الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf - Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques Et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En : **Mathématiques**

Spécialité : **Mathématique Appliquée**

Sous-Variété de R^n

Préparé par: **Nekkache Ahleme**
Zehani Sonia

Devant le jury :

Sekhane Chafika	**MAA**	**C.U. Abd Elhafid Boussouf**	**Président**
Widad Laouira	**MCB**	**C.U. Abd Elhafid Boussouf**	**Examinateur**
Hafida Laib	**MAA**	**C.U. Abd Elhafid Boussouf**	**Rapporteur**

Année Universitaire: 2019/2020

Remerciements

Tout d'abord nous remercions **"ALLAH"** qui nous donne la force et la patience d'accomplir ce travail.

La première personne que nous tenons a remercier est notre encadreur **"Laib Hafida"** pour l'orientation, ainsi que ses efforts fournis et pour ses conseils judicieux prodigués.

Nos vifs remerciements **le membres de jury** pour l'intérêt qu'il ont porte a notre travail en acceptant d'examiner. Leurs avis et leurs remarques ne feront qu'apporter des idées nouvelles pour les études futures.

Nous exprimons notre profonde gratitude à **nos famille** et **nos amis** qui par leur prière et leur encouragements on a pu sur monter tous les obstacles

Résume

L'objectif de cette mémoire est de contribuer à étudier des sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qu'on l'appelle **"Les sous-variété"**, pour cette raison, nous avons essayé de donner des définitions principaux et importants de **la Topologie générale**. Nous définissons les notions du calcul différentielle, commençant par **les difféomorphismes** qui ont une principale application dans le changement de coordonnées pour simplifier les calcules et essaie de comprendre. Puis nous allons étudier des théorèmes qui jouent un rôle fondamental en géométrie différentielle, **le théorème d'inversion local, des fonctions implicites et de rang constant**. Nous donnons aussi la définition d'une **immersion et submersion**. A la fin, nous définissons la notion **d'une variété topologique** ou bien **différentielle**, des définitions équivalentes d'une **sous-variété de** $\mathbb{R}^n$ qui sont la généralisation à $\mathbb{R}^n$ des courbes et surfaces de l'espace et nous termine par les définitions des **espaces tangents** d'une sous-variété selon les définitions équivalentes des sous-variétés. Nous avons également enrichi notre mémoire avec plusieurs exemples illustratifs.

Abstract

The objective of this memory is to help study subsets of $\mathbb{R}^n$ we call him '**"sumanifold"**, for this reasons we tried to give main and important définitions of **the general topology** we define the notions of differential calcules, starting with **diffeomorphisme** wich have a main application in the change of coordintes to simplify calculations and try to undersrand. we will study theorems that play a funchamental role in diffrential geometry the local **inversion theorem, implicit function et constant rank**. we also give the definition of an **immersion and submersion**. at the end, we definie the notion of a **topoloique manifold** or **differential**, equivalent definitions of a **submanifold of** $\mathbb{R}^n$ which are the generalization to $\mathbb{R}^n$ of curves and surfaces of space and ends with the definitions of **tangent space** of a submanifold according to equivalent definitions of submanifolds. We also enriched our memory with several examples illustrative.

ملخص

هدفنا في هذه المذكرة أن نساهم في دراسة مجموعات جزئية من R^n تدعى **" المنوعات الجزئية".** من أجل هذا حاولنا إعطاء بعض التعريفات الأساسية و المهمة في **" الطبولوجيا العامة".** قدمنا بعض المفاهيم في الحساب التفاضلي، بدءا **بالتطبيقات التشاكلية من الصنف C^1** التي لها دور مهم في استعمال تغيير المتغير لتبسيط الحسابات. قمنا بدراسة بعض النظريات التي تلعب دور أساسيا في الهندسة التفاضلية: **" كنظرية العكس المحلي، نظرية التوابع الضمنية و نظرية الرتب الثابتة".** قدمنا أيضا مفهوم **" التفاضل المتباين والغامر "** لاستخدامه في تعريف **منوعة جزئية طبولوجية** أو **تفاضلية،** أعطينا تعريفات متكافئة لمنوعة جزئية معرفة على R^n و التي تعتبر تعميم للمنحنيات و الأسطح في الفضاء وفي الأخير أنهينا بتقديم **تعريفات للفضاء المماس** لمنوعة جزئية وفقا للتعريفات المتكافئة لها بالإضافة إلى ذلك حاولنا إثراء المذكرة بعدة أمثلة ورسومات توضيحية.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'historique des notions que nous présentons dans cette mémoire remonte à Bernhard Riemann $(1826 - 1866)$, dans une thèse intitulée "Sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie" (1854), Riemann introduisait sans la définir une notion qu'il appelait n-dimensionale Mannigfaltigkeit (Langue allemande), terminologie qui s'est conservée de nos jours (Sa traduction anglaise n-dimensional manifold et en français variété de dimensions n).

On va essayer d'expliquer par deux exemples l'idée intuitive de Riemann de la dimension d'une variété.

Exemple 1.

L'ensemble des droites affines du plan est une variété à deux dimensions. Pourquoi deux dimensions? Pour se donner une droite affine du plan on peut commencer par se donner sa direction : ce premier choix dépend d'un seul paramètre (un degré de liberté), par exemple l'angle que fait la direction choisie avec une direction de référence. Il reste ensuite à préciser la position de la droite choisie au sein de la famille des droites affines de direction donnée : ce deuxième choix dépend lui aussi d'un seul paramètre, par exemple l'abscisse du point d'intersection avec une droite transverse à la direction donnée. On a donc en tout deux degrés de liberté.

Exemple 2.

L'ensemble des droites affines de l'espace $\mathbb{R}^3$ est une variété à quatre dimensions. En effet,

i) La direction dépend maintenant de deux degrés de liberté.

ii) Une fois choisie la direction, il reste encore deux degrés de liberté (par exemple, le choix de la position du point d'intersection avec un plan transverse à la direction donnée).

Bien que la notion introduite par Riemann se soit rapidement imposée comme une notion centrale de la géométrie, il a fallu près d'un siècle pour que les mathématiciens arrivent à la formuler de cette façon précise :

Une variété est un espace topologique qui ressemble localement à l'espace euclidien près de chaque point. Plus précisément, chaque point d'une variété à n dimensions a un voisinage homéomorphe à l'espace euclidien de dimension n.

Les variétés unidimensionnelles comprennent des lignes et des cercles, mais pas des figures huit (car aucun voisinage de leur point d'intersection n'est homéomorphe à l'espace 1-euclidien).

Les variétés à deux dimensions sont également appelées surfaces. Les exemples incluent le plan, la sphère et le tore, qui peuvent tous être défini dans un espace réel en trois dimensions.

Les variétés topologiques est un sujet très important de la géométrie et de la physique mathématique moderne car il permet de décrire et de comprendre des structures complexes en termes de propriétés topologiques locales plus simples de l'espace euclidien. Ces variétés apparaissent naturellement sous forme d'ensembles de solutions de systèmes d'équations et des graphes de fonctions.

Pour la plupart des applications, un type spécial de variété topologique, qu'on l'appel une variété différentielle, est utilisé. Si les cartes locaux sur une variété sont compatibles dans un certain sens, on peut définir des directions, des espaces tangents et des fonctions différentiables sur cette variété. En particulier, il est possible d'utiliser le calcul sur une variété différentielle. Chaque point d'une variété différentiable à n-dimensions a un espace tangent. Il s'agit d'un espace euclidien à n-dimensions composé des vecteurs tangents des courbes passant par le point.

Notre mémoire se compose de trois chapitre

- **Dans le première chapitre :** Nous définissons quelques notions et théorie nécessaires qui seront utilisées dans les autre chapitres, nous commençons par rappel de topologie. Ensuite, les définitions d'homéomorphisme et d'isomorphisme. Enfin, nous expliquons les formulations et les propriétés de la différentielle.

• **Dans le deuxième chapitre :** Il y a trois propositions importantes dans ce chapitre : théorème d'inversion local,théorème des fonctions implicite et théorème du rang constant, les deux dernière sont déduites de la première. ces proposition forment l'outillage principal pour toutes les discussion concernant l'existence des application. le but de ce chapitre est expliquer les formulations exactes de ces théorèmes et leurs démonstration.

• **Le dernier chapitre** : Consiste à étudier des objets géométriques qui sont des sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ qu'on appelle "les sous-variétés". Ces objets apparaissent historiquement comme généralisation de la théorie classique des courbes et des surfaces dans l'espace $\mathbb{R}^3$. D'abord, on commence par la définition d'une variété topologique qui constitue sur les carte et les atlas puis la définition d'une variété différentielle. On termine par des définitions différentes et équivalentes d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ avec des exemples et contres exemples. A la fin, on parle de l'espace tangent d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

CHAPITRE 1

RAPPELS DE TOPOLOGIE

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous définissons quelques notions et théorie nécessaires qui seront utilisées dans les autre chapitres, nous commençons par rappel de topologie constitue espace topologie, espace métrique, espace vectoriel norme, partie compacte et connexe et plus application continue. Ensuite, les définitions d'homéomorphisme et d'isomorphisme. Enfin, nous expliquons les formulations et les propriétés de la différentielle.

1.2 Espace topologique

Définition 1.2.1. *Un espace topologique est un couple (X, θ) où X est un ensemble et θ un ensemble de parties de X appelées les parties ouvertes de X (ou les ouverts de X) qui vérifient :*

- *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*
- *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*
- *$\varnothing$ et X sont des ouverts de X.*

- Définir une topologie sur un ensemble X consiste à donner un ensemble θ de parties de X (les parties ouvertes) qui vérifie les propriété précédentes [11].

Exemple 1.2.1. *Sur un ensemble X, il existe toujours deux topologies "extrêmes" :*

- *Topologie discrète sur X : toutes les parties de X sont des ouverts.*
- *Topologie grossière : ϕ et X sont les seuls ouverts de X.*

Un espace muni de la topologie discrète (respectivement grossière) est dit discret (respectivement grossier).

Définition 1.2.2. *Un fermé P(ou une partie fermée) de (X, θ) est une partie de X dont le complémentaire C_X^P dans X est un ouvert de (X, θ).*

Propriété 1.2.1. • *Une intersection, quelconque de fermés est un fermé.*

- *Une réunion finie de fermés est un fermé.*
- *ϕ et X sont fermés.*

Définition 1.2.3. *Soient $((X_1, \theta_1), \cdots, (X_k, \theta_k))$ k espace topologies.*

Un ouvert élémentaire de $X_1 \times \cdots \times X_k$ est un produit $U_1 \times \cdots \times U_k$ où $U_1, \cdots, U_k$ sont des ouverts de $(X_1, \theta_1), (X_2, \theta_2), \cdots, (X_k, \theta_k)$.

Un ouvert de $X_1, X_2, \cdots, X_k$ est une réunion quelconque d'ouverts élémentaires. La topologie ainsi définit sur $X_1 \times \cdots \times X_k$ est appelée la topologie produit.

Définition 1.2.4. *Un espace topologique (X, θ) est dit séparé si, quels que soient x et y dans X, $x \neq y$, il existe un ouvert Ω_x contenant x et un ouvert Ω_y contenant y tels que $\Omega_x \cap \Omega_y = \varnothing$.*

Définition 1.2.5. *Soit (X, θ) un espace topologique. Soit $Y \subset X$, la topologie induite sur Y par (X, θ) est celle où les ouverts de Y sont les intersections de Y avec les ouverts de X.*

Les fermés de Y (pour la topologie induite) sont les intersection des fermés (X, θ) avec Y.

1.2.1 Espace métrique

Les espaces métriques sont un cas particulier très important d'espaces topologiques. Ce sont des espaces avec des propriétés assez intuitives, ou tout du moins qu'on a l'habitude de manipuler car le modèle le plus simple est $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle [11].

Définition 1.2.6. *Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et d une application*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y). \end{aligned}$$

qui vérifier : $\forall (x, y, z) \in X^3$

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

$d(x, y)$ *est appelé la distance entre* x *et* y.

Définition 1.2.7.

- *Pour tout $x_0 \in X$, $\delta \in \mathbb{R}_+$. La boule de centre x_0 et de rayon δ notée $B_{x_0}(\delta)$ est définie par :*

$$B_{x_0}(\delta) = \{x \in X / d(x, x_0) < \delta\}$$

- *Une partie $P \subset X$ est un ouvert de X si $X = \varnothing$ ou si $\forall x \in P$, $\exists \delta > 0$ tq $B_x(\delta) \subset P$. (Avec Cette définition un espace métrique devient un espace topologique).*

Proposition 1.1.

- *Un espace métrique est un espace topologique séparé.*

- *Une partie P de X est ouvert dans X si et seulement si c'est une réunion de boule de rayon positif (si $P \neq \varnothing$).*

1.2.2 Espace vectoriel

K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée "+" et d'une loi de composition externe de domaine K notée "."
$(E, +, .)$ est un K-espace vectoriel si et seulement si :

- (E,+)est un groupe commutatif.
- La loi "." vérifie les quartes axiomes :

i. $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$

ii. $\forall x \in E, \forall (\lambda, \mu) \in K^2, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$

iii. $\forall x \in E, \forall (\lambda, \mu) \in K^2, \lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x$

iv. $\forall x \in E, 1.x = x$

Sous espace vectoriel

Soit $(E, +, .)$ un K-espace vectoriel, et F une partie de E.
F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si et seulement si :

i. $0_E \in F$.

ii. $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \lambda.x + \mu.y \in F$, $\forall x \in E$.

Espace Vectoriel normé

Définition 1.2.8.
Une norme sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}$*, on note généralement pour tout* $x \in E, N(x) = \parallel x \parallel_E$ *qui vérifiant les quatre axiomes :*

i. $\forall x \in E, \parallel x \parallel \geq 0$ *(positivité) ;*

ii. $\forall x \in E, \parallel x \parallel = 0 \Rightarrow x = 0$ *(axiome de séparation) ;*

iii. $\forall x \in E, \forall \lambda \in k, \parallel \lambda x \parallel = \mid \lambda \mid \parallel x \parallel$ *(homogénéité) ;*

iv. $\forall (x, y) \in E^2, \parallel x + y \parallel \leq \parallel x \parallel + \parallel y \parallel$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2.9. *Un espace vectoriel normé est un couple (E,N)où E est un K-espace vectoriel et N est une norme sur E.*

1.2.3 Parties compactes

Soit (X, θ) un espace topologique séparé [11].

Définition 1.2.10. *Une partie $P \subset X$ est une partie compacte de X si de tout recouvrement d'ouverts de P, on peut extraire un recouvrement (ie : si quelque soit la famille d'ouverts de X : $\{U_i\}_{i \in I}$ telle que $P \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que $P \subset \bigcup_{i \in J} U_i$).*

Propriété 1.2.2.
Soit (X, θ) un espace topologique séparé, $Y \subset X$ muni de la topologie induite. Soit $P \subset Y$, alors
P compact dans $Y \iff P$ compact dans X.
(La notion de compacité est "absolue").

Proposition 1.2.
Soit (X, d) un espace métrique. Si $P \subset X$ est compact alors P est borné (P est borné si $\exists x_0 \in X$ et $\exists \delta > 0$ tel que $P \subset B_{x_0}(\delta)$).

Théorème 1.2.1.
Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie alors les parties compactes de E sont exactement les parties fermées bornées de E.

1.2.4 Parties connexe

Soit (X, θ) un espace topologique

Définition 1.2.11.
$P \subset X$ est une partie connexe de X si P n'est pas réunion disjointe de deux ouverts non vides de P (pour la topologie induite sur P) [11].

Définition 1.2.12 (équivalente)**.**
$P \subset X$ est une partie connexe de X si les seules parties de P qui soient à la fois ouvertes et fermées dans P (pour la topologie induite sur P) sont $\varnothing$ et P.

Proposition 1.3.

Soit $\{P_i\}_{i\in I}$ *une famille de parties connexe de* X, *si* $\bigcap_{i\in I} P_i \neq \varnothing$ *alors* $\bigcup_{i\in I} P_i$ *est connexe.*

Proposition 1.4.

Soit (X,θ) *un espace topologique,* $Y \subset X$ *muni de la topologie induite. Soit* $P \subset Y$, *alors* P *connexe dans* Y *si et seulement si* P *connexe dans* X.

Théorème 1.2.2.

Les connexes de $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$ *sont les intervalles.*

Définition 1.2.13.

Soit (X,θ) *un espace topologique. Un voisinage de* $x \in X$ *est une partie de* X *qui contient un ouvert qui contient* x.

Définition 1.2.14.

Un espace topologique (X,θ) *séparé est dit localement compact si tout point* x *de* X *admet un voisinage compact.*

Proposition 1.5.

Si (X,θ) *est localement compact, pour tout* x *de* X *tout voisinage de* x *contient un voisinage de* x *compact.*

Définition 1.2.15.

Un espace topologique (X,θ) *est dit localement connexe si pour tout point* x *de* X *tout voisinage de* x *contient un voisinage de* x *connexe.*

Remarque 1.1.

Cette dernière définition n'est pas équivalente à "tout point x *de* X *admet un voisinage connexe".*

1.2.5 Applications continues

Soient (E,θ) et (F,θ') deux espaces topologiques, f une application de E dans F.

Définition 1.2.16.

f *est continue en point* x_0 *(*$x_0 \in E$*) si pour tout voisinage* $V_{f(x_0)}$ *de* $f(x_0)$ *dans* F, *il existe un voisinage* U_{x_0} *de* x_0 *dans* E *tel que* $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$.

Notation

$L(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaire.

$\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaire et continue.

Proposition 1.6.

Si (E, d) et (F, d') sont deux espaces métriques, la définition (1.2.16) se traduit par :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in E$; $d(x, x_0) < \eta \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Et si $(E, \|\|)$ et $(F, \|\|')$ sont deux espaces vectoriels normés :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in E$; $\| x - x_0 \| < \eta \Longrightarrow \| f(x) - f(x_0) \|' < \varepsilon$.

Proposition 1.7.

La composition des applications continues est continue : si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont continues, alors $g \circ f : X \longrightarrow Z$ est continu.

Continuité de la restriction

Soit A une partie de X et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, la restriction de f dans A est :

$$f_{|A} : X \longrightarrow Y,$$

Définie par

$$(f_{|A})(a) = f(a).$$

Corollaire 1.2.1.

La restriction $f_{|A}$ d'une fonction $f : X \longrightarrow Y$ (A une partie de X) est continue.

Proposition 1.

Si E est de dimension finie, toutes les applications linéaires de E dans F sont continues.

1.3 Espace de Banach

Définition 1.3.1.

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet. Tout sous espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.

Théorème 1.3.1.

Tout espace vectoriel normé de dimension finie, est un espace de Banach.

1.4 Homéomorphisme

Définition 1.4.1.

Soit deux espaces métriques E, F et $f : E \to F$. On dit que f est un homéomorphisme lorsque :

- *f est bijective.*
- *f et f^{-1} sont continues.*

Dans ce cas, E et F sont dits homéomorphes [11].

Proposition 2.

Soit E, F, G, trois espaces métriques et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des homéomorphismes. Par composition, il est claire que $g \circ f : E \to G$ est un homéomorphisme. Alors, les trois espaces métriques envisagés sont homéomorphes.

Exemple 1.4.1.

Dans $\mathbb{R}$, en utilisant l'application affine :

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ & t & \longmapsto & (b-a)t+a, \end{array}$$

où $a < b$, on prouve aisément que le segment $[a,b]$ est homéomorphe à $[0,1]$.

Tout le segments (de longueur non nulle) sont donc homéomorphes. de la même façons,]a,b[est un homéomorphe à]0,1[.

Proposition 3.

$\mathbb{R}$ est homéomorphe à tout intervalle ouvert non vide.

Proposition 4.

Soit une bijection $f : E \to F$,

Pour que f soit un homéomorphisme, il faut et il suffit qu'elle vérifie la propriété suivante,

Pour toute partie U de E, on a équivalence :

$$U \text{ ouvert de } E \Leftrightarrow f(U) \quad \text{ouvert de } F.$$

Définition 1.4.2. *(Application ouverte, application fermée)*

1. Une application f est ouverte si l'image directe de tout ouvert par f est un ouvert.

2. Une application f est fermée si l'image directe de tout fermé par f est un fermé.

1.5 Isomorphisme d'espaces vectoriels normés

Définition 1.5.1. *Soient E et F deux espaces vectoriel normés, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On it que f est une* ***isomorphisme*** *si :*

- *f est bijective.*
- *f^{-1} est continues.*

On note $Isom(E, F)$ l'ensemble des isomorphisme d'espace vectoriel normé

Proposition 1.8.

Soient E et F deux espaces vectoriel normés, et $f \in L(E, F)$.

- *On dira que f est un isomorphisme de E dans F s'il existe $g \in L(E, F)$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$*

  L'application g est alors appelée isomorphisme réciproque de f.
- *On dira que f est une isométrie de E dans F si f est bijective et conserve la norme ; c'est-à-dire si pour tout $x \in E$, $\| f(x) \|_F = \| x \|_E$*

1.6 Différentielles

Définition 1.6.1.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est différentiable en a s'il existe $h \in (E, F)$ telle que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\| f(a+x)-f(a)-h(x)\|_F}{\| x\|_E}=0.$$

Ou bien (ce qui équivalent) :

f est différentiable en a s' il existe $h \in (E,F)$ *et* $\varepsilon : \Omega \to F$ *(où* Ω *est un voisinage de* 0 *dans E) vérifiant :* $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$*, telles que :*

$$f(a+x)-f(a)-h(x)=\| x\|_E\,\varepsilon(x).$$

Si h existe, elle est unique et on l'appelle la différentielle de f en a, notée $df_a \in (E,F)$.

Définition 1.6.2.

Si f est différentiable sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$*, l'application* $U \to M_{np}(\mathbb{R})$ *telle que* $a \to Jf_a$ *est appelée application jacobienne (ou plus simplement jacobienne). et donner par :*

$$Jf_a=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$$

Exemple 1.6.1.

Soit $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ $,f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$

avec $f_1(x)=2x_1e^{-x_2}-\sin(x_1x_4),\ f_2(x)=x_1^2-5x_2+x_3\sqrt{1+x_4^2}.$

Ici, f est différentiable en tout $x\in\mathbb{R}^4$ *et sa matrice jacobienne est :*

$$Jf_x=\begin{pmatrix} 2e^{-x_2}-x_4\cos(x_1x_4) & -2x_1e^{-x_2} & 0 & -x_1\cos(x_1x_4)\\ 2x_1 & -5 & \sqrt{1+x_4^2} & \frac{x_3x_4}{\sqrt{1+x_4^2}}\end{pmatrix}$$

Proposition 5.

Si $f:U\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *est différentiable en* $a\in U$*, elle admet des dérivées partielles du premier ordre en a, et*

$$df_a\cdot h=\sum_{i=1}^{n}\partial_i f(a)h_i.\quad (si\quad h=(h_1,\cdots,h_n))$$

Proposition 6.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si, chaque fonction coordonnée f_i est différentiable en a. De plus, la différentielle de f en a est donnée par

$$df_a(h) = df_i(a)^T h = \begin{pmatrix} df_{1a}(h) \\ \vdots \\ df_{pa}(h) \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

Théorème 1.6.1.

Soit $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f a des dérivées partielles sur U qui sont continues en a, alors f est différentiable en a.

Démonstration 1.6.1.

Supposons que $p = 2$ pour alléger les notions. Le cas général se traite de la même façons. Posons $a = (b, c)$. On a

$f(b+h, c+k) - f(b, c) = f(b+h, c+k) - f(b+h, c) + f(b+h, c) - f(b, c)$.

D'une part

$$f(b+h, c) - f(b, c) = \partial_1 f(b, c)h + o(h).$$

D'autre part, d'après le théorème des accroissement finis appliqué à la fonction $t \mapsto f(b+h, t)$,

$$f(b+h, c+k) - f(b+h, c) = \partial_2 f(b+h, c+\theta k)k \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\partial_2 f(b+h, c+\theta k) = \partial_2 f(b, c) + o(h, k)$$

1.7 Difféomorphisme

La notion de difféomorphisme est subtile, mais nécessaire. Vous avez eu l'occasion de l'apprécier concrètement lorsque vous avez eu à calculer des intégrales ou bien résoudre des équations différentielle.

Donc parmi les principales applications de ces difféomorphismes est le changement de coordonnées dans les équations au dérivés partielles, pour simplifier les calculs et lorsque l'on essaie de comprendre certains objets à difféomorphisme près, l'on s'affranchit de formules explicites et les difféomorphismes deviennent un filtre qui fait ressortir leurs propriétés qualitatives.

Une autre application de ces difféomorphismes est lorsque l'on définit la catégorie des variétés différentielles lisses, dans le troisième chapitre, avec morphismes donnés par l'ensemble des applications lisses. Les difféomorphismes sont les isomorphismes dans cette catégorie.

Exemple

Voici deux exemples classiques dans les utilisations des difféomorphismes :

1. Redémontrons l'égalité $\int\limits_0^\infty e^{-\sigma\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{\pi/2\sigma}$ pour tout $\sigma > 0$
   Notons $I = \int\limits_0^\infty e^{-\sigma\frac{t^2}{2}}dt$. En utilisant le théorème de Fubini et ensuite le théorème de changement de variable dans une intégrale double on obtient
   $I^2 = \iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} e^{\frac{-\sigma(x^2+y^2)}{2}}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^\infty re^{\frac{-\sigma r^2}{2}}drd\theta$
   Une fonction peut paraître compliquée dans un système de coordonnées, mais elle prend une forme simple dans autre système de coordonnées
2. Soit
   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$
   En coordonnées polaires cette fonction prend la forme simple $(r,\theta) \mapsto r$. Elle a l'air bien différente, mais c'est la même fonction. On va explicite ce qui s'est passe :
   L'application ϕ :$]0,-\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2/[0,-\infty[\times 0$,$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un difféomorphisme et $f\circ\phi = r$. Ainsi la fonction non-linéaire f devient linéaire après la composition par un difféomorphisme [13].

Définition 1.7.1.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$ .On dira que f est un difféomorphisme de U sur un ouvert $V \in F$, si :

- *$f : U \to V$ est une bijection .*
- *$f, f^{-1} : V \to U$ sont différentiable [7].*

Définition 1.7.2 (Difféomorphisme locale).
Soit E et F deux espaces normés, $U \subset E$ et $V \subset F$. On dit que f est un difféomorphisme locale en $x \in U$ lorsqu'il existe un ouvert U_x de E avec $x \in U_x \subset U$ et un ouvert $V_{f(x)}$ de F, telle que la restriction de f à U_x définisse un difféomorphisme de U_x sur $V_{f(x)}$.

Définition 1.7.3 (C^k-difféomorphisme).
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f : U \to V$ est un C^k-difféomorphisme si et seulement si

- *si f est une bijection*
- *si f et f^{-1} sont de classe C^k.*

On dit que C^k-difféomorphisme local en $x \in U$, s' il existe U_x et $V_{f(x)}$voisinages respectifs de x dans U et de $f(x)$dans V tels que $V_{f(x)} = f(U_x)$ et l'application induite $f : U_x \to V_{f(x)}$ est un C^k-difféomorphisme.

Exemple 1.7.1.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (e^x - e^y, x + y)$.
Afin de déterminer si f est un C^1-difféomorphisme, il est nécessaire de calculer la matrice Jacobienne de f :

$$J_f = (x, y)\begin{pmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

-Il est claire que les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
-Pour montrer l'injectivité de f, il faut trouver les couples (x, y) tels que $f(x, y) = f(a, b)$. Soit :

$$\begin{cases} e^x - e^y &= e^a - e^b, \\ x + y &= a + b. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 &= e^{2x} - e^x(e^a - e^b) - e^{a+b}, \\ y &= a + b - x. \end{cases} \tag{1.1}$$

En appliquant le changement de variable $X = e^x$, on obtient l'équation du second degré suivante :

$$X^2 - X(e^a - e^b) - e^{a+b} = 0.$$

Les solutions de cette équation sont :$X = -e^b$ et $X = e^a$. Or $X > 0$, on peut donc conclure *qu'il existe une unique solution à l'équation* (1.1).

On conclut donc que f est injective.

- Enfin $det(J_f(x,y)) = e^x + e^y \neq 0$. D'où l'inversibilité de la Jacobienne sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion : A la fin de ces trois étapes on a le résultat espéré, c'est à dire f est un C^1-difféomorphisme.

[7].

Remarque 1.2.

Un difféomorphisme de U sur V est évidemment un homéomorphisme de U sur V. Mais la réciproque est fausse, telle que une application peut être différentiable et être un homéomorphisme sans être un difféomorphisme.

par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ mais pas un difféomorphisme car son inverse $x \mapsto signe(x) \mid x \mid^{\frac{1}{3}}$ est continu mais non de classe C^1(n'est pas différentiable). [21]

CHAPITRE 2

INVERSION LOCALE ET FONCTION IMPLICITE

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer deux applications importantes de la notion de différentiabilité. Les deux théorèmes (d'inversion locale et de la fonction implicite) sont assez proches dans la mesure où on obtient assez facilement l'un comme conséquence de l'autre, mais les énoncés et surtout les applications sont finalement bien distincts.

2.2 Théorème d'inversion

On considère une application f de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$. On a dit que l'application affine $x \mapsto f(a) + d_a f(x-a)$ est une bonne approximation de la fonction f au voisinage du point a. Le but est de voir s'il est possible de faire un lien entre le fait que f est une bijection et le fait que sa différentielle en tout point de U est elle-même bijective. Tout d'abord il est facile de voir que si f est inversible, alors sa différentielle l'est également en tout point :

Proposition 2.1.

On suppose que f réalise un C^1-difféomorphisme de U dans $V \subset \mathbb{R}^p$.
Alors $n = p$ et pour tout $a \in U$ la différentielle $d_a f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ d'inverse $(d_a f)^{-1} = d_{f(a)}(f^{-1})$. [17]
La démonstration repose simplement sur le calcul de la différentielle dune fonction composée :

Démonstration 2.2.1.

On a $f^{-1} \circ f = Id_U$. En différentiant on obtient que tout $a \in U$ on a

$$d_{f(a)}(f^{-1}) \circ d_a f = Id_{\mathbb{R}^n}.$$

De même on a $f \circ f^{-1} = Id_V$ donc pour tout $b \in v$

$$d_{f^{-1}(b)} f \circ d_b(f^{-1}) = Id_{\mathbb{R}^p}.$$

Avec $b = f(a)$ on obtient que

$$d_a f \circ d_{f(a)}(f^{-1}) = Id_{\mathbb{R}^n}.$$

Cela prouve que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont isomorphes (ce qui implique que $n = p$), et $d_a f$ et $d_{f(a)f^{-1}}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. [17]

À la lumière de cet exemple on comprend qu'on ne pourra pas obtenir l'injectivité (propriété globale) à partir de l'inversibilité de la différentielle (propriété locale). On va néanmoins l'obtenir localement : si la différentielle de f est inversible en un point, alors f réalise un difféomorphisme au voisinage de ce point.

2.2.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 2.2.1 (Théorème d'inversion locale)**.**

Soit E et F deux espaces de Banach, $f : E \to F$ est de classe C^k et U un ouvert de E.

Soit a un point de U, si $d_a(f)$ est isomorphisme de E dans F, alors il existe un voisinage V de a dans U tel que la restriction de f à V réalise un C^k difféomorphisme de V dans $W = f(V)$ [7]

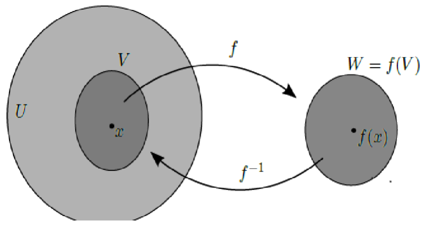


FIGURE 2.1 – Inversion locale.

Preuve 2.1. .

1^{er} **étape :Simplification.**

On se ramène à : $a = 0, f'(a) = 0$ *et* $df(a) = Id_{\mathbb{R}^n}$ *et on remplace* f *par :* $\tilde{f} : x \longmapsto [df(a)]^{-1}(f(x-a) - f(a))$ *telle que :*

$$\begin{cases} \tilde{f}(0) = 0, \\ d\tilde{f}(0) = [df(a)]^{-1} \circ df(a) = Id_{\mathbb{R}^n}. \end{cases}$$

2^e**étape :"Application du théorème du point fixe pour montrer l'existence de l'inverse".**

On a l'équation :

$$y = \tilde{f}(x) \Leftrightarrow x = (x + y - \tilde{f}(x)) \Leftrightarrow g_y(x) = x.$$

avec $g_y(x = x + y - \tilde{f}(x))$. *Donc* x *est solution de* $y = \tilde{f}(x)$ *si et seulement si* x *est un point fixe de* g_y.

On va montrer que g_y *est contractante :calculons*

$$\| g_y(x) - g_y(x') \| = \| (x - x') - (\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')) \|$$

En $y = 0$, on a $g_0(x) = x - \tilde{f}(x)$. En particulier

$$dg_0(0) = Id_{\mathbb{R}^n} - d\tilde{f}(0) = Id_{\mathbb{R}^n} - Id_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Comme g_0 est C^1, alors il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\| x \| \leq \delta \Longrightarrow \| dg_0(x) \| \leq \frac{1}{2}.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis on obtient, pour tout $x, x' \in \overline{B(0,\delta)}$:

$$\| g_0(x) - g_0(x)' \| \leq \frac{1}{2} \| x - x' \| .$$

Dans le cas générale, pour tout y et pour tout $x, x' \in \overline{0,\delta}$, on obtient :

$$\| g_y(x) - g_y(x') \| = \| (x - x') - (\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')) \| = \| g_y(x) - g_y(x') \| \leq \frac{1}{2} \| x - x' \|$$

En particulier,

$$\| g_y(x) - g_y(0) \| = \| g_y(x) - y \| \leq \frac{1}{2} \| x \|, \forall x \in \overline{B(0,\delta)} \; \| g_y(x) \| \leq \| y \| + \frac{1}{2} \| x \| \leq \| y \| + \frac{\delta}{2} si \; \| y \| \leq \frac{\delta}{2}$$

$$\begin{array}{rccc} g_y : & \overline{B(0,\delta)} & \rightarrow & \overline{B(0,\delta)} \\ & x & \rightarrow & g_y(x) = x + y - \tilde{f}(x) \end{array}$$ *est contractante sur l'espace complet $\overline{B(0,\delta)}$*

D'après lr théorème du point fixe,$\exists ! x \in \overline{B(0,\delta)}$ tel que $g_y(x) = x \Leftrightarrow \exists ! x \in \overline{B(0,\delta)}$tel que $y = \tilde{f}(x)$

En résumé, pour tout $y \in \overline{B(0,\frac{\delta}{2})}$,il existe un unique $x \in \overline{B(0,\delta)}$
tel que $y = \tilde{f}(x)$
c'est à dire que :

$$\tilde{f} : \overline{B(0,\delta)} \rightarrow \overline{B(0,\frac{\delta}{2})} \cap \tilde{f}^{-1}(\overline{B(0,\frac{\delta}{2})})$$

est bijective.

3^e étape :Continuité de l'inverse

Soient $y_1, y_2 \in \overline{B(0, \frac{\delta}{2})}$, *alors* $\exists x_1, x_2 \in \overline{B(0,\delta)}$ *tels que*

$$\tilde{f}^{-1}(y_1) = x_1 \quad et \quad \tilde{f}^{-1}(y_2) = x_2$$

$$\begin{aligned} \| \tilde{f}^{-1}(y_1) - \tilde{f}^{-1}(y_2) \| = \| x_1 - x_2 \| &\leq \| \tilde{f}^{-1}(x_1) - \tilde{f}^{-1}(x_2) \| + \| g_0(x_1) - g_0(x_2) \| \\ &\leq \| \tilde{f}^{-1}(x_1) - \tilde{f}^{-1}(x_2) \| + \| x_1 - x_2 \| . \end{aligned}$$

On en déduit que $\| x_1 - x_2 \| \leq 2$.

Et en inversant $\tilde{f}$ *on obtient :*$\| \tilde{f}(y_1) - \tilde{f}(y_2) \| \leq 2 \| y_1 - y_2 \|$.

Ce qui permet de conclure que $\tilde{f}$ *est bien continue.*

4^e étape : Différentiabilité de $\tilde{f}$.

Soit $y_0 \in \overline{B(0, \frac{\delta}{2})}$. *Posons* $\Delta = \dfrac{\| \tilde{f}^{-1}(y) - \tilde{f}^{-1}(y_0) - d\tilde{f}^{-1}(y_0)(y - y_0) \|}{\| y - y_0 \|}$

Quitte à prendre un $\delta > 0$ *plus petite, on peut supposer que pour tout* $x \in \overline{B(0,\delta)}$, $|[d\tilde{f}(x)]^{-1}$ *existe*

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\| x - x_0 - [d\tilde{f}(x_0)]^{-1}(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)) \|}{\| \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) \|} \\ &= \frac{\| x - x_0 \|}{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)} \times \frac{\| [d\tilde{f}(x_0)]^{-1}(x - x_0) - \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) \|}{\| x - x_0 \|} \\ &\leq \frac{\| x - x_0 \|}{\| \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0 \|} \times \| [d\tilde{f}(x_0)]^{-1} \| \times \frac{\| d\tilde{f}(x_0)(x - x_0) - \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) \|}{\| x - x_0 \|} \end{aligned}$$

Dans cette équation on a : $\dfrac{\| x - x_0 \|}{\| \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) \|} \leq 2$ *et* $\| d[\tilde{f}(x_0)]^{-1} \| \leq M$.

De plus, $\tilde{f}$ *est différentiable, d'où :* $\dfrac{\| [d\tilde{f}(x_0)](x - x_0) - \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) \|}{\| x - x_0 \|}$ *tend vers* 0 *quand* x *tend vers* x_0.

En conclusion, l'application $x \to [d\tilde{f}(x_0)]^{-1}$ *est continue, ce qui implique qu'il existe* $M \geq 0$ *tel que* $\| [d\tilde{f}(x_0)]^{-1} \| \leq M, \forall x \in B(0,\delta)$.

5^e **étape : $\tilde{f}$ est de classe C^k.**

$$d\tilde{f}^{-1}(g) = [d\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(y))]^{-1} \Rightarrow d\tilde{f}^{-1} = Inv \circ d\tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1}.$$

comme $\tilde{f}$ est de classe C^k, Inv est de classe C^∞ et $\tilde{f}^{-1}$ différentiable $\Rightarrow d\tilde{f}$ est continue$\Rightarrow$ $\tilde{f}^{-1}$ est de classe $C^k \Rightarrow \cdots \Rightarrow \tilde{f}^{-1}$ est de classe C^k.

2.2.2 Théorème d'inversion locale en dimension finie

Théorème 2.2.2.

Dans le théorème d'inversion locale, on a supposé que $d_f(a) : E \to F$.

Donc par hypothèse les espace E et F sont isomorphes .

Lorsque E et F sont de dimension finies, cela implique que dim E=dim F.

Moyennant le choix d'une base de E et d'une base de F on peut donc considérer $E = F = \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{rcl} f: & U \to & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1 \dots x_n) & \mapsto & (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \end{array}$$

supposons f de classe C^1.

L'application linéaire $d_f(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est définie par la matrice jacobienne Jf_a.

Dire que $d_f(a) \in Isom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ revient donc à dire que $det(Jf_a) \neq 0$ (i.e. le jacobien de f au point a est non nul).

Le théorème d' inversion locale exprime donc que si le jacobien de f au point $a \in U$ est non nul, alors il existe un voisinage V de $a \subset U$, et un voisinage W de $b = f(a) \subset F$ tels que $f : V \to W$ soit un difféomorphisme de classe C^1. [21]

2.2.3 Théorème d'inversion globale

Théorème 2.2.3.

Soient E, F deux espaces de Banach et $f : U \to F$ est C^k . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- *$f : U \to f(U) = V$ est un difféomorphisme de classe C^k.*

- $\forall x \in U$, $df(x) \in Isom(E,F)$ *et* $f : U \to F$ *est injective [7]*

Exemple 2.2.1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

L'application f*est différentiable en tout point de* $\mathbb{R}^2$*et la matrice jacobienne de* f *en un point* (r,θ) *est :*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Par suite $df(r,\theta)$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si* $det J_f(r,\theta) = r \neq 0$.

On en déduit, d'après le théorème d'inversion locale, que tout point (r_0,θ_0) *avec* $r_0 \neq 0$ *possède un voisinage ouvert* V *tel que* $f_{/V}$ *soit un* C^1*-difféomorphisme de* V *sur* $f(V)$.
Ainsi par exemple si $r_0 > 0$ *et s'il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \theta_0 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ *, alors nous pouvons prendre*
$V =]0,+\infty[\times] - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$ *et*
$(f_{/V})^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2k\pi)$.
Cet exemple montre qu'il existe des application de classe C^1 *dont la différentielle, en chaque point de leur domaine de définition, est isomorphisme, et qui ne sont pas des difféomorphismes globaux, car elles ne sont pas injectives .*

Exemple 2.2.2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

L'application f *est différentiable en tout point de* $\mathbb{R}^2$ *et le déterminant jacobien de* f *en un point* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *est égale à :*$4(x^2+y^2)$.

Donc en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, f'(x,y) \in Isom(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ *;*

mais f *n'est pas injective, et ne peut donc être un difféomorphisme global.*

2.3 Théorème des fonctions implicites

Problème

Étant donnée une équation $f(x, y) = 0$ (la fonction est implicite), peut-on écrire de façon explicite y en fonction de x ou x en fonction de y ?

$$y = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad x = \psi(y)$$

De façon équivalente, est-ce que l'ensemble des solutions $S = \{f(x, y) = 0\}$ est un graphe ?

$$S = \{(x, \varphi(x))/x \in U\} \quad \textbf{ou} \quad S = \{(\psi(y), y)/y \in V\},$$

Exemple

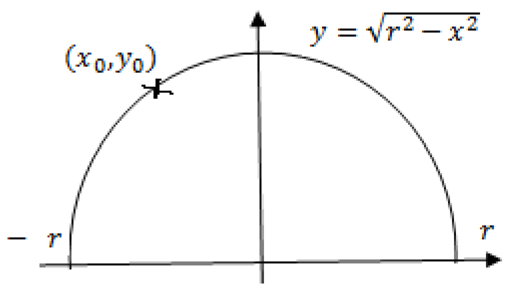
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/f(x, y) = 0\}$

1. Si $r > 0, S = C((0, 0), r)$
2. Si $r = 0, S = (0, 0)$
3. Si $r < 0, S = \varnothing$

On considère maintenant le cas $r > 0$.Soit $(x_0, y_0) \in S$.
Si $y_0 > 0$

alors $y = \sqrt{r^2 - x^2}, x \in] - r, r[$.

$S^+ = \{(x, \sqrt{r^2 - x^2})\}/x \in] - r, r[\subsetneq S$ donc S est, au voisinage de (x_0, y_0), “localement” un graphe de la forme $\{(x, \varphi(x))/x \in U\}$.

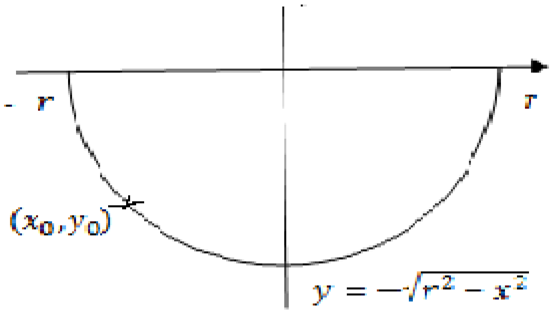


Si $y_0 < 0$

$S^- = \{(x, -\sqrt{r^2 - x^2})/x \in]-r, r[\} \subsetneq S$,

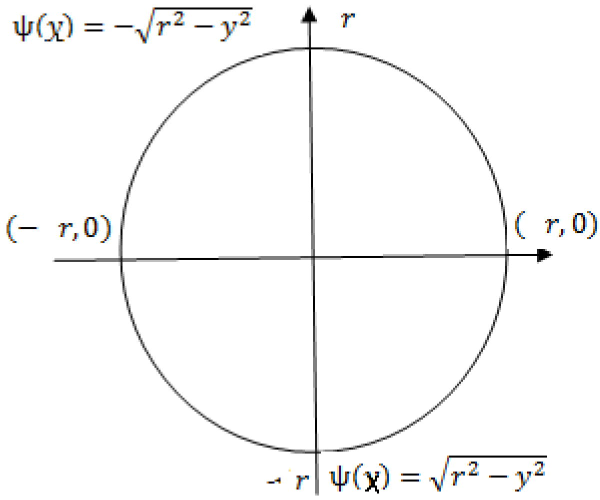
donc S est, au voisinage de (x_0, y_0),

le graphe de la fonction $f : x \mapsto -\sqrt{r^2 - x^2}$.



Si $y_0 = 0 \Longrightarrow x_0 = r$ ou $x_0 = -r$.

* Si $x_0 = r$ alors $x = \sqrt{r^2 - y^2}$, avec $y \in]-r, r[\Longrightarrow \psi(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$.
* Si $x_0 = -r$ alors $x = -\sqrt{r^2 - y^2}$, avec $y \in]-r, r[\Longrightarrow \psi(y) = -\sqrt{r^2 - y^2}$. Donc S s'écrit, au voisinage de $(\pm r, 0)$ comme un graphe d'une fonction de la forme $x = \psi(y)$.



[7].

Théorème 2.3.1.

Soient E, F et G trois espace de Banach, U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G$ une application de classe C^1 sur U.

Soit $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$.

On suppose que la différentielle partielle, $\partial_y f(a, b)$ de f au point (a, b) est un isomorphisme de F sur G.

Alors il existe un voisinage ouvert W de a dans E et une application ϕ de classe C^1 de W dans F, tels qu'on ait l'équivalence suivante :

$$(x, y) \in V, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in W, y = \phi(x).$$

[21]

Démonstration 2.3.1.

Considérons l'application $g : U \to E \times G$ *définie par*

$g(x,y) = (x, f(x,y))$.

Elle est de classe C^1*, puisque ses composantes le sont. Sa différentiable au point* (a,b) *a pour expression :*

$dg(a,b)(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & df_x(a,b) \\ 0 & df_y(a,b) \end{pmatrix}(u,v) = (u, df_x(a,b)u + df_y(a,b)v),$

$\forall (u,v) \in E \times F$.

C'est un isomorphisme de de $E \times F$ *sur* $E \times F$ *dont l'isomorphisme inverse a pour expression*

$(dg(a,b))^{-1}(u,v) = (u, (df_y(a,b))^{-1}(w - df_x(a,b)u)), \forall (u,w) \in E \times G$.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert V *de* (a,b) *dans* $E \times F, V \subset U$*, tel que* g *soit un difféomorphisme de classe* C^1 *de* V *sur* $g(V) = W_1$*, qui est un voisinage ouvert de* $g(a,b)$ *dans* $E \times G$.

Soit ψ *le difféomorphisme inverse de* g *.On a l'équivalence suivante :*

$(x,y) \in V$ *et* $g(x,y) = (x_1, z) \Leftrightarrow (x_1, z) \in W_1$ *et* $\psi(x_1, z) = (x,y)$.

Mais d'après la définition de $g, g(x,y) = (x, f(x,y))$*. L'inverse* ψ *de* g *est donc nécessairement de la forme :*

$\psi(x,z) = (x, \psi_1(x,z))$*, pour tout couple* $(x,y) \in W_1$*, où* $\psi : W_1 \to F$ *est une application de classe* C^1.

L'équivalence précédente peut donc s'écrire :

$$(x,y) \in V, f(x,y) = z \Leftrightarrow (x,z) \in W_1, \psi_1(x,z) = y. \tag{2.1}$$

Dans l'équivalence (2,1) faisons $z = 0$*.On a alors :*

$(x,y) \in V$ *et* $f(x,0) = 0 \Leftrightarrow (x,0) \in W_1$ *et* $\psi_1(x,0) = y$.

Posons $W = x \in E/(x,0) \in W_1,$ *et* $\forall x \in W, \phi(x) = \psi_1(x,0)$.

L'ensemble W *est un voisinage ouvert du point* a *dans* E *et l'application* $\phi : W \to F$ *est de classe* C^1.

L'équivalence (2,1) s'écrit alors :

$$(x,y) \in V et f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \in W et \phi(x) = y.$$

D'où le résultat. [21]

Exemple 2.3.1.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Considérons le point $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

l'application f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^3$ *et en tout point* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *on a*

$$f'_z(x, y, z) = 2z.$$

On déduit que $f'_w(0, 0, 1) = 2 \neq 0$.

De plus $f(0, 0, 1) = 0$. *D'après le théorème des fonctions implicites (où on identifie* $\mathbb{R}^3$ *à* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$*), il existe un voisinage ouvert* V *du point* $(0, 0, 1)$ *dans* $\mathbf{R}^3$, *un voisinage ouvert* W *de* $(0, 0)$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *et une application* ϕ *de* W *dans* $\mathbb{R}$ *tels qu'on ait l'équivalence :*

$(x, y, z) \in V$ *et* $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in W$ *et* $z = \phi(x, y)$.

On prendre par exemple :

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\}, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 1\} \quad et \quad z = \phi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

2.4 Rang d'une application

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable sur U et $a \in U$. On appelle rang de f au point a, le rang de la matrice jacobienne de f en a. On le notera dans la suite $rg(f)(a)$.

Remarque 2.1.

Il à noter que le rang de f *au point* a *ne change pas lorsqu'on compose* f *par un difféomorphisme local au voisinage de* a

Théorème du rang constant

Théorème 2.4.1.

Soient U, V *des ouverts de* $\mathbb{R}^p$ *et* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : U \to V$ *de classe* C^k, $k \geq 1$, *et* $df(x)$ *est de* *rang contant r dans U. Alors il existe des ouverts U' et V' contenant x_0 et $y_0 = f(x_0)$ et des difféomorphismes locaux g sur U' et h défini sur V' tels que : [23]*

$$h \circ f \circ g(x_1, \cdots, x_p) = (x_1, \cdots, x_r, 0, 0, \cdots, 0).$$

Démonstration.
Quitte à composer avec des changement de coordonné affine, on peut supposer que $x_0 = 0, y_0 = 0$ et que $df(x_0)$ est la projection $(x_1, \cdots, x_p) \mapsto (x_1, \cdots, x_r, 0, 0, \cdots, 0)$.
Soit alors π la projection $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_r)$ et w l'application

$$w(x_1, \cdots, x_p) = (\pi \circ f(x_1, \cdots, x_p), x_{r+1}, \cdots, x_p).$$

Sa différentielle en x_0 est l'identité, il existe donc g difféomorphisme local de $\mathbb{R}^p$ telle que $w \circ g = Id$ soit $\pi(f(g((x_1, \cdots, x_p)))) = (x_1, \cdots, x_r)$, on s'est donc ramené à la situation où

$$f(x_1, \cdots, x_p) = (x_1, \cdots, x_r, g(x_1, \cdots, x_p)).$$

où $s : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n-r}$. L'hypothèse que f est de rang r au voisinage de 0 entraine que pour tout x dans U', $\frac{\partial s}{\partial x_j} = 0$ pour $j > r$ et donc que $s(x_1, \cdots, x_p) = s(x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0)$.
En posant $s = (s_{r+1}, \cdots, s_p)$ et composant avec le difféomorphisme [23]

$$h : (y_1, \cdots, y_n) \mapsto (y_1, \cdots, y_r, y_{r+1} - s_{r+1}(y_1, \cdots, y_r), \cdots, y_n - s_n(y_1, \cdots, y_r)).$$

□

2.5 Submersion, Immersion

Définition 2.5.1.
*Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. On dit que f est une **immersion**, si pour tout $x \in U$, la différentielle $df(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est injective.*

Définition 2.5.2.
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. On dit

que f est une ***submersion****, si pour tout $x \in U$, la différentielle $df(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est surjective.*

Remarque 2.2.

Soient

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \cdots, x_p) &\mapsto f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \end{aligned}$$

alors

1. *f est une immersion en x si et seulement si $rang(Jf(x)) = p$.*
2. *f est une submersion en x si et seulement si $rang(Jf(x)) = n$.*
3. *f est de rang m en x si et seulement si il existe $\{i_1, \cdots, i_m\} \subseteq \{1, \cdots, p\}$ et $\{j_1, \cdots, j_m\} \subseteq \{1, \cdots, n\}$ tels que :*

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{j_m}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_m}}{\partial x_{i_m}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

et, $\forall i = 1, \cdots, p, \forall j = 1, \cdots, n$

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}}, & \cdots & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_m}} & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{j_m}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_m}}{\partial x_{i_m}} & \frac{\partial f_{j_m}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_{j}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j}}{\partial x_{i_m}} & \frac{\partial f_{j}}{\partial x_i} \end{vmatrix} = 0$$

[6]

Remarque 2.3.

1 *Si $df(a)$ est surjective (resp. injective) en un seul point $a \in U$, alors $df(x)$ est automatiquement surjective (resp. injective) pour tout x suffisamment proche de a.*

2 *On dit que f est une immersion (resp. submersion) si f est une immersion (resp. submersion) en tout point de f.*

3 *La composée de deux immersion est une immersion, que la composée submersion est une submersion, mais la composée de deux application de rang constant n'est pas forcément de rang constant.*

Les deux résultats qui suivent, connus sous le nom de la forme normale locale des immersions et la forme normale locale des submersions, seront souvent utilisés dans le troisième chapitre ; ce sont des conséquences du théorème d'inversion locale.

Théorème 2.5.1 (Forme normale locale d'une immersion)**.**
Soit $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$(de classe $C^1, p \leq n$) une immersion en $a \in U$, alors il existe un voisinage ouvert $W \subset U$ de a, un voisinage ouvert V de $f(a) \in \mathbb{R}^n$, un ouvert V' de $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : V' \to V$ tels que :

$$\begin{aligned}
&\varphi \circ f : W \subset \mathbb{R}^p \to V' \subset \mathbb{R}^n. \\
&y = (x_1, \cdots, x_p) \mapsto (x_1, \cdots, x_p, 0, \cdots, 0).
\end{aligned}$$

est une injection canonique, i.e le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
W & \to & V \\
 & \searrow & \downarrow \varphi \\
 & & V'
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. [6]
On a

$$\begin{aligned}
f : U \quad &\to \mathbb{R}^n \\
x = (x_1, \cdots, x_p) \quad &\mapsto \quad (f_1(x), \cdots, f_p(x), \cdots, f_n(x))
\end{aligned}$$

est une immersion en a (i.e $rang_a f = p$). A des permutation prés (voir Remarques(2.5)) on peut supposer que

$$det\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p} \end{vmatrix}_{(a)} \neq 0$$

Si on pose

$$\begin{aligned} h : U \times \mathbb{R}^{n-p} &\to \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \cdots, x_p, \cdots, x_n) &\mapsto \quad (f_1(x), \cdots, f_p(x), f_{p+1}(x) + x_{p+1}, \cdots, f_n(x) + x_n) \end{aligned}$$

où $x(x_1, \cdots, x_p)$.

alors $\overline{a} = (a, 0), h(\overline{a}) = (h(a, 0)) = f(a)$ et on a

$$D_{(a,0)}h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_p} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{x_p} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(a,0)}$$

$$det(D_a h) = det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{(a)} \neq 0$$

Du théorème d'inversion locale (2.2.1), on déduit l'existence d'une ouvert $V' \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de $\overline{a}$ et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de $h(\overline{a})$ tel que $h : V' \to V$ est un difféomorphisme. Si on note $\varphi = h^{-1} : V \to V'$, alors

$$\varphi^{-1}((x, 0)) = h((x, 0))(f_1(x), \cdots, f_p(x), f_{p+1}(x), \cdots, f_n(x)) = f(x)$$

d'où

$$\varphi \circ f(x) = (x, 0) = (x_1, \cdots, x_p, 0, \cdots, 0), \forall x \in W = f^{-1}(V).$$

□

Théorème 2.5.2 (Forme normale locale d'une Submersion)**.**

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ (de classe $C^1, n \leq p$) une submersion en $a \in \mathbb{R}^p$, alors il existe un ouvert $W \subset U$ voisinage de a, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : W \to V$ un difféomorphisme tels *que*

$$\begin{aligned} f\circ\varphi^{-1} : V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots,y_p) &\mapsto (y_1,\cdots,y_n) \end{aligned}$$

est une projection canonique, i.e. le diagramme suivant

$$\begin{array}{rccc} f: & W & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ g: & \downarrow & \nearrow & \\ & V & & \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. [6]
On a

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x=(x_1,\cdots,x_p) &\mapsto (f_1(x),\cdots,f_n(x)) \end{aligned}$$

est une submersion en a (i.e $rang_a f = n$). A des permutation prés (voir Remarques(2.5)) on peut supposer que

$$det\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{(a)} \neq 0$$

Si on pose

$$\begin{aligned} h : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots,x_p) &\mapsto (f_1(x),\cdots,f_n(x),x_{n+1},\cdots,x_p) \end{aligned}$$

alors

$$D_a h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(a)}$$

$$det(D_a h) = det\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{(a)} \neq 0$$

Du théorème d'inversion locale (2.2.1), on déduit l'existence d'un ouvert $W \subset U$ voisinage de a et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$ voisinage de $h(a)$ tel que $h : W \to V$ est un difféomorphisme. Si $x \in W$ et $y \in V$ tel que $y = h(x)$ alors

$$y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots, y_p) = (f_1(x), \cdots, f_n(x), x_{n+1}, \cdots, x_p)$$

d'où

$$y_i = f_i(x); \forall i = 1, \cdots n.$$

Si on pose $\varphi = h : W \to V$ alors

$$f \circ \varphi^{-1}(y) = f(\varphi^{-1}(y)) = f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)) = (y_1, \cdots, y_n).$$

est une projection canonique sur $\mathbb{R}^n$. □

2.6 Plongement

Une immersion injective $f : U \to \mathbb{R}^n$ définit une bijection continue $U \to f(U)$, mais en général cette bijection continue n'est pas un homéomorphisme, donc l'application réciproque $f(U) \to U$ n'est pas nécessairement continue. Remarquer que l'application réciproque $f(U) \to U$ est continue si et seulement si pour tout suite $(u_n)_{n\in N}$ de U telle que $(f(u_n))_{n\in N}$ converge dans $\mathbb{R}^n$ vers un point $f(v) \in f(U)$ on a $\lim_{n\to\infty} u_n = v$.
Le dessin ci dessus montre un exemple d'immersion injective $f :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ pour laquelle l'application réciproque $f(]a, b[) \to]a, b[$ n'est pas continue. [20]

Définition 2.6.1.
Un plongement $f : U \to \mathbb{R}^n$ d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est une immersion injective qui induit un homéomorphisme $U \to f(U)$. [20]

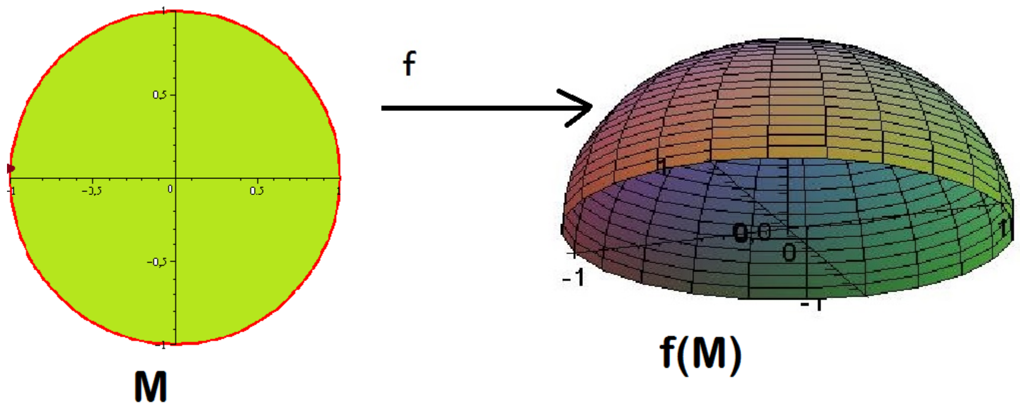
Le dessin ci dessus nous donne donc un exemple d'immersion injective qui n'est pas un plongement.

Exemple 2.6.1.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{array}$$

f *est un plongement sur* $S^2_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > 0\}$.



[6].

Proposition 7.

Dans le cas $p = n$*, les notions de plongement et de difféomorphisme sur sont image sont équivalentes.*

Propriété 2.6.1.

Les notions de plongement et d'immersion sont localement identiques. Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *est une immersion en* $x_0 \in \mathbb{R}^p$*, alors il existe un voisinage ouvert* V *en* x_0 *tel que* $f_{/V}$ *est un plongement. [4]*

CHAPITRE 3

SOUS-VARIÉTÉ DE $\mathbb{R}^N$

3.1 Introduction

Ce chapitre, consiste à étudier des objets géométriques qui sont des sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ qu'on appelle "les sous-variétés". Ces objets apparaissent historiquement comme généralisation de la théorie classique des courbes et des surfaces dans l'espace $\mathbb{R}^3$. D'abord, on commence par la définition d'une variété topologique qui constitue sur les carte et les atlas puis la définition d'une variété différentielle. On termine par des définitions différentes et équivalentes d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ avec des exemples et contres exemples. A la fin, on parle de l'espace tangent d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

3.2 Variété topologique

Définition 3.2.1.

Une variété topologique de dimension p est un espace topologique M tel que :

- *L'espace M soit séparé et dénombrable.*
- *Tout point de M admette un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un espace*

$\mathbb{R}^n$.

Autrement dit, en tout point x de M il existe un couple (U, ϕ) où :

- *U est un voisinage ouvert de x.*
- *$\phi : U \to \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme sur son image $V = \phi(U)$.*

  où V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. [19]

Exemple 3.2.1.

(1) Les exemples les plus simples sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$, qui vérifient bien sur les condition de la définition (3.2.1).

(2) Un autre exemple est donné par le graphe d'une fonction continue F d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(3) Le graphe de la fonction $x \mapsto \mid x \mid$ (ou celui de n'importe quelle application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est une variété topologique de dimension 1, puisque la première projection est un homéomorphisme sur $\mathbb{R}$.

Par contre, la réunion X des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas une variété topologique. En effet, le complémentaire de $(0, 0)$ dans l'un quelconque de ses voisinages a au moins quatre composantes connexes, ce qui exclus l'existence d'ouverts de X contenant $(0, 0)$ et homéomorphes à un intervalle.

3.3 Carte

Définition 3.3.1.

Une carte d'une variété topologique M est la donnée d'un couple (U, φ) formé d'un ouvert U de M (U domaine de la carte) et d'un homéomorphisme φ de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Désignons la iéme coordonnée de $\phi(a)$ par $x_i(a)$.Dés lors, on a

$$\phi(a) = (x_1(a), \cdots, x_n(a)).$$

On obtient ainsi n fonction $x_1, \cdots, x_n$ *de* U *dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} x_1 &: a \mapsto x_1(a), \\ &\vdots \\ x_n &: a \mapsto x_n(a), \end{aligned}$$

Appelées coordonnées locales. [10]

Changement de carte

On appelle système de coordonnées locales(ou carte locale) de M tout homéomorphisme ϕ d'un ouvert U de M sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Désignons par $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et par $pr^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ les projections telle que

$$\sum_{j=1}^{n} h^j e_j \mapsto h^i$$

Soit $\phi = (x^1, \cdots, x^n)$, avec $x^i = pr^i \circ \phi$, un système de coordonnées locales de M définie sur un ouvert U de M . Pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$ de M à valeurs réelles, la restriction $f_{|U}$ s'exprime en fonction de $x^1, \cdots, x^n$:

$$f_{|U} = F(x^1_{|U}, \cdots, x^n_{|U}). \tag{3.1}$$

où $F = f \circ \phi^{-1}$.
L'écriture est appelée expression locale de la fonction f dans la carte ϕ.
Soit $\psi = (y^1, \cdots, y^n)$ une autre système de coordonnées locales définie sur un ouvert V de M, alors les fonctions coordonnées $x^i_{|U\cap V}$ s'expriment en fonction des coordonnées $\left(y^1_{|U\cap V}, \cdots, y^n_{|U\cap V}\right)$ et inversement :

$$x^i_{|U\cap V} = F^i\left(y^1_{|U\cap V}, \cdots, y^n_{|U\cap V}\right).$$

et

$$y^i_{|U\cap V} = G^i\left(x^1_{|U\cap V}, \cdots, x^n_{|U\cap V}\right).$$

tels que $\phi\circ\psi^{-1} = (F^1, \cdots, F^n)$ et $\psi\circ\phi^{-1} = (G^1, \cdots, G^n)$.

Alors les homéomorphismes

$$\phi\circ\psi^{-1} : \psi(U\cap V) \to \phi(U\cap V). \tag{3.2}$$

et

$$\psi\circ\phi^{-1} : \phi(U\cap V) \to \psi(U\cap V). \tag{3.3}$$

Sont appelés changements de coordonnées(ou changements de cartes) [3].

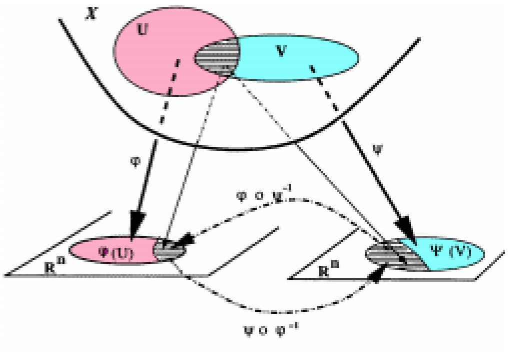


FIGURE 3.1 – changement d'une carte

Théorème 3.3.1. *[22]*
Deux cartes (U, ϕ) et (V, ψ) d'une variété topologique M sont compatibles d'ordre k $(1 \leq k \leq \infty)$ si :

$$U \cap V = \varnothing$$

ou si les deux applications

$$\phi\circ\psi^{-1} : \psi(U\cap V) \to \phi(U\cap V)$$

$$\psi\circ\phi^{-1} : \phi(U\cap V) \to \psi(U\cap V)$$

(dite fonctions de transitions ou de changements du cartes) sont des difféomorphismes

C^k

3.4 Atlas

Définition 3.4.1. *[8]*
Un atlas de M est une famille $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ de cartes de M, dont les domaines U_i recouvrent M :

$$M = \cup_{i\in I} u_i$$

Proposition 8. *[3]*

- *La réunion de deux atlas de M est encore un atlas de M.*
- *Un atlas de classe C^k d'une variété topologique M est un atlas $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ de M dont deux cartes quelconques sont toujours compatibles d'ordre k.*
- *Deux atlas $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de M de classe C^k sont dits C^k-équivalents, si leurs réunion $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est encore un atlas de classe C^k .*
- *La réunion de tous les atlas d'une classe équivalence pour la relation C^k-équivalents et le plus grand atlas de cette classe, qu'on appelle atlas maximale.*

3.5 Variété différentielle

Définition 3.5.1. *[8]*
On dit qu'une variété différentielle de classe C^k et de dimension n si :

- *M est une variété topologique .*
- *Muni d'un atlas maximal de cartes des classes C^k (ou de manière équivalent, d'une classe d'équivalence d'atlas de classes C^k) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 3.1.
Une variété différentielle de classe C^k est une variété topologique muni d'une structure différentielle de classe C^k. [8]

Exemple 3.5.1.

- *Les premiers exemples de variétés différentielles les graphes des fonction* C^∞ *de* $\mathbb{R}^p$ *dans* $\mathbb{R}^n$.
- *L'espace* $\mathbb{R}^n$ *Muni de l'application* $Id_{\mathbb{R}^n} : x \mapsto x$, *est une variété différentiable de dimension* n *et de* C^∞ .
- *Un autre exemple La sphère* S^n, *Pour chaque entier naturel* n *on dénote par* S^n *la sphère unité* $\mathbb{R}^{n+1}$ *de point*

$$S^n = \left(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}/x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\right),$$

est désignions par $(e_i)_{1\leq i\leq n+1}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^{n+1}$, *et par* E_n *l'hyperplan de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *défini par équation* $x_{n+1} = 0$ *(*E_n *est appelé hyperplan équatorial de* S^n *), on identifie évidemment l'hyperplan équatorial avec* $\mathbb{R}^n$.

On appelle pôle nord (resp. pôle sud) de la sphère S^n, *le point* $N = (0, \cdots, 0, 1)$ *(resp.* $S = (0, \cdots, 0, -1)$*).*

On considère le recouvrement ouvert de la sphère S^n *définie par les ouverts suivants* U_N *et* U_S *définis par :*

$$U_N = S^n - \{N\}$$

,

$$U_S = S^n - \{S\}$$

On appelle projection stéréographique du pôle nord, l'application φ_N *de* U_N *à valeurs dans l'hyperplan équatorial* E_n, *associant à un élément* M *de* $S^n - N$, *l'intersection* $\varphi_N(M)$ *de la droite* (MN) *avec l'hyperplan équatorial* E_n *:*

$$\{\varphi_N(M)\} = (NM) \cap E_n.$$

De même, la projection stéréographique du pôle sud est l'application φ_S *de* U_S *à valeurs dans l'hyperplan équatorial* E_n, *associant à un élément* M *de* $S^n - \{S\}$, *l'intersection* $\varphi_S(M)$ *de la droite* (SM) *avec l'hyperplan équatorial* E_n *:*

$$\{\varphi_S(M)\} = (SM) \cap E_n.$$

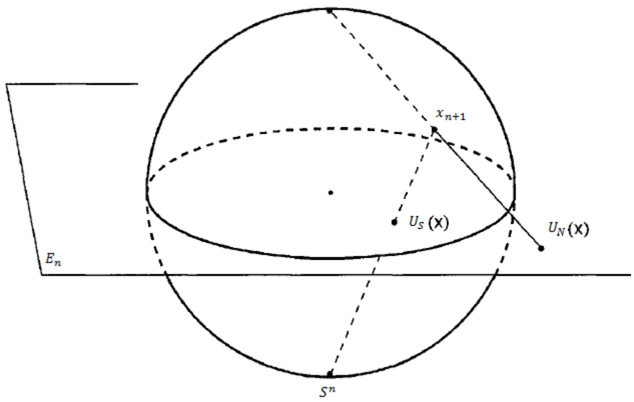
Ainsi,

$$\varphi_N(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right)$$

pour tout $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in U_N$, *et*

$$\varphi_S(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}\right)$$

L'ensemble $\{\varphi_N; \varphi_S\}$ *définit un atlas d classe* C^∞ *sur la sphère* S^n*. ce qui confère à la sphère* S^n *une structure de variété différentiable de dimension "n" et de classe* C^∞.



Propriété 3.5.1.

• *Tout variété de dimension zéro est un sous-ensemble discret de* $\mathbb{R}^n$ *et tout sous-ensemble discret est une variété de dimension zéro.*

• *Tout variété est un espace topologique localement compact et localement connexe par arcs(car localement homéomorphe à* $\mathbb{R}^p$*). Il s'ensuit que, pour une variété, les propriétés d'être connexe ou d'être connexe par arcs sont équivalentes.*

• *Les variétés de dimension 1 sont parfois appelées courbes, et les variétés de dimension 2 sont couramment appelées surfaces.*

3.6 Définitions équivalentes d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

Les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ sont la généralisation à $\mathbb{R}^n$ des courbes de l'espace ou courbes et surfaces de l'espace. Les définitions suivant est donné différentes manières de décrire

localement une sous-variété N de $\mathbb{R}^n$. On peut décrire implicitement, par une équation prenons.
L'exemple du cercle unité. Alors il est donné par l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
On peut la décrire par un paramétrage par exemple, le cercle unité est l'ensemble des points $(cost, sint)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.
On peut la décrire par un graphe de fonction, au moins localement : par exemple, la partie supérieure du cercle unité est l 'ensembles des points $(x, f(x))$ où $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Définition 3.6.1.
Une partie $N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si :

- $\forall x \in N$, *existe un ouvert U voisinage de x et un ouvert V voisinage de* 0.
- *et un difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tel que $\varphi(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. [8]*

On dit que N est de codimension $n-p$ dans $\mathbb{R}^n$.
Le difféomorphisme φ s'appelle une paramétrisation local d'une sous-variété N en x_0.
Son inverse $\varphi^{-1} : V \to U$,est une carte ou encore un système de coordonnées (locales) de la sous-variété N en x_0. [15]

Définition 3.6.2.

a) *Une paramétrisation d'une sous-variété N de dimension p de $\mathbb{R}^n$ est une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion dans $\mathbb{R}^n$, et un homéomorphisme de U sur ouvert de N.*
b) *Une paramétrisation locale est une application de U dans $\mathbb{R}^n$, qui induit une paramétrisation au voisinage de tout point de U.*
c) *Toute sous-variété peut être recouverte par des ouverts qui sont des images de paramétrisations. [8]*

Exemple 3.6.1.
L'application $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ est une paramétrisation locale du cercle $x^2 + y^2 = 1$.
De même, l'application

$$(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$

de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ est une paramétrisation locale du tore T^2.

Proposition 3.1.

On dit qu'une sous-variété est :

- *De classe C^k si l'application φ dans la définition et de classe C^k.*
- *Lisse lorsqu'elle est de classe C^∞ et analytique réelle que lorsqu'elle est de classeC^ω $(W < \infty)$.*
- *On parle de courbe si la dimension $p = 1$, de surface quand $p = 2$ et plus généralement d'hypersurface lorsque $p = n - 1$. [4]*

Exemple 3.6.2. *$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ est une sous-variété de dimension 2.*

En effet, soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$, $U = D \times \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rcl} f : U & \to & U \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y, z - \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{array}$$

On a $M \subset U$ et

$$J_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} & \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} & 1 \end{pmatrix}$$

Donc f est difféomorphisme de U, tels que

$f(M) = D \times \{0\}$ i.e $((x, y, z) \in M) \Leftrightarrow (f_3(x, y, z) = z - \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0)$.

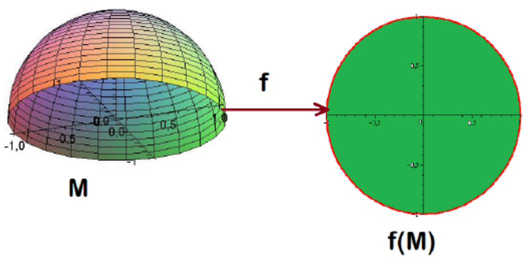


FIGURE 3.2 – Sous-Variété.

[6].

3.6.1 Définition local par une fonction implicite

[14]

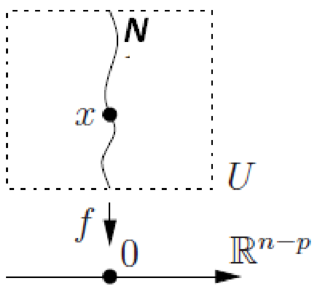
Certaines sous-variétés peuvent être définie comme l'ensemble des points de l'espace ambiant les solutions d'une équation. La proposition suivante donne un critère sur une équation pour que l'ensemble de ses solution soit une sous-variété.

Proposition 3.2. *[15]*

Soit $N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p si :

- *$\forall x \in N$, il existe un voisinage U de x*
- *Et une application $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k qui est une submersion en x tel que :*

$$U \cap N = f^{-1}(0) = \{x \in U / f(x) = 0\}.$$



Exemple 3.6.3.

(1) Un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension n, considérer l'application $f : V \to \{0\}$ constante égale à 0.

(2) Un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$, il est donné par une équation de la forme $L(x) - b = 0$ où L est une forme linéaire non nulle et $b \in \mathbb{R}^n$. Plus généralement tout sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension p est une sous-variété de dimension p. Par exemple une droite est une sous-variété de dimension 1.

(3) Les cercles de $\mathbb{R}^2$ *sont des sous-variétés de dimension 1. En effet le cercle* C *de centre* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *et de rayon* $r > 0$ *est l'ensemble des* (x, y) *tels que*

$$f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0.$$

Or pour $(x, y) \in C$ *on a* $J_f(x, y) = (2(x - x_0), 2(y - y_0)) \neq 0$, *donc* $d_{(x,y)}f$ *est nécessairement surjective et par suite* f *est une submersion. On vérifie de même que les sphères de* $\mathbb{R}^3$ *sont des sous-variétés de dimension 2.*

(3) Tore :

Soit T *le tore d'axe* $D = \{x = y = 0\}$ *dont les distances respectivement minimale et maximale à l'axe sont* $a - r$ *et* $a + r$, *où* a *et* r *sont deux réels tels que* $0 < r < a$, *définie par l'équation* $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - r^2 = 0$.

On a donc $T = f^{-1}(\{0\})$ *où* $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - r^2$.

f *est différentiable sur* T/D *et*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z.$$

La différentielle df_p *ne s'annule donc pas en* $p \in T$, *ce qui montre que* T *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^3$.

[15].

Remarque 3.2.

Il n'y a pas l'unicité de l'équation qui définissent un ensemble. En particulier une sous-variété peut être définie par l'équation $F(x) = 0$ *avec* F *ne vérifiant pas les conditions de la définition. [17]*

Exemple 3.6.4.

Soit l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 - y^3 = 0\}.$$

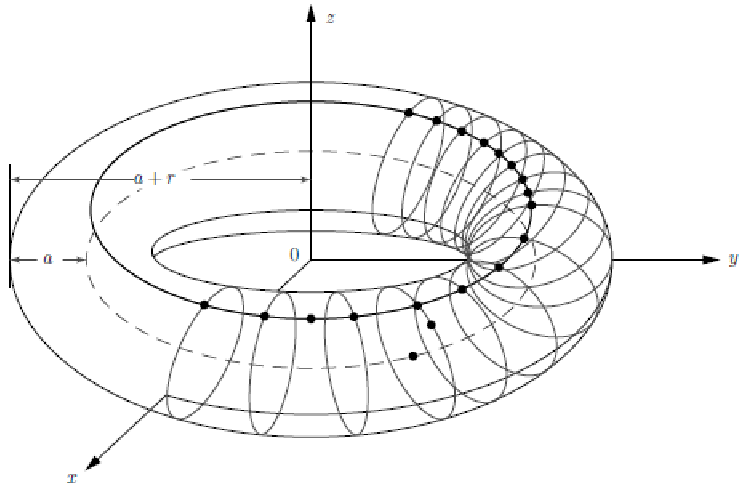


FIGURE 3.3 – Tore (Sous-Variété de $\mathbb{R}^3$)

c'est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ *car c'est aussi l'ensemble défini par :*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y = 0\}.$$

L'équation $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x^3 - y^3 \in \mathbb{R}$
est de classe C^∞ *et vérifier* $\mathcal{C} = f^{-1}(\{0\})$
or
$J(x, y)f = (3x^2, -3y^2)$ *est de rang* 1 *si et seulement si* $(x, y) \neq (0, 0)$ *comme* $(0, 0) \in \mathcal{C}$.
$d_x f$ *est surjective au voisinage de tout point de* $\mathcal{C}/\{(0, 0)\}$ *alors l'équation* $f = 0$ *n'est pas une submersion en* $(0, 0)$ *pour autant,* $\mathcal{C}$ *est bien une sous-variété* C^∞ *de* $\mathbb{R}^2$ *car au voisinage de* $(0, 0)$ *il suffit de prendre l'équation* $x - y$ *qui est bien une submersion au voisinage de* $(0, 0)$.

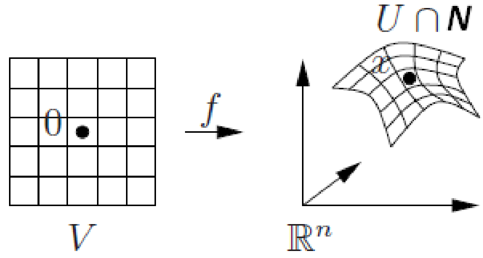
3.6.2 Définition local par paramétrage

Une deuxième façon de voir les sous-variétés de dimension m de $\mathbb{R}^n$ est un objet paramétré par des ouverts de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 3.3.
Soit $N \subset \mathbb{R}^n$ *est une sous-variété de dimension* p *si :*
• $\forall x \in N$, *il existe deux voisinages* U *de* $x \subset \mathbb{R}^n, V$ *de* $0 \in \mathbb{R}^p$

- *Et une application* $f : V \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^k *tel que :*

  $f(0) = x$*,* f *est une immersion en* 0 *et* $f : V \to U \cap N$ *soit un homéomorphisme.*

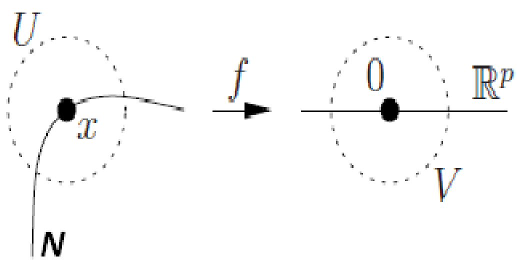


3.6.3 Définition local par redressement

La définition par redressement locale est rarement utilisée pour montrer qu'un ensemble est une sous-variété. En revanche, elle est souvent utilisée pour étudier les propriétés des variétés et donne une bonne vision de ces objets. [1]

Proposition 3.4. *[14]*
Soit $N \subset \mathbb{R}^n$ *est une sous-variété de dimension* p *si :*
- $\forall x \in N$*, il existe deux voisinage* U *de* $x \in \mathbb{R}^n$*,* V *de* $0 \in \mathbb{R}^n$
- $f : U \to V$ *est* C^k *difféomorphisme tel que :*

$$f(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$



Exemple 3.6.5.
On a déjà vu que $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ *est une courbe* C^∞ *de* $\mathbb{R}^2$*. D'après le proposition précédent, au voisinage de tout point de* S^1 *il existe un redressement locale. Dans le cas de* S^1*, on peut expliciter des redressements*
On pose

$U_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$, $U_1^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}$,
$U_2^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$, $U_2^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < 0\}$,
$V =]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times] - 1, +\infty[$
Alors

$$\begin{array}{rcl} \Phi_1^\pm : U_1^\pm & \to & V \\ (x,y) & \mapsto & (\arctan \frac{y}{x}, x^2 + y^2 - 1), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Phi_2^\pm : U_2^\pm & \to & V \\ (x,y) & \mapsto & (\arctan \frac{x}{y}, x^2 + y^2 - 1). \end{array}$$

Les applications $\Phi_i^\pm$ sont des C^∞-difféomorphismes qui vérifient $\Phi_i^\pm(U_i^\pm \cap S^1) =]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times\{0\} = V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$. Ces 4 difféomorphisme fournissent un redressement au voisinage de tout point de S^1. [1]

3.6.4 Définition local par graphe

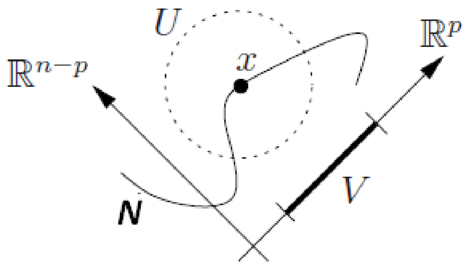
Le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est un objet à n dimension dans l'espace à $(n + p)$ dimension (les points sont caractérisés par p paramètres, en termes savants on dira pus tard qu'il s'agit d'une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+p}$ de dimension p). Plus généralement, on peut définir la graphe d'une fonction de p variable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$).

Définition 3.6.3. *Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On appelle **graphe** de f l'ensemble $\{(x, f(x)), x \in D\} \subset \times\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+p}$. [17]*

Proposition 3.5.

Soit $N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p si :
$\forall x \in N$, il existe un voisinage U de $x \subset \mathbb{R}^n$, une identification par un automorphisme[1] linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, un ouvert V voisinage de $\mathbb{R}^P$, une application $f : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k tel que :
$U \cap N =$ graphe (f)=$\{(y, f(y))/y \in V\}$ [14]

1. est un isomorphisme d'un ensemble sur lui-même



3.7 Plongements entre variétés

Définition 3.7.1.

Soient M et S deux variétés différentes de classe C^k de dimension n et m, $f : M \to S$. On dit que f est un plongement si :

- *f est une immersion.*
- *$f : M \to f(M)$ est un homéomorphisme. [2]*

Proposition 3.6.

Soient M, S deux variété de classe C^k, $k \geq 1$ et $f : M \to N$ est un C^K-plongement si seulement si :

i) $f(M)$ est une sous-variétés de classe C^k de S.

ii) $f : M \to f(M)$ est un C^k-difféomorphisme.

[2]

Remarque 3.3.

- *L'image réciproque d'un ouvert par une submersion est toujours une sous-variété.*
- *Il n'est pas vrai que l'image directe d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ par une immersion soit toujours une sous-variété. Tout d'abord bien sur parce qu'une immersion n'est pas forcément injective . [23] Mais ce n'est pas vrai même si on suppose l'immersion injective, dans ce cas dite une sous-variété immergée (attention, une sous-variété immersion n'est pas toujours une sous-variété). [14]*

Exemple 3.7.1.

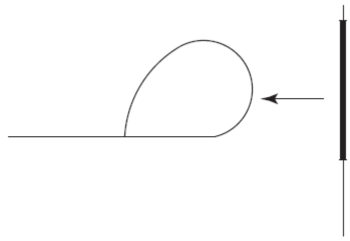


FIGURE 3.4 – Image d'une immersion injective qui n'est pas une sous-variété

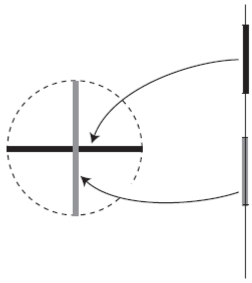
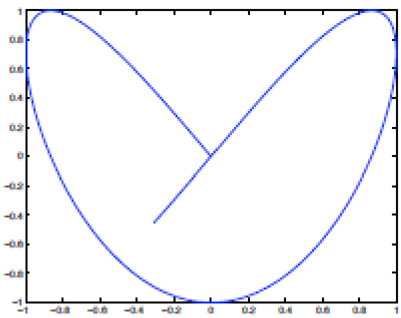


FIGURE 3.5 – Image d'une immersion qui n'est une sous-variété

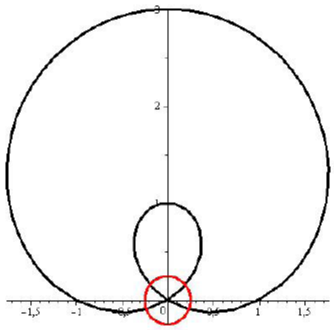
1) *L'application* $\gamma :]-\pi/10, \pi[\to \mathbb{R}^2$ *définie par* $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ *est une immersion en tout point, elle est injective, mais son image n'est pas une sous-variété de* $\mathbb{R}^2$.



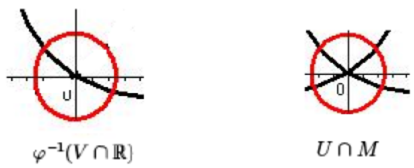
2) *Considérons géométriquement les courbes suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} f :]-\pi, \pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & ((2\cos(s) - 1)\sin(s), (2\cos(s) - 1)\cos(s)) \end{array}$$

soit $M = \{((2\cos(s) - 1)\sin(s), (2\cos(s) - 1)\cos(s))\}$ f *est une immersion non injective* $f(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{-\pi}{3}) = (0, 0)$.

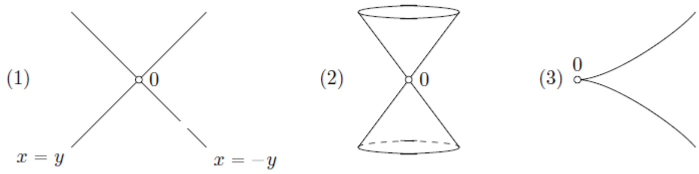


M *n'est pas sous-variété, au voisinage de* $(0, 0)$ *pour tout difféomorphisme locale* $\varphi : U \to V$ *on a* $\varphi^{-1}(V \cap \mathbb{R}) \neq M \cap U$



[6].

3) *Les dessin suivant ne sont pas des sous-variété :(1)* $\{x^2 + y^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, *(2)* $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0 \subset \mathbb{R}^3\}$ *et (3)* $\{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}^2\}$



3.8 Espaces tangents d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

La notion d'espace tangent généralise celle de la tangent à une courbe. Soit γ une courbe de classe C^1 :

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+p} \\ & t & \mapsto & (x_1(t), \cdots, x_{n+p}(t)) \end{array}$$

Soit $m_0 = \gamma(t_0)$, un point de γ. On appelle **tangent** en m_0 à γ la limite de la "sécante" c'est à dire la droite qui passe par $m_0(t_0)$ et $m_1 = \gamma(t_0 + h)$ lorsque $m_1 \to m_0(h \to 0)$. [18]

Définition 3.8.1 (Vecteur tangent)**.**
Soient N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et x un point de N, Un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ est dit tangent à N en x si :
- *Il existe un intervalle ouvert I contenant 0 par exemple "$]-\varepsilon, \varepsilon[$" .*
- *Il existe une application différentiable(courbe paramétré) $\gamma : I \to N \subset \mathbb{R}^n$, telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$ [12].*

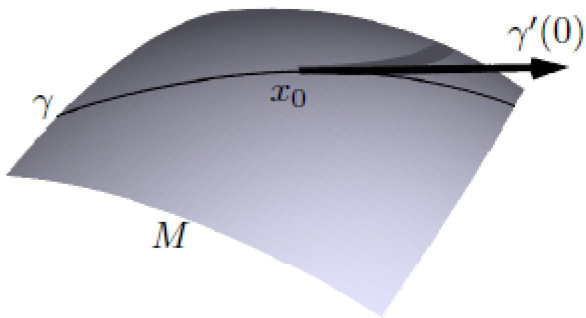


FIGURE 3.6 – vecteur tangent.

Définition 3.8.2 (Espace tangent)**.**
L'ensemble $\{\gamma'(0)/\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbf{R} \to N$ est différentiable, $\gamma(0) = x\}$ de tout les vecteurs tangent de N en x est dite l'espace tangent de N en x, on note par $T_x(N)$ où T_xN
$x + T_xN$ est le sous espace affine tangent à N en x [16]

Remarque 3.4.
Pour une nappe paramétré : $j(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, le plan tangent en (u_0, v_0) est engendre par les vecteurs

$$\frac{\partial j}{\partial u}(u_0, v_0) \quad , \quad \frac{\partial j}{\partial v}(u_0, v_0)$$

qui sont linéairement indépendant si dj est injective. [23]

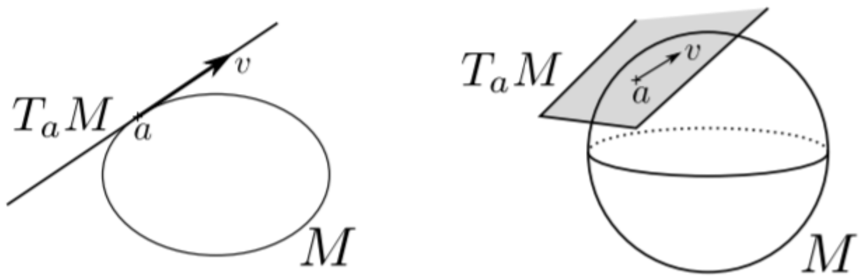


FIGURE 3.7 – Espace tangent.

Proposition 3.7.

Soit $N \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension p. L'espace tangent géométrique $x + T_xN$ en point $x \in N$ est l'unique sous espace affine de dimension p passant par x. [13]

Proposition 3.8.

L'ensemble T_xN des vecteurs tangent en x et une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ forme un espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$. [1]

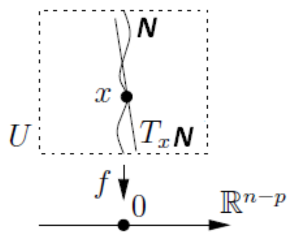
Dans la suite, on va caractériser algébriquement un espace tangent en un point à une sous-variété :

Théorème 3.8.1.

Selon les définitions équivalentes des sous-variétés ci-dessus, les espace tangents à N en x sont :

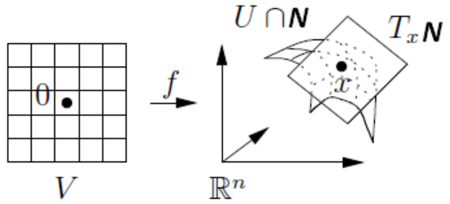
1 ***Définition par fonction implicite***

$$T_xN = Kerdf_x.$$



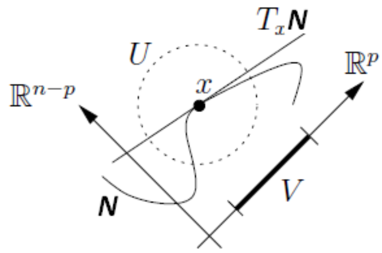
2 ***Définition local par paramétrage***

$$T_xN = Imdf_0.$$



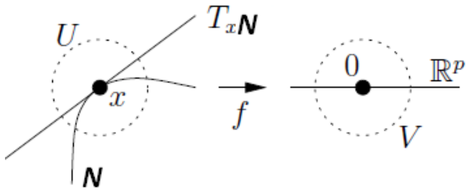
4 ***Définition local par graphe***

$$T_xN = Im\{v \mapsto (v, df_0(v))\}.$$



4 ***Définition par redressement***

$$T_xN = df_x^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$



[14]

Exemple 3.8.1.

Dans le cas de sphère $N = S^n$ *où* $F(x) =| x |^2 -1$, *on a*

$d_xF(v) = 2 < x, v >$ *et* T_xS^n *est l'hyperplan affine passant par* x *et orthogonal à* x.

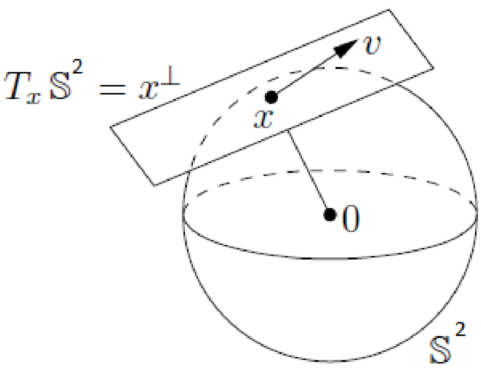
On prend par exemple $n = 2$ *:*

Soit $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / \mid x \mid^2 = 1\}$.

C'est une sous-variété définie par $F(x) = 0$ *où* $F(x) =| x |^2 -1$.

on a $d_xF(v) = 2 < x, v >$ *alors l'espace Tangent en* x *à la sphère* T_xS^2 *est le plan orthogonal à* x *et* $x + T_xS^2$ *le plan orthogonal à* x *passant par* x *i.e.*

$T_xS^2 = ker(v \to 2 < x, v >) = x^\perp$



Exemple 3.8.2.

Soit I *un intervalle et* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *une courbe paramétrée. Si* $\gamma'(t)$ *ne s'annule jamais et*

γ *est injective et propre,* $\tau = \gamma(I)$ *est une courbe lisse, son espace tangent en* $\gamma(t_0)$ *est donnée par* $R\gamma'(t_0)$ *tq :*

$R\gamma'(t_0)$ *est la droite vectorielle engendrée par*

$\gamma'(t_0)$ *est définie par* $R\gamma'(t_0) = \{t\gamma'(t_0)/t_0 \in \mathbb{R}\}$

Propriété 3.8.1. *Si* N *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *et* M *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^m$*, alors* $M \times N$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^{n+m}$*. De plus*

$$T_{(x,y)}M \times N = T_xM \times T_yN.$$

Pour tout $(x, y) \in M \times N$*. [4]*

Exemple 3.8.3. *Le produit* $S^1 \times S^1$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^4$*, le tore de dimension 2. plus généralement, les tore* T^n *est définie comme le produit de* n *facteur* S^1 *c'est une sous-variété de* $\mathbb{R}^{2n}$

CONCLUSION

Les sous-variété est un sujet très important, qui a beaucoup d'applications en physique théorique, en informatique et beaucoup d'interférences avec d'autres disciplines mathématiques modernes (par exemple la topologie, l'analyse, la géométrie différentielle). Dans cette mémoire, nous avons étudié ce sujet qui est enseigné comme un chapitre au Géométrie différentielle dans la troisième année licence mathématiques. Et comme les étudiants le considèrent comme un sujet difficile, nous avons essayé de rechercher à tous ses aspects et de simplifier les concepts avec plusieurs exemples illustratifs pour le prendre comme une référence pour eux et pour tous ceux qui cherchent à ce sujet.

Nous avons donné les définitions suivantes : un difféomorphisme, le théorème d'inversion local, les fonctions implicites, le théorème du rang constant, une immersion, une submersion, une variété topologique, une variété différentielle, les définitions équivalentes d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et l'espace tangent d'une sous-variété.

Nous souhaitons que cette mémoire puisse être considéré simplement comme une porte ouverte sur un monde où les étudiants de niveaux variés pourront tous trouver à faire un bout de chemin.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. AuBRy, *Géométrie Différentielles, 2009-2011.*

[2] H.Auvray, *Géométrie différentielle : sous-variétés de Rn, variétés,Préparation à l'Agrégation, ENS de Cachan, Janvier 2014.*

[3] A. Awane, *Cours de géométrie différentielle,Université Hassan ll-Mohammedia,2001-2003 ;2003-2005*

[4] P.Bernard, *Gémétrie Différentielle*, 21 mai 2015

[5] L. Bessières, *Cours Géométrie Différentielle*, Institut de Maths., Bordeaux, 2012−2013

[6] M. DJAA, *Géométrie différentielle*, Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane, 2017.

[7] A.Hélène ; F.Jérôme ; S.Viraphone, *Théorème d'inversion Locale*,30 mars 2012

[8] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, EDP Sciences, 1996.

[9] J.Le Potier, *GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE*, UNIVERSITÉ DENIS DIDEROT - PARIS 7, 1995-1996

[10] A. Lesfari, *Géométrie*, Université Chouaïb Doukkali, Maroc, 2011 − 2013.

[11] A.Makki Naciri ; A.Raouj ; S.Souhail, *Le cour de topologie générale,2006-2007*

[12] V. Minerbe, *An introduction to differential geometry*, Université Paris 6, Instiut de Mathématique de Jussieu, 2015.

[13] A. OANCEA, *Notes de cours Géométrie différentielle*,Université Pierre et Marie Curie, 7 décembre 2014.

[14] F. Paulin, *Géométrie différentielle élémentaire*, Formation Interuniversitaire de Mathématique et Appliquées, 2006-2007.

[15] D.RENARD, *Introduction à la géométrie différentielle, 3 novembre 2016.*

[16] J. W. Robbin, D. A. Salamon, *Introduction to differential geometry*, UW Madison and ETH Zürich, 2020.

[17] J. Royer, *Calcul Différentiel et Intégral*, Université Toulouse 3 2015-2016.

[18] J.SAAB, *GEOMTRIE DIFFRENTILLE MASTER I, UNIVERSITE lIBANAISE.*

[19] H. Schlichtkrull, *Differentiable manifolds,University of coprnhaen, December,2008.*

[20] A. Teleman, *Céomértie Différentielle, CMI Aix-Marsielle Université,39 Rue Frédérice Joliot-curie, 13453 Marsielle, Cedex 13, 27 mars 2020.*

[21] L.Todjhounde, *Calcul différentiel, 2ème édition, CEPAD, 2009*

[22] loring W.Tu,*An Introduction Mnifold, Universitext Editorial Board, North Americaa 2010.*

[23] C. Viterbo, *Notes de cours de Géométrie différentielle, 19 mars 2012 .*