

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire  
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master**

**En : Mathématiques**

**Spécialité : Mathématiques appliquées**

**Quasi-maximum gaussien généralisé pour  
les séries chronologiques GARCH**

**Préparé par : Ryane Bousbia  
Noudjoud Lakehal**

**Soutenue devant le jury**

<b>Ibrahim Boufelgha</b>	<b>MAA</b>	<b>C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila</b>	<b>Président</b>
<b>Yakoub Boularouk</b>	<b>MCA</b>	<b>C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Samira Boukaf</b>	<b>MCA</b>	<b>C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila</b>	<b>Examineur</b>

**Année universitaire :2022/2023**

# Remerciement

*Nous tenons tout d'abord à remercier "allah" qui nous a donné la force, la patience, le courage et la santé nécessaires pour mener à bien ce modeste travail.*

*Nous souhaitons exprimer nos remerciements particuliers à notre encadreur **Dr. Boularouk Yakoub** pour leur soutien, leur expertise et le temps qu'ils ont consacré à la supervision de ce travail. Leurs commentaires constructifs et leurs précieux conseils ont été essentiels pour la réussite de cette mémoire.*

*Nous tenons également à exprimer notre chaleureuse gratitude envers notre jury d'évaluation (monsieur le président " **Boufelgha Ibrahim**" et l'examinatrice madame " **Boukaf Samira** ") pour avoir accepté d'évaluer ce travail et pour leurs remarques et critiques. Nous exprimons également notre reconnaissance envers tous les membres du corps enseignant de l'université pour leur contribution à notre parcours universitaire, ainsi qu'aux enseignants étrangers et à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de cette mémoire.*

*Enfin, un grand merci à nos familles, en particulier à nos parents, ainsi qu'à tous nos collègues qui nous ont soutenus tout au long de nos études.*

*Ces cinq années ont été une étape importante de nos vies, marquées par des défis et des difficultés, mais aussi par des réalisations et des réussites. Nous sommes fiers d'avoir obtenu nos diplômes de l'université Abdelhafid Boussouf - Mila -, et nous sommes impatients de voir où notre formation mathématique nous mènera dans l'avenir.*

---

## Dédicace

*À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon très chère père "Douadi". Merci à vous d'être toujours présent pour faire mon bonheur.*

*À la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur, à toi ma très chère mère "Fouzia". Ta présence réconfortante et tes encouragements constants m'ont donné la force nécessaire pour persévérer même dans les moments les plus difficiles.*

Je ne peux exprimer à quel point je suis reconnaissante d'avoir été bénie avec des parents aussi exceptionnels que vous. Cette dédicace est un témoignage de ma reconnaissance éternels pour tout ce que vous avez fait pour moi. Merci d'avoir été mes guides et mes plus grands soutiens tout au long de mon parcours d'études.

*À notre encadreur **Dr. Boularouk Yakoub** pour son soutien, son expertise et sa guidance tout au long de la réalisation de cette mémoire.*

*À ma précieuse binôme "Noudjoud", ta contribution inestimable et ta collaboration sans faille ont été essentielles pour la réussite de notre mémoire. Merci d'avoir été une partenaire d'exception tout au long de cette aventure.*

*À tous les membres de ma famille, notre lien familial est de trésor inestimable. Je suis honorée de vous avoir à mes cotés.*

*En fin à tous mes chers amis et collègues, votre amitié et votre soutien ont été des éléments essentiels pour ma réussite. Que cette fin d'études soit le prélude à de nouvelles réalisation, à de nouvelles aventures et à de nouveaux défis relevés ensemble. Je suis impatiente de voir ce que l'avenir nous réserve.*

**Ryane.B**

---

## Dédicace

*À mes parents, vous êtes mes modèles de persévérance, d'intégrité et de sagesse. Vos encouragements inconditionnels, vos conseils avisés et votre amour infini m'ont donné la force et la confiance nécessaires pour aller au bout de ce projet.*

*À mes soeurs "Nessrine" et "Manar", mes meilleures amies, mes complices et mes épaules sur les quelles m'appuyer. Votre présence bienveillante, votre soutien inconditionnel et votre affection sincère sont des cadeaux précieux. Merci d'avoir été là pour moi dans les moments de joie et de difficulté.*

*À mes frères "Mouhamed" et "Mouatassem", mes compagnons de jeu, mes étoiles brillantes. Votre présence joyeuse, votre amour inconditionnel ont toujours été une source de bonheur et de motivation. Fière d'être votre soeur.*

*À mon encadreur "Dr.Yakoub Boularouk", merci pour tout votre soutien précieux.*

*À ma binôme "Rayane", nous avons formé une équipe solide et complémentaire. Merci pour notre collaboration fructueuse. Ton soutien et ta contribution ont été essentiels à la réussite de notre mémoire de soutenance.*

*À mes précieuses amies, vous avez été présentes dans les moments de stress, de doute et de célébration. Votre présence chaleureuse, vos conversations inspirantes et votre amitié sincère sont des bénédictions inestimables. Merci du fond du coeur pour tout.*

*À mes amies en ligne (Instagram, Facebook), de véritables piliers de soutien à travers nos échanges virtuels. Merci pour votre soutien à distance. Votre amitié précieuse rappelle que la connexion transcende les frontières physiques.*

*À ma grande famille et à tous ceux qui ont croisé ma route, merci pour votre soutien, vos conseils et votre présence précieuse.*

Ce mémoire est le fruit de mes efforts, mais il ne serait pas complet sans votre amour et votre soutien inébranlables. Que cette dédicace soit un témoignage de ma gratitude éternelle envers vous tous.

**Noudjoud. L**

---

## Résumé

Dans l'estimation des paramètres des modèles de processus stochastiques, on suppose a priori que le bruit suit une distribution spécifique et satisfait certaines conditions, telles que la variance égale à un dans l'estimation utilisant le contraste gaussien ou le premier moment égal à un dans le contraste Laplace. Dans cette étude, nous examinons les modèles de processus stochastiques en considérant que la loi du bruit blanc appartient à la famille des distributions gaussiennes généralisées et proposons un nouvel estimateur pour le paramètre de forme.

**Mots clés :**

Efficacité des estimateurs, Estimation du quasi-maximum de vraisemblance.

---

# *Abstact*

In the estimation of parameters for stochastic process models, it is assumed a priori that the noise follows a specific distribution and satisfies certain conditions, such as the variance being equal to one in estimation using Gaussian contrast or the first moment being equal to one in Laplace contrast. In this study, we examine stochastic process models by considering the white noise law belonging to the family of Generalized Gaussian distributions and propose a new estimator for the shape parameter.

**Keywords :**

Efficiency of estimators, Quasi maximum likelihood estimation.

## ملخص:

في تقدير المعلمات لنماذج العمليات العشوائية، نفترض مسبقاً أن الضوضاء تتبع قانوناً معيناً وأن هذه الضوضاء تستوفي بعض الشروط، مثل تكافؤ الانحراف المعياري بواحد في تقدير الفروق الغاوسية وتكافؤ اللحظة الأولى بواحد في فروق لابلاس. في هذا البحث، ندرس نماذج العمليات العشوائية مع افتراض أن قانون الضوضاء البيضاء ينتمي إلى عائلة التوزيعات الغاوسية المعممة ونقترح مقياساً جديداً لتقدير شكل المعلمة.

## الكلمات المفتاحية :

كفاءة المقدرات، تقدير الاحتمال الأقصى شبه الاستقرائي.

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Définitions et Notations</b>	<b>3</b>
1.1	Processus stochastique . . . . .	3
1.1.1	stationnarité : . . . . .	4
1.1.2	Le processus bruit blanc . . . . .	8
1.1.3	Causalité . . . . .	9
1.1.4	Les séries chronologiques . . . . .	9
1.2	La distribution gaussienne généralisée . . . . .	12
1.3	Le maximum de vraisemblance . . . . .	13
1.3.1	Estimateur . . . . .	13
1.3.2	La vraisemblance . . . . .	13
1.3.3	La fonction de log-vraisemblance . . . . .	14
1.3.4	Estimateur du maximum de vraisemblance . . . . .	14
1.4	Processus GARCH(p,q) . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Quasi-maximum gaussien généralisé pour les séries chronologiques GARCH</b>	<b>16</b>
2.1	Définition et hypothèses . . . . .	19
2.1.1	Définition de l'estimateur . . . . .	19
2.1.2	Existence et stationnarité . . . . .	20



2.1.3	Hypothèses uniformes sur $\Theta(r)$ . . . . .	21
2.1.4	Hypothèses additives requises pour l'estimation . . . . .	22
2.2	Estimation de paramètre de forme $r$ . . . . .	22
2.2.1	La relation entre LQMLE, GQMLE et GGQMLE . . . . .	23
2.2.2	Construction de l'estimateur . . . . .	24
2.2.3	Consistance asymptotique de $\widehat{r}_n$ . . . . .	26
2.3	Consistance de l'estimateur de vraisemblance quasi-maximum gaussien généralisé . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Application numérique</b> . . . . .	<b>33</b>
3.1	Exemples . . . . .	33
3.2	Application numérique . . . . .	35

---

# NOTATIONS GÉNÉRALES

## Notations

$(\Omega, A, \mathbb{P})$  Espace de probabilité.

## Ensemble et espace

$\mathbb{N}$  Les entiers positives.

$\mathbb{Z}$  les entiers.

$\mathbb{R}$  les nombres réels.

## Fonction

$\gamma_X$  La fonction d'autocovariance de  $(X_t)$ .

$\Gamma$  La fonction Gamma.

## Processus

*i.i.d* Indépendant et identiquement distribué.

$N(0, \sigma^2)$  La loi normale de moyenne 0 et variance  $\sigma^2$ .

*p.s* Presque sûr.

## Estimation

*arg* Argument.

*r* La forme de paramètre.

$\hat{r}$  Estimateur de *r*.

## Probabilité

$\xrightarrow{p.s}$  La convergence presque sûre.

---

# INTRODUCTION

L'analyse des séries chronologiques est un domaine fondamental en statistique et en économétrie qui traite de l'étude de données séquentielles collectées au fil du temps. Un modèle populaire pour l'analyse de séries chronologiques est le modèle GARCH (Hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisée), largement utilisé en finance et en économie pour modéliser l'agrégation de la volatilité dans les données financières.

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode d'estimation pour les modèles de séries chronologiques GARCH, appelée méthode Quasi-Maximum Gaussien Généralisé (QMG). La méthode QMG est une méthode basée sur la vraisemblance maximale qui est informatiquement efficace et produit des estimations de paramètres robustes et consistantes. Nous généralisons également la méthode QMG pour permettre des distributions d'erreur non normales, ce qui est important en pratique car les données financières présentent souvent des queues lourdes et une asymétrie.

Notre méthode QMG proposée est évaluée sur des ensembles de données financières simulées et réelles et comparée à des méthodes d'estimation existantes. Les résultats montrent que notre méthode proposée offre des performances supérieures en termes de précision d'estimation et d'efficacité informatique.

Dans l'ensemble, ce travail contribue au développement de méthodes plus précises et efficaces pour l'analyse de séries chronologiques, qui ont des applications importantes en finance, en économie et dans d'autres domaines où l'analyse de données séquentielles est nécessaire.

- Dans le premier chapitre nous avons présenté les définitions principales, les propriétés des processus stochastiques des séries chronologiques et quelques notions de base.

- Le deuxième chapitre est d'abord consacré à l'estimation de la forme du paramètre  $r$  de la densité du bruit blanc à partir d'une trajectoire observée d'un processus causal. Cette classe de séries chronologiques a déjà été définie et étudiée dans Duchenes and Francq (2008)[7], Bardet and Wintenberger (2009) [1] et Bardet et al.

- Dans le troisième chapitre, nous avons effectué une étude numérique à l'aide de langage R pour vérifier les résultats théoriques obtenus dans le deuxième chapitre.

### **Remarque :**

En nous appuyant sur un article scientifique de référence, qui a servi de point de départ à notre travail, nous avons exploré en profondeur les concepts et les méthodes du quasi maximum gaussien généralisé dans le contexte des séries chronologiques GARCH.

L'article, intitulé "Generalized Gaussian quasi-maximum likelihood estimation for most common time series" [18] . Il a joué un rôle central dans notre recherche, nous offrant une base solide pour développer notre approche et mener des analyses empiriques significatives.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Dans ce premier chapitre, nous donnons les définitions et les propriétés des notions principales utiles pour comprendre et traiter le quasi-maximum gaussien généralisé pour les séries chronologiques GARCH.

### 1.1 Processus stochastique

**Définition 1.1.1** *Un processus stochastique est un processus représentant un système évoluant généralement dans le temps, incluant un élément aléatoire, par opposition à un processus déterministe.*

**Définition 1.1.2** *Un processus stochastique est une famille de variable aléatoires  $(X_t, t \in \mathbb{T})$  (où  $\mathbb{T}$  est un ensemble d'indice) défini sur un espace probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On a ainsi deux cas :*

*i- Un processus stochastique à temps discret est une famille  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variable aléatoire. Dans*

## Définitions et Notations

---

ce cas, on note  $\mathbb{T} = \mathbb{N}$  (comme  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , ou bien une partie de  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ ).

ii- Un processus stochastique à temps continu est une famille  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  de variable aléatoire. Dans ce cas, on note  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ .

### Définition 1.1.3 (l'opérateur de retard)

L'opérateur  $L$  (L Lag noté aussi  $B$  pour Backward) est dit l'opérateur de retard s'il décale le processus d'une unité de temps vers le passé :

$$LX_t = X_{t-1} \quad \forall t > 1.$$

Si on applique  $k$  fois cette l'opérateur, on décale le processus de  $k$  unités de temps :

$$\underbrace{L(L(\dots L(X_t)\dots))}_k = L^k X_t = X_{t-k}.$$

L'opérateur de retard possède les propriétés suivantes :

- $L(\beta X_t) = \beta(LX_t)$ . (commutatif)
- $L^j X_t = X_{t-j}$ .
- $X_t = C \in \mathbb{R}$  pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ , alors  $L^j X_t = L^j C = C$ , pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ .
- $L^j(L^k X_t) = L^{j-k} X_t = X_{t-j-k}$ .
- $L(X_t + Y_t) = L(X_t) + L(Y_t)$ . (distributif)
- $(L^j + L^k)X_t = L^j X_t + L^k X_t = X_{t-j} + X_{t-k}$ .

### 1.1.1 stationnarité :

La stationnarité joue un rôle central dans la théorie des processus. Elle se caractérise par une série chronologique qui implique que le comportement de la série ne dépend pas du temps. Plus formellement, on distingue deux types de stationnarité, à savoir forte et faible.

## Espérance Mathématique

**Définition 1.1.4** L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle est -intuitivement- la valeur que l'on s'attend à trouver -en moyenne- si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Elle se note  $\mathbb{E}(X)$  et se lit « espérance de  $X$  ».

- **Dans le cas continu :**

**Définition 1.1.5** Soit  $X$  un variable aléatoire réelle continue qui admet une densité de probabilité  $f_X$  si :

$$\int_{\mathbb{R}} |x|f_X(x)dx < +\infty.$$

L'espérance mathématique de  $X$  est défini par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\Omega} Xdp, \\ &= \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx, \end{aligned}$$

avec  $\Omega$  l'ensemble des variables aléatoires et  $P$  la loi de probabilité.

- **Dans le cas discret :**

**Définition 1.1.6** Soit  $X$  un variable aléatoire réelle discrète défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, A, \mathbb{P})$  tq :  $X(\Omega) = (x_1, x_2, \dots)$  elle est dite intégrable si :

$$\sum_i |x_i|P(X = x_i) < +\infty.$$

L'espérance mathématique de  $X$  est défini par :

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i).$$

L'espérance mathématique possède les propriétés suivantes :

- $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$ ,

- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$ ,
- $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

## Moment d'ordre $r$

**Définition 1.1.7** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle quelconque et  $r \in \mathbb{N}^*$  on dira que la variable aléatoire réel  $X$  a un **Moment d'ordre  $r$**  si  $X^r$  a une espérance finie.

- Dans le cas continu :

$$E(X^r) = \int_{\mathbb{R}} x^r f_X(x) dx.$$

- Dans le cas discret :

$$E(X^r) = \sum_i x_i^r P(X = x_i).$$

**Remarques :**

1. Le moment d'ordre 0 d'une variable aléatoire existe toujours et vaut  
 $E(X^0) = E(1) = 1$ .
2. Le moment d'ordre 1 est l'espérance de  $X$ .

## Moment centrés

**Définition 1.1.8** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité, admettant une espérance. On dit que  $X$  admet un moment centré d'ordre  $r$  si la variable aléatoire centrée  $X' = X - E(X)$  admet un moment d'ordre  $r$ .

Le moment centré d'ordre  $r$  de  $X$  est :

$$E(X'^r) = E[(X - E(X))^r],$$



- Dans le cas continu :

$$E(X^r) = \int_{\mathbb{R}} x^r f_X(x) dx.$$

- Dans le cas discret :

$$E(X^r) = \sum_i x_i^r P(X = x_i).$$

### La stationnarité stricte

Soit un processus stochastique  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  :

**Définition 1.1.9** Le processus  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est dit strictement stationnaire, ou fortement stationnaire, ou stationnaire au premier ordre, si quel que soit le  $n$ -uplet du temps  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , tels que  $t_i \in \mathbb{Z}$  et pour tout temps  $h \in \mathbb{Z}$  avec  $t_{i+h} \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \dots, n$  la suite  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$  a la même loi que la suite  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ .

### La stationnarité au second ordre

**Définition 1.1.10** Un processus stochastique  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est dit stationnaire au second ordre, ou stationnaire au sens faible, ou stationnaire d'ordre deux si les trois conditions sont satisfaites :

(i)  $\forall t \in \mathbb{Z}, E(X_t^2) < +\infty,$

(ii)  $\forall t \in \mathbb{Z}, E(X_t) = m$  indépendant de  $t,$

(iii)  $\forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2, \text{cov}(X_t, X_{t-h}) = \gamma_X(h)$  indépendant de  $t$  (dépend de  $h$ ).

La première condition  $\forall t \in \mathbb{Z}, E(X_t^2) < +\infty$  garantit tout simplement l'existence (ou la convergence) des moments d'ordre deux. La seconde condition  $\forall t \in \mathbb{Z}, E(X_t) = m$  porte sur les moments d'ordre un et signifie tout simplement que les variables aléatoires  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  doivent avoir la même espérance quelle que soit la date  $t$ . Autrement dit, l'espérance du processus  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  doit être indépendante du temps. Enfin, la troisième condition d'auto covariance,

implique que ces moments doivent être indépendants de la date considérée, et ne doivent dépendre uniquement que de l'ordre des retards. Autrement dit la fonction d'auto covariance des processus  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  doit être indépendant du temps.

### La relation entre la stationnarité strict et la stationnarité au second ordre

Un processus strictement stationnaire avec un moment d'ordre 2 fini est stationnaire au second ordre.

La réciproque n'est pas général vraie.

#### 1.1.2 Le processus bruit blanc

Parmi la classe des processus stationnaires, il existe des processus particulière que sont les processus bruit blanc (BB). Ces processus sont très souvent utilisés en analyse des séries chronologiques.

**Définition 1.1.11** Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc faible si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$(i) \forall t \in \mathbb{Z}, \quad E(X_t) = 0,$$

$$(ii) \forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2, \quad cov(X_t, X_{t-h}) = E(X_t \cdot X_{t-h}) = \gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

#### Remarques :

1. On appelle bruit blanc fort tout bruit blanc faible tel que les variables  $(\varepsilon_t)$  sont (i,i,d) et un bruit blanc gaussien tout bruit blanc fort  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  tel que  $\forall t, (\varepsilon_t) \sim N(0, \sigma^2)$ .
2. Un BB faible est faiblement stationnaire.
3. Un BB fort est fortement stationnaire.

### 1.1.3 Causalité

**Définition 1.1.12** Un processus stochastique  $X_t$  s'appelle causal s'il peut être représenté sous la forme :

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i},$$

où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc et  $(\psi_i)_{i \geq 0}$  une suite des constantes tel que  $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ .

**Définition 1.1.13** Une représentation causale  $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$  d'un processus stationnaire est inversible si :

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_{t-i}, \quad \text{où } \sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i| < \infty.$$

### 1.1.4 Les séries chronologiques

La théorie des séries chronologiques est appliquée de nos jours dans des domaines variés que l'économétrie, la médecine ou la démographie.

**Définition 1.1.14** Les séries chronologiques, ou temporelles, encore nommées chroniques sont des séries statistiques ordonnées dans le temps qui prennent des valeurs numériques. Elles peuvent utiliser n'importe quelle mesure du temps -dates ou périodes- à condition que l'espacement des observations soit constant.

La série chronologique est notée par  $(X_t)_{t \in T}$  : Si  $T$  est un intervalle de nombres réels alors  $(X_t)$  est une série continue et si  $T$  est un ensemble discret alors  $(X_t)$  est une série à temps discret.

#### Objectifs principaux dans l'étude des séries chronologiques

L'étude d'une série chronologique permet d'analyser, d'écrire et d'expliquer un phénomène au cours du temps et d'en tirer des conséquences pour des prises de

décision. Cette étude permet aussi de faire un contrôle, par exemple pour la gestion des stocks, le contrôle d'un processus chimique.

### domaines d'application des séries temporelles

On trouve des exemples des séries chronologiques dans des très nombreux domaines. La liste suivante n'est qu'un échantillon :

- Finance et économétrie : évolution des indices boursiers, des productions agricoles ou industrielles, des données économiques des entreprises,
- Assurance : analyse des sinistres,
- Médecine/biologie : suivi des évolutions des pathologies, analyse d'électroencéphalogrammes et d'électrocardiogrammes,
- Science de la terre et l'espace : évolution des taches solaires, phénomènes d'avalanches, variations des phénomènes physiques (météorologie),
- Traitement de signal : signaux de communications, de radars, analyse de la parole,
- Traitement des données : mesures successives de position ou de direction d'un objet mobile (trajectographie),
- Météorologie : analyse de données climatique,
- Démographie : analyse de l'évolution d'une population,
- Agriculture : la quantité d'un produit.

### Modélisation d'une séries temporelles

Un modèle est une image simplifiée de la réalité qui vise à traduire les mécanismes de fonctionnement du phénomène étudié et permet de mieux les comprendre. On distingue principalement deux types de modèles :

1. **Les modèles déterministes** : Ces modèles relèvent de la Statistique Descriptive. Ils ne font intervenir que de manière sous-jacente le calcul des probabilités et consistent à supposer que l'observation de la série à la date  $t$  est une fonction du temps  $t$  et d'une variable  $\varepsilon_t$  centrée faisant office d'erreur au modèle, représentant

la différence entre la réalité et le modèle proposé :

$$X_t = f(t, \epsilon_t).$$

On suppose de plus que les  $\epsilon_t$  sont dé-corrélées.

Les deux modèles de ce type les plus usités sont les suivants :

- **Le modèle additif** : C'est le modèle classique de décomposition dans le traitement des modèles d'ajustement. La variable  $X_t$  s'écrit comme la somme des trois termes :

$$X_t = Z_t + S_t + \epsilon_t,$$

Où  $Z_t$  est la composante tendancielle (déterministe),  $S_t$  la composante saisonnière (déterministe aussi) et  $\epsilon_t$  les composantes aléatoires i.i.d (erreurs au modèle).

- **Le modèle multiplicatif** : La variable  $X_t$  s'écrit au terme d'erreur près comme le produit de la tendance et d'une composante de saisonnalité :

$$X_t = Z_t(1 + S_t)(1 + \epsilon_t).$$

Où  $Z_t$  est la composante tendancielle (déterministe),  $S_t$  la composante saisonnière (déterministe aussi) et  $\epsilon_t$  représente l'erreur.

2. **Les modèles stochastiques** : Ils sont du même type que les modèles déterministes à ceci près que les variables de bruit  $\epsilon_t$  ne sont pas i.i.d mais possèdent une structure de corrélation non nulle :  $\epsilon_t$  est une fonction des valeurs passées ( $\pm$  lointaines suivant le modèle) et d'un terme d'erreur  $\eta_t$ ,

$$\epsilon_t = g(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots, \eta_t).$$

## 1.2 La distribution gaussienne généralisée

**Définition 1.2.1** La distribution gaussienne généralisée est une distribution de probabilité utilisée pour modéliser une grande variété de phénomènes dans des domaines tels que le traitement du signal, le traitement d'image et la statistique. C'est une famille de distributions de probabilité qui inclut à la fois la distribution gaussienne (également connue sous le nom de distribution normale) et la distribution de Laplace en tant que cas particuliers.

La distribution gaussienne généralisée a **une fonction de densité de probabilité** (FDP) qui est donnée par :

$$g_r(x) = \frac{r^{1-\frac{1}{r}}}{2\Gamma(\frac{1}{r})} e^{-|x|^{\frac{1}{r}}},$$

où  $x$  est la variable aléatoire,  $r$  est le paramètre de forme et  $\Gamma(\frac{1}{r})$  est la fonction gamma de  $1/r$ .

- Si  $r = 2$  : La distribution se réduit à la distribution gaussienne,
- Si  $r < 2$  : La distribution a des queues plus épaisses que la distribution gaussienne, ce qui signifie que des valeurs extrêmes sont plus susceptibles de se produire,
- Si  $r > 2$  : La distribution a des queues plus légères que la distribution gaussienne, ce qui signifie que des valeurs extrêmes sont moins susceptibles de se produire,
- Si  $r = 1$  : La distribution gaussienne généralisée est la distribution de la place.

**Remarque** : La FDP de la distribution gaussienne généralisée est symétrique autour de la moyenne, et sa forme est déterminée par la valeur du paramètre de forme.

### La fonction Gamma

**Définition 1.2.2** La fonction Gamma (notée par la lettre grecque  $\Gamma$ ) est une fonction mathématique qui est une extension de la fonction factorielle à des valeurs non entières. Elle est donnée par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt,$$

où  $x$  est un nombre complexe.

### Remarques :

- La fonction Gamma est définie pour tous les nombres complexes sauf les entiers non positif.
- Pour tout  $x$  réel positif, on a la récurrence  $x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1)$ .
- Pour tout entier  $n$  positif, on a  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ .

## 1.3 Le maximum de vraisemblance

A côté de la méthode des moindres carrés ordinaires, le maximum de vraisemblance est une méthode générale permet aussi d'estimer les paramètres d'un modèle statistique. Cette méthode a été développée par le statisticien Ronald Aylmer Fisher en 1922.

### 1.3.1 Estimateur

**Définition 1.3.1** *Un estimateur est une fonction des données qui est utilisée pour estimer un paramètre inconnu d'une distribution de probabilité ou d'une population.*

### 1.3.2 La vraisemblance

**Définition 1.3.2** *Soit  $n > 0$  un entier. On appelle  $n$ -échantillon d'une loi  $L$  toute suite  $(X_1, \dots, X_n)$  de v.a. indépendantes de loi  $L$ .*

**Définition 1.3.3** *La vraisemblance des observations  $X = (X_1, \dots, X_n)$  d'un échantillon aléatoire de loi parente la loi de  $X$ , notée  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  est la fonction du paramètre  $\theta$  définie de façon suivante :*

- Si  $X$  est une variable aléatoire discrète :

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P_{\theta}(X_i = x_i),$$

- Si  $X$  est une variable aléatoire continue :

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i, \theta}(x_i).$$

**Remarque :** La fonction de vraisemblance s'écrit ci-dessus est valable si les  $X_i$  sont indépendantes par définition d'un échantillon aléatoire (de même loi).

### 1.3.3 La fonction de log-vraisemblance

**Définition 1.3.4** On appelle fonction de log-vraisemblance pour  $(x_1, \dots, x_n)$  toute fonction de  $\theta$  définie par :

$$l_n(x_1, \dots, x_n, \theta) = \log(L_n(x_1, \dots, x_n, \theta)).$$

La fonction logarithme népérien étant croissante.

### 1.3.4 Estimateur du maximum de vraisemblance

**Définition 1.3.5** On appelle estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$  pour  $(x_1, \dots, x_n)$  est la valeur  $\widehat{\theta}_n$ , qui maximise la fonction de vraisemblance  $L_n(x_1, \dots, x_n, \theta)$  en  $\theta$ , alors :

$$\widehat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} l_n(x_1, \dots, x_n, \theta),$$

où  $l_n(x_1, \dots, x_n, \theta) = \log(L_n(x_1, \dots, x_n, \theta))$ .

## 1.4 Processus GARCH(p,q)

Le modèle GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) est un modèle économétrique qui permet de modéliser la volatilité conditionnelle d'une série chronologique.

**Définition 1.4.1** Le processus GARCH a été introduit par Bollerslev en 1986 comme solution



## Définitions et Notations

---

du système d'équation :

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases}$$

avec  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  (i.i.d),  $\omega_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  pour  $(i = 1, \dots, p)$ ,  $\beta_i \geq 0$  pour  $(i = 1, \dots, q)$ ,  $\alpha_p, \beta_q$  strictement positifs et  $\sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ .

**Remarque :** La série chronologique GARCH fait référence spécifiquement à l'application du modèle GARCH aux données de séries chronologiques financières.

---

---

## CHAPITRE 2

---

# QUASI-MAXIMUM GAUSSIEN GÉNÉRALISÉ POUR LES SÉRIES CHRONOLOGIQUES GARCH

Ce chapitre est d'abord consacré à l'estimation de la forme du paramètre  $r$  de la densité du bruit blanc à partir d'une trajectoire observée d'un processus causal. Cette classe de séries chronologiques a déjà été définie et étudiée dans Duchenes and Francq (2008)[7], Bardet and Wintenberger (2009) [1] et Bardet et al. (2017)[2]. Par conséquent, nous considérerons un échantillon observé  $(X_1, \dots, X_n)$  où  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une solution de l'équation suivante :

$$X_t = \sigma_{\theta_0}((X_{t-k})_{k \geq 1}) \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

où :

- $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ , c'est un vecteur de paramètre inconnu, également appelé le

paramètre "vrais" (mais  $d$  est connu).

- $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une séquence de variables aléatoires (i.i.d.) indépendantes centrées et distribuées de façon identique avec symétrique distribution de probabilité, et tel qu'il existe  $r_0 \geq 1$  et  $s \geq \min(2, r)$  satisfaisant

$$E(\varepsilon_0) = 0, \quad E(|\varepsilon_0|^r) = 1 \quad \text{et} \quad E(|\varepsilon_0|^s) < \infty. \quad (2.2)$$

- pour  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$  où  $\mathbb{R}^\infty$  est l'espace de séquences réelles avec un nombre fini de termes non nuls,  $(\theta, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \rightarrow \sigma_\theta((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in (0, \infty)$  est une application connue.

Le maximum de la méthode de quasi-vraisemblance conditionnelle, QMLE gaussien, est le plus utilisé pour estimer les paramètres des modèles pour les processus stochastiques. Cette méthode a été principalement construite en utilisant la densité instrumentale gaussienne, voir par exemple Berkes et al. (2003) [3] ou Francq and Zakoian (2004)[8] pour le processus GARCH(p,q), Francq and Zakoian(2013)[10] pour les processus ARMA-GARCH, Straumann and Mikosch (2006) [16] pour les modèles hétéroskedastiques généraux, et Bardet and Wintenberger (2009)[1] pour la classe générale des modèles causals affines. Trindade et al. (2006)[17] étudient les modèles ARMA et GARCH entraînés par le bruit asymétrique de Laplace, Bardet et al. (2017) [2] ont estimé les paramètres du modèle à l'aide du QMLE laplacien, c-à-d. que l'estimateur est construit à partir d'une densité conditionnelle laplacienne. Même si les estimateurs obtenus ne sont consistants que dans des conditions de moment sur la densité conditionnelle, cela pourrait l'être. Mais théoriquement, la divergence de la densité d'innovation réelle peut augmenter considérablement la variance des estimations, augmentant avec le coût de l'abandon de la véritable innovation de distribution.

Afin d'éviter ce choix arbitraire de densité conditionnelle QML, Lii and Rosenblatt (1992)[13] ont proposé une procédure approximative des processus moyens mobiles non réversibles maximaux entraînés par un bruit non gaussien, Francq et al. (2011) [9] ont proposé une méthode d'estimation QML non gaussienne en deux étapes pour les processus GARCH basée sur des erreurs gaussiennes généralisées. Jianqing et al. (2014)[12] ont proposé une procédure de quasi-maximum de vraisemblance en trois

étapes. La densité gaussienne généralisée également connue sous le nom de distribution d'erreur généralisée (GED( $r$ ) avec  $r > 0$ ) ou la distribution gamma de puissance est donnée par :

$$g_r(x) = \frac{r^{1-1/r}}{2\Gamma(1/r)} e^{-\frac{|x|^r}{r}} \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

Notez que  $g_1$  est la densité de Laplace et  $g_2$  est la densité gaussienne. Si  $Z_r$  suit une GED( $r$ ), alors :

$$E(Z_r) = 0 \quad \text{et} \quad E(|Z_r|^r) = 1, \quad (2.4)$$

De plus, On a le résultat et la notation suivants :

$$m_r(p) = E(|Z_r|^p) = r^{\frac{p}{r}-1} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{r})}{\Gamma(\frac{r+1}{r})} \quad \forall p > 0. \quad (2.5)$$

Nous proposons une nouvelle procédure d'estimation en deux étapes menant à un estimateur de vraisemblance quasi-maximale gaussien généralisé (PGGQMLE) dans le cas général d'un processus causal affine.

1. Premièrement, nous supposons que  $(\varepsilon_t)$  en (2.1) est un bruit blanc distribué suivant un GED( $r$ ) avec  $r \geq 1$  un paramètre inconnu. Alors  $r$  est estimé par  $\hat{r}$  en utilisant conjointement les QMLEs gaussiennes et laplaciennes de  $\theta_0$ . La forte consistance de  $\hat{r}$  est établie.

2. Deuxièmement, après avoir montré que l'estimateur de vraisemblance quasi-maximum gaussien généralisé (GGQMLE) de  $\theta_0$ , c-à-d un estimateur de quasi-maximum de vraisemblance construit à l'aide d'un GED( $r$ ) en tant qu'une densité instrumentale (voir ci-dessous), est fortement consistant pour tout  $r > 1$ , en remplaçant  $r$  par  $\hat{r}$ , un PGGQMLE est obtenu et sa consistance est également établie.

## 2.1 Définition et hypothèses

### 2.1.1 Définition de l'estimateur

Supposons que  $(X_1, \dots, X_n)$  est une trajectoire observée de  $X$  solution de (2.1) où  $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$  est inconnu. Pour estimer  $\theta_0$  nous considérons la log-vraisemblance de  $(X_1, \dots, X_n)$  conditionnellement à  $(X_0, X_{-1}, \dots)$ . Si  $g$  est la densité de probabilité (par rapport à la mesure de Lebesgue) de  $\varepsilon_0$ , puis à partir de la définition causale affine de  $X$ , cette log-vraisemblance conditionnelle est égale à :

$$\sum_{t=1}^n \log \left( g \left( \frac{X_t}{\sigma_\theta^t} \right) \right),$$

où  $\sigma_\theta^t = \sigma_\theta(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$ , avec l'hypothèse que  $\sigma_\theta^t > 0$ . Comme  $X_0, X_{-1}, \dots$  sont inconnus, en général  $\sigma_\theta^t$  ne sont pas calculables. Ainsi, une quasi-log-vraisemblance est considérée à la place de la log-vraisemblance et il est défini par :

$$\log \left( QL_{(\theta)}^{(g)}(X_1, \dots, X_n) \right) = \sum_{t=1}^n \log \left( g \left( \frac{X_t}{\widehat{\sigma}_\theta^t} \right) \right),$$

avec  $\widehat{\sigma}_\theta^t = \sigma_\theta(X_{t-1}, \dots, X_1, u)$ , où  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un nombre fini non nul séquence  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Le choix de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de conséquence sur le comportement asymptotique de  $L_n$ , et  $(u_n)$  pourrait généralement être choisi comme une séquence de zéros. Enfin, un estimateur de vraisemblance quasi-maximale (QMLE) de  $\theta_0$  peut être défini avec le respect du choix de  $g$  par :

$$\widehat{\theta}_n^{(g)} = \text{Argmax}_{\theta \in \Theta} \log \left( QL_{(\theta)}^{(g)}(X_1, \dots, X_n) \right).$$

Le QMLE est généralement construit avec  $g = g_2$  la distribution gaussienne standard (notée QMLE gaussienne) ou, moins souvent, avec  $g = g_1$  la distribution laplacienne standard (notée QMLE laplacienne). Maintenant, nous considérerons le moiré généralement  $g = g_r$ .

En conséquence, pour tout  $1 \leq r \leq s$  avec  $s$  défini en (2.2), alors l'équation (2.1) peut s'écrire à nouveau :

$$X_t = \sigma_{\theta_r}(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \varepsilon_t^{(r)}, \quad t \in Z, \quad (2.6)$$

avec  $\varepsilon_t^{(r)} = \varepsilon_t(E(|\varepsilon_0|^r))^{-1/r}$ , impliquant  $E(|\varepsilon_t^{(r)}|^r) = 1$  et  $\sigma_{\theta_r} = (E(|\varepsilon_0|^r))^{1/r} \sigma_{\theta_0}$ . Ensuite, nous pouvons définir le généralisé Quasi-maximum de vraisemblance gaussien  $\widehat{\theta}_n^{(r)}$  par :

$$\widehat{\theta}_n^{(r)} = \text{Argmin}_{\theta \in \Theta} \sum_{t=1}^n \widehat{q}_t(\theta),$$

où

$$\widehat{q}_t(\theta) = \sum_{t=1}^n \log(|\widehat{\sigma}_\theta^t|^r) + |\widehat{\sigma}_\theta^t|^{-r} |X_t|^r. \quad (2.7)$$

En d'autres termes, cet estimateur est égal à  $\widehat{\theta}_n^{(g)}$  lorsque  $g = g_r$  la densité GED( $r$ ).

**Remarque 2.1.1** *On voit que pour  $r = 1$  le contraste gaussien généralisé est le contraste de Laplace et pour  $r = 2$  le contraste gaussien généralisé est le contraste gaussien.*

Bardet et Wintenberger (2009)[1] et Bardet et al. (2017)[2] ont respectivement prouvé la consistance et l'asymptotique normalité de  $\widehat{\theta}_n^{(1)}$  et  $\widehat{\theta}_n^{(2)}$  respectivement. En utilisant ces deux estimateurs consistants, nous commençons par l'estimation de la forme du paramètre  $r$  lorsque la distribution de  $\varepsilon_0$  est exactement une GED( $r$ ).

## 2.1.2 Existence et stationnarité

Comme dans Doukhan et Wintenberger [6] et Bardet et Wintenberger [1], plusieurs inégalités de type Lipschitz sur  $\sigma_\theta$  est nécessaire pour l'obtention de l'existence et la  $r$ -stationnarité (définie dans [6]) d'une solution causale et ergodique de (2.1)

Pour  $k = 0, 1, 2$  et un certain espace  $\Theta$  de  $\mathbb{R}^d$ , on définit la condition Lipschitzienne sur la fonction  $\sigma_\theta$  :

**Hypothèse (A<sub>k</sub>(K, Φ)) :**  $\forall x \in \mathbb{R}^\infty, \theta \in \Theta \mapsto \sigma_\theta(x) \in C^k(\Theta)$  et  $\partial_\theta^k \sigma_\theta$  satisfait  $\|\partial_\theta^k \sigma_\theta(0)\|_\Theta < \infty$

et il existe une suite  $(\alpha_j^{(k)}(\sigma, \Theta))_j$  de nombres non négatifs telle que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^\infty$

$$\|\partial_\theta^k \sigma_\theta(x) - \partial_\theta^k \sigma_\theta(y)\|_\Theta \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(k)}(\sigma_t, \Theta) |x_j - y_j|, \text{ avec } \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(k)}(\sigma_t, \Theta) < \infty.$$

Afin d'assurer l'existence d'une solution stationnaire d'ordre  $r$  ( $r > 1$ ) pour (2.1), l'ensemble  $\Theta(r)$  définit par :

$$\Theta(r) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^d, (A_0(\sigma_t, \{\theta\})) \text{ est vérifiée, } (E[|\varepsilon_0|^r])^{1/r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(0)}(\sigma_t, \{\theta\}) < 1 \right\}.$$

Ensuite, à partir de Doukhan and Wintenberger (2007)[6], on obtient :

**Proposition 2.1.1** *Si  $\theta_0 \in \Theta(s)$  pour certains  $s \geq 1$ , alors il existe une causalité unique  $(X_t)$  est indépendant de  $(\varepsilon_i)_{i>t}$  pour  $t \in \mathbb{Z}$  solution  $X$  de (2.1), qui est stationnaire, ergodique et satisfait  $E(|X_0|^s) < \infty$ .*

*Ainsi, la stationnarité et  $r$ -ordre d'une solution de (2.6) est assurée par ce corollaire :*

**Corollaire 2.1.1** *Si  $\theta_0 \in \Theta(r)$ , avec :*

$$\Theta(r) := \left\{ \theta \in \mathbb{R}^d, (A_0(\sigma_t, \{\theta\})) \text{ est vérifiée, } \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(0)}(\sigma_t, \{\theta\}) < 1 \right\}.$$

*Alors il existe une unique solution causale  $X$  de (2.6), qui est stationnaire, ergodique et satisfait  $E[|X_0|^r] < \infty$ .*

### 2.1.3 Hypothèses uniformes sur $\Theta(r)$

Fixons un sous-ensemble compact  $\Theta$  de  $\mathbb{R}^d$ . Pour toutes les séquences  $x, y$  de  $(\mathbb{R}^m)^\infty$ , la fonction  $\theta \mapsto \sigma_\theta(x)$  est supposée continue sur  $\Theta$ . supposons que  $\|\sigma_\theta(0)\|_\Theta < \infty$ .

Pour régler brièvement les hypothèses, introduisons le symbole générique  $\Psi$  pour la fonction  $\sigma$ .

**(A1)( $\Psi$ )** Soit  $\alpha_j(\Psi) = \sup_{\theta \in \Theta} \alpha_j(\Psi, \theta)$  tel que  $\sum_{j \geq 1} \alpha_j(\Psi) < \infty$ .

**(A2)** Il existe  $\underline{H} > 0$  tel que  $\inf_{\theta \in \Theta} \det(\sigma_\theta(x)) \geq \underline{\sigma}$  pour tout  $x \in (\mathbb{R}^m)^\infty$ .

**(A3( $\Psi$ ))** La fonction  $\theta \in \Theta \mapsto \Psi_\theta(x)$  est 2 fois continûment dérivable pour tout  $x \in (\mathbb{R}^m)^\infty$  et  $\left\| \frac{\partial \Psi_\theta(0)}{\partial \theta} \right\|_\Theta + \left\| \frac{\partial^2 \Psi_\theta(0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\|_\Theta < \infty$ . Supposons de plus qu'il existe deux suites intégrables  $(\alpha_j^{(i)}(\Psi))_{j \geq 1}$ ,  $i = 1, 2$ , telle que pour tout  $x, y \in (\mathbb{R}^m)^\infty$

$$\left\| \frac{\partial \Psi_\theta(x)}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_\theta(y)}{\partial \theta} \right\|_\Theta \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(1)}(\Psi) \|x_j - y_j\|,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \Psi_\theta(x)}{\partial \theta \partial \theta'} - \frac{\partial^2 \Psi_\theta(y)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\|_\Theta \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(2)}(\Psi) \|x_j - y_j\|.$$

La dernière hypothèse sur les dérivées est juste nécessaire pour la normalité asymptotique du QMLE.

### 2.1.4 Hypothèses additives requises pour l'estimation

Fixons un sous-ensemble compact  $\Theta$  de  $\Theta(s) \subset \mathbb{R}^d$ . Nous considérerons les hypothèses suivantes :

**(Ainf)**  $\exists \sigma > 0$  tel que  $\inf_{\theta \in \Theta} \sigma_\theta(x) \geq \sigma, \forall x \in \mathbb{R}^\infty$ .

**(Id)**  $\forall \theta \in \Theta, (\sigma_\theta^t = \sigma_{\theta_0}^t \text{ a.s.}) \Rightarrow \theta = \theta_0$ .

**(Var)** La famille  $(\partial \sigma_{\theta_0}^t / \partial \theta_i)_{1 \leq i \leq d}$  est a.e. linéairement indépendant, où :

$$\frac{\partial \sigma_\theta^t}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}(X_{t-1}, \dots).$$

La condition **(Id)** est une condition usuelle d'identifiabilité alors que la condition **(Var)** est nécessaire pour assurer la finitude de la variance asymptotique du résultat sur la normalité asymptotique.

## 2.2 Estimation de paramètre de forme r

Dans cette section, nous proposons une méthode pour estimer la paramètre de forme r de la gaussienne généralisée erreur. Premièrement, nous donnons des résultats qui



montrent une relation entre le quasi-maximum de vraisemblance de Laplace (LQMLE), l'estimateur gaussien du quasi-maximum de vraisemblance (GQMLE) et l'estimateur gaussien généralisé du quasi-maximum de vraisemblance (GGQMLE) et d'autre part nous proposons un estimateur pour la forme du paramètre.

### 2.2.1 La relation entre LQMLE, GQMLE et GGQMLE

Donnons une relation entre  $\sigma_{\theta_0^{(1)}}$ ,  $\sigma_{\theta_0^{(2)}}$  et  $\sigma_{\theta_0^{(r)}}$  autrement dit une relation qui relie  $\theta_0^{(1)}$  à  $\theta_0^{(r)}$  et  $\theta_0^{(2)}$  à  $\theta_0^{(r)}$ .

**Lemme 2.2.1** Soit  $\theta_0^{(1)}$ ,  $\theta_0^{(2)}$  et  $\theta_0^{(r)}$  respectivement le QMLE de Laplace, le QMLE gaussien et le QMLE gaussien généralisé, on a :

$$\sigma_{\theta_0^{(r)}} = \sigma_{\theta_0^{(1)}} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{r})}{r^{\frac{1}{r}-1} \Gamma(\frac{2}{r})}, \quad (2.8)$$

et

$$\sigma_{\theta_0^{(r)}} = \sigma_{\theta_0^{(2)}} \left( \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{r})}{r^{\frac{2}{r}-1} \Gamma(\frac{3}{r})} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$

**Preuve.** Preuve du lemme 2.2.1 Dans un premier temps, nous allons prouver la relation (2.8), nous avons la condition  $E|\varepsilon_t| = 1$  est nécessaire à la consistance du QMLE de Laplace, donc :

$$\begin{aligned} X_t &= \sigma_{\theta_0}(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \varepsilon_t, & t \in Z, \\ &= \sigma_{\theta_0}(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) E|\varepsilon_t| \frac{\varepsilon_t}{(E|\varepsilon_t|)} \\ &= \sigma_{\theta_0^{(1)}}(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \varepsilon_t', & t \in Z, \end{aligned}$$

on peut ainsi utiliser le contraste de Laplace proposé par Bardet et al[2] qui donne un estimateur consistant et asymptotiquement normal. Et on a :

$$\sigma_{\theta_0^{(1)}}(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = \sigma_{\theta_0}(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) E|\varepsilon_t|,$$

ou, puisque  $\varepsilon_t$  est un aléatoire gaussien généralisé, on a :

$$m_1(r) = E|\varepsilon_t| = r^{\frac{1}{r}-1} \frac{\Gamma(\frac{2}{r})}{\Gamma(1 + \frac{1}{r})},$$

qui donnent le résultat (2.8).

Dans un second temps, on va prouver la relation (2.9), on a la condition  $Var(\varepsilon_t) = 1$  est nécessaire à la consistance du QMLE gaussien, donc :

$$\begin{aligned} X_t &= \sigma_{\theta_0}(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \varepsilon_t, & t \in Z, \\ &= \sigma_{\theta_0}(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) E(\varepsilon_t^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon_t}{E(\varepsilon_t^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sigma_{\theta_0^{(2)}}(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \varepsilon'_t, & t \in Z, \end{aligned}$$

en écrivant le modèle sous cette forme, on est sûr qu'il vérifie la condition de variance égale à un, condition nécessaire à la consistance du QMLE gaussien. Et on obtient :

$$\sigma_{\theta_0^{(2)}}(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = \sigma_{\theta_0}(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) E(\varepsilon_t^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou, puisque  $\varepsilon_t$  est un aléatoire gaussien généralisé, on a :

$$m_2(r) = E(\varepsilon_t^2) = r^{\frac{2}{r}-1} \frac{\Gamma(\frac{3}{r})}{\Gamma(1 + \frac{1}{r})},$$

qui donnent le résultat (2.9). ■

## 2.2.2 Construction de l'estimateur

Afin de proposer nos estimateurs, nous utilisons les résultats du lemme 2.2.1 donné par la relation :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta_0^{(1)}}^t = \sigma_{\theta_0^{(r)}}^t \left( \frac{r^{\frac{1}{r}-1} \Gamma(\frac{2}{r})}{\Gamma(1+\frac{1}{r})} \right) \\ \sigma_{\theta_0^{(2)}}^t = \sigma_{\theta_0^{(r)}}^t \left( \frac{r^{\frac{2}{r}-1} \Gamma(\frac{3}{r})}{\Gamma(1+\frac{1}{r})} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Ce système d'équations est équivalent à :

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sigma_{\theta_0^{(1)}}^t)^2 = (\sigma_{\theta_0^{(r)}}^t)^2 \left( \frac{r^{\frac{1}{r}-1} \Gamma(\frac{2}{r})}{\Gamma(1+\frac{1}{r})} \right)^2 \\ (\sigma_{\theta_0^{(2)}}^t)^2 = (\sigma_{\theta_0^{(r)}}^t)^2 \left( \frac{r^{\frac{2}{r}-1} \Gamma(\frac{3}{r})}{\Gamma(1+\frac{1}{r})} \right) \end{cases}$$

En divisant les deux dernières équations, on obtient une fonction de  $r$  notée  $H(r)$  qui s'exprime en fonction de  $\sigma_{\theta_0^{(1)}}^t$  et  $\sigma_{\theta_0^{(2)}}^t$  comme suit :

$$\begin{aligned} H(r) &= \frac{\Gamma^2(\frac{2}{r})}{\Gamma(\frac{1}{r})\Gamma(\frac{3}{r})} \\ &= \frac{(\sigma_{\theta_0^{(1)}}^t)^2}{(\sigma_{\theta_0^{(2)}}^t)^2} \end{aligned}$$

Dans la Figure 2.1 nous présentons le graphe de la fonction  $H$ ,

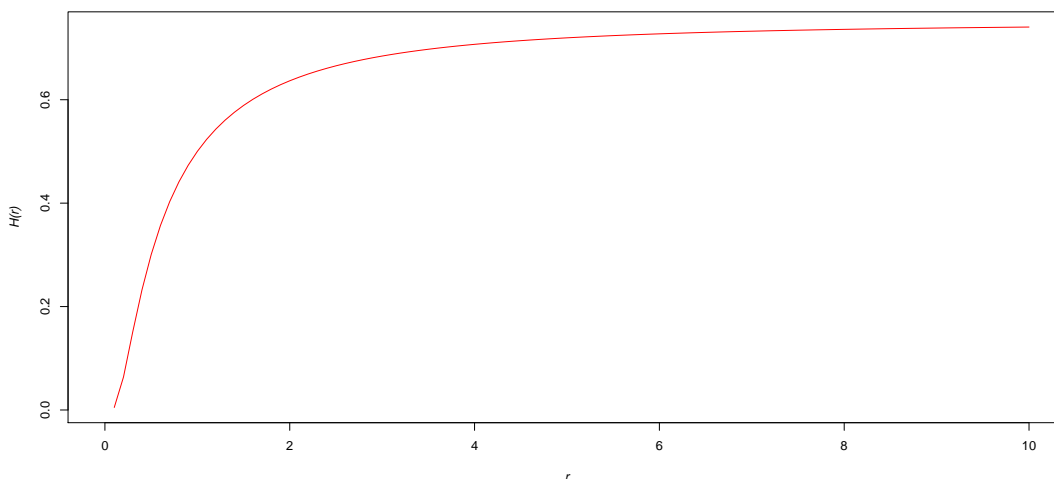


FIGURE 2.1 – Le graphe de la fonction  $H(r)$

On voit bien que  $H$  est une fonction continue et croissante donc inversible, ce qui permet de proposer un estimateur  $\widehat{r}_n$  à la forme de paramètre  $r$  donnée par l'expression :

$$\widehat{r}_n = H^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\widehat{\sigma}_t^2}{\widehat{\theta}_n^{(2)}}\right)^2. \quad (2.10)$$

### 2.2.3 Consistance asymptotique de $\widehat{r}_n$

On étudie maintenant la Consistance asymptotique de l'estimateur proposé  $\widehat{r}_n$  pour le paramètre de forme  $r$  qui est défini à l'aide du LQMLE et du GQMLE. On rappelle d'abord la proposition 4.3 de Krengel [15].

**Proposition 2.2.1** *Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(\widetilde{E}, \widetilde{\mathcal{E}})$  deux espaces mesurables, si  $(v_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une suite ergodique stationnaire de éléments aléatoires à valeur  $E$  et  $\varphi : (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{E}^{\mathbb{N}}) \rightarrow (\widetilde{E}, \widetilde{\mathcal{E}})$  est une fonction mesurable alors la suite  $(\widetilde{v}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  défini par  $\widetilde{v}_t = \varphi(v_t, v_{t-1}, \dots)$  est un processus ergodique stationnaire.*

**Théorème 2.2.1** *On suppose que  $\theta_0^{(1)}, \theta_0^{(2)} \in \Theta$  pour un sous-ensemble compact  $\Theta \subset \Theta(2)$ . Soit  $X$  la stationnaire solution de l'équation (2.1). Soient **(A2)** et **(Id)** vérifiées. De plus, si **(A1)( $\sigma$ )** soit vérifiée avec*

$$\alpha_j(\sigma) + \alpha_j(\sigma^2) = O(j^{-\ell}) \text{ pour certains } \ell > 3/2, \quad (2.11)$$

*alors l'estimateur  $\widehat{r}_n$  est fortement consistant, c'est-à-dire  $\widehat{r}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} r_0$ .*

**Preuve.** Pour prouver le résultat de ce théorème, nous devons prouver les points suivants :

$$\begin{cases} 1. E|e_t(\theta)| < \infty. \\ 2. |H(\widehat{r}_n) - H(r_n)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0. \end{cases}$$

1. De la proposition 2.2.1 nous savons que  $e_t(\theta) = (\sigma_{\theta_0^{(1)}}^t)^2 / (\sigma_{\theta_0^{(2)}}^t)^2$  est stationnaire ergodique. Donc,  $(e_t(\theta))_{t \in \mathbb{Z}}$  satisfait une loi forte uniforme (dans  $\theta \in \Theta$ ) des grands nombres dès que  $E|e_t(\theta)| < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} E|e_t(\theta)| &= E \frac{(\sigma_{\theta_0^{(1)}}^t)^2}{(\sigma_{\theta_0^{(2)}}^t)^2} \\ &\leq \frac{1}{\underline{\sigma}} E(\sigma_{\theta_0^{(1)}}^t)^2 \\ &\leq C E(X_0^2) \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(0)}(\sigma^2) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, la loi forte uniforme des grands nombres pour  $(e_t(\theta))_{t \in \mathbb{Z}}$  suit :

$$\left\| H(r)_n - H(r)_0 \right\|_{\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0. \quad (2.12)$$

2. Maintenant, nous allons établir  $\left| H(\widehat{r}_n) - H(r_n) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0$ . En effet, pour tout  $\theta \in \Theta$  et  $t \in N^*$ ,

$$\begin{aligned} H(\widehat{r}_n) - H(r_n) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_n^{(1)}}^t}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_n^{(2)}}^t} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_{\theta_0^{(1)}}^t}{\sigma_{\theta_0^{(2)}}^t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_n^{(1)}}^t}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_n^{(2)}}^t} \right)^2 - \left( \frac{\widehat{\sigma}_{\theta_0^{(1)}}^t}{\widehat{\sigma}_{\theta_0^{(2)}}^t} \right)^2 + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{\widehat{\sigma}_{\theta_0^{(1)}}^t}{\widehat{\sigma}_{\theta_0^{(2)}}^t} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_{\theta_0^{(1)}}^t}{\sigma_{\theta_0^{(2)}}^t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n V_n + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \widehat{e}_t(\theta) - e_t(\theta). \end{aligned}$$

Bardet, J.-M. et Wintenberger, O. [1] ont prouvé que  $\widehat{\theta}_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \widehat{\theta}_0^{(1)}$ , Bardet et al ont prouvé que  $\widehat{\theta}_n^{(2)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \widehat{\theta}_0^{(2)}$ , et  $\widehat{\sigma}_{\theta}^t$  est continue pour tout  $t \in F$  et  $\theta \in \Theta$ , donc  $V_n \rightarrow 0$  ce qui implique par le lemme de Cesaro que :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n V_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_n^t}^t}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_n^t}^t} \right)^2 - \left( \frac{\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t}{\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t} \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0. \quad (2.13)$$

D'après le corollaire 1 de Kounias et Weng (1969) [14], la preuve est obtenue s'il existe  $s \in [0, 1]$  tel que :

$$\sum_{t \geq 1} \frac{1}{t^s} E \left[ \|e_t(\theta) - \widehat{e}_t(\theta)\|_{\Theta}^s \right] < \infty, \quad (2.14)$$

nous avons :

$$\begin{aligned} |\widehat{e}_t(\theta) - e_t(\theta)| &\leq \left| \left( \frac{\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t}{\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_{\theta_0^t}^t}{\sigma_{\theta_0^t}^t} \right)^2 \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t}{\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t} - \frac{\sigma_{\theta_0^t}^t}{\sigma_{\theta_0^t}^t} \right| \\ &= 2 \left( \frac{|\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t - \sigma_{\theta_0^t}^t|}{\sigma_{\theta_0^t}^t} + \frac{\sigma_{\theta_0^t}^t}{\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t \sigma_{\theta_0^t}^t} |\sigma_{\theta_0^t}^t - \widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t| \right) \\ &\leq C (|\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t - \sigma_{\theta_0^t}^t| + |\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t - \sigma_{\theta_0^t}^t|). \end{aligned}$$

On démontre (2.14) avec  $s = 1$ . Puisque l'hypothèses  $A_0(\sigma, \Theta)$  est vraie, à partir de la condition du théorème 2.2.1 nous avons pour certains  $\ell > 3/2$  :

$$\begin{aligned} E \left( |\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t - \sigma_{\theta_0^t}^t| + |\widehat{\sigma}_{\theta_0^t}^t - \sigma_{\theta_0^t}^t| \right) &\leq C (\alpha_j(\sigma) + \alpha_j(\sigma^2)) \\ &\leq C \sum_{t \geq 1} t^{-(\ell-3/2)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{t \geq 1} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ |\widehat{e}_t(\theta) - e_t(\theta)|_{\Theta} \right] &\leq A \sum_{t \geq 1} t^{-(\ell-1/2)} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

En conséquence, on obtient :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \|\widehat{e}_t(\theta) - e_t(\theta)\|_{\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0. \quad (2.15)$$

les relations (2.13) et (2.15) réalisent la preuve.

■

## 2.3 Consistance de l'estimateur de vraisemblance quasi-maximum gaussien généralisé

Dans cette section, nous étudions la consistance de l'estimateur de vraisemblance quasi-maximale gaussien généralisé (GGQMLE).

**Théorème 2.3.1** *Supposons que les conditions C1, C2 et C3 est vérifiées et  $\theta_0 \in \Theta(r) \cap \Theta$  avec  $r \geq 1$ . Soit  $X$  la solution stationnaire de (2.1). Si  $(A_0(\sigma, \Theta))$  est vérifiée avec*

$$\alpha_j^{(0)}(\sigma, \Theta) + \alpha_j^{(0)}(\sigma^r, \Theta) = O(j^{-\ell}) \text{ pour certain } \ell > 1. \quad (2.16)$$

*Alors une suite de Laplacien-QMLE  $(\widehat{\theta}_n^{(r)})_n$  converge fortement, soit  $\widehat{\theta}_n^{(r)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \widehat{\theta}_0^{(r)}$ .*

**Preuve du théorème 2.3.1.** La preuve du théorème est divisée en deux parties et suit la même procédure que dans Bardet et Wintenberger (2009) [1]. Dans (i), une loi forte uniforme (sur  $\Theta$ ) des grands nombres satisfaite par  $\frac{1}{n} \widehat{L}_n(\theta)$  convergeant vers  $L(\theta) = -E[q_0(\theta)]$  est établi. En (ii), on prouve que  $L(\theta)$  admet un unique maximum

dans  $\theta_0$ . Ces deux conditions conduisent à la consistance forte de  $\widehat{\theta}_n$  (d'après Jeantheau, 1998 [11]).

(i) De la même manière et pour la même raison dans la preuve du théorème 1 de Bardet et Wintenberger (2009) [1], la loi forte uniforme des grands nombres satisfaite

par la moyenne d'échantillon de  $(\widehat{q}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  (défini dans [2.7]) est implicite en établissant  $E[\|q_t(\theta)\|_{\Theta}] < \infty$ . Mais pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} |q_t(\theta)| &= |(\sigma_\theta^t)^{-r} |X_t|^r + \log(\sigma_\theta^t)^r| \\ &\leq \frac{|X_t|^r}{\underline{\sigma}^r} + |\log(\underline{\sigma}^r)| + (\sigma_\theta^t)^r \\ \implies \sup_{\theta \in \Theta} |q_t(\theta)| &\leq C(|X_t|^r + |\sigma_\theta^t|^r). \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Minkovski  $E|X_t|^r < (E^{\frac{1}{r}}|X_t|^r)^r$  où on a  $\forall t \in \mathbb{Z}$ ,  $E[|X_t|^r] < \infty$  de la proposition 2.1 et  $E[\|\sigma_\theta^t\|_{\Theta}^r] < \infty$  du lemme 5.1 de Bardet et al [2], impliquant :

$E[\|\sigma_\theta^t\|_{\Theta}^r] < \infty$ . Par conséquent, pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $E[\|q_t(\theta)\|_{\Theta}] < \infty$ . Ainsi, la loi forte uniforme des grands nombres pour  $(q_t(\theta))$  suit :

$$\left\| \frac{L_n(\theta)}{n} - L(\theta) \right\|_{\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0. \quad (2.17)$$

Maintenant, nous allons établir  $\frac{1}{n} \|\widehat{L}_n(\theta) - L_n(\theta)\|_{\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0$ . En effet, pour tout  $\theta \in \Theta$  et  $t \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} |\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)| &\leq \left| \log(\widehat{\sigma}_\theta^t)^r - \log(\sigma_\theta^t)^r + (\sigma_\theta^t)^{-r} |X_t|^r - (\widehat{\sigma}_\theta^t)^{-r} |X_t|^r \right| \\ &\leq \left| \log(\widehat{\sigma}_\theta^t)^r - \log(\sigma_\theta^t)^r \right| + \left| ((\widehat{\sigma}_\theta^t)^{-r} - (\sigma_\theta^t)^{-r}) |X_t|^r \right| \\ &\leq \left| \log(\widehat{\sigma}_\theta^t)^r - \log(\sigma_\theta^t)^r \right| + \left| ((\widehat{\sigma}_\theta^t)^{-r} - (\sigma_\theta^t)^{-r}) |X_t|^r \right| \\ &\leq \left| \log(\widehat{\sigma}_\theta^t)^r - \log(\sigma_\theta^t)^r \right| + \left| ((\widehat{\sigma}_\theta^t)^{-r} - (\sigma_\theta^t)^{-r}) |X_t|^r \right| \\ &\leq \left| (\widehat{\sigma}_\theta^t)^r - (\sigma_\theta^t)^r \right| + (\underline{\sigma})^{-r} \left| (\widehat{\sigma}_\theta^t)^r - (\sigma_\theta^t)^r \right| |X_t|^r \\ &\leq C(1 + |X_t|^r) \left| (\widehat{\sigma}_\theta^t)^r - (\sigma_\theta^t)^r \right|, \end{aligned}$$

avec  $C > 0$ .



Par conséquent, on a :

$$\|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)\|_{\Theta} \leq c(1 + |X_t|^r)(\|\widehat{\sigma}_\theta^t\|^r - (\sigma_\theta^t)^r\|_{\Theta}).$$

D'après le corollaire 1 de Kounias et Weng (1969), la preuve est obtenue s'il existe  $s \in (0, 1]$  tel que :

$$\sum_{t \geq 1} \frac{1}{t^s} E[\|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)\|_{\Theta}^s] < \infty. \quad (2.18)$$

Démontrons (2.18) avec  $s = 1$ .

À partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et des hypothèses  $A_0(\sigma, \Theta)$ ,

$$E[\|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)\|] \leq C \left( E[(1 + |X_t|^r)^2] \right)^{\frac{1}{2}} \left( E[(\|\widehat{\sigma}_\theta^t\|^r - (\sigma_\theta^t)^r\|_{\Theta})^2] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant le lemme 1 de Bardet, J.-M. et Wintenberger, O. [1] et les résultats prouvés précédents impliquant  $E[|X_t|^r] < \infty$ ,  $E[\|\sigma_\theta^t\|_{\Theta}^r] < \infty$ , on obtient :

$$\begin{aligned} E[\|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)\|_{\Theta}] &\leq C \left( \sum_{j>t} \alpha_j^{(0)}(\sigma, \Theta) + \alpha_j^{(0)}(\sigma^2, \Theta) \right) \\ &\leq C t^{-(\ell-1)}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue à partir de la condition (2.16) du théorème 2.3.1.

Par conséquent, on a :

$$\sum_{t \geq 1} \frac{1}{t} E[\|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)\|_{\Theta}] \leq A \sum_{t \geq 1} t^{-\ell},$$

En conséquence, on obtient :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)\|_{\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0, \quad \frac{1}{n} \|\widehat{L}_n(\theta) - L_n(\theta)\|_{\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0, \quad (2.19)$$

et donc, en utilisant (2.17),

$$\frac{1}{n} \|\widehat{L}_n(\theta) - L(\theta)\|_{\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0. \quad (2.20)$$

(ii) Maintenant pour  $\theta \in \Theta$ , on étudie :

$$L(\theta) = -E[q_0(\theta)],$$

qui peut également être considérée comme une discordance de Kullback-Lieber, on a :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= -E\left[\log(\sigma_{\theta}^t)^r + (\sigma_{\theta}^t)^{-r} |X_t|^r\right] \\ &= -E\left[\log(\sigma_{\theta}^t)^r + \left(\frac{\sigma_{\theta_0}^t}{\sigma_{\theta}^t}\right)^r |\varepsilon_t|^r\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant  $E[|\varepsilon_t|^r] = 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} L(\theta_0) - L(\theta) &= E\left[\log\left(\frac{\sigma_{\theta}^t}{\sigma_{\theta_0}^t}\right)^r + \left(\frac{\sigma_{\theta_0}^t}{\sigma_{\theta}^t}\right)^r |\varepsilon_t|^r - 1\right] \\ &= E\left[\log\left(\frac{\sigma_{\theta}^t}{\sigma_{\theta_0}^t}\right)^r - 1 + \left(\frac{\sigma_{\theta_0}^t}{\sigma_{\theta}^t}\right)^r E[|\varepsilon_t|^r | (X_{t-k})_{k \geq 1}]\right]. \end{aligned}$$

Mais pour  $\varepsilon_t$  suivant une distribution de probabilité symétrique, pour tout  $m \in \mathbb{R}^*$ ,  $E[|\varepsilon_t + m|^r] > E[|\varepsilon_t|^r] = 1$ . Donc, pour  $\theta \neq \theta_0$ ,

$$\begin{aligned} L(\theta_0) - L(\theta) &> E\left[\log\left(\frac{\sigma_{\theta}^t}{\sigma_{\theta_0}^t}\right)^r - 1 + \left(\frac{\sigma_{\theta_0}^t}{\sigma_{\theta}^t}\right)^r\right] \\ &> h\left(\left(\frac{\sigma_{\theta}^t}{\sigma_{\theta_0}^t}\right)^r\right), \end{aligned}$$

avec  $h(x) = \log(x) - 1 + x$ . Mais pour tout  $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ ,  $h(x) > 0$  et  $h(1) = 0$ . Donc si  $\sigma_{\theta} \neq \sigma_{\theta_0}$ ,  $h\left(\frac{\sigma_{\theta}^t}{\sigma_{\theta_0}^t}\right) > 0$  ( $> 0$  est remplacé par  $= 0$  si  $\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta_0}$ ). Cela implique de la Condition C3 (Identifiabilité) que  $L(\theta_0) - L(\theta) > 0$  presque sûrement pour tout  $\theta \in \Theta$ ,  $\theta \neq \theta_0$ . Ainsi un supremum de  $L(\theta)$  n'est atteint que pour  $\theta = \theta_0$  qui est l'unique maximum.

■

---

---

## CHAPITRE 3

---

### APPLICATION NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre nous concentrons sur l'application pratique de la méthode GGQMLE aux modèles de série chronologique GARCH. Nous illustrons la mise en oeuvre de cette méthode à travers des exemples concrets et une application numérique.

#### 3.1 Exemples

**Exemple 3.1.1** *Pour expliquer notre méthode, on prend un exemple simple où  $\sigma_\theta^t = \sqrt{a}$ ,*

$$X_t = \sqrt{a} \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

*on applique la méthode proposée à ce modèle. Si nous estimons notre paramètre en utilisant le contraste de Laplace, on trouve :*

$$\widehat{a}_n^{(1)} = \widehat{a}_n^{(r)} (E|\varepsilon_t|)^2, \quad (3.2)$$

si nous estimons le paramètre à l'aide du contraste gaussien

$$\widehat{a}_n^{(2)} = \widehat{a}_n^{(r)} E(\varepsilon_t)^2, \quad (3.3)$$

de (3.2) et (3.3) on trouve :

$$\widehat{r}_n = H^{-1}\left(\frac{(\widehat{a}_n^{(1)})^2}{\widehat{a}_n^{(2)}}\right).$$

Et enfin, nous utilisons le contraste pour l'estimation de  $\widehat{a}_n^{(\widehat{r}_n)}$

$$\widehat{a}_n^{(r)} := \arg \max_{a \in \Theta} \widehat{L}_n^{(r)}(a),$$

où

$$\widehat{L}_n^{(r)}(a) = - \sum_{t=1}^n \widehat{q}_t(a) \quad \text{avec} \quad \widehat{q}_t(a) := \log a^{\frac{r}{2}} + (\sqrt{a})^{-r} |X_t|^r.$$

### Exemple 3.1.2 Le modèle GARCH

Le modèle GARCH  $(p, q)$  a été introduit par Bollerslev(1986) [4]) comme solution des équations

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 = \omega^{0*} + \sum_{i=1}^p \alpha_i^{0*} X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j^{0*} \sigma_{t-j}^2, \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $\omega^{0*} > 0$ ,  $\alpha_i^{0*} \geq 0$  pour  $i = 1, \dots, p$  et  $\beta_j^{0*} \geq 0$  pour  $j = 1, \dots, q$  avec  $\alpha_p^{0*}, \beta_q^{0*}$  positif et

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i^{0*} + \sum_{j=1}^q \beta_j^{0*} < 1.$$

En conséquence  $(X_t)_t$  est un processus stationnaire tel que  $\mathbb{E}(|X_0|^s) < \infty$  (voir par exemple Bardet et Wintenberger(2009)[1]). Tel un processus GARCH est un cas particulier de processus causal affine (2.1) où  $\sigma_\theta^t = \sigma_t(\theta)$  on note ici  $\theta = (\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$  et  $(\sigma_t(\theta))_t$  satisfait la relation de récurrence

$$\sigma_\theta^t(\theta) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2(\theta), \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Définissons maintenant  $\Theta$  tel que :

$$\Theta = \{\theta \in [0, \infty[^{p+q+1}, \quad \rho \leq \omega \leq 1/\rho', \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j \leq \rho'\},$$

avec  $0 < \rho, \rho' < 1$ , et ceci assurant la stationnarité de  $(X_t)$  pour tout  $\theta \in \Theta$ .

En utilisant le lemme 2.2.1 on trouve :

$$\widehat{r}_n = H^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\widehat{\sigma}_t^2(\widehat{\theta}_n^{(1)})}{\widehat{\sigma}_t^2(\widehat{\theta}_n^{(2)})}\right), \quad (3.5)$$

où  $\widehat{\sigma}_t^2$  est défini en utilisant  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}} = 0$ .

Nous estimons  $\theta$  par l'estimateur de vraisemblance quasi-maximum gaussien généralisé  $\widehat{\theta}_t^{r_n}$  défini par :

$$\widehat{\theta}_n^{(r_n)} := \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{Argmin}} \sum_{t=1}^n \left( \log |\widehat{\sigma}_\theta^t| + \frac{1}{r_n} \left| \frac{X_t}{\widehat{\sigma}_\theta^t} \right|^{r_n} \right).$$

## 3.2 Application numérique

Afin d'illustrer l'intérêt de l'estimation de la forme du paramètre  $r$ , nous réalisons une expérience MONTE-CARLO sur le comportement de QMLE gaussien, de Laplace QMLE et de QMLE gaussien généralisé, pour le modèle GARCH pour plusieurs tailles d'échantillon ( $n = 100$ ,  $n = 1000$  et  $n = 5000$ ) et différents types de distributions de probabilité pour  $(\varepsilon_t)$  :

- Distribution gaussienne centrée notée  $\mathcal{N}$  ;
- Distribution laplacienne centrée notée  $\mathcal{L}$  ;
- Distribution uniforme centrée notée  $\mathcal{U}$  ;
- Distribution de Student centrée avec 5 degrés de liberté, notée  $t_5$  ;

Le modèle considéré est :

- un processus GARCH(1, 1) défini par  $X_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta \varepsilon_{t-1}^2} \varepsilon_t$  avec  $\alpha_0 = 0.2$ ,  $\alpha_1 = 0.4$  et  $\beta = 0.2$ .

Par conséquent, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne (RMSE) à partir de 1000 répliquions indépendantes de  $\widehat{\theta}_n^{LQL}$ ,  $\widehat{\theta}_n^{LQL}$  et  $\widehat{\theta}_n^{r_n}$  pour ces processus et les résultats sont présentés dans le tableau 3.1. Puisque nous effectuons une expérience de type MONTE-CARLO sur le paramètre de forme où nous considérons des erreurs avec des distributions gaussiennes généralisées pour plusieurs valeurs de  $r$  ( $r = 1, r = 1.3, r = 2, \dots$ ), les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 3.2.

		$\mathcal{L}$			$\mathcal{N}$			$t_3$			$\mathcal{U}$		
		$\widehat{\theta}_n^{r_n}$	$\widehat{\theta}_n^L$	$\widehat{\theta}_n^G$	$\widehat{\theta}_n^{r_n}$	$\widehat{\theta}_n^L$	$\widehat{\theta}_n^G$	$\widehat{\theta}_n^{r_n}$	$\widehat{\theta}_n^L$	$\widehat{\theta}_n^G$	$\widehat{\theta}_n^{r_n}$	$\widehat{\theta}_n^L$	$\widehat{\theta}_n^G$
$n = 100$	$\omega$	0.147	0.101	0.306	0.108	0.097	0.085	0.371	0.683	2.951	0.139	0.173	0.168
	$\alpha$	0.177	0.141	0.408	0.221	0.203	0.187	0.223	0.182	0.182	0.264	0.320	0.320
	$\beta$	0.201	0.198	0.210	0.259	0.265	0.258	0.240	0.241	0.241	0.458	0.447	0.447
	<b>somme</b>	0.525	0.440	0.924	0.588	0.565	0.530	0.834	1.106	3.374	0.861	0.940	0.935
$n = 1000$	$\omega$	0.031	0.029	0.216	0.034	0.074	0.032	0.040	0.043	0.159	0.070	0.087	0.068
	$\alpha$	0.060	0.055	0.416	0.063	0.153	0.058	0.069	0.083	0.083	0.215	0.236	0.236
	$\beta$	0.056	0.056	0.061	0.083	0.090	0.084	0.068	0.066	0.066	0.057	0.075	0.075
	<b>somme</b>	0.147	0.140	0.693	0.180	0.317	0.174	0.177	0.192	0.308	0.342	0.398	0.379
$n = 5000$	$\omega$	0.014	0.013	0.202	0.014	0.073	0.013	0.015	0.030	0.162	0.094	0.102	0.068
	$\alpha$	0.026	0.024	0.405	0.026	0.147	0.025	0.032	0.061	0.061	0.187	0.204	0.204
	$\beta$	0.025	0.025	0.028	0.034	0.038	0.034	0.030	0.028	0.028	0.050	0.059	0.059
	<b>somme</b>	0.065	0.062	0.635	0.074	0.258	0.072	0.077	0.119	0.251	0.331	0.365	0.331

TABLE 3.1 – Erreur quadratique moyenne des composantes de  $\widehat{\theta}_n^{r_n}$ ,  $\widehat{\theta}_n^L$  et  $\widehat{\theta}_n^G$  pour les processus GARCH(1, 1).

	$r = 1$	$r = 1.3$	$r = 1.7$	$r = 2$	$r = 2.6$
$n = 100$	0.36	0.37	0.65	1.01	1.38
$n = 1000$	0.06	0.08	0.12	0.16	0.20
$n = 5000$	0.03	0.04	0.05	0.07	0.09

TABLE 3.2 – Erreur quadratique moyenne des composantes de  $\widehat{r}_n$  pour les processus GARCH(1, 1).

---

# CONCLUSION

Cette étude a démontré que l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance généralisé gaussien (GG-QMLE) est une méthode efficace et robuste pour modéliser des données de séries temporelles. L'estimateur GG-QMLE surpasse d'autres méthodes d'estimation populaires et est particulièrement utile pour modéliser des données de séries chronologiques présentant des erreurs à queue lourde. Ces résultats ont des implications dans différents domaines, tels que la finance, l'économie et l'ingénierie, et suggèrent que l'estimateur GG-QMLE peut être un outil précieux pour l'analyse des séries chronologiques.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bardet, J.-M. Wintenberger, O. (2009) Asymptotic normality of the Quasi-Maximum likelihood estimator for multidimensional causal process, *Ann. Statist.*, **37**, 2730-2759.
- [2] Bardet, J-M. Boularouk, Y. and Djaballah, K. (2017). Asymptotic behaviour of the Laplacian quasi-maximum likelihood estimator of affine causal processes. *Electronic Journal of Statistics* 11 : 452-79.
- [3] Berkes, I. Horváth, L. and Kokoszka, P. (2003) GARCH processes : structure and estimation. *Bernoulli*, **9**, 201-227.
- [4] Bollerslev, T. (1986) Hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisée, *J. Économétrie*, **31**, 307-327.
- [5] Ding, Z., Granger C.W.J. and Engle R.F. (1993) A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical*.
- [6] Doukhan, P. and Wintenberger, O. (2007), Weakly dependent chains with infinite memory. *Stochastic Process. Appl*, **118**, 1997-2013.
- [7] Duchenes, P. and Francq, C. (2008) On diagnostic checking time series models with portmanteau test statistics based on generalized inverses and 2-inverses. *COMPSTAT 2008, Proceedings in Computational Statistics*, 143-154.



- [8] Francq, C. and Zakoian, J.-M. (2004) Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes, *Bernoulli*, **10**, 605-637.
- [9] Francq, C., Lepage, G. and Zakoian, J.-M. (2011) Two-stage non Gaussian QML estimation of GARCH models and testing the efficiency of the Gaussian QMLE. *Journal of Econometrics*, **165**, 246-257.
- [10] Francq, C. and Zakoian, J.-M. (2013) Optimal predictions of powers of conditionally heteroskedastic processes. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **75**, 345-367.
- [11] Jeantheau, T. (1998). Strong consistency of estimators for multivariate arch models. *Econometric Theory*, **14**, 70-86.
- [12] Jianqing Fan, Lei Qi and Dacheng Xiu (2014) Quasi-Maximum Likelihood Estimation of GARCH Models With Heavy-Tailed Likelihoods. *Journal of Business and Economic Statistics*, **32**, 178-191.
- [13] Keh-Shin Lii, Murray Rosenblatt (1992) An Approximate Maximum Likelihood Estimation for Non-Gaussian Non-minimum Phase Moving Average Processes. *Journal of Multivariate Analysis*, **43**, 272-299.
- [14] Kounias, E.G. and Weng, T.-S. (1969) An inequality and almost sure convergence. *Annals of Mathematical Statistics*, **40**, 1091-1093.
- [15] Krengel, U. *Ergodic Theorems*. Gruyter Studies in Mathematics 6, Walter de Gruyter Co., Berlin., 1985.
- [16] Straumann, D. and Mikosch, T. (2006) Quasi-maximum-likelihood estimation in conditionally heteroscedastic time series : A stochastic recurrence equations approach. *Ann. Statist.* **34**, 2449-2495.
- [17] Trindade, A. A., Zhu, Y. and Andrews, B. (2010) Time series models with asymmetric Laplace innovations. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**(12), 1317-1333.
- [18] Yakoub Boularouk, Jean-Marc Bardet. Generalized Gaussian quasi-maximum likelihood estimation for most common time series. 2020. hal-02902614