



N° Réf :

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques appliquées

**Synchronisation projective modifiée
combinée de trois systèmes chaotiques
fractionnaires**

Préparé par :

- Amal Laib
- Safa Lebsir

Soutenu devant le jury :

Mohamed Salah Abdelouahab	Professeur	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Smail Kaouache	M.C.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Badredine Boudjedaa	Professeur	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire: 2022/2023

Remerciements

Avant tout nous remercions *ALLAH* le tout puissant et

Miséricordieux qui m'a donné la force, la réussite et la patience
d'accomplir ce modeste travail.

Nous sommes très sensibles à l'intérêt qu'ont bien voulu porter
à ce travail Monsieur *Smaïl Kaouache*, maître de
conférences au centre universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila.

Nous tenons à le remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être
rapporteur de ce mémoire.

Nous tenons à remercier également, Monsieur *Mohamed Salah
Abdelouaheb* professeur au centre universitaire.

Abdelhafid Boussouf de Mila et Monsieur *Badredine Boudjedaa*
Professeur au centre universitaire Abdelhafid Boussouf
de Mila pour m'avoir fait l'honneur d'être membres de notre jury.

Nous remercions également l'ensemble du personnel du département de
mathématiques et informatique de centre universitaire.

Dédicace

Du profond de mon cœur, je dédie ce travail à tous ceux me sont chers.

A l'âme de mon père qui ne m'a pas vu couronné sur ce podium, comme j'aimerais que tu sois à mes côtés en ce beau moment de ma vie, que Dieu ait pitié de toi et éclaire ta tombe, mon très cher lien et mon très cher père qui quitté le monde.

A mon cher père

A celle qui le paradis sous ses pieds. A celle qui s'est privée et donnée, et attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation.

A ma chère mère

Mes frères Amine, moustapha et Bessam.

Mes sœurs Hannane, Mouna, Hayate, Nedjla, Maroua et Nassira.

Les fils de mon frère Soudjoud et Mouhamad.

A tous les membres de ma famille.

Tous mes amis Maram, chaïma, Lina et Roumaïssa. a ceux qui m'ont accompagné pendant ces cinq années de douleur.

Mon binôme Amal qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail.

Merci.

Safa.L

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Ma mère, qui à ouvert pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour tout son assistance est sa présence dans ma vie.

Mon père, qui être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privation pour m'aider à avancer dans la vie.

Ma sœur Assya mon amour et mon âme sœur.

Mes frères Ilyas, Ayman et Farid.

*Les fils de mon sœur Rinad et Akram.
A tous les membres de ma famille.*

Tous mes amis Salîha, Manal, Hayate, Siham et chaïma a ceux qui m'ont accompagné pendant ces cinq années de douleur.

*Mon binôme Safa qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail.
Merci.*

Amal.L

ملخص:

تم تخصيص العمل المقدم في هذه المذكرة لدراسة التزامن الإسقاطي المعدل لبعض الأنظمة الكسرية الفوضوية. في البداية سنقوم بالتذكير ببعض المفاهيم الأولية للأنظمة الفوضوية وكدي الحساب الكسري لتسهيل مفهوم الموضوع. بعدها سنقوم بمعالجة التزامن المقترح للأنظمة الفوضوية الموحدة معتمدين في ذلك على طريقة نظام التحكم الفعال. في الأخير سنستشهد ببعض الأمثلة والمحاكاة العددية لإثبات صحة النتائج النظرية معتمدين في ذلك على طريقة ادمس بوشفورت.

الكلمات المفتاحية:

الأنظمة الفوضوية، الاستقرار، مؤثر كابوتو التفاضلي، أسس Lyapunov، التزامن الإسقاطي المعدل.

Résumé:

Le travail présenté dans ce mémoire est consacré sur la conception de la synchronisation projective modifiée combinée (SPMC) de trois systèmes chaotiques fractionnaires. Nous commençons par des petites rappelles sur les systèmes chaotiques et quelques concepts sur le calcul fractionnaire. Puis, nous étudions le problème de SPMC des systèmes chaotiques unifiés d'ordre fractionnaire, en utilisant la technique de contrôle continu. A l'aide de la théorie de la stabilité des systèmes fractionnaires, un schéma de contrôle approprié est conçu pour réaliser ce type de synchronisation. Les résultats de la simulation numérique effectués à l'aide de la méthode Adams Boshforth Moulton sont présentés pour démontrer la validité et la faisabilité des résultats théoriques.

Mots-clés :

Systèmes chaotiques, stabilité, opérateur différentiel de Caputo, Exposants de Lyapunov, Synchronisation projective modifiée combinée.

Abstract:

The work presented in this memory is devoted to investigate the modified projective combination synchronization (MPCS) of three fractional-order chaotic systems. We start with some preliminaries of chaotic systems and fractional calculus. Then, we study the MPCS problem of chaotic unified fractional-order chaotic systems by using the active control technique. Based on the stability theory of linear fractional systems, an appropriate control scheme is designed to achieve this type of synchronization. Numerical simulations carried out using Adams Boshforth Moulton method are presented to demonstrate the validity and feasibility of the theoretical results.

Keywords:

Chaotic systems, stability, Caputo differential operator, Lyapunov Exponents, modified projective combination synchronization.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	1
1 Calcul fractionnaire	3
1.1 Fonctions spéciales	3
1.1.1 Fonction Gamma	3
1.1.2 Fonction Bêta	5
1.1.3 Fonction Mittag-Leffler	6
1.2 Intégration d'ordre fractionnaire	7
1.2.1 L'intégrale de Riemann-Liouville	7
1.3 Définitions des dérivées fractionnaires	9
1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	9
1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	10
1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov	13
2 Systèmes dynamiques et chaos	16
2.1 Systèmes dynamiques	16
2.1.1 Systèmes dynamiques continus	16
2.1.2 Systèmes dynamiques discrets	17

TABLE DES MATIÈRES

2.1.3	Systèmes autonomes ou non autonomes	17
2.2	Attracteurs réguliers et attracteurs chaotiques	17
2.2.1	Attracteurs réguliers	18
2.2.2	Attracteurs chaotiques	18
2.3	Points d'équilibre	19
2.4	Caractéristiques principales du comportement chaotique	20
3	Introduction à la théorie des équations différentielles	25
3.1	Équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo "EDFSC"	26
3.2	Systèmes chaotiques fractionnaires	29
3.2.1	Conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité	30
3.2.2	Conditions suffisantes (Méthode directe de Lyapounov)	32
4	Synchronisation projective modifiée combinée de trois systèmes chaotiques fractionnaire	35
4.1	Formulation du problème de SPMC	36
4.1.1	Analyse théorique	36
4.1.2	Résultats de simulation	39
	Conclusion générale	42
	Bibliographie	43

TABLE DES FIGURES

2.1	<i>Attracteur chaotique du système de Lorenz.</i>	18
2.2	<i>Aspects aléatoires des états chaotique du système de Lü [20].</i>	21
2.3	<i>Evolution temporelle de la trajectoire u du système de Lü [20] avec trois conditions initiales différentes très proches.</i>	22
2.4	<i>Diagramme de bifurcation de l'application logistique.</i>	24
3.1	<i>Régions de stabilité d'un système fractionnaire, où $0 < \alpha < 1$.</i>	31
3.2	<i>L'évolution temporelle des états du systèmes (3.12).</i>	34
4.1	<i>L'attracteur chaotique du système de Lorenz(4.5), lorsque $\delta = 0$.</i>	40
4.2	<i>L'attracteur chaotique du système de Lü(4.5), lorsque $\delta = 0.8$.</i>	40
4.3	<i>L'attracteur chaotique du système de Chen(4.5), lorsque $\delta = 1$.</i>	40
4.4	<i>Les courbes des erreurs de synchronisation(4.9).</i>	41

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La caractéristique typique des systèmes chaotiques est qu'un très petit changement dans les conditions initiales conduit à de très grandes différences dans les états finals de système étudié.

Récemment, en raison des applications potentielles des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires dans la communication sécurisée [1] et le traitement de contrôle [2], de plus en plus des recherches accordent beaucoup d'attention à la synchronisation chaotique des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires. Différentes approches ont été développées pour réaliser ce type de synchronisation à savoir : la synchronisation complète [3], l'anti-synchronisation [4], la synchronisation généralisée [5], la synchronisation projective [6, 7], la synchronisation projective modifiée [8] et la synchronisation projective hybride [9]. Cependant, tous les schémas de synchronisation mentionnés cidessus sont limités à un seul système émetteur et à un seul système récepteur.

Récemment, l'étude de la synchronisation combinée de deux (ou plusieurs) systèmes émetteurs et d'un système récepteur devient un problème intéressant en raison de ses applications potentielles dans la communication sécurisée [10]. Quelques résultats sur la synchronisation combinée de plusieurs

INTRODUCTION GÉNÉRALE

systèmes d'ordre fractionnaires chaotiques sont obtenus dans les références [11, 12, 13, 14, 15].

Dans ce travail, nous étudions le problème de la synchronisation projective modifiée combinée (SPMC) des systèmes chaotiques unifiés d'ordre fractionnaire en utilisant la technique de contrôle continu. A l'aide de la théorie de la stabilité des systèmes fractionnaires, un schéma de contrôle approprié est conçu pour réaliser ce type de synchronisation.

Les résultats de la simulation numérique effectuée à l'aide de la méthode Adams-Boshforth Moulton sont présentés pour démontrer la validité et la faisabilité des résultats théorique.

La suite de ce mémoire est organisée de la façon suivante :

Le premier chapitre présente quelques concepts de base de calcul fractionnaire. Le deuxième chapitre est consacré aux quelques définitions de base du systèmes dynamiques chaotiques. Dans le troisième chapitre, on s'intéresse aux éléments nécessaires de la théorie des équations différentielles fractionnaires et quelques conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité des systèmes fractionnaires. Le quatrième chapitre constitue l'objet de notre travail. Un problème de SPMC de trois systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires est étudié. Une technique de contrôle continu sera employée pour effectuer la stabilité de l'erreur de synchronisation.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une conclusion générale.

CHAPITRE 1

CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, on va essayer de rappeler quelques définitions et quelques résultats classiques de calcul fractionnaire, notamment la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction Mittag-leffler. De plus, on définit l'intégrale de Riemann-Liouville et les trois dérivations fractionnaires telles que Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov.

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1.1 [16]

La fonction Gamma d'Euler est l'une des fonctions spéciales qui définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \quad (1.1)$$

où $\Gamma(0^+) = +\infty$.

Exemple 1.1.1 On a $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$.

En effet :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

On pose $u = \sqrt{t}$, alors $t = u^2$ et $dt = 2udu$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} u du \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

Sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss), il vient que :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

D'autre part :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Lemme 1.1.1 Pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(x) > 0$, nous avons :

$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. En particulier $\Gamma(n + 1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(x) > 0$.

En faisant l'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} [-e^{-t} t^x] + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

- Pour $x = n$, on a :

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)\dots 1 = n!.$$

- Pour x négative :

De la relation (1.1), on peut écrire :

$$\Gamma(x - 1) = \frac{\Gamma(x)}{x - 1} \quad -1 < x - 1 < 0$$

$$\Gamma(x - 2) = \frac{\Gamma(x - 1)}{x - 2} \quad -2 < x - 2 < -1.$$

De la même manière, on peut trouver :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x} \quad -n < x < -(n - 1).$$

On en déduit alors que la fonction Gamma est également définie pour toutes les valeurs négatives de x .

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.1.2 [16]

La fonction Bêta est définie par l'intégrale généralisée suivante :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad \forall p, q > 0. \quad (1.2)$$

Proposition 1.1.1 La fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta sont liées par la relation suivant :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p, q > 0. \quad (1.3)$$

Exemple 1.1.2 Calculons $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

On a

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \pi.$$

Remarque 1.1.1 La fonction Bêta est symétrique ; c'est à dire :

$$B(p, q) = B(q, p), \quad \forall p, q > 0.$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une fonction importante dans le calcul fractionnaire. Son rôle est analogue à celui joué par la fonction exponentielle dans le cas du calcul entier. Elle généralise la fonction exponentielle au calcul fractionnel.

Définition 1.1.3 [16]

La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre est définie par :

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\operatorname{Re}(x) > 0, \alpha > 0). \quad (1.4)$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définie par

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha, \beta) > 0. \quad (1.5)$$

Exemple 1.1.3 Voici les fonctions de Mittag-Leffler pour quelques valeurs spéciales de α et β :

1. $E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$
2. $E_2(x) = E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \cosh \sqrt{x}.$
3. $E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}.$

$$4. E_{1,3}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

1.2 Intégration d'ordre fractionnaire

1.2.1 L'intégrale de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, donc elle admet une primitive :

$$\mathcal{I}_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

La primitive seconde de f définit comme suite :

$$\mathcal{I}_a^2 f(x) = \int_a^x \left(\int_a^u f(x) dx \right) du.$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$\mathcal{I}_a^2 f(x) = \int_a^u \left(\int_t^x du \right) f(t) dt.$$

$$\mathcal{I}_a^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

Le n^{ieme} itéré de l'opérateur \mathcal{I} peut s'écrire :

$$\mathcal{I}_a^{(n)} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cette formule a un sens même quand n prend une valeur non-entier.

On définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 1.2.1

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de f , l'intégrale suivante :

$${}^R_a\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (t > a, \operatorname{Re}(\alpha) > 0). \quad (1.6)$$

Exemple 1.2.1

On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = (t-a)^\beta \quad t \in [a, b], \beta \in \mathbb{R}, (\beta > -1).$$

On a :

$${}^R_a\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = {}^R_a\mathcal{D}_t^{-\alpha} (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta ds.$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$s = t - \tau(t-a) \Rightarrow ds = -(t-a)d\tau.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} {}^R_a\mathcal{D}_t^{-\alpha} (t-a)^\beta &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^0 [\tau(t-a)]^{\alpha-1} [t-a-\tau(t-a)]^\beta (t-a) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha+\beta} \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^\beta d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}. \end{aligned}$$

Donc

$${}^R_a\mathcal{D}_t^{-\alpha} (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}.$$

1.3 Définitions des dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs approches pour définir des intégrales et des dérivées fractionnaires. Malheureusement toutes ces approches considérées, en générale ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans ce travail celles qui sont les plus célèbres a savoir dérivation au sens de Riemann-Liouville, au sens de Caputo et au sens de Günwald-Letnikov.

1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$.

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre α notée ${}^R\mathcal{D}_t^\alpha$ est définie par :

$$\begin{aligned} {}^R\mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}^R\mathcal{D}_t^{-(n-\alpha)} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \end{aligned} \quad (1.7)$$

où $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ et $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$.

Remarques 1.3.1

- Si $\alpha = n - 1$, nous avons une dérivée conventionnelle d'ordre $n - 1$:

$$\begin{aligned} {}^R\mathcal{D}_t^{n-1} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}^R\mathcal{D}_t^{-(n-(n-1))} f(t)) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} ({}^R\mathcal{D}_t^{-1} f(t)) = f^{(n-1)}(t). \end{aligned}$$

- En particulier : ${}^R\mathcal{D}_t^0 f(t) = f(t)$.

Exemple 1.3.1 Calculons la dérivée fractionnaire d'ordre α de la fonction $f(t) = (t - a)^\beta$.

$${}^R\mathcal{D}_t^\alpha(t-a)^\beta = \frac{d^n}{dt^n} \left[{}^R\mathcal{D}_t^{-(n-\alpha)}(t-a)^\beta \right].$$

L'intégrale a calculé dans l'exemple précédent

$${}^R\mathcal{D}_t^\alpha(t-a)^\beta = \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(t-a)^{n-\alpha+\beta} \right].$$

D'autre part :

$$\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^\lambda = \lambda(\lambda-1)\dots + (\lambda-n+1)(t-a)^{\lambda-n} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)}(t-a)^{\lambda-n}.$$

Ainsi,

$$\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{\beta+n-\alpha} = \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Il s'ensuit que :

$${}^R\mathcal{D}_t^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

- Comme cas particulier $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} {}^R\mathcal{D}_t^1(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} \\ &= \beta(t-a)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

- Par contre, si $\beta = 0$, on trouve

$${}^R\mathcal{D}_t^\alpha(t-a)^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.3.2 [17]

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f(t)$ donnée sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par la relation suivante :

$${}^C_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad (1.8)$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$, où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

Exemple 1.3.2 Calculons la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction suivante :

$$f(t) = (t-a)^\beta.$$

Soit α un entier et $0 < n-1 < \alpha < n$, avec $\beta > n-1$

$$f^{(n)}(s) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (s-a)^{\beta-n},$$

d'où :

$${}^C_a\mathcal{D}_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{\beta-n} ds.$$

En effectuant le changement de variables $s = a + \tau(t-a)$, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^C_a\mathcal{D}_t^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{\beta-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 La dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est nulle ; c'est-à-dire :

$$\forall C \in \mathbb{R}, {}^C_a\mathcal{D}_t^\alpha C = 0.$$

★ **Relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo**

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 1.3.1 [18] Soit $Re(\alpha) > 0$, avec $n - 1 < Re(\alpha) < n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et soit f une fonction telle que les dérivées fractionnaires ${}^C_a \mathcal{D}_t^\alpha f(t)$ et ${}^R_a \mathcal{D}_t^\alpha f(t)$ existent, on a :

$${}^C_a \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = {}^R_a \mathcal{D}_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{(k-\alpha)}. \quad (1.9)$$

Démonstration.

Soit le développement limite de Taylor de la fonction f au point a :

$$\begin{aligned} f(t) &= f(a) + \frac{(t-a)}{1!} f'(a) + \frac{(t-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1}, \end{aligned}$$

où

$$R_{n-1} = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\tau) d\tau = \mathcal{I}_a^n f^{(n)}(t).$$

On utilise la linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville, on trouve :

$$\begin{aligned} {}^R_a \mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= {}^R_a \mathcal{D}_t^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^R_a \mathcal{D}_t^\alpha (t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + {}^R_a \mathcal{D}_t^\alpha R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + {}^R_a \mathcal{D}_t^\alpha \mathcal{I}_a^n f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + \mathcal{I}_a^{n-\alpha} f^{(n)}(t), \end{aligned}$$

donc

$${}^R_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + {}^C_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t).$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov [19] est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires. La dérivée de premier ordre de la fonction $f(t)$ est défini par :

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (1.10)$$

L'application de cette définition deux fois donne :

$$f''(t) = \frac{d^2f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \quad (1.11)$$

En utilisant (1.10) et (1.11), nous obtenons :

$$f'''(t) = \frac{d^3f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}.$$

Par dérivation successive, on obtient :

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh), \quad (1.12)$$

où

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}.$$

Grâce à la propriété fondamentale $\Gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, on peut arriver à une expression plus générale dans le cas où n est négatif ou nul :

$$(-1)^r \binom{n}{r} = \frac{-n(1-n)(2-n)\dots(r-n-1)}{r!} = \frac{\Gamma(r-n)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-n)}.$$

Définition 1.3.3

On définit la dérivée fractionnaire d'ordre α (non entier) au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f , tel que $f \in C[a, t]$:

$${}^G_a \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.13)$$

De même, on définit l'intégrale fractionnaire par :

$${}^G_a \mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha)} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.14)$$

Exemple 1.3.3

★ *La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov*

En général, la dérivée d'une constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle. En effet :

Soit $f(t) = c$ et soit p un nombre non entier. On a donc $f^{(k)}(t) = 0$, pour

$k = 1, 2, \dots, n$.

Cependant dans le cas fractionnaire, on a :

$$\begin{aligned}
 {}_a^G \mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\
 &= \frac{c(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds}_{=0} \\
 &= \frac{c(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.
 \end{aligned}$$

★ *La dérivée $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Grünwald-Latnikov.*

Soit α un nombre non entier ($0 \leq n-1 < \alpha < n$) avec $\beta > n-1$, alors on a $f^{(k)}(a) = 0$, pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$ et

$$f^{(n)}(s) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (s-a)^{\beta-n}.$$

Donc

$${}_a^G \mathcal{D}_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{\beta-n} ds.$$

En effectuant le changement de variables $s = a + \tau(t-a)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 {}_a^G \mathcal{D}_t^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{\beta-n} d\tau \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)\beta(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 2

SYSTÈMES DYNAMIQUES ET CHAOS

2.1 Systèmes dynamiques

En mathématiques, les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

- systèmes dynamiques continus.
- systèmes dynamiques discrets.

2.1.1 Systèmes dynamiques continus

L'évolution d'un système dynamique continu est décrit par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t, v), \quad (2.1)$$

où, $x \in E$ (E un ensemble non vide de \mathbb{R}^n appelé espace de phase) est le vecteur d'état, $v \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur des paramètres et $f : E \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$ est le champ de vecteur, qui représente la dynamique du système (2.1).

Remarque 2.1.1 *Lorsque l'application f est continue et vérifiée la condition Lipschitzienne sur un certain intervalle I de la variable x , on peut assurer l'existence et l'unicité de la solution pour toute condition initiale $x_0 \in I$.*

2.1.2 Systèmes dynamiques discrets

La forme générale d'un système dynamique à temps discret est décrit par une équation aux différences non linéaire suivante :

$$x_{n+1} = f(x_n, v), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

2.1.3 Systèmes autonomes ou non autonomes

Lorsque le champ de vecteur f ne dépend pas explicitement du temps, le système(2.1) est dit autonome. Dans le cas contraire, il est dit non autonome. En utilisant un changement de variable approprié, on peut facilement transformer un système non autonome de dimension n en un système autonome équivalent de dimension $n + 1$.

2.2 Attracteurs réguliers et attracteurs chaotiques

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent toutes les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle un attracteur. Les attracteurs sont donc des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques.

2.2.1 Attracteurs réguliers

Il existe trois types distincts d'attracteurs réguliers.

1. L'attracteur "point fixe" : c'est l'attracteur le plus simple. Il est représenté par un point dans l'espace des phases. C'est donc une solution constante et stationnaire.
2. L'attracteur "cycle limite" : c'est une trajectoire fermée qui attire toutes les orbites proches. C'est donc une solution périodique du système.
3. L'attracteur "quasi-périodique" : représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs fréquences, que l'on appelle parfois "tore".

2.2.2 Attracteurs chaotiques

Un attracteur chaotique est bien plus complexe que les autres attracteurs, il est caractérisé par :

1. Un volume nul.
2. Une dimension fractale (non-entière) d , $2 < d < n$, où n est la dimension de l'espace de phase.
3. Une séparation exponentiellement rapide de deux trajectoires initialement proches.

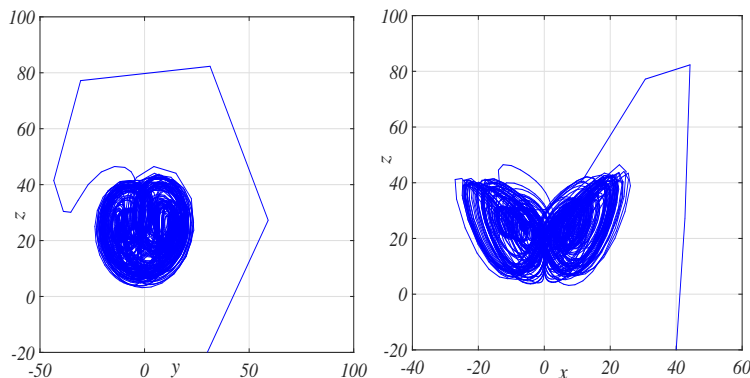


FIGURE 2.1: Attracteur chaotique du système de Lorenz.

Définition 2.2.1

Soit A un sous ensemble compact de l'espace de phases E . Un attracteur A du système (2.1) vérifie les quatre conditions suivantes :

- 1- A est invariant sous l'action du flot φ_t , c'est-à-dire : $\varphi_t(A) = A$.
- 2- A est asymptotiquement stable au sens de Lyapounov.
- 3- Il existe une orbite dense dans A .
- 4- A est indécomposable, c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs ne peut pas être un attracteur.

2.3 Points d'équilibre

En général, on ne sait pas résoudre explicitement des équations différentielles non linéaires. On fait alors une étude qualitative de ses solutions. Cette étude va commencer par la recherche des points d'équilibre de l'équation différentielle (2.1).

En ce point d'équilibre, la vitesse s'annule :

$$\dot{x} = 0. \tag{2.3}$$

Les points d'équilibre, que nous notons x_{eq} , vérifient alors l'équation suivante :

$$f(x_{eq}) = 0. \tag{2.4}$$

Dans l'espace de phase, un point d'équilibre se représente par un point. Sa valeur est déterminée à savoir la condition initiale choisie. Par ailleurs, pour des conditions initiales différentes nous pouvons trouver plusieurs points d'équilibre. De plus, ces points peuvent être stables ou instables, à savoir la convergence ou la divergence entre les trajectoires voisines.

2.4 Caractéristiques principales du comportement chaotique

Ci-dessous, nous rappelons quelques caractéristiques qui nous permettent de mieux comprendre les points marquants d'un système chaotique.

Non-linéarité

La non-linéarité est l'une des caractéristiques fondamentales des systèmes chaotiques. En effet, tout système linéaire ne peut pas être chaotique.

Déterminisme

Un système chaotique est déterministe (plutôt que probabiliste), c'est-à-dire qu'il soumit à des lois qui décrivent complètement son mouvement. La notion de déterminisme signifie donc la capacité de prédire l'état futur d'un phénomène à partir d'un événement passé. Cependant, dans les phénomènes aléatoires, il est impossible de prévoir les trajectoires d'une quelconque particule.

Aspects aléatoires

La Figure 2.2 illustre l'évolution temporelle des trajectoires chaotiques du système de Lú [20]. Le système représente une évolution complexe, non périodique et imprévisible. C'est donc l'aspect aléatoire des systèmes chaotiques.

L'évolution temporelle d'une trajectoire chaotique apparaît comme aléatoire, cependant l'observation de cette trajectoire dans l'espace des phases, au voisinage de l'infini, décrit une forme particulière dont la structure est fractale ;

c'est l'attracteur chaotique.

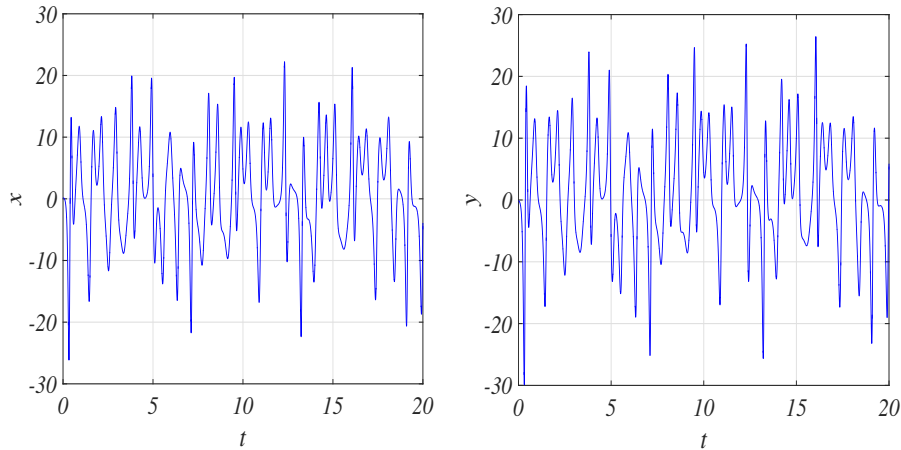


FIGURE 2.2: Aspects aléatoires des états chaotique du système de Lü [20].

Attracteurs chaotiques

La figure géométrique particulière qui représente l'attracteur d'un système chaotique dans l'espace des phases en fonction du temps, appelé attracteur chaotique. Ainsi, cet attracteur se produit à l'aide de deux opérations simultanées à savoir l'étirement, responsable de la sensibilité aux conditions initiales et de l'instabilité, et le repliement, responsable du côté étrange. D'autre part, on parle d'attracteur chaotique lorsque sa dimension est fractale. Grâce de cette propriété particulière, fractale, ces attracteurs sont qualifiés d'étranges(chaotiques). Ils représentent la signature du chaos qui nous permet d'authentifier un comportement chaotique.

Sensibilité aux conditions initiales

Les systèmes chaotiques sont extrêmement très sensibles aux conditions initiales. De très petites perturbations sur l'état initial d'un système peuvent être mener finalement à un comportement strictement différent dans son

état final. La Figure 2.3 illustre l'évolution temporelle d'une trajectoire du système de Lú [20] avec trois conditions initiales différentes très proches.

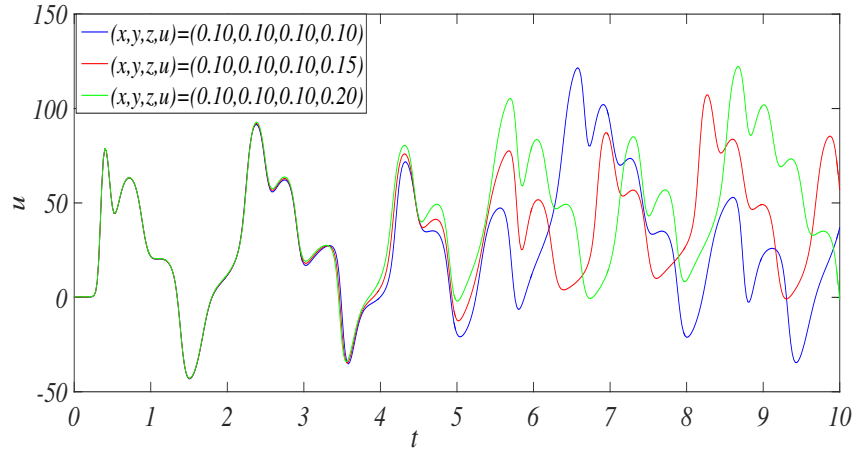


FIGURE 2.3: Evolution temporelle de la trajectoire u du système de Lú [20] avec trois conditions initiales différentes très proches.

Exposants de Lyapounov

La vitesse de divergence de deux trajectoires initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapounov afin de caractériser la nature du chaos détecté. L'exposant de Lyapounov sert à mesurer le taux de divergence des deux trajectoires. A titre d'exemple, on considère un système dynamique de dimension 4. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 les exposants de Lyapounov de ce système satisfaisant $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$. Alors ce système se comporte de la manière suivante :

- Si $\lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Il s'agit d'un point d'équilibre asymptotiquement stable.
- Si $\lambda_1 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < 0$. Il s'agit d'un cycle limite stable.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < 0$. Il s'agit d'un tore stable.
- Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < \lambda_4 < 0$ et $\sum_{i=1}^4 \lambda_i < 0$. Il s'agit d'un système chaotique.
- Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$ et $\sum_{i=1}^4 \lambda_i < 0$. Il s'agit d'un système hyperchaotique.

Remarque 2.4.1 *Un exposant de Lyapounov négatif selon une direction, indique que les trajectoires se rapprochent et par conséquent on perd l'information sur les conditions initiales, l'orbite est donc attractive vers une orbite périodique ou un point fixe. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce genre de système exhibe une stabilité asymptotique.*

Un exposant de Lyapounov positif selon une direction, indique que la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. les trajectoires divergent, l'orbite est donc chaotique. Intuitivement, c'est la sensibilité aux conditions initiales.

Un exposant de Lyapounov nul, les orbites issues de conditions initiales différentes, gardent une séparation constante, ni convergent, ni divergent l'une par rapport à l'autre. Dans ce cas, un tel système physique est dit conservatif.

Remarque 2.4.2 *Notons qu'il existe plusieurs algorithmes pour calculer les exposants de Lyapounov, l'un des plus connus étant l'algorithme de Wolf [21]. Cet algorithme nous permet de calculer les exposants de Lyapounov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires par rapport à la perturbation introduite parallèlement.*

Diagramme de bifurcations

On dit qu'il y a une bifurcation lorsqu'un tel changement qualitatif de la structure d'un système se produit à l'occasion de la variation quantitative de l'un de ses paramètres (qu'on l'appelle valeur de bifurcation). Les graphiques qui représentent ces bifurcations, sont appelés diagrammes de bifurcation. Donc le diagramme de bifurcation est un outil très important pour évaluer les comportements possibles d'un système en fonction des valeurs de bifurcation. La Figure 2.4 illustre le diagramme de bifurcations de

l'application logistique définie sur le segment $[0,1]$ par :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (2.5)$$

où $n = 0, 1, 2, \dots$ dénote le temps discret, et $r \in [0, 4]$ un paramètre de contrôle. Selon la Figure 2.4, on peut constater trois états différents du système selon la valeur du paramètre r : un régime stable, puis périodique à plusieurs états et enfin un régime chaotique.

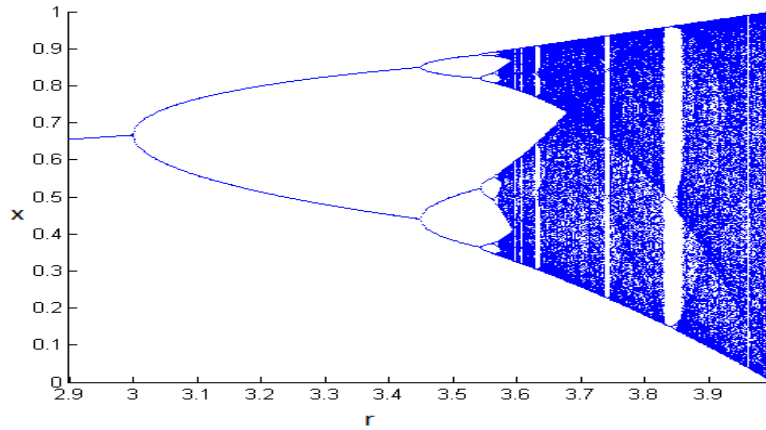


FIGURE 2.4: *Diagramme de bifurcation de l'application logistique.*

CHAPITRE 3

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans cette section, on s'intéresse aux éléments nécessaires de la théorie des équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo. Nous rappelons le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'un problème à valeurs initiales pour une équations différentielle fractionnaires au sens de Caputo, puis nous représentons le problème de Cauchy aux conditions initiales sous forme d'une équation d'intégrale de Volterra et nous terminons ce chapitre par quelques conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité des systèmes fractionnaires.

3.1 Équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo "EDFSC"

Considérons le problème aux valeurs initiales suivantes :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \\ {}^C\mathcal{D}^j y(0) = f_0^{(j)}, j = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (3.1)$$

où ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha$ désigne l'opérateur de dérivation au sens de Caputo, et $n-1 < \alpha \leq n$. Le théorème suivant nous permet d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution du problème aux valeurs initiales (3.1).

Théorème 3.1.1 [22] Soient $K > 0$, $h^* > 0$ et $y_0^{(i)} \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, et soit $f : G = [0, h^*] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, satisfaisant la condition de Lipschitz par rapport à y :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| < L|y_1 - y_2|, \quad (3.2)$$

et soit :

$$h = \min \left\{ h^*, \left(\frac{K\Gamma(\alpha + 1)}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\},$$

où

$$M = \sup_{t, z \in G} |f(t, z)|,$$

alors, le problème (3.1), admet une seule solution $y \in C[0, h]$.

Théorème 3.1.2 [22] Sous les hypothèses du théorème 3.1.1, le problème aux conditions initiales (3.1) est équivalent à l'équation d'intégrale de Volterra :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \quad (3.3)$$

Démonstration.

Supposons que y est une solution de l'équation (3.3). Cette dernière peut se réécrire sous la forme :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + {}_0\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t, y(t)).$$

En appliquant l'opérateur de différentiation ${}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha$ sur les deux cotés de cette relation, on trouve :

$$\begin{aligned} {}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha t^k}{k!} + {}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha {}_0\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t, y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha t^k}{k!} + f(t, y(t)). \end{aligned}$$

Puisque $k < \alpha$, donc ${}_0^C\mathcal{D}_t^\alpha t^k = 0$

Par conséquent y est une solution de l'équation (3.1).

Il reste à montrer que : ${}_0^C\mathcal{D}_t^j y(0) = y_0^{(j)}$.

En effet, en appliquant maintenant l'opérateur ${}_0^C\mathcal{D}_t^j$, $0 \leq j \leq n-1$ sur l'équation de Volterra (3.3), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_0^C\mathcal{D}_t^j y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C\mathcal{D}_t^j t^k}{k!} + {}_0^C\mathcal{D}_t^j {}_0\mathcal{D}_t^{-j} {}_0\mathcal{D}_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C\mathcal{D}_t^j t^k}{k!} + {}_0\mathcal{D}_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t)). \end{aligned}$$

On rappelle que :

$${}_0^C \mathcal{D}_t^j t^k = \begin{cases} 0, & \text{Si } j > K \\ \Gamma(k+1), & \text{Si } j = K \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-j+1)} t^{k-j}, & \text{Si } j < K. \end{cases}$$

Ce qui implique

$${}_0^C \mathcal{D}_t^j t^k|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{Si } j > K \\ \Gamma(k+1), & \text{Si } j = K \\ 0, & \text{Si } j < K. \end{cases}$$

D'autre part $\alpha - j \geq 1$, ce qui implique que l'intégrale ${}_0 \mathcal{D}_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t))|_{t=0}$ est nulle. Par suite ${}_0^C \mathcal{D}_t^j y(0) = y_0^{(j)}$.

Supposons maintenant que y est une solution de l'équation (3.1) et montrons que y est la solution de (3.3).

Posons $z(t) = f(t, y(t))$, on a alors :

$$\begin{aligned} z(t) &= f(t, y(t)) = {}_0^C \mathcal{D}_t^\alpha y(t) = {}_0^R \mathcal{D}_t^\alpha y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\ &= {}_0^R \mathcal{D}_t^\alpha y(t) - {}_0^R \mathcal{D}_t^\alpha y(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} \\ &= {}_0^R \mathcal{D}_t^\alpha \left(y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} \right) \\ &= {}_0^R \mathcal{D}_t^\alpha (y - T_{n-1}[y, 0])(t) \\ &= {}_0 \mathcal{D}_t^n {}_0 \mathcal{D}_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t), \end{aligned}$$

où $T_{n-1}[y, 0](t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)}$, est le polynôme de Taylor de degré $n - 1$.

En appliquant l'opérateur ${}_0 \mathcal{D}_t^{-n}$ sur les deux membres de cette dernière équation, il vient :

$${}_0\mathcal{D}_t^{-n}z(t) = {}_0\mathcal{D}_t^{-(n-\alpha)}(y - T_{n-1}[y, 0])(t) + q(t),$$

où q est un polynôme de degré $\leq n - 1$. Puisque la fonction z est continue, la fonction ${}_0\mathcal{D}_t^{-n}z$ a un zéro d'ordre au moins n à l'origine. En outre, la différence $y - T_{n-1}[y, 0]$ ayant la même propriété par construction. Et donc la fonction ${}_0\mathcal{D}_t^{-(n-\alpha)}(y - T_{n-1}[y, 0])$ doit également avoir un zéro d'ordre n . Par suite le polynôme q ayant la même propriété, mais comme il est de degré $\leq n - 1$, il en résulte que $q = 0$. Par conséquent :

$${}_0\mathcal{D}_t^{-n}z(t) = {}_0\mathcal{D}_t^{-(n-\alpha)}(y - T_{n-1}[y, 0])(t).$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} y(t) &= T_{n-1}[y, 0](t) + {}_0\mathcal{D}_t^{-\alpha}z(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

3.2 Systèmes chaotiques fractionnaires

Le chaos ne peut pas se réaliser dans les systèmes dynamiques continus autonomes d'ordre inférieur à trois. Le modèle d'un système chaotique peut être réorganisé en trois équations différentielles contiennent des dérivées fractionnaires.

Définition 3.2.1 (points d'équilibres)

Considérons maintenant un système non linéaire à dérivée fractionnaire comme :

$$\mathcal{D}^\alpha x = f(x), \tag{3.4}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ ($0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2, \dots, n$) et \mathcal{D}^α est l'opérateur de

dérivation au sens de Caputo. Les points d'équilibre du système (3.4) sont calculés par la résolutions de l'équation suivante :

$$\mathcal{D}^\alpha x = 0. \quad (3.5)$$

Définition 3.2.2 (Systèmes commensurables)

Dans l'équation (3.4), qui décrit la dynamique d'un système non linéaire d'ordre non entier, deux types de systèmes seront présentés : les systèmes commensurables (ou d'ordres commensurables) et les systèmes non commensurables (ou d'ordres non commensurables).

Définition 3.2.3 (Systèmes non commensurables)

Si tous les ordres de dérivations $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ du système (3.4) sont égaux, on dit que le système est commensurable. Dans le cas contraire, le système est dit non commensurable.

3.2.1 Conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité

Théorème 3.2.1 [23, 24] *Considérons le système non linéaire fractionnaire décrit par le modèle suivant ;*

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha x = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.6)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1$ et $f \in \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire continue.

1. Supposons que le système (3.6) est commensurable. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial f}{\partial x}$ associée à f au point d'équilibre.

Alors, le système (3.6) est asymptotiquement stable, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

2. Supposons maintenant que le système (3.6) est non commensurable, c'est-à-dire

CHAPITRE 3, INTRODUCTION À LA THÉRIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

$\alpha_i \neq \alpha_j$, il existe $i \neq j$, et soit m le plus petit multiple commun des dénominateurs u_i de α_i , tel que :

$$\alpha_i = \frac{v_i}{u_i}, (u_i, v_i) = 1, u_i, v_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Posons $\gamma = \frac{1}{m}$, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de l'équation caractéristique :

$$\det(\text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}, \dots, \lambda^{m\alpha_n}) - \frac{\partial f}{\partial x}) = 0.$$

Alors, le système non commensurable (3.6) est asymptotiquement stable, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \gamma \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n.$$

Remarque 3.2.1 Si le système étudié est linéaire, les conditions de stabilité dans les théorèmes précédents restent vrais, juste en remplaçant la matrice Jacobienne de f par sa partie linéaire f .

La Figure 3.1, illustre les différentes régions de stabilité d'un système fractionnaire, où $0 < \alpha < 1$.

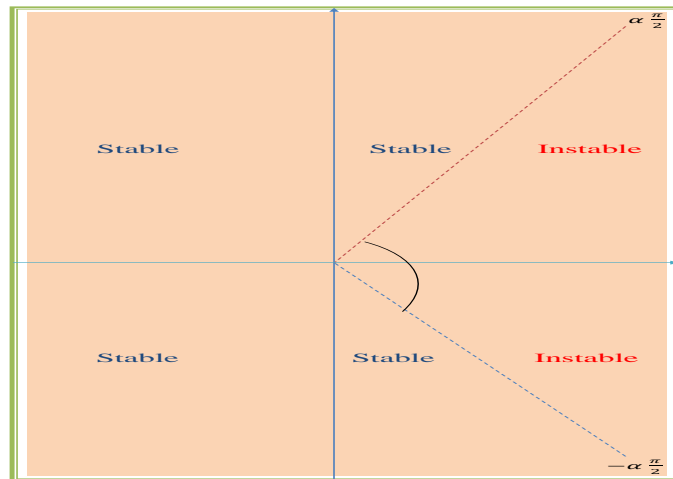


FIGURE 3.1: Régions de stabilité d'un système fractionnaire, où $0 < \alpha < 1$.

Exemple 3.2.1 *Considérons le système non linéaire fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha x = 1 + x^2 y - 4x, \\ \mathcal{D}^\alpha y = -x^2 y + 3x, \end{cases} \quad (3.8)$$

où \mathcal{D}^α est l'opérateur de dérivation de Caputo.

Les points d'équilibre de ce système sont les solutions de l'équation :

$$\begin{cases} 1 + x^2 y - 4x = 0, \\ -x^2 y + 3x = 0. \end{cases}$$

Le seul point d'équilibre du système (3.8) est $P = (1, 3)$.

La matrice Jacobienne du système, associée au point d'équilibre P est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique correspondant est :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Les valeurs propres du système, associées au point P sont données par :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lorsque $\alpha = 0.65$, on peut voir facilement que :

$$|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.047 > \frac{\alpha\pi}{2} = 1.021.$$

L'utilisation du Théorème 3.2.1, montre la stabilité du point d'équilibre P . Cependant, dans le cas entier, le point d'équilibre P est instable.

3.2.2 Conditions suffisantes (Méthode directe de Lyapounov)

Dans cette partie, nous étendons la méthode directe de Lyapounov des systèmes fractionnaire, pour étudier la stabilité asymptotique des solutions

du système suivant :

$$\mathcal{D}^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (3.9)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente une fonction non linéaire, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $\alpha \in (0, 1)$.

Lemme 3.2.1 [25] Soit $x(t) \in \mathbb{R}$ une fonction dérivable au sens de Caputo. Alors, pour tout $t > t_0$,

$$\frac{1}{2} \mathcal{D}^\alpha x^2(t) \leq x(t) \mathcal{D}^\alpha x(t), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (3.10)$$

Remarque 3.2.2 Le lemme précédent reste vrai, si $x(t) \in \mathbb{R}^n$, et dans ce cas :

$$\frac{1}{2} \mathcal{D}^\alpha x^T(t)x(t) \leq x^T(t) \mathcal{D}^\alpha x(t), \quad \text{pour tout } \alpha \in (0, 1). \quad (3.11)$$

Théorème 3.2.2 [26] Lorsqu'il existe une fonction de Lyapounov positive $V(x)$, telle que $\mathcal{D}^\alpha(V(x)) < 0$, pour tout $t \geq t_0$, alors la solution de système (3.9) est asymptotiquement stable.

Exemple 3.2.2 Considérons le système fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha x(t) = -x(t)y(t) - x(t), \\ \mathcal{D}^\alpha y(t) = x^2(t) - y(t). \end{cases} \quad (3.12)$$

Considérons également la fonction de Lyapounov suivante :

$$V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t)). \quad (3.13)$$

L'utilisation du lemme 3.2.1 nous donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\alpha V(x(t), y(t)) &= \frac{1}{2}\mathcal{D}^\alpha x^2(t) + \frac{1}{2}\mathcal{D}^\alpha y^2(t) \\ &\leq x(t)\mathcal{D}^\alpha x(t) + y(t)\mathcal{D}^\alpha y(t) \\ &= x(t)[-x(t)y(t) - x(t)] + y(t)[x^2(t) - y(t)] \\ &= -[x^2(t) + y^2(t)] \\ &< 0, \text{ pour tout } (x, y) \neq (0, 0)\end{aligned}$$

ce qui montre la stabilité asymptotique du système (3.12).

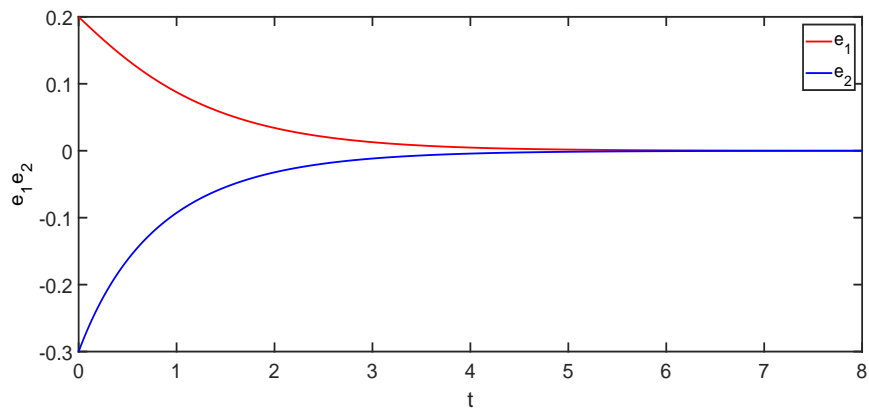


FIGURE 3.2: L'évolution temporelle des états du systèmes (3.12).

CHAPITRE 4

SYNCHRONISATION PROJECTIVE MODIFIÉE COMBINÉE DE TROIS SYSTÈMES CHAOTIQUES FRACTIONNAIRE

Dans cette partie, on s'intéresse au problème de la synchronisation projective modifiée combinée (SPMC) de trois systèmes unifiés d'ordre fractionnaire. A l'aide de la théorie de la stabilité du système d'ordre fractionnaire, un schéma de contrôle approprié est conçu pour réaliser ce type de synchronisation. Les résultats de la simulation numérique effectuée à l'aide de la méthode Adams-Boshforth Moulton sont présentés pour démontrer la validité et la faisabilité des résultats théorique.

4.1 Formulation du problème de SPMC

4.1.1 Analyse théorique

Le modèle général des systèmes d'ordre fractionnaire peut être sélectionné comme suit :

$${}^C\mathcal{D}^\alpha x = f(x), \quad (4.1)$$

$${}^C\mathcal{D}^\alpha y = g(y), \quad (4.2)$$

$${}^C\mathcal{D}^\alpha z = h(z) + u, \quad (4.3)$$

où ${}^C\mathcal{D}^\alpha$ est l'opérateur différentiel de Caputo ($0 < \alpha \leq 1$),

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \in \mathbb{R}^4$ sont les variables d'état de deux systèmes émetteurs, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T \in \mathbb{R}^4$ est l'état variable du système de récepteur, $f, g, h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ sont des fonctions continues et $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T \in \mathbb{R}^4$ est le contrôle continu à déterminer.

La définition de la synchronisation proposée est donnée comme suit.

Définition 4.1.1

Les deux systèmes émetteurs (4.1)-(4.2) et le système de récepteur (4.3) se synchronisent au sens de SPMC, s'il existe un contrôleur u , tel que l'erreur de synchronisation :

$$e(t) = x(t) + y(t) - Mz(t), \quad (4.4)$$

où $M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$. satisfait la condition $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$,

Dans cette partie, on va essayer d'étudier le problème de SPMC de trois systèmes unifiés d'ordre fractionnaire (systèmes de Lorenz, Chen et Lú) [27] en utilisant la technique de contrôle continue. Les deux systèmes émetteurs sont décrits respectivement comme suit :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^\alpha x_1 = (25\delta + 10)(x_2 - x_1), \\ {}^C\mathcal{D}^\alpha x_2 = (-35\delta + 28)x_1 - x_1x_3 + (29\delta - 1)x_2, \\ {}^C\mathcal{D}^\alpha x_3 = x_1x_2 - \left(\frac{\delta + 8}{3}\right)x_3, \end{cases} \quad (4.5)$$

et

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^\alpha y_1 = (25\delta + 10)(y_2 - y_1), \\ {}^C\mathcal{D}^\alpha y_2 = (-35\delta + 28)y_1 - y_1y_3 + (29\delta - 1)y_2, \\ {}^C\mathcal{D}^\alpha y_3 = y_1y_2 - \left(\frac{\delta + 8}{3}\right)y_3, \end{cases} \quad (4.6)$$

et aussi le système récepteur contrôlé est choisi comme

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^\alpha z_1 = (25\delta + 10)(z_2 - z_1) + u_1, \\ {}^C\mathcal{D}^\alpha z_2 = (-35\delta + 28)z_1 - z_1z_3 + (29\delta - 1)z_2 + u_2, \\ {}^C\mathcal{D}^\alpha z_3 = z_1z_2 - \left(\frac{\delta + 8}{3}\right)z_3 + u_3, \end{cases} \quad (4.7)$$

où x_i, y_i et $z_i, i = 1, 2, 3$.

Sont les variables d'état des systèmes émetteurs et du système récepteur, respectivement, $\delta \in [0, 1]$, ${}^C\mathcal{D}^\alpha$ est l'opérateur différentiel de Caputo

($0 < \alpha \leq 1$), u_1, u_2 et u_3 sont les contrôleurs non linéaires à concevoir.

Pour quantifier notre objective, nous définissons les états de l'erreur de synchronisation comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 + y_1 - m_1z_1 \\ e_2 = x_2 + y_2 - m_2z_2 \\ e_3 = x_3 + y_3 - m_3z_3, \end{cases} \quad (4.8)$$

où m_1, m_2 et $m_3 \in \mathbb{R}^*$.

La dynamique de l'erreur de synchronisation est donnée par :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^\alpha e_1 = (25\delta + 10) \{(e_2 - e_1) + (m_2 - m_1)z_2\} - m_1 u_1, \\ {}^C\mathcal{D}^\alpha e_2 = (29\delta - 1)e_2 + \varphi - m_2 u_2, \\ {}^C\mathcal{D}^\alpha e_3 = -\left(\frac{\delta + 8}{3}\right)e_3 + x_1 x_2 + y_1 y_2 - m_3 z_1 z_2 - m_3 u_3, \end{cases} \quad (4.9)$$

où $\varphi = (-35\delta + 28)(x_1 + y_1) - x_1 x_3 - y_1 y_3 + m_2 z_1 z_3$.

Pour vérifier la stabilité du système (4.9), un contrôleur approprié u_i ,

$i = 1, 2, 3$ devrait être conçu. Pour cela, nous proposons l'hypothèse suivante :

Hypothèse :

Supposons que les contrôleurs u_i , $i = 1, 2, 3$ sont choisis comme

$$\begin{cases} u_1 = \left(\frac{25\delta + 10}{m_1}\right)(m_2 - m_1)z_2, \\ u_2 = \frac{1}{m_2}(\varphi + p e_2), \\ u_3 = \frac{1}{m_3}(x_1 x_2 + y_1 y_2 - m_3 z_1 z_2), \end{cases} \quad (4.10)$$

où p est le paramètre de contrôle satisfaisant

$$p > 29\delta - 1, \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (4.11)$$

Maintenant, grâce au théorème de stabilité 3.2.1, nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.1.1 *Si les contrôles u_i , $i = 1, 2, 3$ sont donnés par (4.10), et si le paramètre de contrôle p est sélectionné comme (4.11), alors le problème de SPMC entre les systèmes unifiés (4.5), (4.6) et (4.7) est achevée.*

Démonstration.

Par hypothèse (4.10), le système d'erreur (4.9) devient

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}^\alpha e_1 = (25\delta + 10)(e_2 - e_1) \\ {}^c\mathcal{D}^\alpha e_2 = (29\delta - 1 - p)e_2 \\ {}^c\mathcal{D}^\alpha e_3 = -\left(\frac{\delta + 8}{3}\right)e_3. \end{cases} \quad (4.12)$$

Les valeurs propres du système

$$\lambda_1 = -(25\delta + 10), \lambda_2 = 29\delta - 1 - p \text{ et } \lambda_3 = -\left(\frac{\delta + 8}{3}\right). \quad (4.13)$$

Précédent sont donnée par : Puisque $\delta \in [0, 1]$, et par hypothèse (4.11), toutes les racines (4.13) sont négatives. Donc,

$$|\arg \lambda_i| = \pi > \alpha \frac{\pi}{2} \text{ pour tout } i = 1, 2, 3 \text{ et } 0 < \alpha \leq 1. \quad (4.14)$$

Alors le théorème 3.2.1 affirme que l'erreur de synchronisation (4.12) est asymptotiquement stable, ce qui implique que la synchronisation souhaitée est atteint.

4.1.2 Résultats de simulation

Afin de vérifier les résultats théoriques obtenus dans la section cidessus, les simulations numériques correspondantes seront effectuées. Dans ces simulations, on prend : $\alpha = 0.98$, $\delta = 1$, $p = 29$. Les valeurs initiales des deux systèmes émetteurs et de récepteur sont choisies comme $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T = (0.1, -0.1, 0.1)^T$, $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^T = (0.2, -0.2, 0.1)^T$ et $(z_1(0), z_2(0), z_3(0))^T = (0.3, 0.15, -1)^T$ respectivement. Donc par $(m_1, m_2, m_3) = (-1, 2, 0.1)$, les conditions initiales du système d'erreur sont donnée par $(e_1(0), e_2(0), e_3(0))^T = (0.6, -0.6, 0.3)^T$.

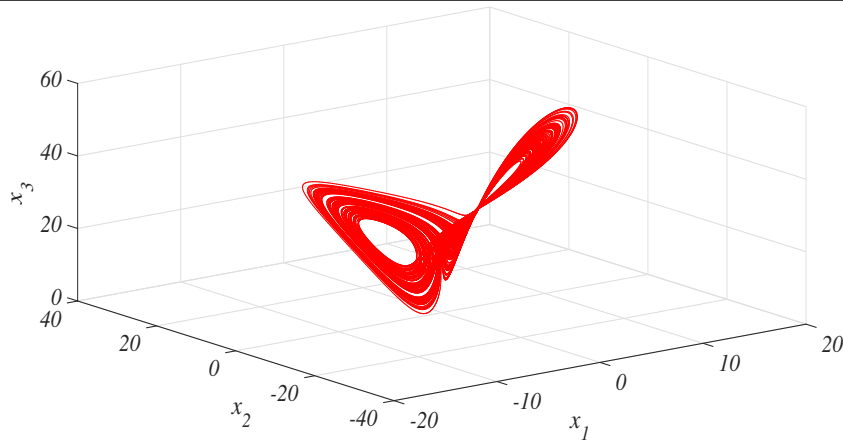


FIGURE 4.1: L'attracteur chaotique du système de Lorenz(4.5), lorsque $\delta = 0$.

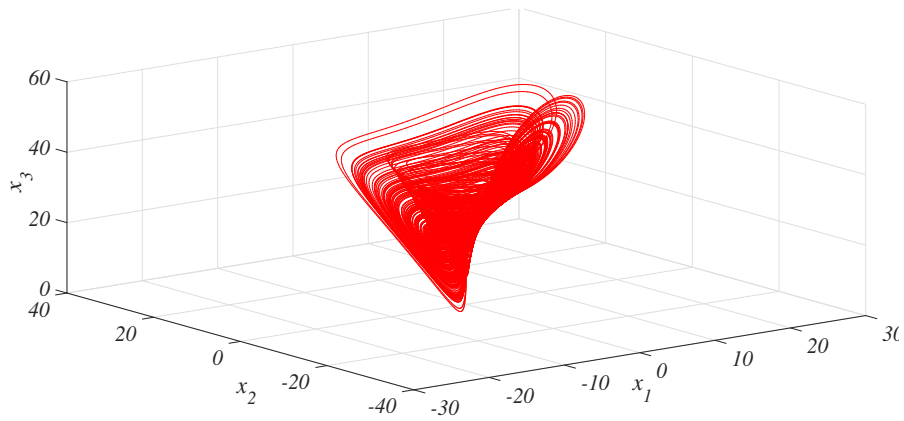


FIGURE 4.2: L'attracteur chaotique du système de Lü(4.5), lorsque $\delta = 0.8$.

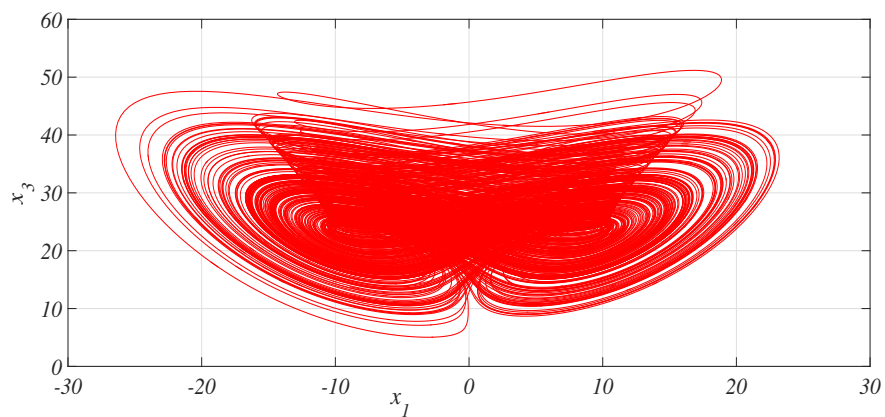


FIGURE 4.3: L'attracteur chaotique du système de Chen(4.5), lorsque $\delta = 1$.

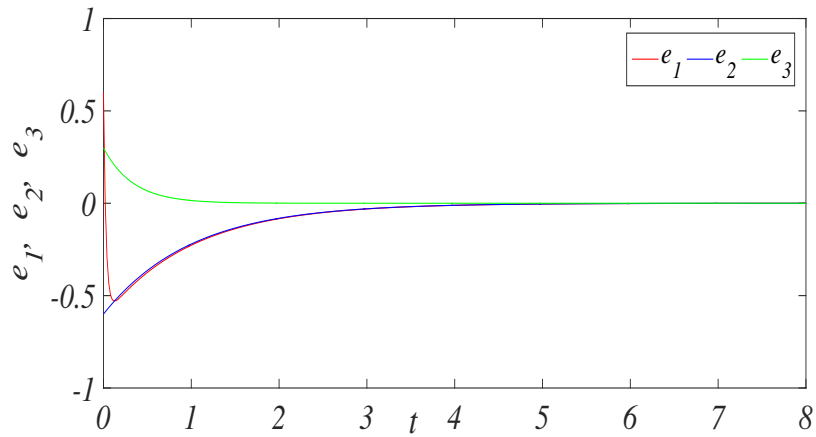


FIGURE 4.4: Les courbes des erreurs de synchronisation(4.9).

D'après la figure 4.4, on peut voir que les états du système d'erreur(4.9) se convergent vers zéro, lorsque $t \rightarrow +\infty$, ce qui implique que la synchronisation souhaitée est obtenue.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le problème de SPMC entre trois systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires a été réalisée dans le quatrième chapitre. Une technique de contrôle continu a été employée pour effectuer la stabilité ainsi que la convergence de l'erreur de synchronisation.

Des simulations numériques ont été fournies pour vérifier et tester la validité et la capacité du schéma de synchronisation proposé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Mengue, B. Essimbi, *Secure communication using chaotic synchronization in mutually coupled semiconductor lasers*, *Nonlin. Dyn.*, **70**, (2012) 1241-1253.
- [2] D. Matignon, *Stability results of fractional differential equations with applications to control processing*, in : IMACS, IEEE-SMC, Lille, France, (1996).
- [3] M.S Abdelouahab and N. Hamri, *Fractional-order Hybrid Optical System and its Chaos Control Synchronization*, *Electron. J. Theor. Phys.*, **11**, (2014) 49-62.
- [4] M.M. Al-sawalha, A.K. Alomari, S.M. Goh and M.S.M. Noorani, *Active anti-synchronization of two identical and different fractional-order chaotic systems*, *Int. J. Nonlinear Sci.*, **11**, (2011) 267-274.
- [5] X. Wu, Y. Lu, *Generalized projective synchronization of the fractional-order Chen hyperchaotic system*, *Nonlinear Dyn.*, **57**, (2009) 25-35.
- [6] A. Bouzeriba, A. Boulkroune and T. Bouden, *Projective synchronization of two different fractional-order chaotic systems via adaptive fuzzy control*, *Neural Comput. Appl.*, doi 10.1007/s00521-015-1938-4 (2015).

BIBLIOGRAPHIE

- [7] A. Boulkroune, A. Bouzeriba, S. Hamel, T. Bouden, *Adaptive fuzzy control-based projective synchronization of uncertain nonaffine chaotic systems*, Complexity., doi :10.1002/cplx.21596 (2014).
- [8] X. Wang, X. Zhang and C. Ma, *Modified projective synchronization of fractional-order chaotic systems via active sliding mode control*, Nonlinear Dyn, **69**, (2012) 511-517.
- [9] K. Khan and A. Bhat, *Hybrid Projective Synchronization of Fractional Order Chaotic Systems with Fractional Order in the Interval (1,2)*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **16**, (2016) 350-365.
- [10] R. Z. Luo, Y. L. Wang, *Finite-time stochastic combination synchronization of three different chaotic systems and its application in secure communication*, Chaos, **22** (2012) 023109.
- [11] S. Kaouache, M.S. Abdelouahab and R. Bououden, *Reduced generalized combination synchronization between two n- dimensional integer-order hyperchaotic drive systems and one m- dimensional fractional-order chaotic response system*, Aust. J. Math. Anal. Appl, **17**, (2) (2020), Art. 19, 8 pp.
- [12] S. Kaouache, N.E. Hamri, A.S. Hacinliyan, E. Kandiran, B. Deruni and A.C. Keles , *Increased Order Generalized Combination Synchronization of Non-Identical Dimensional Fractional-Order Systems by Introducing Different Observable Variable Functions*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, **20**, (3) (2020) 307-315.
- [13] S. Kaouache, Abdelouahab and N.E. Hamri, *Generalized combination synchronization of three different dimensional fractional chaotic and hyperchaotic systems using three scaling matrices*, Jour. of Adv. Research in Dynamical and Control Systems, **12**, (4) (2020) 330-337.
- [14] S. Kaouache and M.S. Abdelouahab, *Inverse matrix projective synchronization of novel hyperchaotic system with hyperbolic sine function non-*

BIBLIOGRAPHIE

- linearity*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B : Applications and Algorithm, **27**, (2020) 145-154.
- [15] Y. Wang, *Active backstepping-based combination synchronization of three different chaotic systems*, Adv. Sci. Eng. Med, **4**, (2012) 142-147.
- [16] I. Podlubny, *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Elsevier science, **198** , (1998).
- [17] T. Menacer, *Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires*, Thèse de doctorat, Université Mentouri-Constantine-1,(2014).
- [18] I. Podlubny, *Geometric and physical interpretation of fractional integration and three-dimensional case and scattering function*, Journal of Physics A : Mathematical and General, **25(8) : 2107**, (1992).
- [19] B. Tellab, *Résolution des équations différentielles fractionnaires*, Université des Frères Mentouri Constantine-1, faculté des sciences exactes edition, 2018.
- [20] A. Chen, J. Lu, J. Lú, and S. Yu, *Generating hyperchaotic lú attractor via state feedback control*, Physica A, **364** (2006) 103-110.
- [21] A. Wolf, A.Swift, H. L. Swinney and J. A. vastano, *Determining Lyapunov Exponents from a time Series*, Physica D : Nonlinear Phenomena, **16(1985)285-317**.
- [22] A. Chen, J. Lu, J. Lú and S. Yu, *Generating hyperchaotic Lú attractor via state feedback control*, Physica A, **364** (2006) 103-110.
- [23] J. Sabattier, M. Moze and C. Farges, *LMI stability conditions for fractional order system*, Computers and Mathematics with Applications, **59(5)(2010)1594-1609**.

BIBLIOGRAPHIE

- [24] M.S. Thavazoei, M. Haeri, *A note on the stability of fractional order system*, Mathematics and Computers in Simulation, **79**(5)(2009)1566-1576.
- [25] N. Aguila-Camacho, M.A. Duarte-Mermoud and J.A. Gallegos, *Lyapunov functions for fractional order systems*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **19** (9) (2014)2951-2957.
- [26] D. Chen, R. Zhang, X. Liu and X. Ma, *Fractional order Lyapunov Stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, (2004), doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.05.005>
- [27] J.W. Wang, Y.B. Zhang, *Designing synchronization schemes for chaotic fractional-order unified systems*, Chaos Solitons and Fractals, **30** (5) (2006) 1265-1272.