la relation

$$\varphi_T(v,h) + a\langle v,h\rangle_H = \langle z,h\rangle_H \tag{4.3}$$

pour tout $z \in Q(T)$.

Le théorème nous précise comment retrouver T (ou plutôt $(T+a)^{-1}$) à partir de la forme quadratique q_T, puisque le point $v = (T+a)^{-1}z$ est l'unique minimiseur du problème (4.2). L'équation (4.3) s'appelle la formulation faible de l'équation $(T+a)v = z$ et elle s'obtient formellement en prenant le produit scalaire avec z. La caractère “faible”vient du fait qu'on suppose seulement que $v \in Q(T)$. Ainsi, la donnée de la forme quadratique q_T et de son domaine $Q(T)$ est équivalente à celle de T et $D(T)$.

Théorème 4.5. *(Riesz-Friedrichs)*

Soient $E \subset H$ deux espaces de Hilbert, de normes $\| \,.\, \|_E$ et $\| \,.\, \|_H$ et de produits scalaires $\langle .,.\rangle_E$ et $\langle .,.\rangle_H$. On suppose que E est dense et s'injecte continuement dans H, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\| v \|_E \geq \alpha \| v \|_H, \qquad \forall v \in E. \tag{4.4}$$

Alors il existe un unique opérateur auto-adjoint T sur son domaine $D(T) \subset H$, tel que $q_T = \| \,.\, \|_E^2$, $\varphi_T = \langle .,.\rangle_E$ et $E = Q(T)$.

4.2.2 Formule de Courant-Fischer et ses variantes

Nous avons vue la forme quadratique q_T d'un opérateur auto-adjoint T et avons donné une caractérisation faible de l'équation $(Tv + a)v = z$. Nous allons maintenant donner une caractérisation variationnelle des valeurs propres à partir de q_T uniquement. Pour cela, nous allons supposer pour simplifier que T est à résolvante compacte, T est alors diagonalisable dans une base orthonormée, ce qui signifie qu'il existe une base (v_n) et des réels λ_n avec $|\lambda_n| \to \infty$ tels que $Tv_n = \lambda_n v_n$. On a alors, d'après le théorème 3.9,

$$D(T) = \left\{ v \in H \ \ telque \ \sum_{n\geq 1} (\lambda_n)^2 \ |\langle v_n, v\rangle_H|^2 < \infty \right\}$$

et

$$Tv = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \ \langle v_n, v\rangle_H \ v_n.$$

Ceci permet d'obtenir une formule pour la forme quadratique associée à l'opérateur T

$$q_T(v) := \langle v, Tv\rangle_H = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \ |\langle v_n, v\rangle_H|^2 \tag{4.5}$$

et pour la forme sesquilinéaire associée

$$\varphi_T(v,w) := \langle v, Tw\rangle_H = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \ \langle v, v_n\rangle_H \ \langle v_n, w\rangle_H. \tag{4.6}$$

Ici on suppose d'abord que $v, w \in D(T)$, ce qui permet d'écrire $\langle v, Tw\rangle_H$. Mais il est ensuite clair que les séries (4.5) sens pour v et w dans un sous-espace plus grand que $D(T)$, qui est précisément le domaine

$$Q(T) = \left\{ v \in H \text{ tels que } \sum_{n\geq 1} |\lambda_n| \ |\langle v_n, v\rangle_H|^2 < \infty \right\}. \tag{4.7}$$

L'hypothèse dans la définition de $Q(T)$ implique que la série

$$\sum_{n\geq 1} \lambda_n \ |\langle v_n, v\rangle_H|^2$$

converge absolument. Mai si les λ_n ont un signe arbitraire, il se pourrait que la série soit oscillante et converge simplement sans converger absolument, pour des v en dehors de $Q(T)$. C'est pour éviter ce cas pathologique qu'on doit supposer que

$$\langle v, Tv\rangle_H \ \geq \ -C \ \|v\|_H^2 \tag{4.8}$$

ce qui, par le n°4.2.1 est équivalent à supposer que le spectre est minoré.
Comme alors $\lambda_n \to +\infty$ et donc $\lambda_n > 0$ pour n assez grand, la convergence de la série ne peut être qu'absolue.

Théorème 4.6. *(Courant-Fischer)*

Soit T un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte, dont le spectre est minoré, et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ la suite ordonnée de ses valeurs propres. Alors on a

$$\lambda_1 = \min \sigma(T) = \min_{\substack{v\in Q(T)\\ \|v\|_H=1}} q_T(v) \tag{4.9}$$

et le minimum est exactement atteint pour les $v \in \ker(T - \lambda_1) \subset D(T)$ normalisés. Plus généralement, on a

$$\lambda_k = \min_{\substack{V\subset Q(T)\\ \dim(V)=k}} \ \max_{\substack{v\in V\\ \|v\|_H=1}} q_T(v) \tag{4.10}$$

et le minimum est atteint pour les espaces sous la forme $V = Vect(v_1, \ldots, v_k) \subset D(T)$ *engendrés par* k *vecteurs propres correspondants aux* k *premières valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Théorème 4.7. *(Caractérisation des sommes de valeurs propres)*

Soit T *un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte, dont le spectre est minoré, et* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ *la suite ordonnée de ses valeurs propres. Alors on a*

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = \min_{\substack{w_1,\ldots,w_k \in Q(T) \\ \langle w_i, w_j \rangle_H = \delta_{ij}}} \sum_{j=1}^{k} q_T(w_j) \tag{4.11}$$

et le minimum est exactement atteint lorsque $Vect(w_1, \ldots, w_k)$ *est un espace engendré par* k *premiers vecteurs propres de* T.

Dans le minimum à droite, on prend un espace $W \subset Q(T)$ de dimension k comme (4.10), et une base orthonormée $w_1, \ldots, w_k$ de cet espace. Enfin, on somme les valeurs de la forme quadratique pour ces vecteurs. On peut montrer que la somme ne dépend pas de la base choisie.

4.3 Formes quadratiques du Laplacien et applications

Dans cette section, nous calculons les formes quadratiques associées aux différentes réalisations auto-adjoint du Laplacien, construites dans les sections précédentes, et nous déduisons des résultats précédents une formulation variationnelle pour les valeurs propres.

4.3.1 Laplacien périodique et de Born-von Karman

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ la cellule unité associée à un réseau périodique $\mathcal{L}$ c'est.à.dire
$\Omega = \{x_1a_1 + \cdots + x_da_d,\ \ x_1, \ldots, w_d \in]0,1[,\ \ a_i : \text{forment une famille libre quelconque de } \mathbb{R}^d\}$,
et $\mathcal{L} = \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_d$, et $-\Delta_{BK,\xi}$ l'opérateur Laplacien avec les conditions au bord de Born-von Karman, c'est-à-dire définie sur le domaine
$D(-\Delta_{BK,\xi}) = \Big\{ f \in H^2(\Omega) \text{ tels que } f(x+l) = f(x)e^{i\xi.l},$
$(\partial_n f)(x+l) = (\partial_n f)(x)e^{i\xi.l}, \text{ pour tous } (x,l) \in \partial\Omega \times \mathcal{L} \text{ avec } x+l \in \partial\Omega \Big\}.$
Nous rappelons que Laplacien périodique usuel est obtenus pour $\xi = 0$.

Théorème 4.8. *(Laplaciens périodique et de Born-von Karman)*

La forme quadratique associée à $-\Delta_{BK,\xi}$ *est*

$$q_{-\Delta_{BK,\xi}}(f) := \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx$$

sur le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$

$$Q(-\Delta_{BK,\xi}) = \Big\{ f \in H^1(\Omega) \text{ tels que } f(x+l) = f(x)e^{i\xi.l}, \\ \text{pour tous } (x,l) \in \partial\Omega \times \mathcal{L} \text{ avec } (x+l) \in \partial\Omega \Big\}.$$

En particulier, pour tout $g \in L^2(\Omega)$ *et tout* $a > -\min \sigma(-\Delta_{BK,\xi})$*, l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} (-\Delta + a)f = g \\ f \in D(-\Delta_{BK,\xi}) \end{cases}$$

coïncide avec l'unique minimiseur du problème de minimisation

$$\min_{f \in Q(-\Delta_{BK,\xi})} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla f(x)|^2 dx + \frac{a}{2}\int_\Omega |f(x)|^2 dx - \Re \int_\Omega \overline{g(x)} f(x) dx \right\}$$

qui est aussi l'unique solution dans $Q(-\Delta_{BK,\xi})$ *de la formulation faible*

$$\int_\Omega \nabla\bar{h}.\nabla f + a\int_\Omega \bar{h}f = \int_\Omega \bar{h}g, \quad \forall\ h\ \in Q(-\Delta_{BK,\xi}).$$

Par ailleurs, la première valeur propre est donnée par le principe variationnel

$$\lambda_1(-\Delta_{BK,\xi}) = \min_{p \in \mathcal{L}^*} |p+\xi|^2 = \min_{\substack{f \in Q(-\Delta_{BK,\xi}) \\ \int_\Omega |f|^2 = 1}} \int_\Omega |\nabla f|^2$$

et les autres valeurs propres par le principe de Courant-Fischer (4.10) *ou la caractérisation* (4.11).

Démonstration. Pour tout $f \in D(-\Delta_{BK,\xi})$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle f, -\Delta_{BK,\xi} f\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \overline{f(x)}(-\Delta f)(x)dx \\ &= \int_\Omega |\nabla f(x)|^2 dx - \int_{\partial\Omega} \overline{f(x)}\partial_n f(x)dx. \end{aligned}$$

En écrivant la frontière du cube comme l'union des faces et en les groupant deux par deux, on trouve en utilisant la condition au bord que

$$\int_{\partial\Omega} \overline{f(x)}\partial_n f(x)dx = 0, \quad \forall\ f \in D(-\Delta_{BK,\xi}),$$

de sorte que

$$q_{-\Delta_{BK,\xi}}(f) = \int_\Omega |\nabla f(x)|^2 dx.$$

La norme associée à cette forme quadratique est donc juste la norme $H^1(\Omega)$. L'espace de définition de cette forme quadratique est, la fermeture de $D(-\Delta_{BK,\xi})$ pour cette norme.

Dans $H^1(\Omega)$ la condition sur la dérivée normale est perdue car cette dernière ne fait pas sens dans cet espace.
Par contre, la condition sur la fonction reste, car l'application $f \in H^1(\Omega) \mapsto f_{|\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ est continue. Le reste suit immédiatement des théorèmes 4.4 et 4.6.[7] $\square$

Conclusion générale

En conclusion, que l'étude des opérateurs auto-adjoints occupe une partie importante en analyse fonctionnelle. Dans ce travail, nous donnons les propriétés générales des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert : spectre, propriétés spectrales et la décomposition spectrale,. . .,etc.

Enfin on prend un exemple comme une application d'opérateur Laplacien périodique et de Born-von Karman dans un domaine borné Ω.

ملخص:

نظرية الطيف يمكن أن تحل بعض المشاكل المتعلقة بالمعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية إذا كانت هذه الأخيرة يمكن تحويلها إلى مسألة قيم ذاتية لمؤثر المرافق الذاتي.

الكلمات المفتاحية:

نظرية الطيف، مؤثر المرافق الذاتي، قيم ذاتية.

Résumé :

La théorie spectrale peut résoudre des problèmes concernant les équations différentielles aux dérivées partielles, si celle se transforme à un problème de valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint.

Mots-clés:

La théorie spectrale, opérateur auto-adjoint, valeurs propres.

Abstract:

Spectral theory can solve some problems related to differential equations with partial derivatives if the latter could be transformed into a problem of eigenvalues of self-adjoint operator.

Keywords:

Bibliographie

[1] A. INTISSAR, ANALYSE FONCTIONNELLE et THÉORIE SPECTRALE pour les Opérateurs compacts Non Auto-adjoints, CÉPADUÉS-ÉDITIONS.

[2] D. Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, ellipses.

[3] G. Thirry, INTÉGRATION intégrale de Lebesgue et introduction à l'analyse fonctionnelle, ellipses.

[4] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential equations.

[5] Hirsch. Francis Gilles Lacombe, ÉLÉMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE, cours et exercices avec réponses, DUNOD.

[6] J. Charles, M. Mbekhta, H.Queffélec, ANALYSE FONCTIONNELLE ET THÉORIE DES OPÉRATEURS, Rappels de cours et exercices corrigés, DUNOD.

[7] Mathieu. Lewin, Éléments de théorie spectrale : le Laplacien sur un ouvert borné, HAL.

[8] V. TRÉNOGUINE, ANALYSE FONCTIONNELLE, ÉDITIONS MIR. MOSCOU, 1985