

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

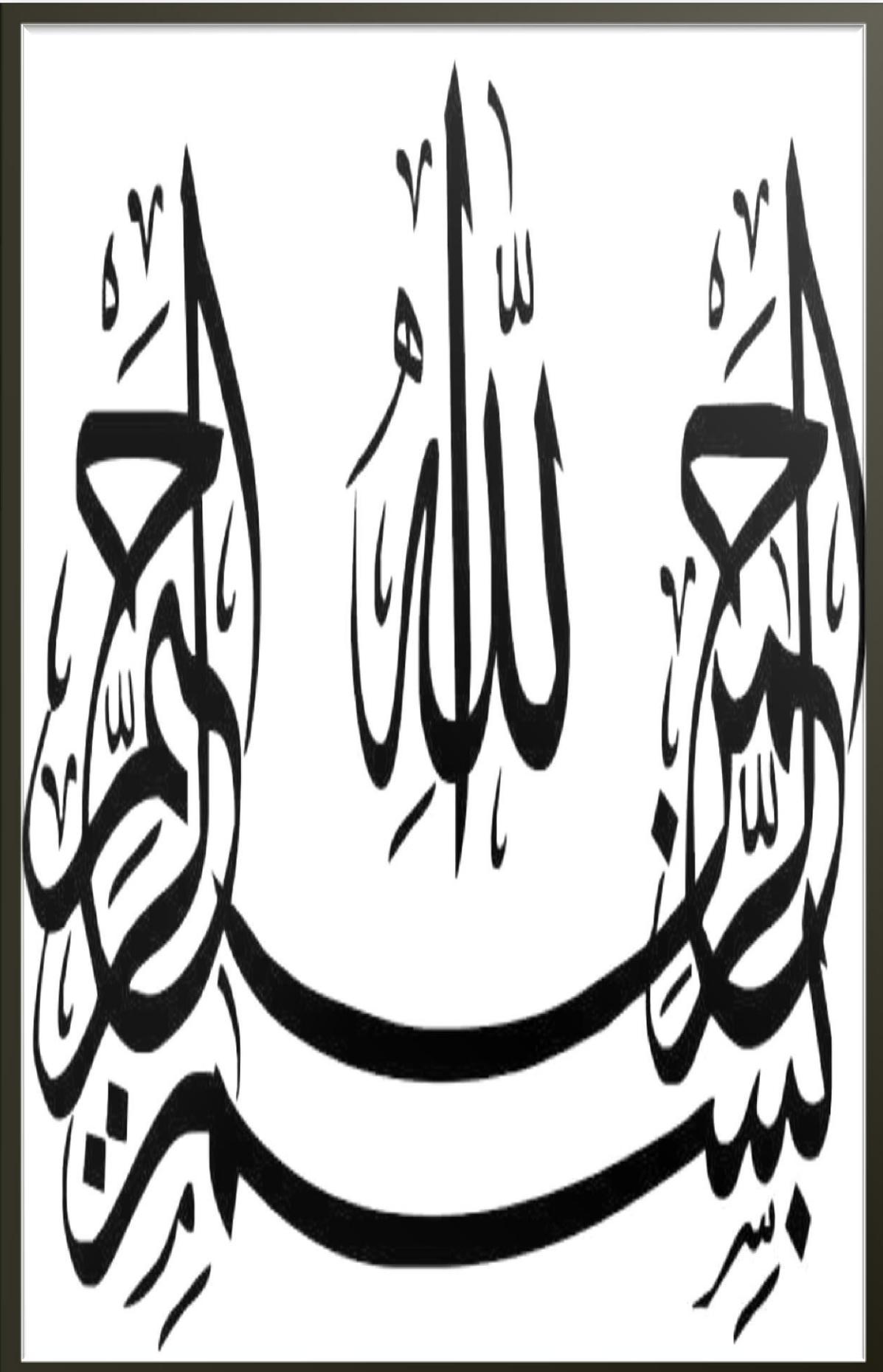
Synchronisation hybride des systèmes chaotiques

**Préparé par : Amroune Nahla
Lainous Manar**

Soutenue devant le jury

Mehazzem Allal	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Laouira widad	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Rouibah Khaoula	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire :2022/2023



Remerciements

Nous remerciant tout d'abord, **ALLAH** le tout puissant qui nous à
Donné la force, la volonté et le courage et nous à aidée à compléter ce
Travail.

Remercions nos très chers parents pour leur soutien moral qui
Nous permis de réussir et de terminer nos études.

Nous voudrions aussi exprimer nos remerciements sincère au nos
Encadrement **Laouira Widad** qui nous a gratifiés de ses orientations
Ainsi que de ses précieux conseils qui nous ont été d'une grande aide
Pour l'accomplissement de travail.

Nous remercions également les membres de jury **Dr. Allal Mehazem**
Pour avoir accepté de présider, et **Dr. Rouibah Khaoula** pour avoir
Accepté d'examiner notre travail.

En fin, merci a tous les personne qui ont participé de prés ou de
Loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

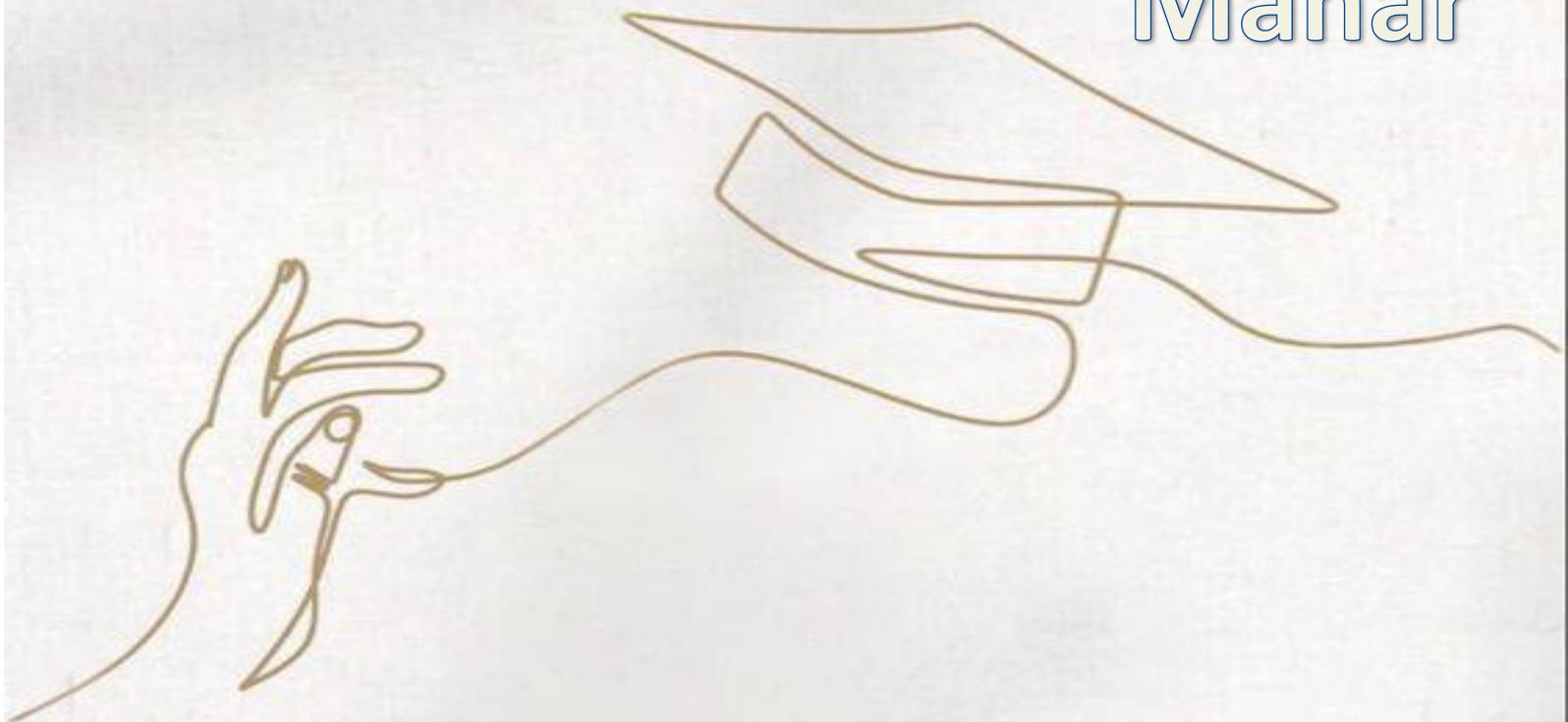
Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents, qui m'ont soutenu, protégé, et élevé en m'incluant des valeurs et le respect. D'avoir cru en moi, et de faire de moi la personne que je suis aujourd'hui.

À mes frères et sœurs, qui m'ont beaucoup appris, guider et encourager tout au long de mes études. À ma grand-mère, qui ensoleille ma vie.

Aux mes chères amis , à mon binôme avec qui j'ai passé de très bons moments.

À mes collègues des études et toutes les personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés.

Manar



Dédicace

Je dédie ce mémoire

À mon cher père **Laid**, et ma chère mère **Djamila**.

À mes frères et mes sœurs.

À mes merveilleux neveux.

À mes oncles, mes tantes, et toutes mes cousines.

À toute ma famille.

À tous mes amies.

À mon binôme.

À tous les amies de promotion de master mathématique.

Nahla



Résumé

Le travail de cette mémoire s'articule autour de l'étude de la synchronisation hybride des systèmes chaotiques . Nous avons commencé par des généralités sur les systèmes chaotiques et quelques propriétés de ces systèmes, ensuite nous avons donné quelques définitions et types et méthodes de la synchronisation. Enfin nous avons appliqué la synchronisation hybride sur le système de Lu et Zeraouia puis sur le système de Rössler et le nouveau système par la méthode de contrôle actif non linéaire. On utilise la méthode de "Runge kutta" du quatrième ordre avec un programmation en "MATLAB" pour confirmé les résultats.

Mots clés : systèmes dynamiques chaotiques , la synchronisation, la synchronisation hybride, la stabilité de Lyapunov, système maitre, système esclave, le contrôle actif non linéaire.

Abstract

The focus of this research is on the study of hybrid synchronization of chaotic systems. We started with generalities about chaotic systems and some property of that systems, then we gave some definitions and types and methods of synchronization, finally we applied hybrid synchronization on the system Lu and Zerraoulia then on the Rössler system and the new system using the non-linear active control method. The results were confirmed using the fourth degree "Rung-kutta" method in the "MATLAB" program.

Key word : chaotic dynamic systems, synchronization, the hybrid synchronization, lyapunov stability, master system, slave system, the non linear control active.

ملخص

تتمحور هذه الدراسة حول التزامن الهجين للأنظمة الديناميكية الفوضوية. بدأنا بعموميات حول الأنظمة الفوضوية وبعض خصائص هذا النظام ثم أعطينا بعض التعاريف وأنواع وأساليب التزامن. أخيرا طبقنا التزامن الهجين على نظام لي و زراولبية ثم على نظام روسلر و النظام الجديد باستخدام طريقة التحكم النشط الغير خطي. بواسطة طريقة "رونج كوتا" من الدرجة الرابعة في برنامج "الماتلاب" تأكدنا من النتائج.

الكلمات المفتاحية : الأنظمة الديناميكية الفوضوية, التزامن, التزامن الهجين, استقرار لياونوف, النظام السيد, النظام العبيد, التحكم النشط الغير خطي.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Généralité sur les systèmes dynamiques chaotiques	4
1.1 Systèmes dynamiques	4
1.1.1 Concepts fondamentaux sur la théorie des systèmes dynamiques :	4
1.1.2 Système dynamique linéaire et non linéaire	5
1.1.3 Système autonome et non autonome	6
1.1.4 Point d'équilibre	6
1.1.5 Espace de phase	7
1.1.6 Trajectoire, orbite	7
1.1.7 Stabilité au sens de Lyapunov	7
1.1.8 Le critère de Routh-Hurwitz	10
1.1.9 Critère de Routh-Hurwitz dans \mathbb{R}^3	12
1.1.10 Attracteur	13
1.1.11 Bassin d'attraction	14
1.1.12 Bifurcations	14
1.1.13 Diagramme de bifurcation	15
1.2 Système chaotique	15
1.2.1 Définition de chaos	15

1.2.2	Définition d'un système chaotique	16
1.2.3	Caractéristique de chaos	16
1.2.4	Exemples des systèmes chaotiques continues	20
2	Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques	23
2.1	Systèmes couplés	24
2.1.1	Accouplement bidirectionnel	24
2.1.2	Accouplement unidirectionnel	24
2.2	Définition de la synchronisation	25
2.2.1	Définition générale de la synchronisation	25
2.2.2	Définition mathématique de la synchronisation	26
2.3	Les types de synchronisation	26
2.3.1	Synchronisation Complète	26
2.3.2	Synchronisation identique par la méthode de Pecora et Carroll	27
2.3.3	Synchronisation Décalée	29
2.3.4	Synchronisation projective (PS)	29
2.3.5	Anti synchronisation	29
2.3.6	Synchronisation généralisée	30
2.3.7	Synchronisation GPS	31
2.3.8	Synchronisation de phase (PS)	31
2.3.9	Synchronisation FSHP	31
2.3.10	Synchronisation Q-S	32
2.4	Méthodes de synchronisation	32
2.4.1	Méthode du contrôleur actif	32
2.4.2	Méthode de backstepping	33
2.4.3	Méthode du mode glissant	35
3	Synchronisation hybride des systèmes dynamiques chaotiques	39
3.1	Définition de la synchronisation hybride	39
3.2	Application de la synchronisation hybride	40

TABLE DES MATIÈRES

3.2.1	La synchronisation hybride entre le système de Lü modifié et le système de Zeraoulia	40
3.2.2	La synchronisation hybride entre le système de Rössler et le nouveau système	44

TABLE DES FIGURES

1.1	<i>Différents types de stabilité de Lyapunov</i>	8
1.2	<i>L'aspect aléatoire du système de Lorenz.</i>	17
1.3	<i>Évolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches.</i>	18
1.4	<i>L'attracteur étrange de Lorenz</i>	20
1.5	<i>L'attracteur étrange de Rössler</i>	22
3.1	<i>Évolution des trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour les systèmes (3.4) et (3.5).</i>	42
3.2	<i>Évolution des trajectoires $y_1(t)$ et $y_2(t)$ pour les systèmes (3.4) et (3.5).</i>	43
3.3	<i>Évolution des trajectoires $z_1(t)$ et $z_2(t)$ pour les systèmes (3.4) et (3.5).</i>	43
3.4	<i>Évolution des erreurs $e_1(t)$ et $e_2(t)$ de la synchronisation hybride pour les systèmes (3.4) et (3.5).</i>	44
3.5	<i>Évolution des trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour les systèmes (3.12) et (3.13).</i>	46
3.6	<i>Évolution des trajectoires $y_1(t)$ et $y_2(t)$ pour les systèmes (3.12) et (3.13).</i>	47
3.7	<i>Évolution des trajectoires $z_1(t)$ et $z_2(t)$ pour les systèmes (3.12) et (3.13).</i>	47
3.8	<i>Évolution des erreurs $e_1(t)$ et $e_2(t)$ de la synchronisation hybride pour les systèmes (3.12) et (3.13).</i>	48

INTRODUCTION

Les systèmes dynamiques se sont développés durant le ^{XIX}me siècle ; effectivement, vers la fin de ce siècle. Un système dynamique est un système qui se varie dans le temps d'une façon causale et déterministe, il désigne généralement la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités [1]. Les systèmes dynamiques sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaître dans les premiers travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles.

Les travaux révolutionnaires de **Lorenz** en 1963 ont apporté une vision scientifique de la reconnaissance d'un nouveau type de comportement appelé Chaos. Le chaos est un phénomène d'apparence aléatoire non linéaire qui est déterministe et très sensible aux conditions initiales. Il définit un état spécial d'un système dont le comportement imprévisible ne se répète jamais. De très nombreux systèmes ont été présentés ces dernières années exploitant les comportements chaotique dans le cryptage des données [29], les domaines physiques, chimiques, biologiques [30], les systèmes financiers [31].

En même temps que la recherche sur le chaos dans les systèmes dynamiques, un axe de recherche en mathématiques a été élargi en parallèle, se concentrant sur la synchronisation des mouvements chaotiques ; le terme synchronisation vient de grec $\sigma\nu\gamma$ (syn) qui signifie "avec" et $\chi\rho\nu\varsigma$ (chronos), qui signifie "temps". les manifestations de la synchronisation sont observées depuis le ^{XVII}me siècle. Le mathématicien hollandais **Huygens**

a particulièrement remarqué que deux horloges à pendule appuyées Un mur finit par avoir le même mouvement en 1673 [3]. On peut donc donner la première définition de la synchronisation est un phénomène qui caractérise deux systèmes se comportant de la même façon en même temps.

Jusqu'à ce jour la, plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés. Le premier est le travail de **Yamada** et **Fujisaka** [33], qui utilisent une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, **Afraimovich** et **Al**. En 1990, les pionniers de la synchronisation **Carroll** et **Pecora** [32] Ils ont découvert que deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes peuvent se synchroniser s'ils sont convenablement couplés, tel que le premier système qui génère le signal chaotique est appelé système Ametteur (maître), le second système est appelé système récepteur (esclave) ; c'était la synchronisation identique. La Synchronisation chaotique, sujet important sur les applications des sciences non linéaires, qui ont été développées et largement étudiées ces dernières années, car elles peuvent être appliquées à un large éventail de sciences de l'ingénieur et de l'information, en particulier dans les communications sécurisées et la cryptographie. Différentes méthodes et diverses approches ont été appliquées avec succès à la synchronisation du chaos et hyperchaos dans les systèmes dynamiques, telles que : la méthode de contrôleur actif (adaptif), la méthode Feedback, la méthode de backstepping design et la méthode en mode glissant, etc... et plusieurs type de synchronisation ont été proposés dans les systèmes chaotiques intéressants telles que : la synchronisation complait, l'anti synchronisation, la synchronisation projective, la synchronisation projective fonctionnelle, la synchronisation généralisée et la synchronisation Q-S, et Récemment, un nouveau type de synchronisation a été proposé est la synchronisation hybride ce dernier fait l'objet de cette mémoire. Le mémoire est organisé de la façon suivant :

- Le premier chapitre : On présente des généralités sur les systèmes dynamiques chaotique et quelque propriété.
- Le deuxième chapitre : On donne quelques définitions types et méthodes de la synchronisation.
- Le troisième chapitre : On applique la synchronisation hybride sur les système Lü et

Introduction

Zeraouia puis sur le système de Rössler et un nouveau système.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉ SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et les caractéristiques des systèmes dynamiques continus et les théorèmes de leur stabilité, puis nous soulignons les systèmes chaotiques en termes de définition, des caractéristiques et quelques exemples.

1.1 Systèmes dynamiques

1.1.1 Concepts fondamentaux sur la théorie des systèmes dynamiques :

Un système dynamique se réfère à un système dont l'état évolue dans le temps. Du point de vue mathématique, un système dynamique est constitué d'un espace d'états et d'une loi dynamique qui détermine l'état futur à partir d'un état présent donné. On distingue généralement deux types de systèmes dynamiques : des systèmes discrets et des systèmes continus.

Définition 1.1.1 [13] (Système dynamique discret)

Si un système prends ses valeurs uniquement à des instants régulièrement distribués, celui-ci est dit système en temps discret ou tout simplement système discret. Sa représentation mathématique est donnée par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ x(k_0) = x(0) \end{cases} \quad (1.1)$$

avec k est l'instant discret, k_0 est l'instant discret initiale et $x(0)$ est le vecteur des états initiaux.

Définition 1.1.2 (Système dynamique continue)

Si le système évolue en temps continu, il est dit système continu. La description mathématique de son évolution est donnée par une équation différentielle ordinaire et un ensemble des conditions initiales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état. f est une fonction $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ appelée le champ vecteur.

1.1.2 Système dynamique linéaire et non linéaire

Définition 1.1.3 [14](Système linéaire)

Dans le cas continue, un système linéaire est un système décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t), t > t_0 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

où $A(t)$ est une matrice $n \times n$ à valeur dans \mathbb{R}^n .

Le système (1.3) est linéaire.

Définition 1.1.4 (*Système non linéaire*)

Dans le cas continue, un système dynamique peut être représenté par l'équation :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

où $x : I = [t_0, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $f : D = I \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $B = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\| \leq b\}$.

Le système (1.4) est non linéaire (f fonction non linéaire).

1.1.3 Système autonome et non autonome

Lorsque le champ de vecteur f ne dépend pas explicitement du temps, le système (1.2) est dit autonome. Dans le cas contraire, il est dit non autonome. En utilisant un changement de variable approprié, on peut facilement transformer un système non autonome de dimension n en un système autonome équivalent de dimension $n + 1$.

Exemple 1.1.1 [2] *Systèmes autonome :*

$$\dot{x} = f(x), x(t_0) = x_0.$$

Systèmes non-autonome :

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0.$$

1.1.4 Point d'équilibre

Définition 1.1.5 [19]

Un point d'équilibre (ou point critique, ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation $\dot{x} = f(x)$ est un point x^* de l'espace des phases vérifiant $f(x^*) = 0$

Remarque 1.1.1 Par un changement de variable $y = x - x^*$, on peut ramener le point à l'origine (0).

1.1.5 Espace de phase

L'espace de phase est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.

1.1.6 Trajectoire, orbite

On appelle trajectoire d'un point x de M l'application définie sur G et à valeurs dans M par :

$$\begin{aligned}\varphi : G &\rightarrow M \\ t &\rightarrow \varphi_t(x).\end{aligned}$$

On appelle orbite d'un point x l'image de la trajectoire issue de x c'est à dire le sous ensemble $\gamma(x)$ de l'espace des phases défini par : $\gamma_t(x) = \varphi_t(x)$.

1.1.7 Stabilité au sens de Lyapunov

La stabilité d'un système dynamique se réfère à la façon dont ses trajectoires évoluent à proximité des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité permet d'étudier le comportement de la trajectoire d'état d'un système lorsque l'état initial est très proche d'un point d'équilibre. La théorie de stabilité au sens de Lyapunov s'applique à toutes les équations différentielles. Elle affirme que la solution d'une équation différentielle, lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre, reste toujours suffisamment proche de ce point d'équilibre.

On considère le système non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.5)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

Définition 1.1.6 [3] (*stabilité*)

Un point d'équilibre x^* de (1.5) est stable au sens de Lyapunov si : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, tel que :

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|x(t) - x^*\| < \varepsilon, \forall t > 0.$$

Dans le cas contraire, x^* est dit instable.

Définition 1.1.7 (*stabilité asymptotique*)

Un point d'équilibre x^* de (1.5) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si il est stable au sens de Lyapunov et si de plus existe $\delta_0 > 0$ avec $0 < \delta_0 < \delta$ tel que :

$$\|x_0 - x^*\| < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Définition 1.1.8 (*stabilité exponentielle*)

Un point d'équilibre x^* de (1.5) est exponentiellement stable s'il existe des constantes positives a, b, δ tel que :

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|x(t) - x^*\| \leq a \exp(-bt) \|x_0 - x^*\|, \text{ pour tout } t > 0.$$

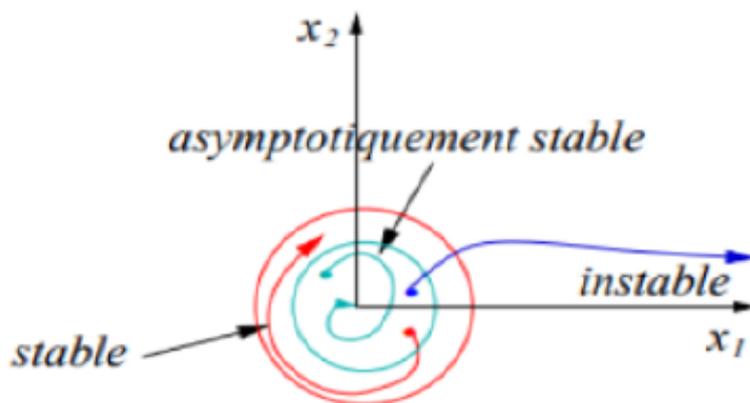


FIGURE 1.1 – Différents types de stabilité de Lyapunov

Remarque 1.1.2

-La stabilité est définie localement dans chacune des définitions précédentes.

-Si le point d'équilibre est stable, quel que soit le vecteur d'état initial x_0 dans \mathbb{R}^n alors le point d'équilibre est globalement stable.

La stabilité au sens de Lyapunov

Considérons une classe des systèmes non linéaires décrit par le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

On va présenter les deux méthodes de Lyapunov

•Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre x^* du système (1.6). Plus précisément, on examine les valeurs propres λ_i de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité x^* s'expriment comme suit :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative, x^* est exponentiellement stable.
- Si la matrice Jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, x^* est instable.

Remarque 1.1.3 Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice Jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous-espace (une variété) dont la dimension est le nombre de valeurs propres nulles de la matrice Jacobienne, la stabilité de l'équilibre peut être étudiée dans ce sous-espace par la seconde méthode.

•Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

Comme on l'a déjà vu, La première méthode de Lyapunov est simple à appliquer, mais

elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. En outre, elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La deuxième méthode est plus difficile à mettre en œuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Ce théorème va résumer cette méthode.

Théorème 1.1.1 [4] *Le point d'équilibre x^* du système (1.6) est stable s'il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

i) D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x^* \in D$.

ii) $V(x^*) = 0$ et $V(x) > V(x^*) ; \forall x \neq x^*$.

iii) $\dot{V}(x) \leq 0 ; \forall x \neq x^*$ dans D .

• Si de plus $x, \dot{V}(x) < 0 ; \forall x \neq x^*$ dans D , alors x^* est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

• Si on suppose encore que V tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x^* , tend vers x^* (on dit que x est globalement asymptotiquement stable).

Remarque 1.1.4 *Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov.*

1.1.8 Le critère de Routh-Hurwitz

Un point d'équilibre est considéré comme asymptotiquement stable lorsque les valeurs propres de la matrice A ont toutes une partie réelle strictement négative, c'est-à-dire que pour chaque valeur propre $\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Routh-Hurwitz a développé une méthode algébrique basée sur le calcul des déterminants de la matrice de Routh-Hurwitz pour déterminer la stabilité des points d'équilibre.

supposons le système suivant : $\dot{x} = \phi(x)$, sa linéarité est :

$$\dot{x} = Ax. \tag{1.7}$$

Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

L'équation caractéristique :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont :

$$H_1 = |a_1| = a_1.$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}.$$

$$H_j = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & \dots & a_j \end{vmatrix}$$

Proposition 1.1.1 *Dans le cas d'une matrice de dimension n , les termes h_{jk} des déterminants de Routh-Hurwitz sont définis de la manière suivante :*

- $h_{jk} = a_{2j-k}$ pour $0 \leq 2j - k \leq n$.
- $h_{jk} = 1$ pour $2j = k \iff 2j - k = 0$.
- $h_{jk} = 0$ pour $2j < k \iff 2j - k < 0$ ou $2j > n + k \iff 2j - k < n$.

Proposition 1.1.2 *Le point d'équilibre x^* est asymptotiquement stable*

$$\iff \forall \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \iff \forall \operatorname{Re}(H_i) > 0.$$

Théorème 1.1.2 [5](Critère de Routh-Hurwitz)

Soit $p(\lambda)$, un polynôme telle que $a_0 > 0$.

Pour que P soit uniformément asymptotiquement stable, il faut que les déterminants principaux de la matrice de Routh-Hurwitz soient strictement positif.

1.1.9 Critère de Routh-Hurwitz dans \mathbb{R}^3

Soit le système (1.7) tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont :

$$H_1 = |a_1| = a_1.$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3.$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_3H_2.$$

Si : $H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Exemple 1.1.2 [5]

$$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \tag{1.8}$$

La matrice d'Hurwitz est :

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

donc le critère de Routh-Hurwitz est :

$$\begin{cases} H_1 = a_1 > 0, \\ H_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0, \\ H_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 > 0. \end{cases}$$

Ces hypothèses se réduisent donc dans le cas $n = 3$:

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0.$$

Alors le polynôme (1.8) est de racines sont à parties réelles négative.

1.1.10 Attracteur

La région de l'espace des phases vers laquelle converge la trajectoire d'un système dynamique dissipatif est appelée un "attracteur". Les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme d'un système dynamique. Il en existe quatre types différents : un point, un cycle limite, un tore ou avoir une structure encore plus complexe de type fractale.

Définitions 1.1.1 [20] Soit \mathbb{R}^d , $\varphi_{t \in \mathbb{R}}^t$ un système dynamique. Un attracteur A de ce système vérifie les quatre conditions suivantes :

- 1• A est invariant sous l'action du flot : $\varphi_t(A) = A$.
- 2• A est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.
- 3• Il existe une orbite dense sur A .

4• A ne peut pas être décomposé en deux sous-ensembles non triviaux qui soient séparément invariants.

1.1.11 Bassin d'attraction

Définitions 1.1.2 Lorsque A est un attracteur, l'ensemble :

$$B(A) = \{x \in \mathbb{R}^n, \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi_t(x) \in A\} \quad (1.9)$$

est appelé le bassin d'attraction de A . C'est donc, l'ensemble des points pour lesquels les trajectoires convergent asymptotiquement vers A [7].

1.1.12 Bifurcations

Le terme bifurcation est souvent associé à l'idée que le type topologique de la trajectoire d'un système dynamique change lorsqu'un ou plusieurs paramètres dont il dépend changent. C'est un concept très important en mécanique, et l'étude des équations non linéaires selon des paramètres caractéristiques est un classique.

Soit le système dynamique non linéaire de dimension n :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad (1.10)$$

tel que μ est un paramètre de contrôle, et x la solution de ce système

Définitions 1.1.3 [8] Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x du système (1.10) lorsqu'on modifie μ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

Les types de bifurcation

- Bifurcation noeud-col.
- Bifurcation d'échange de stabilité (transcritique)
- Bifurcation fourche.
- Bifurcation Hopf.

1.1.13 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée lorsque le régime asymptotique est atteint.

1.2 Système chaotique

1.2.1 Définition de chaos

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle de chaos. Avant de donner la définition du chaos, à **R.L Devaney**, quelque définition de base sont nécessaire.

Soit $(I \subset \mathbb{R}, d)$ désignant un espace métrique compacte (d est une distance), et soit F la fonction :

$$F : I \rightarrow I, x(k+1) = F(X(k)), x(0) \in I \quad (1.11)$$

Définition 1.2.1 [16] *Supposons que X est un ensemble et Y un sous-ensemble de X , Y est dense dans X si pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x , c'est-à-dire si la fermeture de Y est égale à $X : Y = X$. ce qui revient à dire que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une séquence de point y_n qui converge vers x .*

Définition 1.2.2 *F est dite avoir la propriété de sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x(0) \in I$ et tout $\epsilon > 0$ il existe un point $y(0) \in I$ point et un entier $j \geq 0$ satisfaisant :*

$d(x(0), y(0)) > \epsilon \Rightarrow d(F^{(j)}(x(0)), F^{(j)}(y(0))) > \delta$, où d représente la distance et $F^{(j)}$ la j ème itération de F .

Théorème 1.2.1 (Théorème de Devaney)[17]

soit un sous-ensemble V de I , la fonction $F : I \rightarrow I$ est dit chaotique sur V si :

- i) La fonction F possède une sensibilité aux condition initiales.
- ii) La fonction F est topologiquement transitive, dans le sens que pour toute paire de sous ensemble ouverts $U, V \subset I$, il existe $k > 0$ tel que $F^k(U) \cap V \neq \emptyset$.
- iii) L'ensemble des points périodique de la fonction F sont dense dans I .

Théorème 1.2.2 (Théorème de Li-Yorke)

soit $g : X \rightarrow X$ une application continue sur un espace métrique (X, d) compacte .

On dit que g est chaotique dans le séance de Li et Yorke s'il existe un sous-ensemble dénombrable S de X vérifié les propriétés suivantes :

- 1) $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(g^n(x), g^n(y)) > 0$ pour tout $x, y \in S, x \neq y$.
- 2) $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(g^n(x), g^n(y)) = 0$ pour tout $x, y \in S, x \neq y$.
- 3) $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(g^n(x), g^n(p)) = 0$ pour tout $x \in S, p \in X, p$ périodique.

1.2.2 Définition d'un système chaotique

Un système est dit chaotique si son comportement est irrégulier, désordonné tout en étant déterministe. En particulier, on dira d'un système qu'il est chaotique (dans le temps) si son spectre de puissance comporte une partie continue. Une bande large, indépendamment de la présence éventuelle de quelques raies [10].

1.2.3 Caractéristique de chaos

Il existe un ensemble des propriétés qui résument les caractéristiques observées dans les systèmes chaotiques. Elle sont considères comme des critères mathématiques qui définissent le chaos. les connues sont :

- 1) L'aspect aléatoire.
- 2) Sensibilité aux condition initiales.
- 3) Non-linéarité.
- 4) Déterminisme.

- 5) Attracteurs étrange.
- 6) Exposant de Lyapunov.

L'aspect aléatoire

Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard : aucune structure n'apparaît. Quand le mouvement est chaotique, les points paraissent à première vue aléatoires. Néanmoins, quand on observe le système suffisamment longtemps, on constate que les points dessinent une forme particulière. La figure (1.2) montre l'aspect aléatoire d'un système dynamique chaotique, en occurrence, le système de Lorenz.

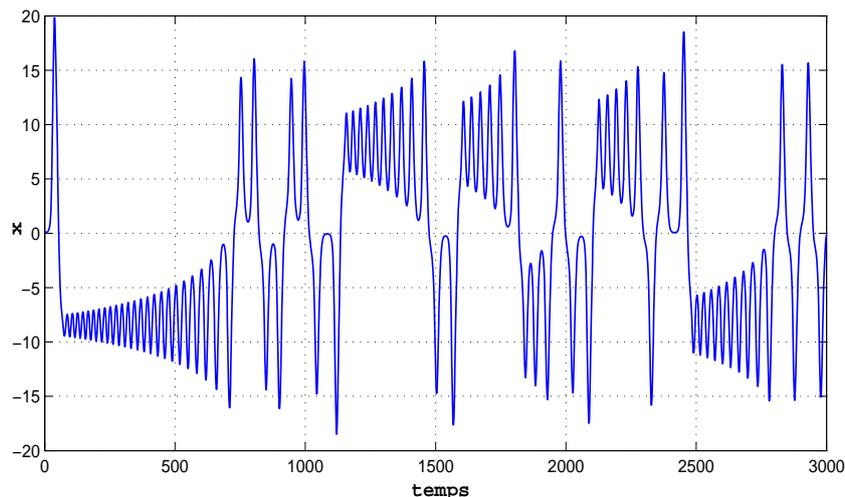


FIGURE 1.2 – *L'aspect aléatoire du système de Lorenz.*

Sensibilité aux condition initiale

L'une des caractéristiques les plus importantes de la théorie du chaos est la sensibilité aux conditions initiales, également appelées "papillon", ce qui signifie que deux conditions initiales arbitrairement proches évoluent selon des chemins (trajectoire) différents et significativement différents, et sur cette base, l'évolution ne peut pas être

prévu à long terme [12].

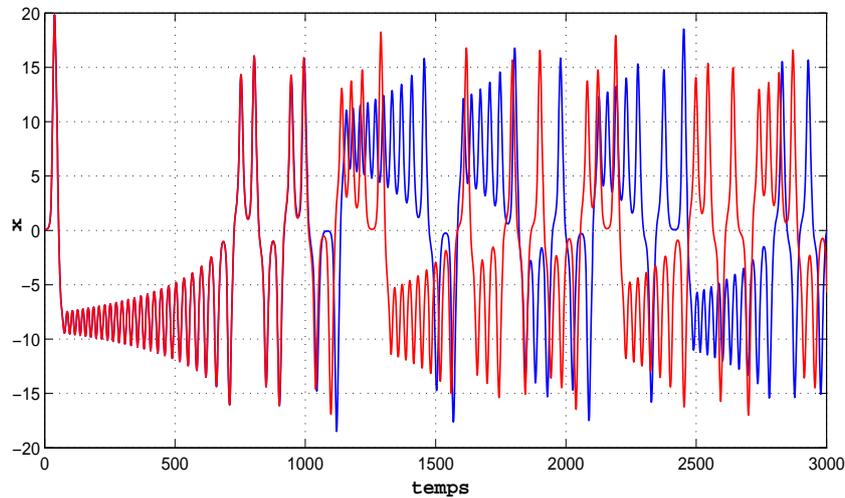


FIGURE 1.3 – *Évolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches.*

Non-linéarité

Pour prévoir des phénomènes réels généraux par les systèmes dynamiques, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effet. Si cette relation est une opération de proportionnelle, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause. En générale un système chaotique est un système dynamique non linéaire, un système linéaire ne peut pas être chaotique.

Déterminisme

Un système chaotique est déterministe (plutôt que probabiliste), c'est-à-dire qu'il soumit à des lois qui décrivent complètement son mouvement. La notion de déterminisme signifie donc la capacité de prédire l'état futur d'un phénomène à partir d'un événement passé. Cependant, dans les phénomènes aléatoires, il est impossible de prévoir les trajectoires d'une quelconque particule.

Attracteur étrange

L'attracteur étrange sont une caractéristique géométrique du chaos. Il n'y a pas de définition stricte d'un attracteur étrange ou chaotique, toutes les définitions trouvées dans la littérature sont restrictives.

Définition 1.2.3 *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de A , c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans R vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans U est entièrement contenue dans U . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.*
- 2) *Les orbites dont le point initial est dans R sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.*
- 3) *A est un objet fractal.*
- 4) *Pour tout point de A , il existe des orbites démarrées dans R qui passent aussi près que l'on veut de ce point.*

Exposant de Lyapunov

L'évolution d'un flot chaotique est difficile à appréhender, parce que la divergence des trajectoire sur l'attracteur est rapide, C'est pour quoi on essaye d'estimer ou même de mesurer la vitesse de divergence ou convergence, cette vitesse s'appelle l'exposant Lyapunov. L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et de permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre des exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases et ils sont généralement indexés du plus grand au plus petit. L'apparition du chaos exige que les exposants de Lyapunov doivent remplir trois conditions :

- Au moins l'un d'eux est positif pour expliquer la divergence des trajectoires.
- Au moins l'un d'eux est négatif pour justifier le repliement des trajectoires.
- La somme de tous les exposants est négative pour expliquer qu'un système chaotique est dissipatif, c'est-à-dire qu'il perd de l'énergie.

La valeur du plus grand exposant de Lyapunov quantifie le degré de chaos du système, mais le fait que les trois conditions énoncées ci dessus soient réunies ne suffit pas à conclure qu'un système est chaotique. Il demeure indispensable de confronter les résultats du calcul des exposants de Lyapunov avec ceux fournis par d'autres outils d'analyse non-linéaire.

1.2.4 Exemples des systèmes chaotiques continus

Modèle de Lorenz

Edward Lorenz, un météorologue, fut le premier à mettre en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Il s'est intéressé au couplage de l'atmosphère avec l'océan, qui est décrit par les équations de Navier-Stokes, un système d'équations aux dérivées partielles couplées de la mécanique des fluides. En 1963, Lorenz a eu l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Ce modèle a joué un rôle historique important, car son évolution temporelle a révélé un comportement chaotique. De plus, il a été le premier et célèbre système différentiel dissipatif à présenter un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres [9].

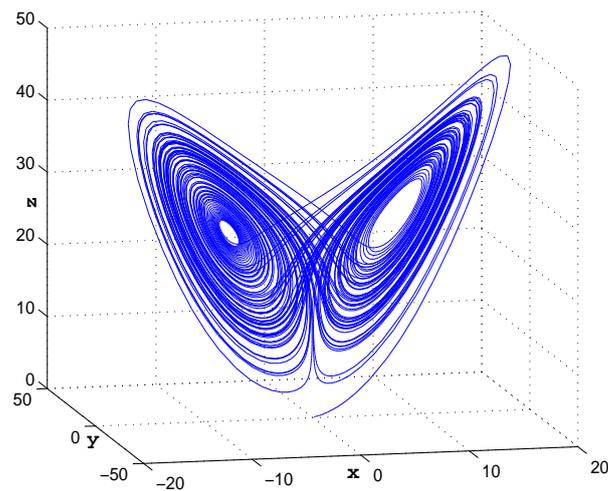


FIGURE 1.4 – L'attracteur étrange de Lorenz

Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielle couplée s'écrit :

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y, z) = a(y - x) \\ y' = f_2(x, y, z) = rx - y - xz = x(r - z) - y \\ z' = f_3(x, y, z) = xy - bz \end{cases} \quad (1.12)$$

l'espace des phases est tridimensionnel. les valeurs de a et b sont fixées tel que :

$$a = 10 \text{ et } b = \frac{8}{3}.$$

x : représente la vitesse.

y : la différence locale de température.

z : la distorsion des profils de température (par rapport au cas linéaire conductif).

a : est proportionnel au nombre de Prandtl.

b : l'élongation de la boîte (la taille du système).

r : le paramètre de contrôle positif. (le nombre de Rayleigh réduit).

Modèle de Rössler

L'attracteur de O.Rössler, découvert en 1974 dans le contexte de la cinétique chimique, est également formulé dans le cadre de la mécanique des fluides. Il est associé à un système d'équations différentielles non linéaires. Ces équations différentielles définissent un système dynamique tridimensionnel à temps continu qui présente une dynamique chaotique. L'ensemble des trajectoires à long terme de ce système forme un attracteur étrange avec des propriétés fractales. Les paramètres réels a, b, et c jouent un rôle important dans la détermination du comportement de cet attracteur [11].

L'article originale de O.Rössler indique que l'attracteur de Rössler était censé se comporter de la même manière que l'attracteur de Lorenz, mais également pour être plus simple à analyser, il ne présente qu'une seule spirale [15]. les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} x' = -y - z = -(y + z) \\ y' = x + ay \\ z' = b - cz + xz = b + z(x - c) \end{cases} \quad (1.13)$$

tel que a, b, c sont des constantes (paramètres de bifurcation).

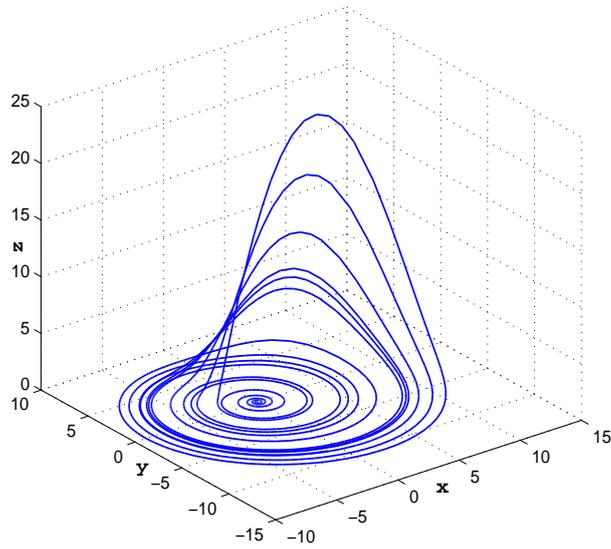


FIGURE 1.5 – *L'attracteur étrange de Rössler*

CHAPITRE 2

SYNCHRONISATION DES SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES

Dans ce chapitre nous allons appréhender la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques.

Les phénomènes de synchronisation ont fait l'objet de discussion dans divers domaines de recherche depuis le 17^{me} siècle.

Dans la littérature, plusieurs concepts de synchronisation des systèmes chaotiques ont été proposés, tout d'abord les travaux de **Yamada** et **Fujiska** (1983) qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite **Afraimovich** et al ont développés concepts importants liés à la synchronisation chaotique. Ultérieurement, **Pecora** et **Carroll** (1990-1993) ont défini la synchronisation chaotiques connu sous le nom de synchronisation identique.

2.1 Systèmes couplés

On dit que deux oscillateurs sont couplés, si l'existence d'une petite perturbation dans l'un des oscillateurs entraîne une perturbation dans l'autre. Cela se traduit physiquement par un transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. Ce type d'accouplement s'appelle en général accouplement mutuel.

2.1.1 Accouplement bidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes chaotiques, présentés par des équations suivantes :

$$\dot{X} = f_1(X, t), \quad (2.1)$$

$$\dot{Y} = f_2(Y, t), \quad (2.2)$$

On dit que les deux systèmes (2.1) et (2.2) sont couplés, si on peut les réécrire sous les formes suivantes :

$$\dot{X} = g_1(X, X, Y, t), \quad (2.3)$$

$$\dot{Y} = g_2(Y, X, Y, t), \quad (2.4)$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions non linéaires, et la première variable de chaque équation représente la variable du système, tandis que la deuxième et la troisième variable sont les résultats de l'effet et d'accouplement. La dernière représentation signifie que chaque système a un acte sur l'autre, c'est la définition de l'accouplement bidirectionnel.

2.1.2 Accouplement unidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes identiques représentés par les deux équations suivantes :

$$\dot{X} = f(X, t), \quad (2.5)$$

$$\dot{Y} = f(Y, t), \quad (2.6)$$

Lorsque l'équation (2.6) va être modifier par l'effet d'accouplement, et si le résultat de cette modification nous donne de nouvelles équation suivantes :

$$\dot{X} = f(X, t), \quad (2.7)$$

$$\dot{Y} = g(Y, X, t), \quad (2.8)$$

tel que $g(Y, X, t) = f(X, t)$, pour $X = Y$, dans ce cas on parle de l'accouplement unidirectionnel. la premier système s'appelle système émetteur (maître) et le deuxième système acte sur le récepteur et le contraire est faux. Il est bien clair que ce type d'accouplement est un cas particulier d'accouplement mutuel. Dans ce travail, on s'intéresse à l'accouplement unidirectionnel.

2.2 Définition de la synchronisation

On a deux définitions, une définition générale et une définition mathématique.

2.2.1 Définition générale de la synchronisation

La synchronisation des interactions est l'une des premières compétences que nous développons, car lorsqu'un bébé répond au sourire de sa mère, il se synchronise simplement avec les expressions du visage de sa mère.

Définition 2.2.1 (de Larousse) *Synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : **Syn** veut dire ensemble et **Chron** veut dire temps. C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.*

Définition 2.2.2 (générale) *La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.*

2.2.2 Définition mathématique de la synchronisation

Après plusieurs tentatives pour définir un mouvement synchronisé Brown et Kocarev ont récemment fourni une définition mathématique de la synchronisation. Pour construire la définition, ils supposent qu'un système dynamique, global, de dimension finie et déterministe est divisible en deux sous-systèmes :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t)) \\ \dot{y} &= g(y(t))\end{aligned}\tag{2.9}$$

où, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Définition 2.2.3 (Brown et Kocarev) *Les sous-systèmes dans les équations précédent sont synchronisés sur la trajectoire de $\varphi(\omega_0)$, par rapport aux propriétés g_x et g_y ; s'il existe un instant indépendant de l'application h tel que $\|h(g_x; g_y)\| = 0$.*

avec le choix de g_x , g_y et h on peut déterminer le type de synchronisation. Cette approche conduit à l'idée qu'il existe des différents types de synchronisation.

Théorème 2.2.1 *Le système maître et le système esclave sont synchronisés si et seulement si tous les exposants de Lyapunov du système esclave, appelés les exposants de Lyapunov conditionnels, sont négatifs.*

2.3 Les types de synchronisation

Dans la littérature il existe plusieurs types de synchronisation citons parmi elles :

2.3.1 Synchronisation Complète

La synchronisation complète entre deux systèmes dynamiques est obtenue grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnelles. C'est la forme de synchronisation la plus simple et la plus couramment observée lorsqu'on étudie deux systèmes.

Définition 2.3.1 *Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques liés par un accouplement unidirectionnel, et représentés par les équations suivantes :*

$$\dot{x} = f(x, t), \dot{y} = g(x, y, t)$$

On dit qu'il ya une synchronisation complète entre ces deux systèmes si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0. \quad (2.10)$$

pour toutes conditions initiales $x(0), y(0)$, des deux systèmes.

- *si $f = g$, la relation devient une synchronisation complète identique.*

D'après cette définition on peut conclure que l'étude de la synchronisation nous ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système qu'on "système erreur", ce dernier est donné par l'équation :

$$e = y - x$$

2.3.2 Synchronisation identique par la méthode de Pecora et Carroll

La technique de base de Pecora et Carroll, peut être décrite comme suit : On considère un système dynamique autonome d'ordre n :

$$\frac{du}{dt} = F(u). \quad (2.11)$$

On divise le système en deux sous-systèmes ($u = (v, w_1)$) :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = G(v, w_1) \\ \frac{dw_1}{dt} = H(v, w_1) \\ \frac{dw_2}{dt} = G(v, w_2), \end{cases}$$

où : $v = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_m)$, $w_1 = (u_{m+1}, u_{m+2}, u_{m+3}, \dots, u_n)$, $G = (F_1, F_2, F_3, \dots, F_m)$ et $H = (F_{m+1}, F_{m+2}, F_{m+3}, \dots, F_n)$. On crée ensuite un nouveau sous-système en w_2 identique au sous système en w_1 . On obtient alors le système de dimension $2n - m$ suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = G(v, w_1) \\ \frac{dw_1}{dt} = H(v, w_1) \\ \frac{dw_2}{dt} = G(v, w_2). \end{cases} \quad (2.12)$$

Le couplage est unidirectionnelle et le sous-système en (v, w_1) est appelé système maître ou système de commande, et le sous-système en w_2 est le système de réponse.

Si la trajectoire $w_2(t)$ converge asymptotiquement vers la trajectoire $w_1(t)$ c'est -à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w_2(t) - w_1(t)\| = 0. \quad (2.13)$$

Les deux sous-systèmes sont dits synchronisés.

Les exposant de Lyapunov du sous-système de réponse w_2 pour une trajectoire particulière $v(t)$ de commande sont appelés exposants de Lyapunov conditionnels.

Pecora et Carroll ont montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-systèmes w_1 et w_2 soient synchronisés est que tous les exposants conditionnels de Lyapunov soient négatifs.

Il existe un nombre fini de décomposition $v - w$, qui est borné par le nombre des sous systèmes différents possibles. En divisant le système principal (2.11) de façon différente, la synchronisation n'aurait peut être pas eu lieu.

En général, seuls quelques sous-systèmes réponses ont des exposants conditionnelles de Lyapunov négatifs et peuvent donc être utilisées pour implémenter les systèmes qui synchronisent afin d'utiliser la méthode de Pecora-Caroll.

Il apparaît que dans certains cas, il n'est pas aussi facile d'utiliser les exposants conditionnels de Lyapunov que certains autres critères.

2.3.3 Synchronisation Décalée

Des chercheurs ont fait une découverte selon laquelle deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent présenter un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un décalage temporel. On dit qu'on a une synchronisation retardée (ou anticipée) si les variables d'état $Y(t)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $X(t)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t - \varepsilon)\| = 0, \forall x(0). \quad (2.14)$$

avec ε un nombre positive très petit.

2.3.4 Synchronisation projective (PS)

on dit qu'on a une **synchronisation projective** si les variables d'état $y_i(t)$ du système chaotique esclave $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$, se synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(t)$ du système chaotique maître $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$, tels que :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - \alpha_i x_i(t)\| = 0, \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.15)$$

-Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète.

-Le cas où tous les α_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti synchronisation complète.

2.3.5 Anti synchronisation

Définition 2.3.2 *On dit que deux systèmes sont en anti-synchronisation, si le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue, mais avec signes opposés, et la somme de ces vecteurs d'état de deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Alors, l'erreur de l'anti-synchronisation est présentée par :*

$$e(t) = Y(t) + X(t). \quad (2.16)$$

2.3.6 Synchronisation généralisée

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents. Elle se caractérise par l'établissement d'une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques couplés. La synchronisation généralisée a été introduite pour des systèmes couplés de manière unidirectionnelle par **Rulkov** et Al en 1995.

Pour définir la **GS**, on considère un couple de systèmes maître-esclave représenté par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x) \\ \dot{y} &= G(y, u(t))\end{aligned}\tag{2.17}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_k(t))$, $u_i(t) = h_i(x(t), x_0)$.

Le premier et le deuxième système sont appelés maître et réponse, respectivement.

Définition 2.3.3 Les deux systèmes de l'équation (2.17) sont dits synchronisés au sens généralisé s'il existe une transformation $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, une variété $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}, y = \psi(x)\}$ et un sous-ensemble $B = B_x \times B_y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, (avec $M \subset B$) tels que pour tout $(x_0, y_0) \in B$, la trajectoire issue des conditions initiales (x_0, y_0) , s'approche de M quand $t \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \psi(x(t))\| = 0, \forall (x_0, y_0) \in B.\tag{2.18}$$

Le principale problème est de savoir quand et sous quelles conditions le système admet de la synchronisation généralisé.

Théorème 2.3.1 La condition nécessaire et suffisante pour que le système précédent synchronise au sens généralisé est que : $\forall u(t) = u(x(t), x_0)$ le système :

$$\dot{y} = G(y, u(t)) = G(y, h(x))$$

est asymptotiquement stable (c'est-à-dire, $\forall y_{10}, y_{20} \in B_y : \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t, x_0, y_0) - y(t, x_0, y_0)\| = 0$).

2.3.7 Synchronisation GPS

La synchronisation notée **GPS** (en anglais : **Generalized Projectiv Synchronization**) signifie que les vecteurs émetteur et récepteur synchronisent jusqu'à un **facteur échelle**, c'est-à-dire que les vecteurs deviennent proportionnels. On considère le système chaotique suivant :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X(t)), \\ \dot{Y} &= G(Y(t)) + U.\end{aligned}\tag{2.19}$$

où $X(t)$ est le vecteur d'état du système maître de dimension n , $Y(t)$ est le vecteur d'état du système esclave de dimension n , F et G sont des champs de vecteurs, $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2.3.4 [25] *Yan et Li pour le système (2.19), on dit qu'il y a une synchronisation GPS, s'il existe une constante h ($h \neq 0$), telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - hY(t)\| = 0$, ainsi la GPS du système (2.19) est atteint, et nous appelons h facteur échelle.*

2.3.8 Synchronisation de phase (PS)

Soit φ_1 et φ_2 les phases des systèmes maître et esclave respectivement. La synchronisation de phase est réalisée si pour deux nombres entiers m et n , il existe un nombre positif très petit ε tel que :

$$|m\varphi_1 - n\varphi_2| < \varepsilon.$$

Le phénomène de synchronisation de phase est totalement différent de ceux présentés précédemment. Généralement, lorsque la synchronisation chaotique est obtenue, les exposants de Lyapunov du système esclave sont tous négatifs. Donc le système esclave est un système non chaotique avec une sortie chaotique. Cependant, dans le cas de la synchronisation de phase, les exposants de Lyapunov peuvent prendre des valeurs positives [18].

2.3.9 Synchronisation FSHP

On dit qu'on a une synchronisation **FSHP** (en anglais **full state hybrid projective synchronization**), si chaque variable d'état $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ du système chaotique

esclave se synchronise avec une combinaison linéaire des variables de l'état $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ du système chaotique maître tel que :

$$\exists (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lim_{t \rightarrow \infty} \left| y_i(t) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j(t) \right| = 0, \forall x(0), y(0), 1 \leq i \leq n. \quad (2.20)$$

La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective.[24]

2.3.10 Synchronisation Q-S

La synchronisation Q-S est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisation précédentes.

S'il existe deux fonctions $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que toutes les trajectoires du système esclave, avec les conditions initiales $X(0)$ et $Y(0)$ vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(Y(t)) - \phi(X(t))\| = 0.$$

Alors, les systèmes maître-esclave se synchronisent.

2.4 Méthodes de synchronisation

2.4.1 Méthode du contrôleur actif

Cette section est consacrée à la méthode de synchronisation des systèmes chaotiques la plus performante : la méthode du contrôleur actif [22]. Soient deux systèmes chaotiques à synchroniser maître et esclave suivants :

$$X_{k+1} = F(X_k), \quad (2.21)$$

$$Y_{k+1} = G(Y_k) + U, \quad (2.22)$$

où $X_k \in \mathbb{R}^n$ et $Y_k \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes (2.21) et (2.22), respectivement, $F; G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un vecteur de contrôle à déterminer. L'erreur de cette

méthode peut être calculée comme suit :

$$e_{k+1} = Ae_k + N(X_k, Y_k) + U, \quad (2.23)$$

où $Ae_k + N(X_k, Y_k) = G(Y_k) - F(x_k)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - N(X_k, Y_k), \quad (2.24)$$

avec V est le contrôleur actif, exprimé par :

$$V = -Le_k$$

où L est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$e_{k+1} = (A - L)e_k \quad (2.25)$$

Théorème 2.4.1 *Les systèmes (2.21) et (2.22) sont globalement synchronisés sous le loi de contrôle (2.24) si seulement si L est choisit de telle façon que les valeurs propres de $A - L$ soient à l'intérieur du disque unité.*

2.4.2 Méthode de backstepping

La méthode du backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception de contrôleur nécessaire. En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.26)$$

et

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= f_1(y_1, y_2), \\
 \dot{y}_2 &= f_2(y_1, y_2, y_3), \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 \dot{y}_n &= f_n(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) + u
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

d'où f_1 est une fonction linéaire, f_i , ($i=2,3,\dots,n$), sont des fonction non-linéaires et u est le contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes (2.26) et (2.27). L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 e_1 &= y_1 - x_1, \\
 e_2 &= y_2 - x_2, \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 e_n &= y_n - x_n
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= g_1(e_1, e_2), \\
 \dot{e}_2 &= g_2(e_1, e_2, e_3), \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 \dot{e}_n &= g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + u
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

d'où g_1 est une fonction linéaire, et g_i , ($i = 2,3, \dots, n$), sont des fonctions non-linéaire. L'objectif est de calculer une loi de contrôle u qui assure la convergence du système e_i , ($i = 1,2,3, \dots, n$) vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela, le système d'erreur (2.29) doit être décomposé en sous système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n),$$

et pour chaque sous système on définit une fonction de Lyapunov V positive :

$$V_j(e_j, u_j, \alpha_j) \tag{2.30}$$

d'où j est l'ordre du sous-système, u_j, α_j représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre j , u_j et α_j sont calculés à chaque fois de telle sorte que $\dot{V}_j < 0$

Remarques 2.4.1 *Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :*

- Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur.
- Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.
- Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.
- Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.

2.4.3 Méthode du mode glissant

Dans la théorie du contrôle robuste, la méthode du mode glissant est souvent pratiquée en raison de ses avantages inhérents, telles que la réalisation facile, la réponse rapide et une bonne performance transitoire ainsi que sa sensibilité aux incertitudes des paramètres et des perturbations externes [23]. Soient les systèmes maître et esclave donnés par les formes suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) \tag{2.31}$$

et

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u \tag{2.32}$$

d'où $x(k) \in \mathbb{R}^n, y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice constante, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non-linéaire et $u \in \mathbb{R}^n$ est un contrôleur à déterminer. L'erreur entre le système maître (2.31) et le système esclave (2.32) est définie par $e = y - x$. La dynamique de l'erreur peut s'écrire comme

suit :

$$\dot{e} = Ae + \eta(x, y) + u \quad (2.33)$$

d'où $\eta(y, x) = f(y(t)) - f(x(t))$. Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur (2.33), la loi de contrôle u est choisie comme suit :

$$u = Bv - \eta(x, y) \quad (2.34)$$

d'où v c'est le contrôleur actif et B un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple (A, B) soit contrôlable. En substituant (2.34) dans (2.33), la dynamique de l'erreur simplifiée comme suit :

$$\dot{e} = Ae + Bv \quad (2.35)$$

Ainsi, le problème de synchronisation peut être remplacé par un équivalent problème de la stabilisation de la solution $e = 0$ du système (2.35) par un choix approprié du contrôleur en mode glissant. Dans la méthode du mode glissant, nous définissons la surface de glissement s , comme suit :

$$s(e) = Ce = \sum_{j=1}^n c_j e_j \quad (2.36)$$

d'où C : est un vecteur constant à déterminer, et le système contrôlé doit satisfaire : $s(e) = 0, \dot{s}(e) = 0$. Alors, on peut écrire :

$$\dot{s}(e) = C(Ae + Bv) = 0 \quad (2.37)$$

donc le contrôleur v est donné par :

$$v = -(CB)^{-1}CAe$$

d'où C est choisi de telle sorte que $CB \neq 0$. L'existence de $(CB)^{-1}$ est une condition nécessaire. La nouvelle forme de l'erreur de synchronisation est donnée par :

$$\dot{e} = [I - B(CB)^{-1}]CAe \quad (2.38)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique du système contrôlé, le vecteur C doit être choisi de telle sorte que les parties réelles des valeurs propres de la matrice $[I - B(CB)^{-1}]CA$ soient toutes négatives. Le contrôleur en mode glissant est proposé de la forme :

$$\dot{s} = -qsgn(s) - ks \quad (2.39)$$

d'où $sgn(\cdot)$ est la fonction signe, et $q, k > 0$, sont des constantes. Dans ce cas, le contrôleur v est donnée par :

$$v = -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + qsgn(s)] \quad (2.40)$$

ce qui est équivalent à :

$$v = \begin{cases} -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + qsgn(s)], & \text{si } s(e) > 0. \\ -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + qsgn(s)], & \text{si } s(e) < 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Théorème 2.4.2 *Le système maître (2.31) et le système esclave (2.32) sont globalement synchronisés par le contrôleur*

$$u = Bv - \eta(x, y), \quad (2.42)$$

d'où v est défini par (2.40), (A, B) soit contrôlable et $q, k > 0$.

Preuve : Pour observer la zero-stabilité de la dynamique de l'erreur de synchronisation, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{s^2}{2}$$

d'où

$$\dot{V} = -ks - qsgn(s)s$$

puisque $\text{sgn}(s)$ est toujours positive tant que $e \neq 0$ et $k, q > 0$; Alors $\dot{V} < 0$. Ainsi, par la théorie de la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que la dynamique d'erreur (2.32) est globalement asymptotiquement zéro-stable. Par conséquent, il en résulte que le système maître (2.31) et le système esclave (2.32) sont globalement synchronisés.

CHAPITRE 3

SYNCHRONISATION HYBRIDE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES

3.1 Définition de la synchronisation hybride

Dans cette partie, nous allons souligner le concept principal de synchronisation hybride [26]. Considérons le systèmes maître-esclave suivante :

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.1}$$

$$\dot{y} = f(t, y) + U(t, x, y) \tag{3.2}$$

où $x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les valeurs d'état de dimension n , des systèmes maître et esclave respectivement.

$f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs non linéaires des fonctions continues.

$U(t, x, y)$ est le vecteur de commande.

- Le vecteurs d'erreur est défini par la relation :

$$e(t) = y(t) - Jx(t) \quad (3.3)$$

où J est une matrice diagonale constante.

Les systèmes maître et esclave sont prête pour la synchronisation hybride, s'il ya un contrôleur, tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y) - Jx(t)\| = 0$$

est satisfaite pour des conditions initiales arbitraire $x(0)$ et $y(0)$.

pour une synchronisation hybride $(1, -1, 1)$, c'est-à-dire une synchronisation où les états pairs seraient anti-synchronisés et les états impaires synchronisés.

3.2 Application de la synchronisation hybride

3.2.1 La synchronisation hybride entre le système de Lü modifié et le système de Zeraoulia

On considère le système Lü est le système maître, défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \alpha_2x_2 - x_3x_2 \\ \dot{x}_3 = \exp(x_1x_2) - \alpha_3x_3 \end{cases} \quad (3.4)$$

x_1, x_2, x_3 représentent les variables d'état et $\alpha_i, (i = 1, 2, 3)$ représente les paramètres inconnus du système. Ce système peut osciller de façon chaotique pour les valeurs des paramètres : $\alpha_1 = 33, \alpha_2 = 19.5, \alpha_3 = 8$.

Soit le système de Zeraoulia est le système esclave défini par les équations dynamiques

suivante :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \beta_1(y_2 - y_1) + y_2 y_3 + u_1 \\ \dot{y}_2 = \beta_2 y_2 - y_1 y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - \beta_3 y_3 + u_3 \end{cases} \quad (3.5)$$

y_1, y_2, y_3 représentent les variables d'état et $\beta_i, (i = 1, 2, 3)$ représente les paramètres inconnus du système, lorsque les paramètres $\beta_1 = 36, \beta_2 = 25, \beta_3 = 3$ le système est chaotique. Où $u(t) = [u_1, u_2, u_3]^T$ représente le contrôleur à concevoir pour que les états impairs des deux systèmes se synchronisent et les états pairs s'anti-synchronisent [3].

Les états des erreurs dans ce cas sont définis comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1 \\ e_2 = y_2 + x_2 \\ e_3 = y_3 - x_3 \end{cases} \quad (3.6)$$

i.e : que la première et la troisième état des deux systèmes doivent être synchronisé alors que la deuxième état des deux systèmes doivent être anti-synchronisé.

Le système dynamique de l'erreur est obtenu en soustrayant le système (3.4) du système (3.5), tel que :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\beta_1 e_1 + \beta_1(y_2 - x_1) + y_2 y_3 - \alpha_1(x_2 - x_1) + u_1 \\ \dot{e}_2 = \beta_2 e_2 - \beta_2 x_2 - y_1 y_3 - \alpha_2 x_2 + x_3 x_1 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -\beta_3 e_3 - \beta_3 x_3 + y_1 y_2 - \exp(x_1 x_2) + \alpha_2 x_3 + u_3 \end{cases} \quad (3.7)$$

Nous considérons le contrôleur non linéaire actif défini par :

$$\begin{cases} u_1 = -\beta_1(y_2 - x_1) - y_2 y_3 + \alpha_1(x_2 - x_1) \\ u_2 = -\beta_2 x_2 - y_1 y_3 - \alpha_2 x_2 + x_3 x_1 - \beta_2 x_2 - 2\beta_2 y_2 \\ u_3 = \beta_3 x_3 - y_1 y_2 + \exp(x_1 x_2) - \alpha_2 x_3 \end{cases} \quad (3.8)$$

On substituant (3.8) dans (3.7) on trouve :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\beta_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = -\beta_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -\beta_3 e_3 \end{cases} \quad (3.9)$$

En considérant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2} e^T e = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (3.10)$$

qui est une fonction définie positive sur \mathbb{R}^3 et en différenciant (3.8) le long de trajectoire (3.7) nous obtenons

$$\dot{V}(e) = -\beta_1 e_1^2 - \beta_2 e_2^2 - \beta_3 e_3^2 \quad (3.11)$$

une fonction définie sur \mathbb{R}^3 ce qui vérifie la théorie de la stabilité de Lyapunov et assure que la dynamique de l'erreur est globalement stable.

Simulation numérique

Dans la simulation numérique, la méthode d'intégration de Rung-Kutta d'ordre 4 est utilisée pour résoudre les système (3.4) et (3.5) avec un pas du temps 0.01, on choisit les conditions initiale des variables d'états suivantes : $x(0) = (5, -1, -4)^T$, $y(0) = (-5, 2, 1)^T$.

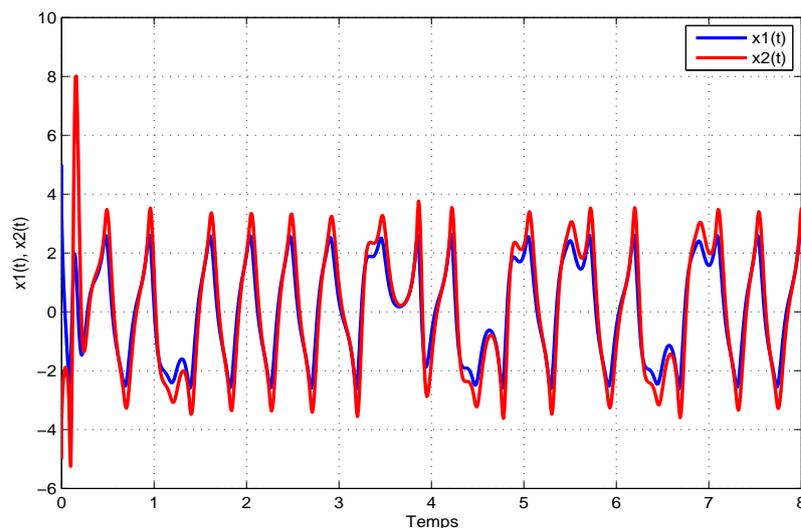


FIGURE 3.1 – Évolution des trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour les systèmes (3.4) et (3.5).

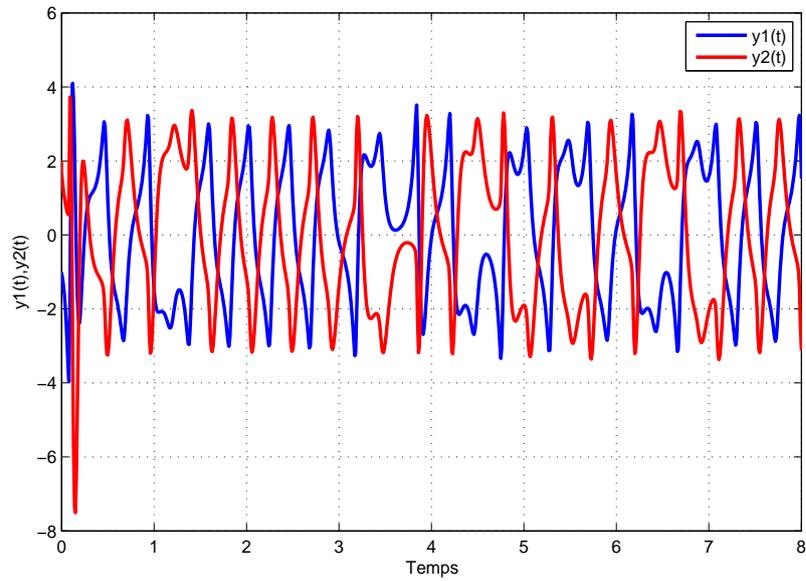


FIGURE 3.2 – Évolution des trajectoires $y_1(t)$ et $y_2(t)$ pour les systèmes (3.4) et (3.5).

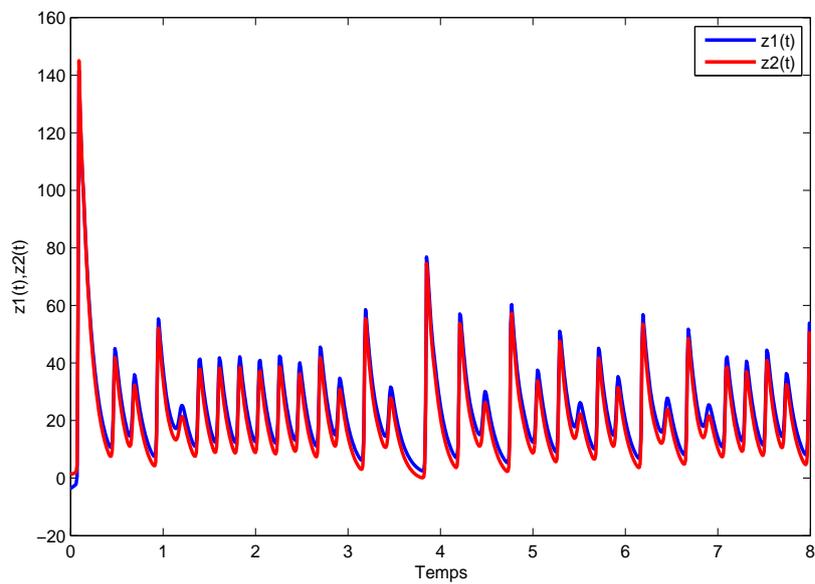


FIGURE 3.3 – Évolution des trajectoires $z_1(t)$ et $z_2(t)$ pour les systèmes (3.4) et (3.5).

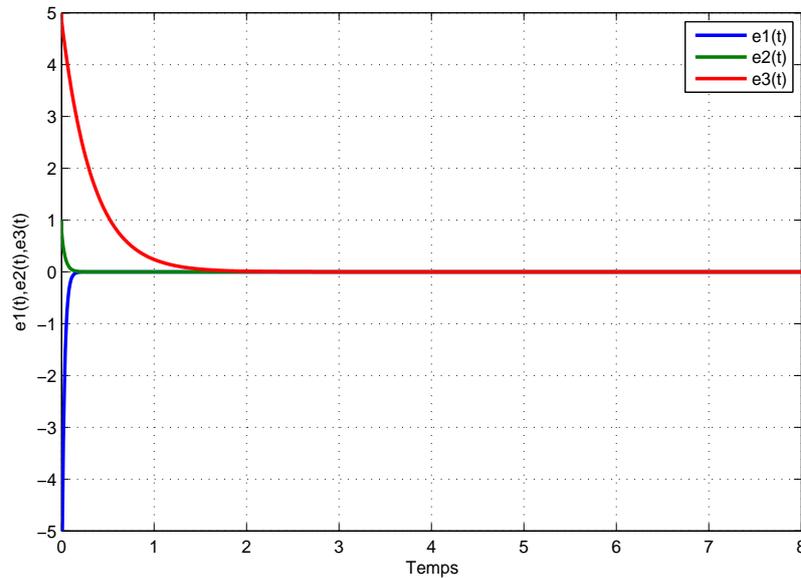


FIGURE 3.4 – Évolution des erreurs $e_1(t)$ et $e_2(t)$ de la synchronisation hybride pour les systèmes (3.4) et (3.5).

3.2.2 La synchronisation hybride entre le système de Rössler et le nouveau système

Dans cet exemple, le système de "Rössler" est choisi comme système maître et "le nouveau système" comme système esclave.

Le système de Rössler donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = \alpha_2 + x_3(x_1 - \alpha_3) \end{cases} \quad (3.12)$$

où (x_1, x_2, x_3) sont les variables d'états, α_i ($i=1, 2, 3$) représente les paramètres inconnus du système maître.

Ce système peut osciller de façon chaotique pour les valeurs des paramètres : $\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.64$ et $\alpha_3 = 5.25$ [27].

Et le nouveau système donné par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\beta_1 y_1^3 + \beta_2 y_2^3 + \beta_3 y_1 y_3^2 + u_1 \\ \dot{y}_2 = \beta_4 \sin(y_1 y_2 - y_3) - \beta_5 y_1^3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = \beta_6 \sin(y_1 y_2 y_3) + \beta_7 \sin(y_1) + u_3 \end{cases} \quad (3.13)$$

où (y_1, y_2, y_3) sont les variables d'états, β_j ($j=1, \dots, 7$) représente les paramètres inconnus du système esclave, lorsque les paramètres $\beta_1 = 3.964, \beta_2 = 7, \beta_3 = 7, \beta_4 = 5, \beta_5 = 4.5, \beta_6 = 2.9$ et $\beta_7 = 1$ le système est chaotique [28].

Comme la partie précédent, on considère une synchronisation hybride où les états impairs de deux systèmes se synchronisent et les états pairs d'anti synchronisent. Donc les erreurs de synchronisation définies comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1 \\ e_2 = y_2 + x_2 \\ e_3 = y_3 - x_3 \end{cases} \quad (3.14)$$

Et leurs dynamique est :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\beta_1 y_1^3 + \beta_2 y_2^3 + \beta_3 y_1 y_3^2 + x_2 + x_3 + u_1 \\ \dot{e}_2 = \beta_4 \sin(y_1 y_2 - y_3) - \beta_5 y_1^3 + x_1 + \alpha_1 x_2 + u_2 \\ \dot{e}_3 = \beta_6 \sin(y_1 y_2 y_3) + \beta_7 \sin(y_1) - \alpha_1 - x_3(x_1 - \alpha_3) + u_3 \end{cases} \quad (3.15)$$

Nous considérons le contrôleur non linéaire actif par :

$$\begin{cases} u_1 = \beta_1 y_1^3 - \beta_2 y_2^3 - \beta_3 y_1 y_3^2 - x_2 - x_3 - e_1 \\ u_2 = -\beta_4 \sin(y_1 y_2 - y_3) + \beta_5 y_1^3 - x_1 - \alpha_1 x_2 - e_2 \\ u_3 = -\beta_6 \sin(y_1 y_2 y_3) - \beta_7 \sin(y_1) + \alpha_2 + x_3(x_1 - \alpha_3) - e_3 \end{cases} \quad (3.16)$$

On substituant (3.16) dans (3.15) on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_1 \\ \dot{e}_2 = -e_2 \\ \dot{e}_3 = -e_3 \end{cases} \quad (3.17)$$

Donc en choisissant la fonction de Lyapunov sous la forme :

$$V(x) = \frac{1}{2}e^T e = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (3.18)$$

qui est une fonction définie positive sur \mathbb{R}^3 .

Sa dérivée est :

$$V(\dot{e}) = -e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 \quad (3.19)$$

est une fonction définie négative sur \mathbb{R}^3 vérifiée la théorie de la stabilité de Lyapunov, donc l'erreur est globalement stable.

Simulation

Dans la simulation numérique, la méthode d'intégration de Rung-Kutta d'ordre 4 est utilisée pour résoudre les système (3.12) et (3.13) avec un pas du temps 0.01, on choisit les conditions initiale des variables d'états suivantes : $x(0) = (-1, 0, 1)^T$, $y(0) = (-1, -1, -1)^T$

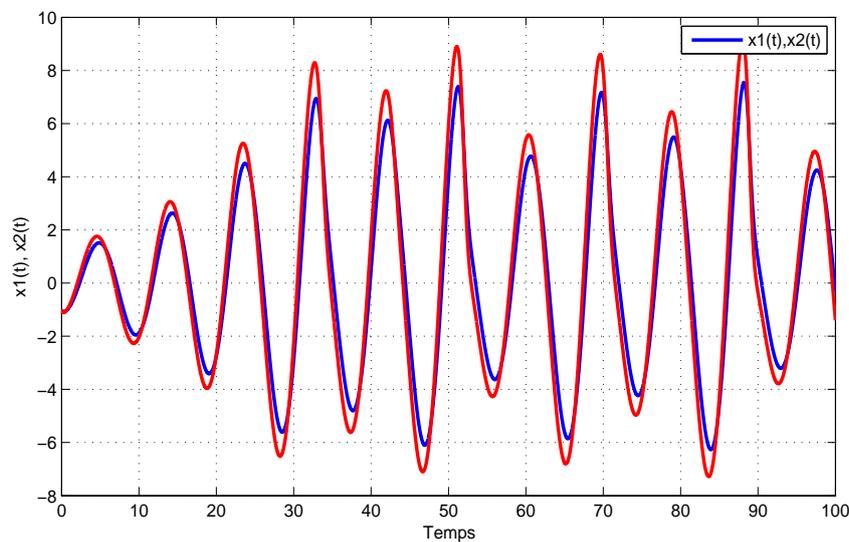


FIGURE 3.5 – Évolution des trajectoires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour les systèmes (3.12) et (3.13).

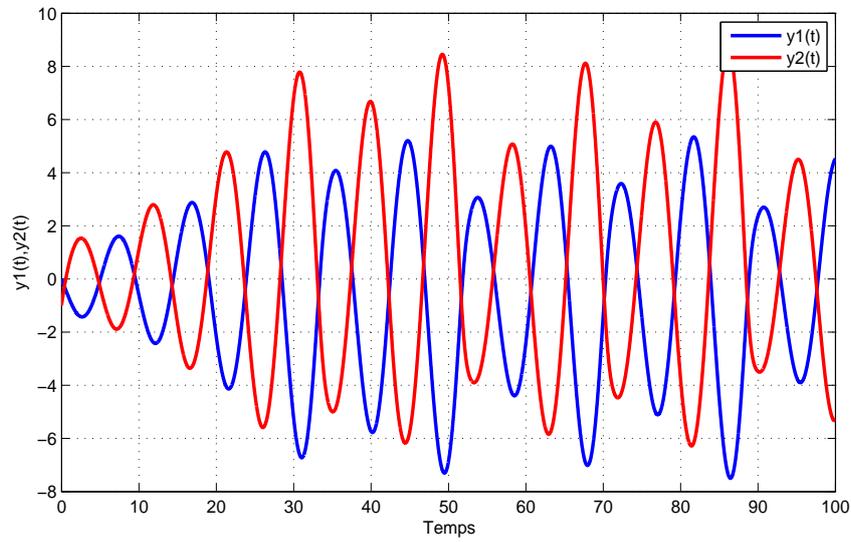


FIGURE 3.6 – Évolution des trajectoires $y_1(t)$ et $y_2(t)$ pour les systèmes (3.12) et (3.13).

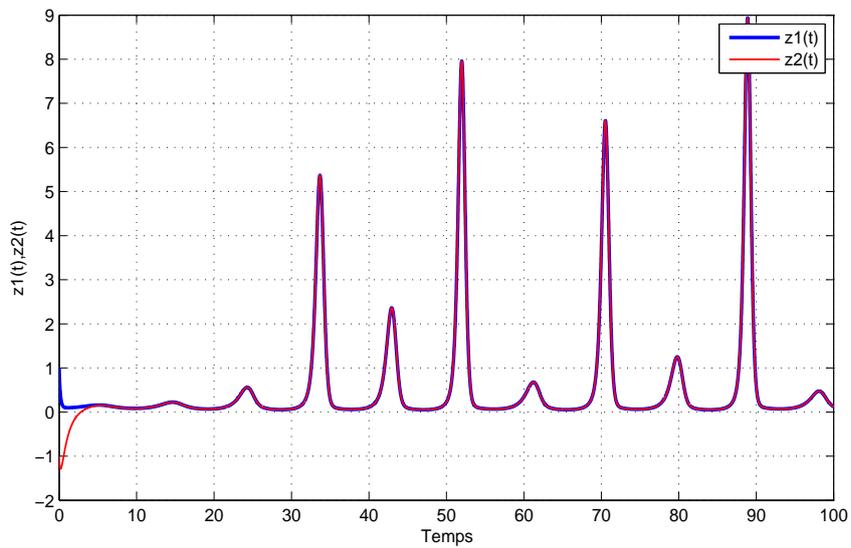


FIGURE 3.7 – Évolution des trajectoires $z_1(t)$ et $z_2(t)$ pour les systèmes (3.12) et (3.13).

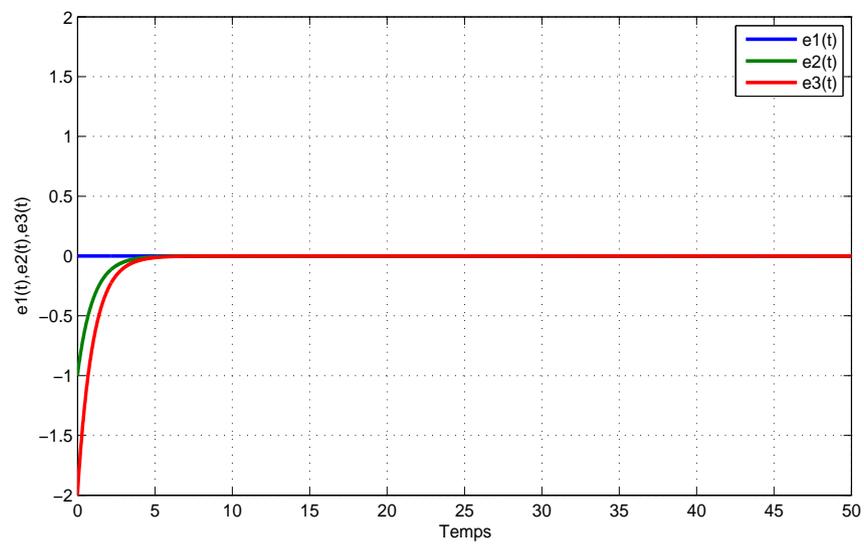


FIGURE 3.8 – Évolution des erreurs $e_1(t)$ et $e_2(t)$ de la synchronisation hybride pour les systèmes (3.12) et (3.13).

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce mémoire à été consacré à l'étude de synchronisation hybride des systèmes dynamiques chaotiques. Pour atteindre nos objectifs, nous avons organisé notre travail en trois chapitres : le premier chapitre présente les notions principales sur les systèmes dynamiques chaotiques et ses caractéristiques, et quelques exemples sur les systèmes dynamiques continue (Rössler et Lorenz).

Le deuxième chapitre nous avons présenté la théorie de synchronisation, puis abordé à leurs types et leur méthodes les plus utilisée.

Le dernier chapitre est réservé à la synchronisation hybride entre deux systèmes chaotiques par la méthode de contrôle non linéaire actif.

La simulation numériques et les schémas de la synchronisation hybride que nous avons faite par la méthode de **Runge-kutta** quatrième ordre avec une programmation en **MATLAB**.

ANNEXE

Programme en MATLAB pour la synchronisation hybride de deux systèmes Lü et Zeraoulia :

```
clear all
close all
a1=33; a2=19; a3=8;
b1=36; b2=25; b3=3;
h=0.01;
max=100;
x(1)=5; y(1)=-1; z(1)=-4;
u(1)=-5; v(1)=2; w(1)=1;
e1(1)= u(1)- x(1);
e2(1)= v(1)+ y(1);
e3(1)= w(1)- z(1);
tps(1)=0;
k=1;
for i=0 :h :max;
k=k+1;
dx1 = a1 * y(k - 1) - a1 * x(k - 1);
dy1 = a2 * y(k - 1) - z(k - 1) * x(k - 1);
```

$$\begin{aligned}
 dz1 &= \exp(x(k-1) * y(k-1)) - a3 * z(k-1); \\
 du1 &= b1 * v(k-1) - b1 * u(k-1) + v(k-1) * w(k-1) - b1 * v(k-1) + b1 * x(k-1) - v(k-1) * w(k-1) + a1 * y(k-1) - a1 * x(k-1); \\
 dv1 &= b2 * v(k-1) - u(k-1) * w(k-1) + b2 * y(k-1) + u(k-1) * w(k-1) + a2 * y(k-1) - z(k-1) * x(k-1) - b2 * y(k-1); \\
 dw1 &= u(k-1) * v(k-1) - b3 * w(k-1) - u(k-1) * v(k-1) + \exp(x(k-1) * y(k-1)) - a3 * z(k-1); \\
 de11 &= -b1 * e1(k-1); \\
 de21 &= -b2 * e2(k-1); \\
 de31 &= -b3 * e3(k-1); \\
 x2 &= x(k-1) + h * dx1/2; \\
 y2 &= y(k-1) + h * dy1/2; \\
 z2 &= z(k-1) + h * dz1/2; \\
 u2 &= u(k-1) + h * du1/2; \\
 v2 &= v(k-1) + h * dv1/2; \\
 w2 &= w(k-1) + h * dw1/2; \\
 e12 &= e1(k-1) + h * de11/2; \\
 e22 &= e2(k-1) + h * de21/2; \\
 e32 &= e3(k-1) + h * de31/2; \\
 dx2 &= a1 * y2 - a1 * x2; \\
 dy2 &= a2 * y2 - z2 * x2; \\
 dz2 &= \exp(x2 * y2) - a3 * z2; \\
 du2 &= b1 * v2 - b1 * u2 + v2 * w2 - b1(v2 - x2) - v2 * w2 + a1 * y2 - a1 * x2; \\
 dv2 &= b2 * v2 - u2 * w2 + b2 * y2 + u2 * w2 + a2 * y2 - z2 * y2 - 2 * b2 * (v2 + y2); \\
 dw2 &= u2 * v2 - b3 * w2 - u2 * v2 + \exp(x2 * y2) - a3 * z2; \\
 de12 &= -b1 * e12; \\
 de22 &= -b2 * e22; \\
 de32 &= -b3 * e32; \\
 x3 &= x(k-1) + h * dx2/2; \\
 y3 &= y(k-1) + h * dy2/2; \\
 z3 &= z(k-1) + h * dz2/2;
 \end{aligned}$$

$$u_3 = u(k-1) + h * du_2/2;$$

$$v_3 = v(k-1) + h * dv_2/2;$$

$$w_3 = w(k-1) + h * dw_2/2;$$

$$e_{13} = e_1(k-1) + h * de_{12}/2;$$

$$e_{23} = e_2(k-1) + h * de_{22}/2;$$

$$e_{33} = e_3(k-1) + h * de_{32}/2;$$

$$dx_3 = a_1 * y_3 - a_1 * x_3;$$

$$dy_3 = a_2 * y_3 - z_3 * x_3;$$

$$dz_3 = \exp(x_3 * y_3) - a_3 * z_3;$$

$$du_3 = b_1 * v_3 - b_1 * u_3 + v_3 * w_3 - b_1(v_3 - x_3) - v_3 * w_3 + a_1 * y_3 - a_1 * x_3;$$

$$dv_3 = b_2 * v_3 - u_3 * w_3 + b_2 * y_3 + u_3 * w_3 + a_2 * y_3 - z_3 * y_3 - 2 * b_2 * (v_3 + y_3);$$

$$dw_3 = u_3 * v_3 - b_3 * w_3 - u_3 * v_3 + \exp(x_3 * y_3) - a_3 * z_3;$$

$$de_{13} = -b_1 * e_{13};$$

$$de_{23} = -b_2 * e_{23};$$

$$de_{33} = -b_3 * e_{33};$$

$$x_4 = x(k-1) + h * dx_3/2;$$

$$y_4 = y(k-1) + h * dy_3/2;$$

$$z_4 = z(k-1) + h * dz_3/2;$$

$$u_4 = u(k-1) + h * du_3/2;$$

$$v_4 = v(k-1) + h * dv_3/2;$$

$$w_4 = w(k-1) + h * dw_3/2;$$

$$e_{14} = e_1(k-1) + h * de_{13}/2;$$

$$e_{24} = e_2(k-1) + h * de_{23}/2;$$

$$e_{34} = e_3(k-1) + h * de_{33}/2;$$

$$dx_4 = a_1 * y_4 - a_1 * x_4;$$

$$dy_4 = a_2 * y_4 - z_3 * x_4;$$

$$dz_4 = \exp(x_4 * y_4) - a_3 * z_4;$$

$$du_4 = b_1 * v_4 - b_1 * u_4 + v_4 * w_4 - b_1(v_4 - x_4) - v_4 * w_3 + a_1 * y_4 - a_1 * x_4;$$

$$dv_4 = b_2 * v_4 - u_4 * w_4 + b_2 * y_4 + u_4 * w_4 + a_2 * y_4 - z_4 * y_4 - 2 * b_2 * (v_4 + y_4);$$

$$dw_4 = u_4 * v_4 - b_3 * w_4 - u_4 * v_4 + \exp(x_4 * y_4) - a_3 * z_4;$$

```
de14 = -b1 * e14 ;
de24 = -b2 * e24 ;
de33 = -b3 * e34 ;
x(k) = x(k - 1) + h * (dx1/6 + dx2/3 + dx3/3 + dx4/6) ;
y(k) = y(k - 1) + h * (dy1/6 + dy2/3 + dy3/3 + dy4/6) ;
z(k) = z(k - 1) + h * (dz1/6 + dz2/3 + dz3/3 + dz4/6) ;
u(k) = u(k - 1) + h * (du1/6 + du2/3 + du3/3 + du4/6) ;
v(k) = v(k - 1) + h * (dv1/6 + dv2/3 + dv3/3 + dv4/6) ;
w(k) = w(k - 1) + h * (dw1/6 + dw2/3 + dw3/3 + dw4/6) ;
e1(k) = e1(k - 1) + h * (de11/6 + de12/3 + de13/3 + de14/6) ;
e2(k) = e2(k - 1) + h * (de21/6 + de22/3 + de23/3 + de24/6) ;
e3(k) = e3(k - 1) + h * (de31/6 + de32/3 + dz33/3 + de34/6) ;
tps(k)=i ;
end
plot(tps,x,tps,w,'r')
xlabel('Temps')
ylabel('x1(t),x2(t)')
legend('x1(t)';'x2(t)')
disp(' ?presez la touche espace pour continue ?')
pause
plot(tps,y,tps,v,'r')
ylabel('y1(t),y2(t)')
legend('y1(t)';'y2(t)')
disp('presez la touche espace pour continue')
pause
plot(tps,z,tps,u,'r')
xlabel('Temps')
ylabel('z1(t),z2(t)')
legend('z1(t)';'z2(t)')
disp('presez la touche espace pour continue')
```

```
pause  
plot(tps,e1,tps,e2,tps,e3)  
xlabel('Temps')  
ylabel('e1(t),e2(t),e3(t)')  
legend('e1(t)','e2(t)';'e3(t)')  
disp('presez')  
pause
```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Roumir et R. Kahoul, *modélisation et identification hybrid des systèmes dynamiques en utilisant la logique floue type 1 et l'algorithme d'optimisation PSO*, Mémoire de Master, Université Mohamed Boudiaf M'sila, M'sila 2021.
- [2] A. Senouci, *Systèmes dynamiques chaotiques et synchronisation*, Thèse de doctorat université Mohamed khider, Biskra, (2020).
- [3] R. Ouahabi, *Système dynamiques et chaos : différentes méthodes de contrôle et de synchronisation*, Thèse de doctorat Université Mentouri-Constantine 1, Constantine, (2018).
- [4] A. Gassri, *chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques*, Thèse de doctorat Université Mentouri-Constantine 1, Constantine, (2018).
- [5] W. Laouira, *contrôle des Systèmes dynamiques chaotiques*, Thèse doctorat de l'Université de Constantine 1, Constantine, (2018).
- [6] W.Laouira, N. Hamri Feedback, Control of Chaotic Systems by Using Jacobianv Matrix Conditions Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 18(3) (2018), 285-296.
- [7] S. Kaouache, *Synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques : Application à la sécurisation des communications*, Thèse de doctorat université des frères Constantine, Constantine,(2020).

- [8] A. Mehazzem, *Etude des bifurcations et chaos dans quelques systèmes spatio-temporels discrets*, thèse de doctorat, Université Larbi Tébessi de Tébessa, Tébessa, (2022).
- [9] X. Y. Wang, J. M. Song, *Synchronization of the fractional order hyperchaos Lorenz Systems with activation control*. *Commun. Nonlinear Sci, Numer, Simul.* 14(8) (2009), 3351-3357.
- [10] F. Marie-Noëlle, *Etude de la nature chaotique du comportement ventilatoire*, thèse de doctorat de l'université paris VI, Paris, (2006).
- [11] G. V. Osipov, A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, Kurths. J. *Phase synchronization effect in a lattice of nonidentical Rössler oscillators* *Phys.Rev.E*, 55(3) (1997), 258-269.
- [12] A. Djaout, *Analyse et application des systèmes discrets à Dynamiques chaotiques*, thèse de doctorat Université des frères Mentouri Constantine1, Constantine, (2022).
- [13] O. Megherbi, *Synchronisation des systèmes chaotiques discrets d'ordre fractionnaire pour la sûreté de communication à base d'observateurs impulsifs*, thèse de doctorat Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, (2018)
- [14] A. El Jaï, E. Zerrik, K. Ztot, *Systèmes dynamiques. Analyse et contrôle des systèmes localisés*, Universitaire de perpignan, (2008).
- [15] S. Kaouache, M.S Abdelouahab, *Modifed projective synchronization between integer order and fractional order hyperchaotic systems* *jour. of Adv. Research in Dynamical and Control Systems* 10(5) (2018), 96-104.
- [16] A. Ouannas, *Sur La Synchronisation des Systèmes chaotiques discrets*, thèse de doctorat, Université Frères Mentouri à Constantine, Constantine, (2015).
- [17] M. Labid, *Contrôle et synchronisation de quelques types de systèmes dynamiques chaotiques*, thèse de doctorat, Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila, Mila, (2021).
- [18] I. Ameer, *Synchronisation, chaotification et hyperchaotification des Systèmes Non-linéaires : Méthodes et Applications*, thèse de doctorat, université constantine 1, constantine, (2011).
- [19] T. Menacer, *Synchronisation des systèmes dynamique chaotiques à dérivées fractionnaires*, thèse de doctorat, université constantine 1, constantine, (2014).

- [20] T. Hamaizia, *Systemes Dynamiques et Chaos "Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique*, thèse de doctora, université constantine 1, constantine, (2013).
- [21] L. Guessas , *Backstepping adaptatif pour le contrôle la poursuite et la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques*, thèse de doctorat, Université Ferhat ABBAS, Sétif, setif, (2012).
- [22] L. Jouini, *Quantification et synchronisation du chaos dans les systèmes dynamiques discrets*, thèse de doctorat, Université Laarbi Tebessi, Tébessa,(2021).
- [23] B. El Hafsi, *Sur le chaos et synchronisation dans les système dynamiques discrets*,thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, (2017).
- [24] Z. Chougui, *Quelque shémas de synchronisation chaotique dans les systèmes dynamiques fractionnaires*, thèse de doctorat, Université Laarbi Tebessi, Tébessa,(2021).
- [25] J.Yan, C. Li, *Generalized projective synchronization of unified chaotic system. Chaos, Solitons and Fractals*, 4(26) (2005), 1119-1124.
- [26] Z. Driss, *Contribution à l'Implémentation de Nouvelles Approches de Synchronisation Hybride des Systèmes Chaotiques à Paramètres Incertains*, thèse de doctorat, université constantine 1, constantine, 2017.
- [27] A. Karimov, A. Tutueva, T. Karimov, O. Druzhina, D. Butusov, *Adaptive Generalized Synchronization between Circuit and Computer Implementations of the Rössler System. Applied Sciences*, (11) (2021), p 81.
- [28] M. Zolfaghari Nejad, M. Charmi, H. Hassanpoor. "A New Chaotic System with Only Nonhyperbolic Equilibrium Points : Dynamics and Its Engineering Application" *Complexity*, (2022).
- [29] N. Zhou, Y. Wang, L. Gong, H. He and J. Wu, *Novel single-channel color image encryption algorithm based on chaos and fractional Fourier transform. Optics Communications*, Vol. 284 (2011), 2789-2796.
- [30] N. Laskin, *Fractional market dynamics. Physica A*, (287) (2000), 482-492.
- [31] S. Vaidyanathan, *Lotka-Volterra two-species mutualistic biology models and their ecological monitoring. Pharm Tech Research*, (8) (2015), 199-212.

Bibliographie

- [32] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Synchronization in chaotic systems*, Phys Rev Lett, (64) (1990), 821-824.
- [33] H. Fujisaka, T. Yamada, *Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillators systems*, Progr. Theoret. Phys, 69(1983), 32-47.