الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Nombre chromatique de quelques familles de graphes

Préparé par : Samia CHEBTOUL
Karima BOUDJERIOU

Soutenue devant le jury

M. AZI	M.C.B	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
I. BOUFELGHA	M.A.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
A.BAZENIAR	M.C.B	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciement

En premier lieu, nous remercions ***Allah*** qui nous a procuré de la patience et de courage à fin d'achever ce travail et d'atteindre cette réussite.

Nous remercions vivement et chaleureusement Mr ***Ibrahim BOUFELGHA*** encadreur de ce mémoire, pour nous avoir soutenu et guidé tout au long de ce mémoire. Nous le remercions particulièrement pour la confiance qu'il nous a accordé, pour leur régueur scientifique, pour leur patience et pour leurs conseils judicieux qui ont contribué à la réalisation et à accomplissement de ce travail.

Nous remercions sincèrement Mr ***Mourad AZI***, qui nous a fait l'honneur d'accepter d'être président du jury de notre travail.

Nous remercions également Mr ***Abdel ghafour BAZENIAR***, pour l'honneur qu'il nous a fait avoir accepté d'être examinateur de notre travail.

Sans oublier aussi de remercier infiniment tous les enseignants du département des mathématique et informatique, sur leurs aides, efforts et conseils qui ont contribué à notre réussite.

Enfin nous remercions tous ceux qui nous ont de prés ou de loin aidée de mener ce travail .

Dédicace.

Je dédie ce modeste travail à:

*A mes très chères parents qui m'ont soutenue moralement et financièrement et de tendresse qu'***Allah** *me les garde durant toute ma vie.*

- *Ma mère qui a toujours crue en moi et mes études.*
- *Mon père qui m'a toujours encouragé et guidé.*

- *A ma très chèrs sœur :***medjouda.**
- *A mes frères:* ***youcef et anis.***

- *Les petit de ma famille:* **nafoula et nourhan.**
- *A mes amies intimes :* ***samia -amira –djihane***

- *A toute ma famille *****boudjeriou******
- *A ma deuxième famille *****laib******

- *A mes amis de l'université de:***meriam-manar-soulef**

- *A tous ma promotion de* **Math** ***…..2023.***

- *A Tous ceux qui me connaissent*

Karima

Dédicace

Je dédie ce travail en particulier

À mes très chers parents, surtout ma maman

Qui ont été toujours là pour moi, leurs patiences, leurs amours et leurs encouragements tout au long de mes études et au cours de la réalisation de ce mémoire.

«Que dieu me les grades»

À mes sœurs et mes frères :

Sabah, Nadjat, Sami, Soumia, Yahia.

À mes neveux :Firas, Areej, Baraa, Mayare, Alaa, Anas Shaheen.

À mes chère binôme Karima

À toute mes familles et mes amies

À tous mes maîtres

À tous ceux qui me sont chers
À tous ceux qui m'ont aide afin de réaliser ce travail.

Samia CHEBTOUL.

Table des matières

Table des figures

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe, la coloration des graphes consiste à affecter des couleurs aux sommets ou au arêtes ou aux sommets et arêtes de façon que chaque deux objet adjacent ne soient pas se même couleur, sur cette base trois paramètres, ont été défini à savoir le nombre chromatique, l'indice chromatique, et le nombre chromatique total. Dans ce travail, nous essayons d'étudier ces trois paramètres dans la classe, des graphes doubles.

Mots clées : *Nombre chromatique, l'indice chromatique, nombre chromatique total, graphe double .*

Abstract

Let $G(V, E)$ be a graph, the coloring of the graphs consists in assigning colors to the vertices or to the edges or the vertices and edges in such a way that each adjacent absect last is not the same color, on this basis three parameters, have been defined namly the fig chromatic number, the chromatic index, and the total chromatic number.

In this work, we try to study these three parameters in double graphs.

Keywords : Chromatic number, chromatic index, total chromatic number, double graph.

Introduction Générale

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Elle représente un moyen très utile et très éfficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle. Elle est souvent présente dans notre vie quotidienne, sans que l'on en soit toujours conscient. Le problème appelé **"problème des ponts de Koenigsberg"** posé par Euler en 1736 est à l'origine de cette branche. Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "peut-on se promener dans la ville1 en traversant chaque pont une et une seule fois ?". Depuis, la théorie des graphes s'est développée, notamment grâce aux travaux de **Berge** qui a grandement participé à sa diffussion.

La théorie des graphes peut modéliser beaucoup de problèmes pratiques et dans plusieurs domaines, notamment en technologie, par exemple, les problématiques de réseaux informatiques, de réseaux routiers, de transport de marchandises, d'emplois du temps, d'électronique, de mécanique du solide et aussi les réseaux de télécommunication .

La coloration des graphes est un problème ancien, elle constitue un champ et très actif de la théorie des graphes avec un nombre important de conjectures. Son origine remonte au problème des quatre couleurs posé par Francis Guthrie en 1852 : "Est-il possible de colorier toute carte géographique avec au plus quatre couleurs de sorte que deux régions qui ont une frontière en commun aient des couleurs différentes ?".

La coloration des graphes permet de modéliser de nombreux problèmes réels, tels que les problémes d'ordonnancement ou encore d'allocation de fréqeunce.
Il existe plusieurs types de colorations comme des sommets, des arêtes, des faces ou bien un mélange de ces éléments. A la coloration peuvent s'ajouter d'autres contraintes comme celle de la propreté qui consiste à affecter à deux éléments voisins des couleurs différentes. La coloration des sommets a permi de définir un très grand nombre de paramètres.
Ces types de coloration aménent à étudier plusieurs de coloration, *le nombre chromatique* , *l'indice chromatique* et *le nombre chromatique total* .
Le problème de savoir si un graphe admet une k-coloration est NP-difficile c'est-à-dire qu'il n'existe pas a ce jour un algorithme polynomial qui donne la coloration optimal pour tout graphe.

Le tout de ce travail est d'étudier trois paramètres de coloration, le nombre chromatique, l'indice chromatique et le nombre chromatique total dans les graphes doubles. Pour cela nous allons déterminer des valeurs exacts pour ces paramètres pour le double de quelques classes de graphes ensuite nous allons donner des bornes pour trois paramètres.

Ce mémoire est stucturé en trois chapitres :

Dans le chapitre 1 nous présentons les définitions et les notions de base de la théorie des graphes qui nous seront nécéssaires dans la suite.

Dans le chapitre 2 nous présentons en bref les notions liées à la coloration en abordant les différentes catégories de coloration dans les graphes, ensuite nous ennerçon l'essentiel résultants qui ont été obtuens dans ce domaine.

Dans le chapitre 3 nous étudions les paramètres de la coloration dans une classe de graphe très importante qui est le graphe double. Nous commençons par la définition d'un graphe double et son propriétés, ensuite nous présentons nos résultats sur la détermination du nombre (resp, indice) chromatique et le nombre chromatique total sur les graphes doubles pour la classe des graphes suivants : les étoiles, graphes biparti, complet..).

1

Concepts fondamentaux

Introduction

Pour une meilleur compréhension des autres chapitres, il est évident de rappeler quelques généralités sur la théorie des graphes et quelques opérations sur les graphes. Nous commencerons par rappeler certaine définitions élémentaires sur les graphes, ainsi en profiter pour expliciter les notations que l'on retrouvera fréquemment par la suite. Nous définirons ensuite les opérations sur les graphes (produit direct, union, produit cartésienne....)

1.1 Notions de base sur la théorie des graphes

1.1.1 Définitions et notations

Définition 1.1 *Un graphe $G = (V,E)$ est défini par deux ensembles finis non vides, un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E. Une arête $e \in E$ est un couple de sommets (u,v) noté par $e = uv$, où u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Les graphes peuvent se représenter par des dessins. chaque sommet est représenté par un point et chaque arête $e = (u,v)$ par un trait reliant u à v. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Le nombre de sommets de V est appelé l'ordre de G, noté par $n(G)$ et le nombre des arêtes de E est appelé la taille de G, notée par $m(G)$.*

Graphe simple

Définition 1.2 *Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples, (i.e tout couple de sommets est relié par au plus une arête).*

La Figure 1.1 illustre un graphe simple $G = (V,E)$, où $V = \{a,b,c,d,e\}$ et $E =\{ab,ac,ae,be,ce,cd,de\}$.

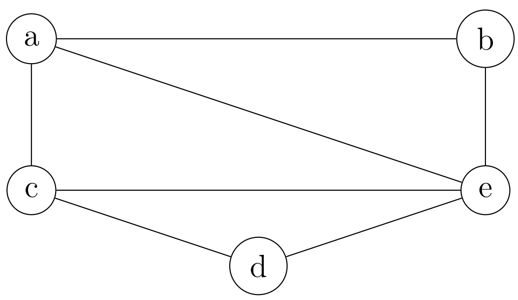


FIGURE 1.1 – Un graphe simple d'ordre 5 et de taille 7

Multigraphe

Définition 1.3 *Un multigraphe $G = (V,E)$ est un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre une paire de sommets ainsi que des boucles. l'illustration d'un multigraphe dans la Figure 1.2.*

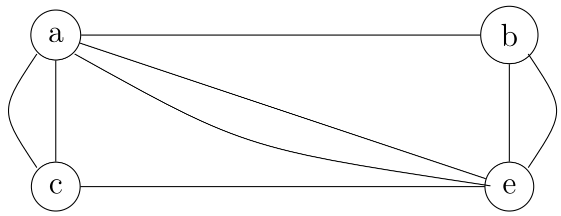


FIGURE 1.2 – Un multigraphe

Graphe orienté

Définition 1.4 *Un graphe orienté est un couple (V,E), où V est l'ensemble des sommets du graphe et E l'ensemble de ses arêtes. V et E sont finis.*
Une arête est une relation entre deux sommets, dotée d'une orientation :
Si $e = (v,u)$ est une arête de E, avec $v,u \in V$, la relation est orientée de v vers u.

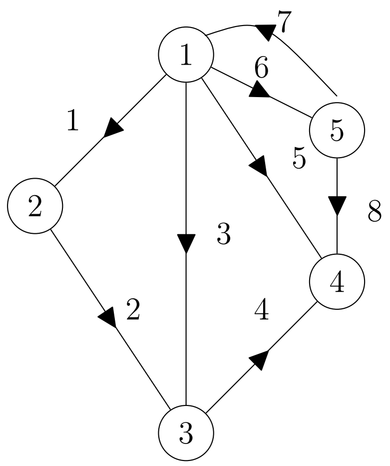


FIGURE 1.3 – Graphe orienté

Graphe non orienté

Définition 1.5 *Un graphe non orienté est définie par le couple (V,E), où V est l'ensemble des sommets du graphe et E l'ensemble de ses arêtes.*

Si v, u sont en relation, cette dernière est décrite par l'arête e = (uv).

Ici, le sens de la relation n'est pas invoqué.

Voisinage ouvert et fermé d'un sommet et d'un sous ensemble de sommets

Définition 1.6 *Soit G = (V,E) un graphe. Pour un sommet u de G :*
Le voisinage ouvert de u est :

$$N_G(u)=\{v \in V : uv \in E\}.$$

Le voisinage fermé de u est :

$$N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}.$$

Le voisinage ouvert d'un sous-ensemble $S \subseteq V$, est :

$$N_G(S)= \cup_{v \in S} N_G(v).$$

Le voisinage fermé de S est :

$$N_G[S]= \cup_{v \in S} N_G[v].$$

Par exemple, pour le graphe G de la Figure 1.1, le voisinage ouvert du sommet b est {a,e} et son voisinage fermé est {a,e,b}

Degré d'un sommet, degré maximum et degré minimum

Définition 1.7 *Pour un graphe simple, le degré d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$, est la taille de l'ensemble $N_G(v)$, i.e*

$$d_G(v) = |N_G(v)|$$

Le degré maximum d'un graphe est le degré maximum de ses sommets, noté par :

$$\Delta(G) = max\{d_G(v)/v \in V(G)\}$$

Le degré minimum d'un graphe est le degré minimum de ses sommets, noté par :

$$\delta(G) = min\{d_G(v)/v \in V(G)\}$$

Pour le graphe G de la Figure 1.1, le degré minimum de G est $\delta(G) = 2$ et le degré maximum $\Delta(G) = 4$.

Lemme 1.1 *(lemme des poignées de main) Soit $G = (V, E)$ un graphe simple de taille m, alors*

$$\sum_{v \in V_G} d_G(v) = 2m.$$

1.1.2 Graphe partiel et sous-graphe

Définition 1.8 *Le graphe H est appelé un sous-graphe de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ et il est appelé un graphe partiel du graphe G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Pour un sous ensemble de sommets non vide $S \subseteq V(G)$ du graphe G, le sous graphe $H = (S, E)$ induit par S dans G, noté par $G[S]$, est le sous graphe du graphe G avec l'ensemble de sommets $V(G[S]) = S$ et l'ensemble d'arêtes $E(G[S]) = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$.*

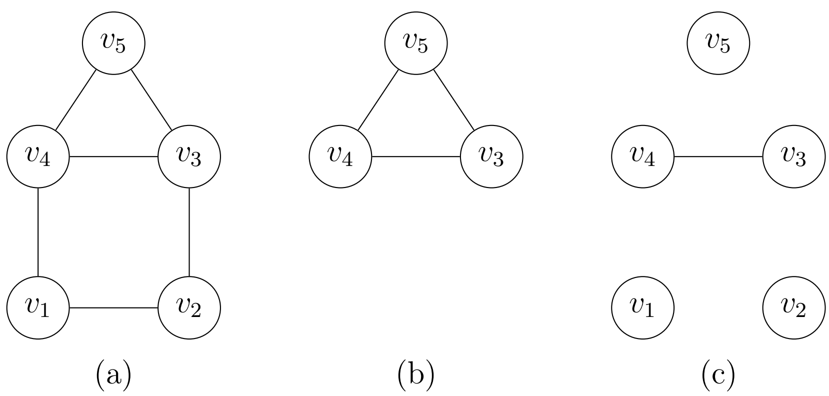


FIGURE 1.4 – (a) Un graphe G, (b) un sous-graphe induit de G, (c) un graphe partiel

Graphe connexe et graphe non connexe

Un graphe est connexe s'il est possible à partir de n'importe quel sommet de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes . Un graphe non connexe se décompose en composontes connexes sur le graphe.

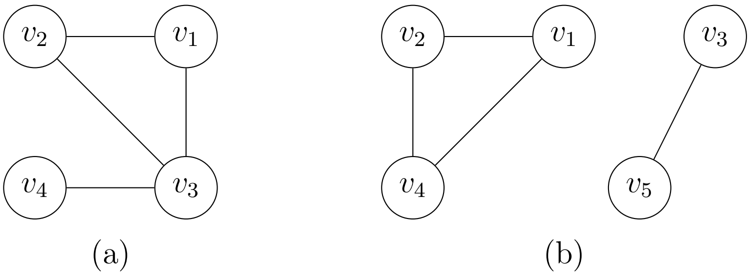


FIGURE 1.5 – (a) Graphe connexe et (b) Graphe non connexe

1.1.3 Point d'articulation

Un sommet v du graphe G=(V,E) est appelé un sommet d'articulation du graphe G si le graphe $G^{'} = (V - \{v\}, E^{'})$ a plus de composantes connexes que G, (i.e G est connexe alors $G^{'} = (V - \{v\}, E^{'})$ n'est pas connexe).

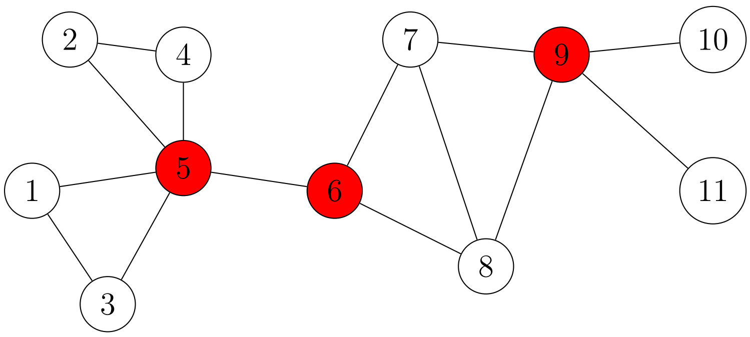


FIGURE 1.6 – Les sommets 5, 6 et 9 des points d'articulation

1.1.4 Représentation d'un graphe

Un graphe peut être représenté graphiquement, comme il peut être représenté par une matrice.

Représentation graphique

Il existe une infinité de représentation d'un graphe. les arêtes ne sont pas forcément rectilignes. Si on peut dessiner un graphe G dans le plan sans qu'aucune arête ne coupe une autre, on dit que G est planaire.

Représentation Matricielle

Matrice d'adjacences

Les outils classiques d'algèbre linéaire peuvent également être utilisés pour coder les graphes. La première idée consiste à considérer chaque arête comme un lien entre deux sommets.

Définition 1.9 *Considérons un graphe G = (V,E) comportant n sommets. La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice U = (u_{ij}) de dimension $n \times n$ telle que*

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \;\; (i,j) \;\in\; E \; (\text{c-à-d } (i,j) \text{ est une arête}) \\ \;0 \; sinon \end{cases}$$

Une telle matrice, ne contenant que des " 0 " et des " 1 " est appelée, de manière générale, une matrice booléenne.

Un graphe orienté quelconque a une matrice d'adjacence quelconque, alors qu'un graphe non orienté possède une matrice d'adjacence symétrique. L'absence de boucle se traduit par une diagonale nulle.

La matrice d'adjacence du graphe dans la Figure 1.5 de graphe connexe est
la suivante :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'incidence

La seconde idée permettant une représentation matriciel d'un graphe exploite la relation d'incidence entre arêtes et sommets.

Définition 1.10 *Considérons un graphe orienté sans boucle G=(V,E) comportant n sommets $v_1,.....v_n$ et m arêtes $e_1,.....e_m$. On appelle matrice d'incidence de G la matrice $M = (m_{ij})$ de dimension $n \times m$ telle que :*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } v_i \text{ est l'extrémité initiale de } e_j \\ -1 \text{ si } v_i \text{ est l'extrémité terminale de } e_j \\ 0 \text{ si } v_i \text{ n'est pas une extrémité de } e_j \end{cases}$$

Pour un graphe non orienté sans boucle, la matrice d'incidence (aux arêtes) est définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } v_i \text{ est une extrémité de } e_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La matrice d'incidence du graphe dans la figure 1.3 s'écrit sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Quelque Classes Des Graphes

Chaîne et Cycle

Définition 1.11 *Une chaîne joignant deux sommets x et y dans G est une suite de sommets et d'arêtes, telle que la première arête de la suite est incidente à x, la dernière arête de la suite est incidente à y et chaque arête intermédiaire de la suite est adjacente à la précédente par une de ses extrémités.*

une chaîne est dite simple si la séquence qui la constitue ne parcourt pas plusieurs fois Le même arête.

une chaîne est dite élémentaire si la séquence qui la constitue ne parcourt pas plusieurs fois le même sommet.

On appelle cycle dans un graphe G, une chaîne qui se referme.

Un cycle simple est une chaîne simple qui se referme.

Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire qui se referme.

La longueur d'une chaîne (cycle) *est le nombre d'arêtes qui la constituent.*

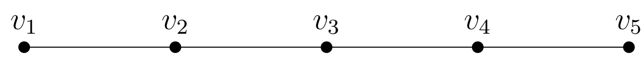


FIGURE 1.7 – Chaîne de 5 sommets

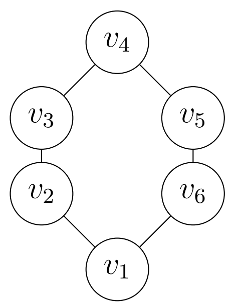


FIGURE 1.8 – Cycle C_6

Graphes eulériens

Définition 1.12 *On appelle cycle eulérien d'un graphe G un cycle passant une et seule fois par chacune des arête de G.*

Un graphe est dit eulérien s'il possède un cycle eulérien. On appelle chaîne eulérien d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G.

Un graphe ne possédant que des chaîne eulériennes est semi-eulérien. plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

Théorème 1.1 *(Théorème d'Euler (1736)) Un graphe connexe est eulérien si et seulement si chacun de ses sommets est incident à un nombre pair d'arête.*

Si exactement deux sommets s et t sont incidents à un nombre impair d'arêtes, le graphe est dit semi-eulérien.

Graphe K-régulier

Définition 1.13 *Soit k un entier, un graphe G est k-**régulier** si tout sommet est de degré k. Un graphe 3-régulier est dit **cubique**. Par exemple, les cycles sont des graphes 2-réguliers, les couplage sont des graphes 1-réguliers, les stables sont des graphes 0-réguliers.*
La figure 1.9 illustre un graphe G est 4-régulier.

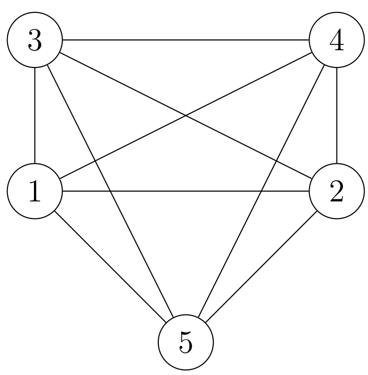
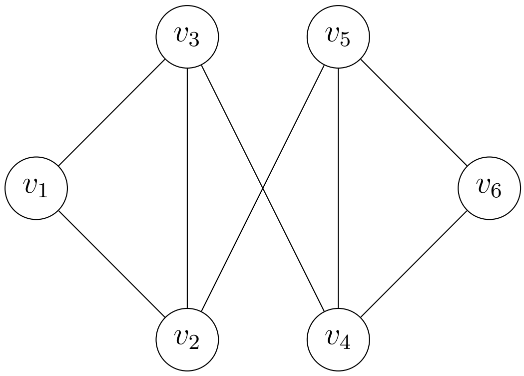


FIGURE 1.9 – Un graphe G, 4-régulier

Graphes Hamiltoniens

Définition 1.14 *Un graphe G est dit hamiltonien, s'il possède au moins un cycle qui passe par tous les sommets du graphe G une et une seule fois un tel cycle est appelé cycle Hamiltonien.*
Le graphe illustré dans La Figure 1.10 est Hamiltonien



(a)

FIGURE 1.10 – (a) Graphe Hamiltonien

Théorème 1.2 *Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour toute pair $\{x, y\}$ de sommet non adjacents, on a $d(x) + d(y) > n$, alors G est hamiltonien.*

Corollaire 1.1 *(Dirac) Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour tout sommet x de G on a $d(x) > \frac{n}{2}$, alors G est hamiltonien.*

Graphe Complet

Définition 1.15 *Un graphe complet d'ordre n, noté K_n, est un graphe simple tel que chaque sommet relié à tous les autres sommet.*

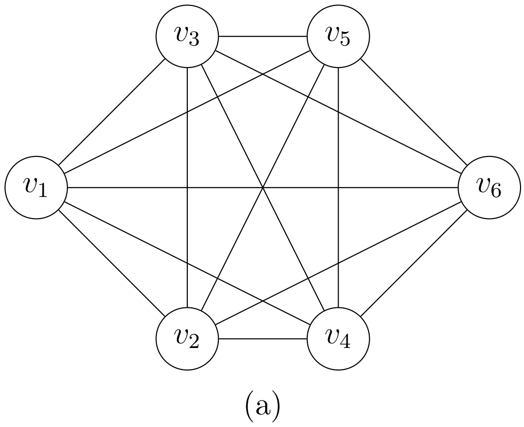


FIGURE 1.11 – (a) Graphe complet K_6

Proposition 1.1 *Le nombre d'arêtes de k_n est :* $\frac{n(n-1)}{2}$

Graphe biparti

Définition 1.16 *Un graphe G est biparti si V peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 de telle sorte que toute arête du graphe possède une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2.*

Un graphe biparti est dit biparti complet si chaque sommet de V_1 est adjacent à chaque sommet de V_2. Si $|V_1| = m$ et $|V_2| = n$ alors le graphe est noté $K_{m,n}$.

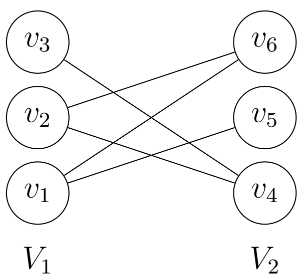


FIGURE 1.12 – Graphe biparti

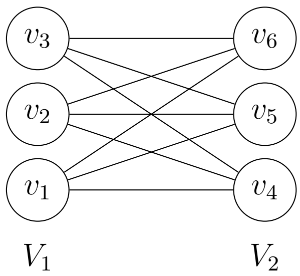
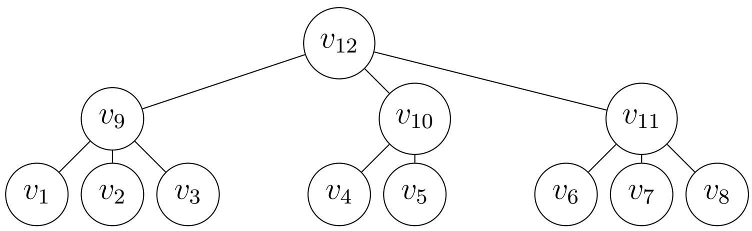


FIGURE 1.13 – Graphe biparti complet $K_{3,3}$

Arbre

Définition 1.17 *Un arbre T est un graphe connexe sans cycle. Il comporte exactement* $(n-1)$ *arête. On appelle* ***feuille*** *d'un arbre, un sommet de degré 1 dit aussi sommet pendant. Dans un arbre T, tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelle sommet* ***support****. La profondeur h(T) de l'arbre T est la longueur de la plus longue chaîne de la* ***racine*** *à une feuille*

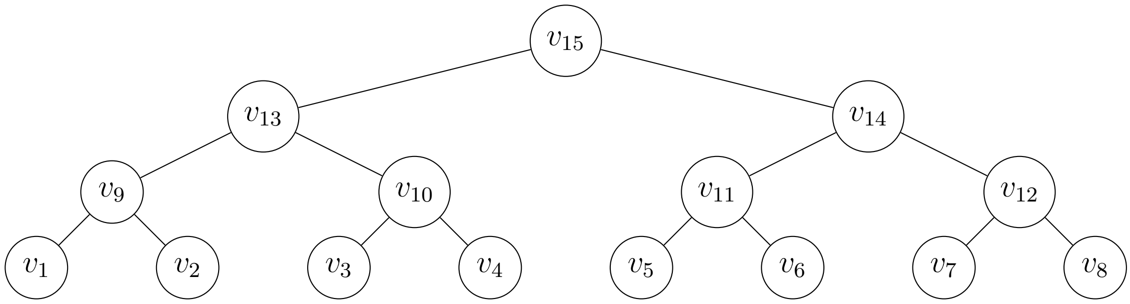


(a)

FIGURE 1.14 – (a) Un arbre

Arbre binaire complet

Définition 1.18 *Un arbre binaire enraciné est un arbre binaire complet si chaque sommet d'arbre possède exactement deux fils sauf les feuille.*

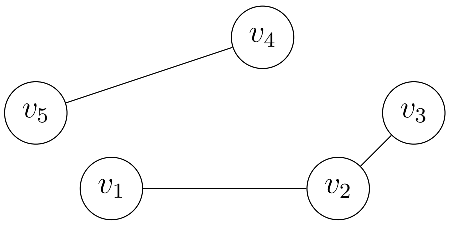


(a)

FIGURE 1.15 – (a) Arbre binaire complet de profondeur 3

Forêt

Définition 1.19 *La forêt est un graphe non connexe est sans cycle.*



(a)

FIGURE 1.16 – (a) Forêt

Chenille

Définition 1.20 *Une chenille noté $C(t_1, t_2, ...t_n)$ est un arbre dont la suppression des arêtes pendantes incidentes aux sommet $t_1, t_2, ...t_n$ produira une chaîne t_1 - t_2 -...t_n.*

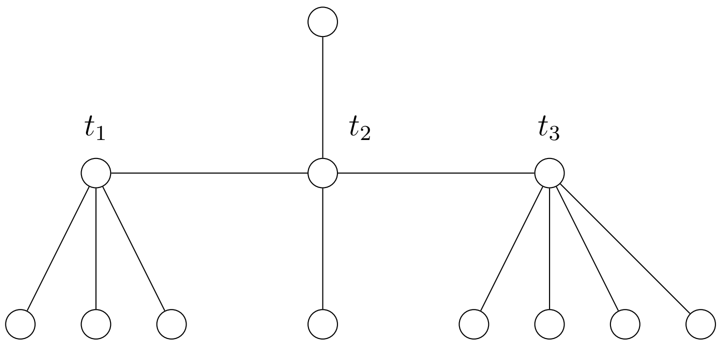


FIGURE 1.17 – Une chenille C(3,2,4)

Étoile

Définition 1.21 *On appelle étoile et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant un sommet de degré n.*

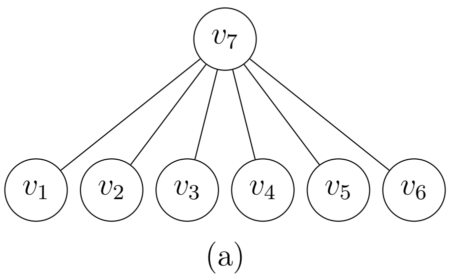
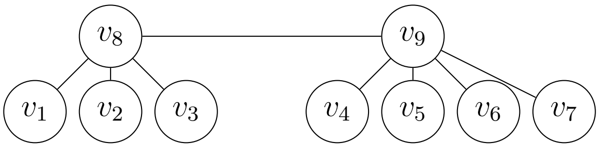


FIGURE 1.18 – (a) Une étoile

Étoile double

Définition 1.22 *L'étoile double, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet centre d'un étoile $K_{1,p}$ au sommet centre d'un étoile $K_{1,q}$.*

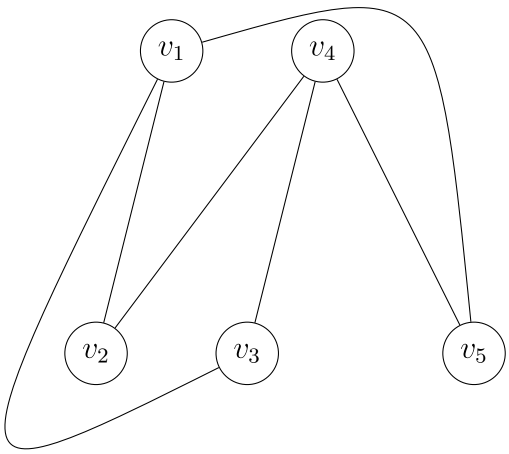


(a)

FIGURE 1.19 – (a) Étoile double

Graphe Planaire

Définition 1.23 *C'est Un graphe qui peut être représenté sur un plan (ou une sphère) tel que deux arêtes ne se coupent pas. Tous les graphes moins de 5 sommets sont planaires, ainsi que tous les graphes bipartis de moins de 6 sommets.*



(a)

FIGURE 1.20 – (a) Le graphe $K_{3,2}$ est planaire

Cactus

Définition 1.24 *Un Cactus est un graphe tel que chacune de ses arêtes appartient à un cycle. Le Figure illustre un Cactus.*

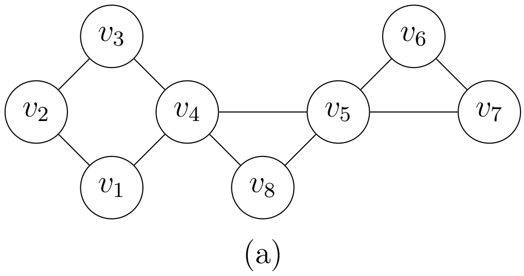


FIGURE 1.21 – (a) Cactus

Graphe K-dégénéré

Un graphe G est K-dégénéré si tout sous-graphe de G contient un sommet de degré au plus K.

- *Les arbres sont des graphes 1-dégénéré.*
- *Le graphe de la figure 1.21 est 2-dégénéré.*

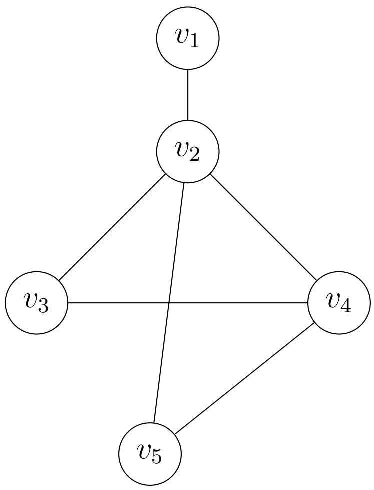


FIGURE 1.22 – Un graphe 2-dégénéré

Remarque 1.1 *Tout graphe qui contient un sommet de degré K n'est pas nécessairement k-dégénéré.*

Graphe roue

La roue, notée W_n, est un graphe formé d'un cycle C_{n-1} avec un sommet suplémentaire connecté à tous les sommets de ce cycle .
La roue W_9 illustré dans la figure 1.23.

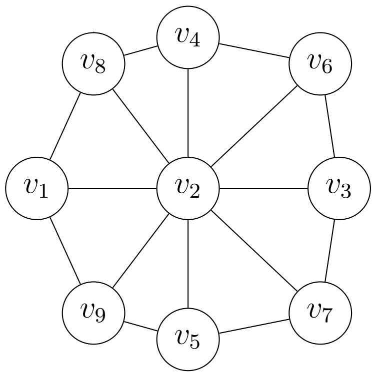
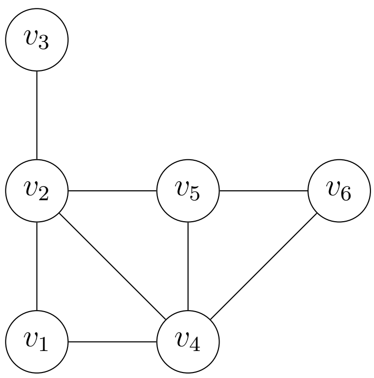


FIGURE 1.23 – La roue W_9

Triangulé

Définition 1.25 *Un graphe est Triangulé si tout cycle de longueur ≥ 4 possède une corde (arête entre deux sommets non-consécutifs du cycle).*

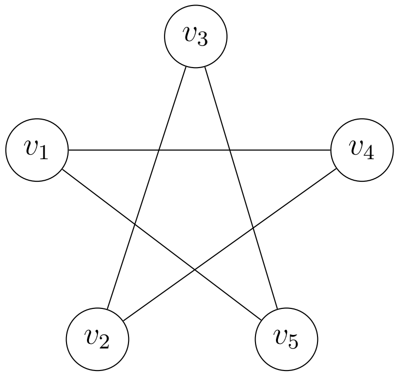


(a)

FIGURE 1.24 – (a) Graphe triangulé

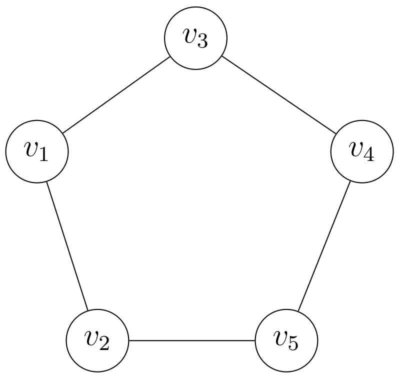
Complémentaire d'un graphe

Définition 1.26 *Le graphe complémentaire d'un graphe simple, noté* $\bar{G} = (V, \bar{E})$*, est défini par* $V(\bar{G}) = V(G)$ *et* $E(\bar{G}) = uv : u \in V(G), v \in V(G)$ *et* $uv \notin E(G)$



(a)

FIGURE 1.25 – (a) Un graphe simple



(b)

FIGURE 1.26 – (b) Le complémentaire de (a)

Graphe d'intervalles

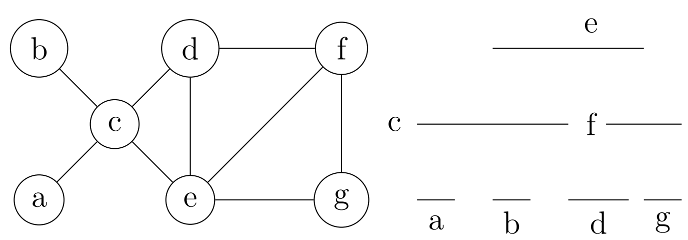
Définition 1.27 *Un graphe d'intervalles est le graphe d'intersection d'intervalles sur la droite réelle. Donc étant donné un ensemble I=*$\{I_1, \ldots, I_n\}$ *d'intervalles sur la droite réelle*

On lui associe le graphe d'intervalles $G = (V, E)$ ou $V = \{1, ...n\}$ et deux sommets u et v sont reliés par une arête si et seulement si $I_u \bigcap I_v \neq \varnothing$ où I_u et I_v sont les intervalles associés à u et v.
Autrement dit : G est d'intervalles si on arrive à placer toutes les intervalles en respectant :

$$u \Rightarrow I_u \in \text{ à la droite réelle}$$

$$v \Rightarrow I_v \in \text{ à la droite réelle}$$

$$uv \in E \Leftrightarrow I_u \bigcap I_v \neq \varnothing$$



(a)

FIGURE 1.27 – (a) Un graphe d'intervalles

Clique

Définition 1.28 *Une clique dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets deux à deux adjacents, ou est un sous-graphe complet.*

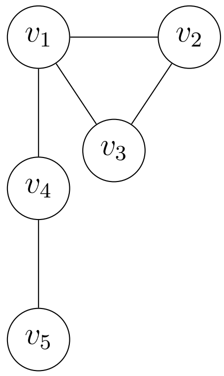
Par exemple le graphe simple de la figure 1.1 admet une clique d'ordre 3

1.3 Quelques paramètres des graphes

Distance entre deux sommets :

La distance entre deux sommets v_i et v_j notée d(v_i,v_j) est le nombre minimum d'arêtes d'une chaîne allant de l'un à l'autre .

Exemple 1.1 *D'après le graphe illustré dans FIG 1.28, nous calculons la distance entre le sommet v_1 et les autres sommets .*



d(v_1,v_2) $= 1$

d(v_1,v_3) $= 1$

d(v_1,v_4) $= 1$

d(v_1,v_5) $= 2$

FIGURE 1.28 – Un graphe simple G

Excentricité :

L'excentricité d'un sommet $e(v_i)$, notée $e(v_i)$, est la distance maximale existant entre ce sommet et les autres sommets du graphe c-à-d : e(v_i) $= max_{v_j \in V}$ d(v_i,v_j) tel que i $\neq$ j.

D'après le graphe illustré dans FIG.1.28, et après avoir calculé la distance entre tous les sommets on trouve :

$$\begin{cases} e(v_1) = 2; \\ e(v_2) = 3; \\ e(v_3) = 3; \\ e(v_4) = 2; \\ e(v_5) = 3; \end{cases}$$

Rayon d'un graphe :

Le rayon d'un graphe G noté rad(G) est l'excentricité minimum sur tous les sommets de G c-à-d : rad(G) $= min_{v_i \in V(G)}$ e(v_i).

D'après la figure 1.28 on a rad(G) $=$ 2 .

Diamètre d'un graphe :

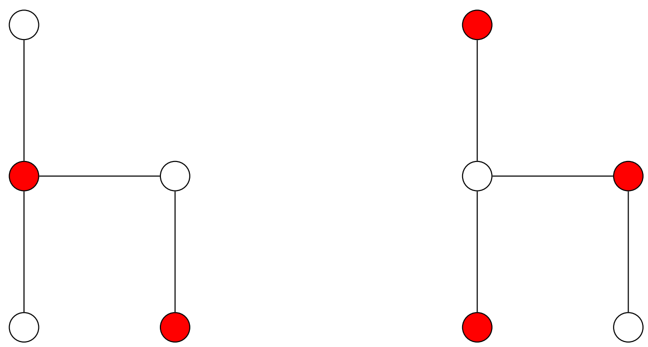
Le diamètre d'un graphe G noté Diam(G) est l'excentricité maximum sur tous les sommets de G c-à-d : diam(G) $= max_{v_i \in V(G)}$ e(v_i).

D'après la figure 1.28 on a Diam(G) $=$ 3

Nombre de stabilité :

Définition 1.29 *Etant donné un graphe simple G. On appelle* ***stable*** *de G un sous ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents.*

Il est facile de voir qu'un ensemble maximum est aussi maximal, mais un ensemble maximal n'est pas nécessairement maximum. Par exemple, le stable formé par les sommets rouges sur la figure 1.29(a) est maximal (il est en effet impossible d'ajouter à ce stable un autre sommet pour former un stable de cardinalité supérieure), mais il n'est pas maximum (puisqu'il est possible de trouver un autre stable, de cardinalité supérieure (fig. 1.29(b))



(a) Un stable mximal (b) Un stable maximum et maximal

FIGURE 1.29 – La différence entre un stable maximal et un stable maximum

Remarque 1.2 *Dans un graphe simple il est possible de trouver plusieurs stables maximal. La taille d'un stable maximum de G est notée $\alpha(G)$ et appelé nombre de stabilité, et celle d'une clique maximum est notée $\omega(G)$. Naturellement, on a*

$$\alpha(G) = \omega(\bar{G}).$$

Déterminer un stable maximum ou une clique maximum dans un graphe arbitraire n'est pas du tout trivial.

Transversal :

Définition 1.30 *Un transversal d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble T de sommets de V qui couvre toutes les arêtes de G, i.e, chaque arête de G est incidente au moins a un sommet de T. Notons qu'un transversal existe pour tout graphe et si T est un transversal, alors $V \backslash T$ est un stable. noté par $\tau(G)$ la cardinalité d'un transversal minimum. $\tau(G) = \min(|T|,\ T$ transversal de G) .*

Nombre de couplage :

Définition 1.31 *Pour un graphe $G = (V, E)$, on appelle couplage M dans G un sous-ensemble d'arête de E deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de* *taille maximum. On désigne par α,la taille d'un couplage maximum dans G.*

Un sommet x de G est dit saturé par un couplage M, s'il existe une arête de M incidente à x, sinon, le sommet x est dit insaturé par M. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé un couplage parfait.

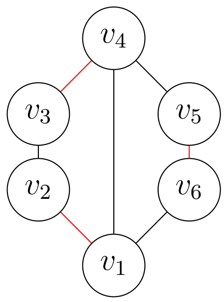


FIGURE 1.30 – Couplage parfait

Recouvrement :

Définition 1.32 *Etant donné un graphe simple $G = (V, E)$ sans sommet isolé. On appelle recouvrement de G, un ensemble R d'arêtes de E qui couvre tous les sommet de G (i.e chaque sommet de G est incident à une arête de R).*
Un recouvrement minimum est un recouvrement de cardinalité minimum. On note par $\upsilon(G)$, la taille d'un recouvrement minimum de G.

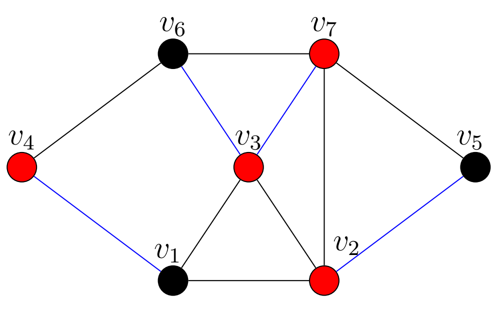


FIGURE 1.31 – Un graphe G avec $\upsilon(G) = \tau(G) = 4$

pour le graphe G illustré dans la figure 1.31, l'ensemble des sommets noirs représente un stable S de cardinalité maximum, l'ensemble des sommets rouges représente un transversal T de cardinalité minimum. L'ensemble des arêtes en bleu représente un recouvrement de cardinalité minimum $\upsilon(G)$.
D'où $\alpha(G) = 3, \tau(G) = 4, \upsilon(G) = 4$.

1.4 Opération classiques sur les graphes

1.4.1 Produit Cartésienne de deux graphes

Étant donnés deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$, le produit cartésien de G avec H, noté $G\square H$ est le graphe défini sur l'ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ tel que deux sommets $(u, u^{'})$ et $(v, v^{'})$ sont adjacents si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifié :
• $u = v$ et $u^{'}v^{'} \in E(H)$
Ou
• $uv \in E(G)$ et $u^{'} = v^{'}$
La Figure montre le produit cartésien de $H = K_2\square C_4$.

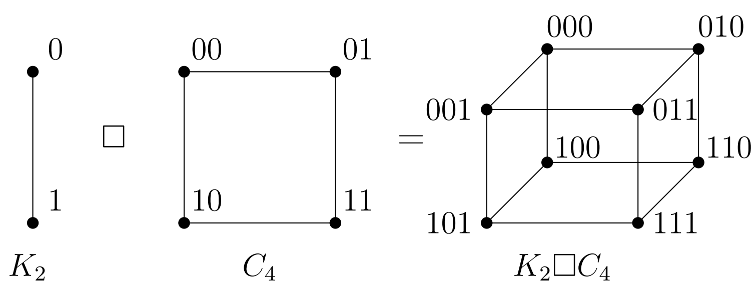


FIGURE 1.32 – Produit Cartésien de $K_2\square C_4$

Il est noté que le nombre de sommets dans $G\square H$ est $|V(G)| \times |V(H)|$ et que le nombre d'arêtes de $G\square H$ $|V(G)| \times |E(H)| + |V(H)| \times |E(G)|$.

Exemple 1.2 *1. La grille carrée $P_m\square P_n$ est le produit cartésien des deux chaîne P_m et P_n (Par exemple, la figure représente la grille $P_5\square P_4$).*

2. La grille circulaire $P_m \square C_n$ est le produit cartésien de la chaîne P_n par le cycle C_n.

3. La grille torique (ou simplement tore) $C_m \square C_n$ est le produit cartésien de deux cycles C_m et C_n.

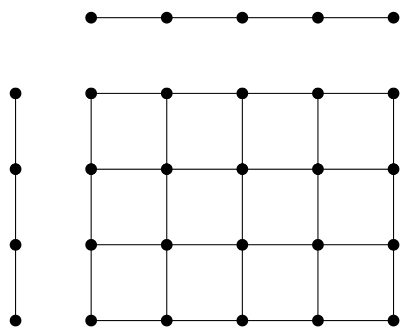


FIGURE 1.33 – La grille $P_5 \square P_4$

1.4.2 Produit direct de deux graphes

Définition 1.33 *Étant donnés deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$, le produit direct de G par H, noté $G \times H$ est le graphe défini sur l'ensemble de sommets $V(G), V(H)$ tel que deux sommets $(u, u^{'})$ et $(v, v^{'})$ sont adjacents si et seulement si $uv \in E(G)$ et $u^{'}v^{'} \in E(H)$.*

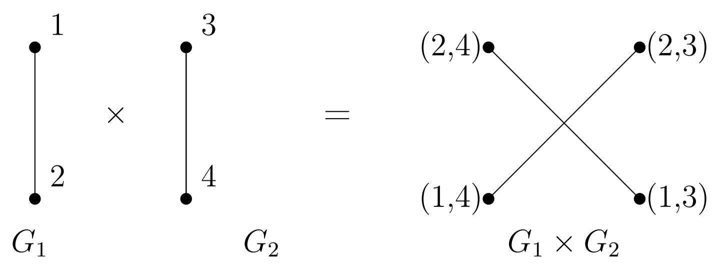


FIGURE 1.34 – Produit direct de deux graphes $G_1 \times G_2$

La figure montre le produit direct de $K = G_1 \times G_2$

1.4.3 Produit lexicographique de deux graphes

Définition 1.34 *Soient G et H deux graphes. Le produit (où composition) lexicographique de deux graphes G et H est le graphe $G \circ H$ avec $V(H) \times V(G)$ comme ensemble des sommets et contiguite défini par (v_1, w_1) adjacente (v_2, w_2) si est seulement si ($v_1 = v_2$ et $w_1w_2 \in E(H)$) où $v_1v_2 \in E(G)$.*

1.4.4 Union de deux graphes

Définition 1.35 *L'union $G = S \cup H$ de deux graphes S et H est le graphe G ayant pour ensemble de sommets $V = V(S) \cup V(H)$ et pour ensemble d'arêtes $E = E(S) \cup E(H)$, où $V(S)$ (reps.$V(H)$) est l'ensemble des sommets de S (reps. H) et $E(S)$ (reps. E(H)) est l'ensemble des arêtes de S (reps. H)*

1.4.5 Puissance d'un graphe

Définition 1.36 *La p-ième puissance G^p d'un graphe G est le graphe ayant le même ensemble de sommets que G, et tel que deux sommet v et w dans G^p sont adjacents si et seulement si la distance entre eux dans G,*
*est au plus **p** ($d_G(v, w) \leq p$).*

Par exemple, le troisième puissance de cycle C_6 est le graphe complet K_6

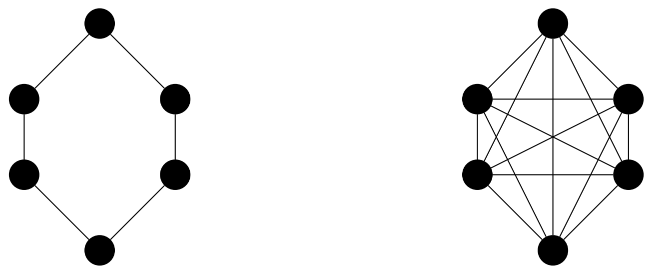
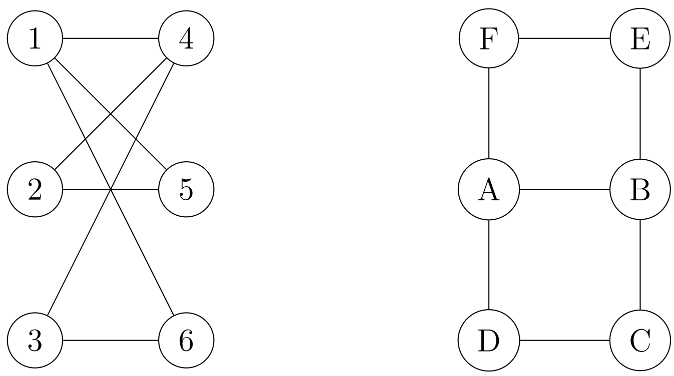


FIGURE 1.35 – Le Cycle C_6 et le graphe $K_6 = C_6^3$

1.4.6 Isomorphisme de graphes

Définition 1.37 *Deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$ sont isomorphes s'il existe une bijection $f : V(G) \rightarrow V(H)$ telle que $\forall\ u,\ v \in V(G)$ u et v sont adjacents dans G si et seulement si f(u) et f(v) sont adjacents dans H. On note alors $G \backsimeq H$. Intuitivement, deux graphes sont isomorphes s'ils ont la même « structure », i.e. s'il est possible de déplacer les sommets de l'un pour qu'il soit la copie conforme de l'autre (au nom des sommets près).*



f(1) = A
f(2) = C
f(3) = E
f(4) = B
f(5) = D
f(6) = F

FIGURE 1.36 – Deux graphes isomorphes et la bijection explicitée

2

Coloration des graphes

Introduction

La coloration des graphes est un problème de la théorie des graphes est lié à de nombreuses applications répandues à des domaines variés, tels que :
-L'affectation de fréquences dans les réseaux cellulaires.
-Les gestion de chaines logistiques.
-La gestion du trafic aérien.
-Stockage de produit chimiques qui peuvent exploser s'ils sont en contacts (combien de wagons ou d'aires de stockage nécessaires ?).

-Un cartographe qui doit colorer deux pays limitrophes avec deux couleurs différentes.

2.1 Coloration des sommets

Définition 2.1 *Colorier un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de façon que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur. On peut aussi définir une coloration d'un graphe de la manière suivante :*

La coloration des sommets d'un graphe G = (V,E) est une fonction c dans c(v) associant à tout sommet $v \in V$ une couleur c(v), en s'assurant que $c(v) \neq c(u)$ pour toute arête $uv \in E$.

2.1.1 Nombre chromatique

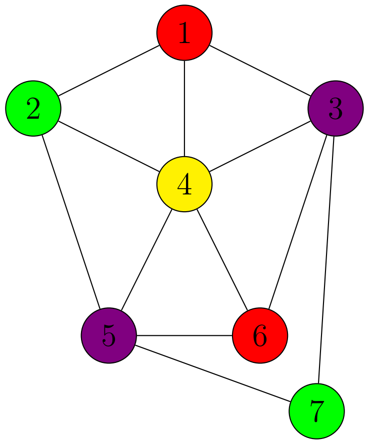
Le nombre chromatique d'un graphe G = (V,E), noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.

Exemple 2.1 *La figure 2.1 illustre un exemple de graphe 5-coloration.*

FIGURE 2.1 – Coloration propre de sommets d'un graphe G

La figure 2.1 représente une 5-coloration propre des sommets d'un graphe G mais le nombre utilisé n'est pas le minimum. Le nombre chromatique de G vérifie : $\chi(G) \geq 3$, car G contient C_3 donc au moins 3 couleurs sont nécessaires pour colorer le graphe G, comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs, alors $\chi(G) \leq 3$. On conclure que $\chi(G) = 3$.

Exemple 2.2 *La figure 2.2 illustre un exemple de graphe 4-coloration.*



$$S_1 = \{2,7\}, S_2 = \{1,6\}, S_3 = \{4\}, S_4 = \{3,5\}$$

FIGURE 2.2 – Graphe admet une 4-coloration

Ce graphe est 4-colorable donc $\chi(G) \leq 4$, il contient un C_5 impair donc $\chi(G) \geq 3$, de plus le sommet 4 est adjacent à tous les sommets de C_5, il faut donc colorer ce sommet avec une couleur différente des couleurs déjà affectées aux sommets de C_5, on en conclut que $\chi(G) \geq 4$, donc le nombre chromatique de G est $\chi(G) = 4$.

2.1.2 Encadrement du nombre chromatique

Majoration :[9]

• Soit G $= (V, E)$ un graphe simple d'ordre n, et de degré maximum $\Delta(G)$, alors

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

• Soit G $= (V, E)$ un graphe simple d'ordre n, et $\alpha(G)$ le nombre de stabilité de G alors

$$\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$$

Minoration :[9]

• Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.

• Le nombre chromatique du graphe sera supérieur ou égal à l'ordre de sa plus grande clique, que l'on note ω(G). Autrement dit

$$\chi(\mathrm{G}) \geq \omega(\mathrm{G})$$

Preuve : Puisque, par définition, dans une clique d'ordre m, tous les sommets sont adjacents entre eux, il faudra m couleurs. Donc, il faudra au moins ω(G) couleurs pour colorer le graphe G.

Théorème de Brooks :

Pour tout graphe connexe G qui n'est pas complet et qui n'est pas un cycle impair on a :

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Proposition 2.1 *[2] Soit G = (V,E) un graphe simple alors $\chi(G) \geq \alpha(G)$. En résumé pour tout graphe G d'ordre n on a :*

$$\alpha(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq n$$

Proposition 2.2 *[7] Soit G = (V,E) un graphe simple d'ordre n, on a le résultat suivant :*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Proposition 2.3 *[7] Soit G = (V,E) un graphe simple d'ordre n Alors :*

$$\chi(G) + \alpha(G) = n + 1$$

Exemple 2.3 *Ce graphe (figure 2.3) possède un sous-graphe qui est un cycle d'ordre 3, donc $\chi(G) \geq 3$. Il n'est pas complet et n'est pas non plus un cycle d'ordre impair,donc par Brooks, $\chi(G) \leq 3$. Donc $\chi(G) = 3$*

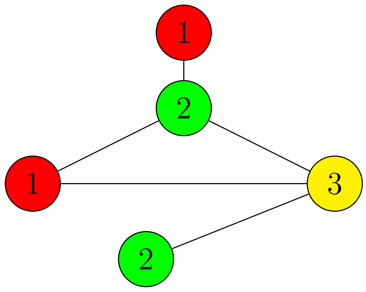


FIGURE 2.3 – Exemple d'application de théorème de Brooks $\chi(G) = 3$

2.1.3 Le nombre chromatique de quelques classes de graphes

Graphe complet

Dans un graphe complet, comme tous les sommets sont adjacents, il faut une couleur différente par sommet. On en déduit le résultat suivant :
• Le nombre chromatique d'un graphe complet est égal à l'ordre de ce graphe.

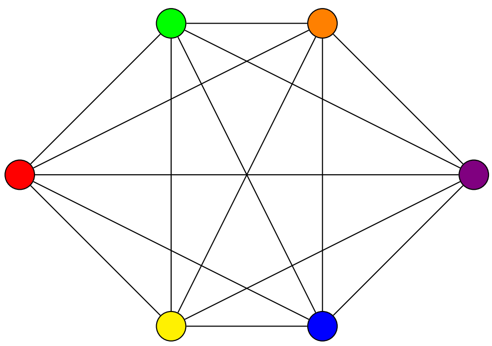


FIGURE 2.4 – $\chi(K_6) = 6$

Les étoiles

On donne une couleur pour le sommet centre et un autre couleur pour les sommets voisins
• Le nombre chromatique d'une étoile est égal à 2.

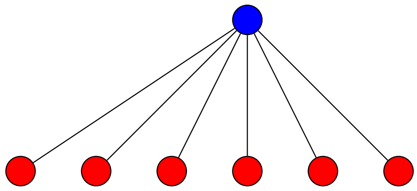


FIGURE 2.5 – $\chi(G) = 2$

Graphe biparti

Un graphe G= (V,E) est biparti si et seulement s'il est 2-coloriable.
• Le nombre chromatique d'un graphe biparti est égal à 2.

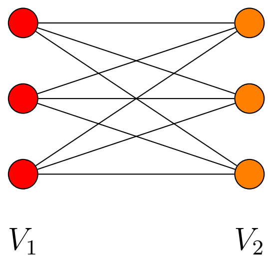


FIGURE 2.6 – $\chi(K_{3,3)} = 2$

Les arbres

• Le nombre chromatique des arbres est égal à 2 (les arbres sont des graphes bipartis).

Graphe roue

Pour les valeurs paires de n, les sommets du cycle C_{n-1} peuvent être colorés avec deux couleurs et le centre se voit attribuer la troisième couleur alors
• Le nombre chromatique d'un graphe roue est égal à 3.
Pour n impair les sommets du cycle C_{n-1} nécessitent trois couleurs et le centre se voit attribuer la quatrième couleur alors
• Le nombre chromatique est égal à 4.

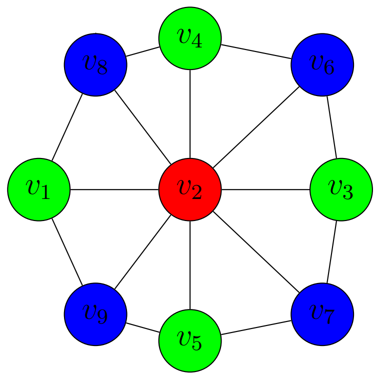


FIGURE 2.7 – $\chi(W_9) = 3$

Graphe stable

G n'a pas d'arêtes, donc aucun de ses sommets n'est adjacent à un autre et par la suite tous les sommets vont avoir la même couleur.
• Le nombre chromatique d'un graphe stable est égal à 1.

Graphe k-dégénéré

• Le nombre chromatique d'un graphe k-dégénéré est inférieur ou égal à k + 1 (théorème de Halin)

Cycle élémentaire

• Le nombre chromatique d'un cycle élémentaire C_n

$$\chi_{(C_n)} = \begin{cases} 2, & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ 3, & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases}$$

FIGURE 2.8 – $\chi(C_6) = 2$ et $\chi(C_5) = 3$

Remarque 2.1 • *Le nombre chromatique d'un graphe sans cycle ayant au moins une arête est 2. En effet, le nombre chromatique d'un graphe est le maximum des nombres chromatiques de ses composantes connexes, qui sont ici des arbres.*

• *Si un graphe à h composantes connexes, son nombre chromatique est le plus grand des nombres chromatiques de ces h composantes. L'étude du nombre chromatique peut donc se restreindre à celle du nombre chromatique des graphes connexes.*

2.2 Coloration d'arêtes

Définition 2.2 *Une K-coloration propre des arêtes d'un graphe $G = (V, E)$ est une application c de l'ensemble des arêtes E(G) dans l'ensemble des entiers de couleurs 1,2,3,...,K, de telle sorte que deux arêtes adjacentes dans G reçoivent des couleurs différentes. Formellement, $c(u) \neq c(v)$ pour chaque deux arêtes adjacentes u et v de G. Un graphe G est K-arête-colorable s'il existe une K-coloration d'arêtes de G.*

Remarque 2.2 *Une K-coloration des arêtes d'un graphe G est donc une partition de l'ensemble des arêtes de G en K-couplage.*

2.2.1 L'indice chromatique

Définition 2.3 *[10] L'indice chromatique $\chi^{'}(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs nécessaire pour une coloration des arêtes de G.*

Exemple 2.4 *La figure 2.9 représente une 5-coloration d'arêtes d'un graphe G, mais le nombre de couleurs utilisées n'est pas le minimum. L'indice chromatique de G vérifié $\chi^{'} \geq 3$, car G contient C_3 donc, au moins 3 couleurs nécessaires pour colorer le graphe G, comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs (la figure 2.9), alors $\chi^{'} \leq 3$. D'oú $\chi^{'} = 3$.*

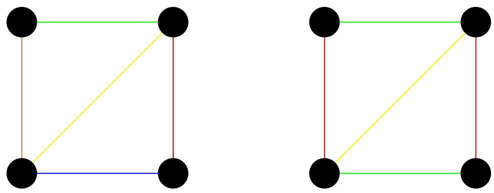
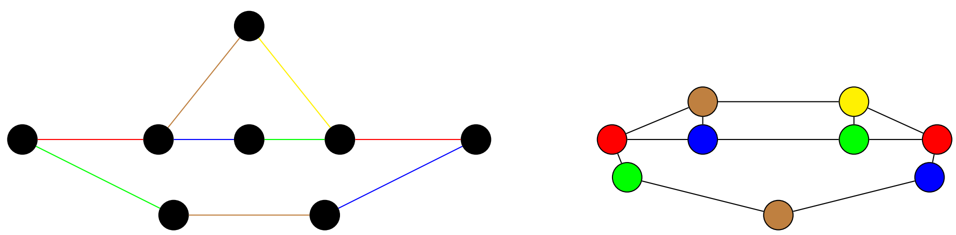


FIGURE 2.9 – Coloration propre d'arêtes d'un graphe G

2.2.2 Graphe représentatif des arêtes d'un graphe

Définition 2.4 *[10] Le graphe représentatif des arêtes $L(G)$ d'un graphe G est le graphe où les sommets sont les arêtes de G, deux sommets sont reliés dans $L(G)$ si les arêtes correspondantes de G sont incidentes à un même sommet.*



Coloration des arêtes de G　　　Coloration des sommets de L(G)

FIGURE 2.10 – 5-Coloration de L(G)

Remarque 2.3 *Pour tout graphe G, $\chi(L(G)) = \chi^{'}(G)$.*

2.2.3 Borne sur l'indice chromatique

Il n'y a pas de formule générale pour déterminer l'indice chromatique d'un graphe. En effet, plusieurs théorèmes permettant l'encadrement de l'indice chromatique ont été donnés, on peut citer le théorème de Vizing, le théorème de Koing et le théorème de Gupta.

Théorème 2.1 *(Théorème Vizing (1963))[11]*

Pour tout graphe simple et non orienté de degré maximum Δ, $\Delta \leq \chi^{'} \leq \Delta + 1$

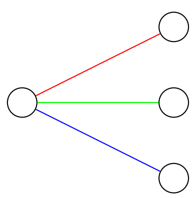
Ce théorème réparti les graphe fini en deux classes selon leur indice chromatique, comme le montre le tableau suivant :

Classe 1	Classe 2
$\chi^{'} = \Delta(G)$	$\chi^{'} = \Delta(G) + 1$

Théorème 2.2 *(Théorème Koing (1916))[11]*

Koing en 1916, a prouvé que l'indice chromatique d'un graphe biparti G est égal au degré maximum de G. c'est à dire $\chi^{'}(G) = \Delta(G)$.

L'indice chromatique de graphe $K_{1,3}$ est montré dans la figure suivant :



$\chi^{'}(G) = 3 = \Delta(G)$

FIGURE 2.11 – Graphe $K_{1,3}$

Remarque 2.4 *[10] • Les graphes complets d'ordre pair sont aussi de classe 1.*

• Les graphes complets impairs, les cycles de longueur impaire sont de classe 2.

Théorème 2.3 *(Théorème Gupta)[12]*

Gupta regroupe les deux résultats précédents et affirme que pour tout graphe simple G on a : $\chi^{'}(G) = \Delta(G)$ ou $\chi^{'}(G) = \Delta(G) + 1$.

Théorème 2.4 *(Théorème Shannon)[18]*

Soit M est une multigraphe de degré maximum $\Delta(M)$, on a

$$\chi^{'}(M) \leq \frac{3}{2}\Delta(M).$$

Théorème 2.5 *[19] Pour tout graphe G la déclaration suivante est vrai :*

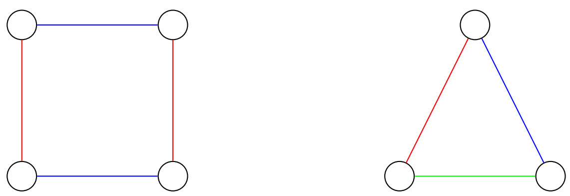
$$\chi^{'}(G) \geq \frac{m}{[\frac{n}{2}]}$$

proprietés 2.1 *Si $\Delta(G)$ est le degré maximum de G alors :*

•$\chi^{'} = 1$ *si et seulement si G est un couplage.*

•$\chi^{'} \geq \Delta(G)$.

•$\chi^{'} = \Delta(G)$ *dès que G est un graphe simple planaire tel que $\Delta(G) \geq 7$. On peut vérifier facilement les propriétés précédentes dans les graphes suivants : L'indice chromatique de l'hypercube de dimension 2 et de graphe triangulé données par la figure 2.12 sont respectivement $\chi^{'}(G) = \Delta(G) = 2$ et $\chi^{'}(G) = 3 \geq \Delta(G) = 2$.*



$\chi^{'}(G) = \Delta(G) = 2$ $\chi^{'}(G) = 3$ et $\Delta(G) = 2$

FIGURE 2.12 – Indice chromatique

•Soit la figure 2.13 d'un graphe roue :

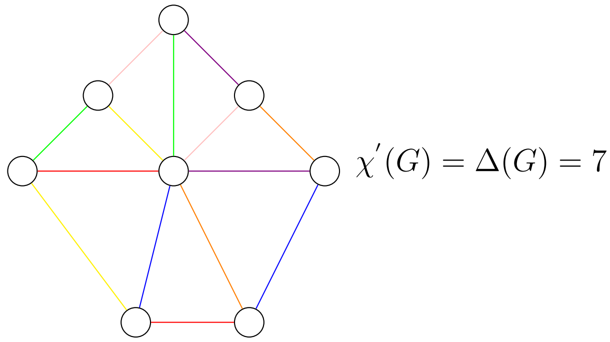
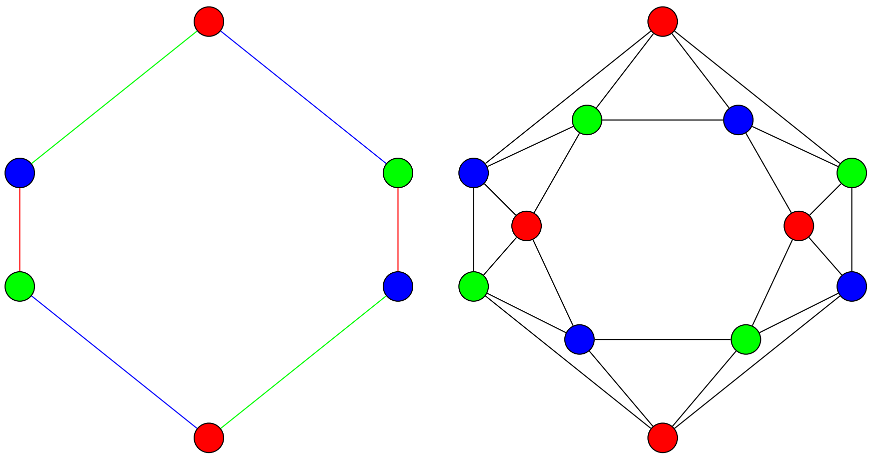


FIGURE 2.13 – Graphe planaire de degré 7

2.3 Coloration totale

Définition 2.5 *[10] Le nombre chromatique total $\chi^{''}$ d'un graphe G est le plus petit entier K tel que l'on puisse colorier les sommets et les arêtes de G en K couleurs de sorte que deux sommets adjacents, deux arêtes incidentes à un même sommet, un sommet et une arête incidente aient des couleurs différentes.*



Graphe G Graphe total de G

proprietés 2.2 *(**Bezhad** et **Vizing**, 1963)[10]*

Pour tout graphe simple G de degré maximum Δ,

$$\Delta(G) + 1 \leq \chi^{''}(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Définition 2.6 *[10] Un graphe simple est de type 1* ***si*** $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$.
sinon *de type 2,* $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$.

Théorème 2.6 *[21] Si G est un multigraphe de degré maximum* $\Delta(G) \geq 2$ *alors* $\chi''(G) \leq [\frac{3}{2}\Delta(G)] + 1$.

2.4 Types de coloration

2.4.1 Coloration simple

Définition 2.7 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe donné, une coloration simple est une coloration des sommets, tel qu'il existe au moins deux couleurs i et j telle que le nombre de sommets coloriés par i est différents du nombre de sommets coloriés par la couleur j.*

La Figure 2.14 présente une coloration simple.

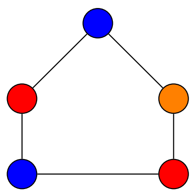


FIGURE 2.14 – Coloration simple

2.4.2 Coloration K-équitable

Définition 2.8 *Une coloration K-équitable est une coloration des sommets du graphe G ou le nombre de sommets coloriés par la couleur i est égale au nombre de sommets coloriés par la couleur j,* $\forall (i, j) \in 1, 2, ..., k$.
La Figure présente une coloration K-équitable d'un graphe à 6 sommets.

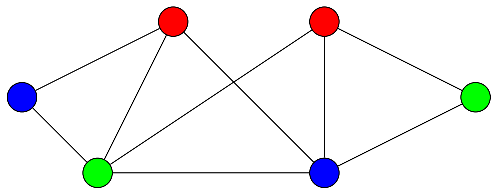


FIGURE 2.15 – Coloration 3-équitable

Quelques bornes du nombre chromatique équitable

Théorème 2.7 *[22] Pour tout graphe G, on a*

$$\chi(G) \leq \chi_=(G)$$

Théorème 2.8 *[14] Si H est un sous -graphe de G, alors*

$$\chi_=(H) \leq \chi_=(G)$$

Théorème 2.9 *[15] Pour tout graphe G, on a*

$$\omega(G) \leq \chi_=(G)$$

Théorème 2.10 *[16] Soit G un graphe connexe. Si G ni un cycle impaire ni un graphe complet, alors*

$$\chi_=(G) \leq \Delta(G)$$

2.4.3 Coloration d'arêts ℓ-distance

La coloration d'arêts ℓ-distance ($\ell \geq 0$) est une généralisation de la coloration d'arêtes classique qui consiste à attribuer une couleur de 1 à k à chaque arête, telle que chaque deux arêtes qui sont à distance au plus ℓ ne partagent pas la même couleur.

L'indice ℓ-chromatique

Définition 2.9 *L'indice ℓ-chromatique est le nombre minimum de couleurs utilisées pour colorer un graphe avec une coloration d'arêtes ℓ-distance est noté $\chi'_\ell(G)$.*

Ce résultat à été donnée par **Kramer**

Théorème 2.11 *[16] Soit G un graphe non orienté, fini connexe et sans boucle et ℓ est un entier positif, $\ell \geq 2$ alors, $\chi'_\ell(G) = \ell + 1$,*
Si est seulement si l'une des conditions suivantes est vérifie :
1. $|V| = \ell + 1$
2. E se réduit à un seul chemin de longueur $L \geq \ell$
3. E se réduit à un seul cycle, dont la longueur est multiple de $\ell + 1$.

Coloration d'arête ℓ-distance d'une chaîne

Théorème 2.12 *[16] Soit P_n une chaîne d'ordre $n > 0$. L'indice ℓ-chromatique de P_n est donné par :*

$$\chi'_\ell(P_n) = \begin{cases} \ell + 2, & si\ n \geq \ell + 3 \\ n - 1, & si\ n \leq \ell + 3 \end{cases}$$

La Figure 2.16 montre une coloration d'arêtes 1-distance de P_5.

FIGURE 2.16 – Coloration d'arêtes 1-distance de P_5

2.5 Les méthodes de coloration simple des graphes

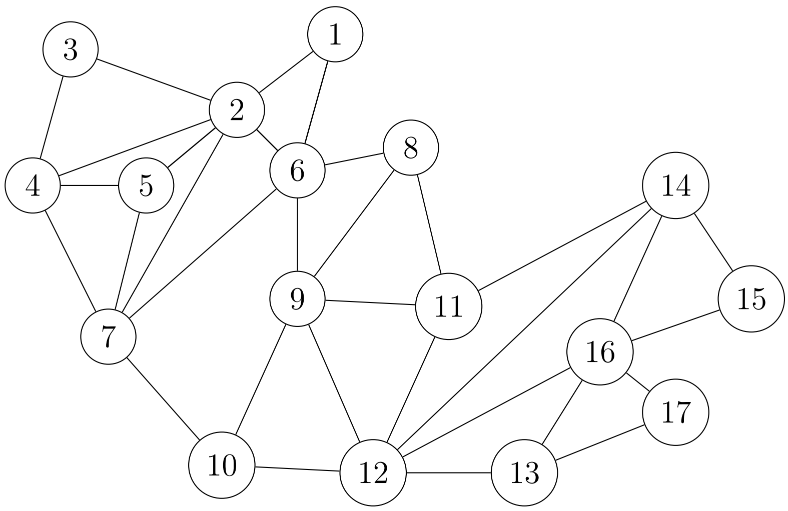
2.5.1 Algorithme de coloration de WELSH et POWELLE

Soit G=(V,E) un graphe simple et connexe :
Étape 1 :
- Ordonner les sommets selon l'ordre décroissant de leur degré ;
- Donner À chaque sommet, son numéro d'ordre dans la liste obtenue ;

Étape 2 :
- Parcourir la liste dans l'ordre en attribuant une couleur non encore utilisée, au premier sommet non encore colorié ;
- Attribuer cette même couleur en suivant la liste à chaque sommet non encore colorié et non adjacent à un sommet de cette couleur ;

Étape 3 :
- Revenir à l'étape 2, tant qu'il reste des sommets non coloriés ;
- **Sinon** s'arrêter : la coloration du graphe est terminée.

Exemple 2.5 *Étant donnée un graphe planaire (voire la figure) de 17 sommets, donc la coloration de type de graphe fournit une coloration de graphe utilise au plus 4 couleur.*

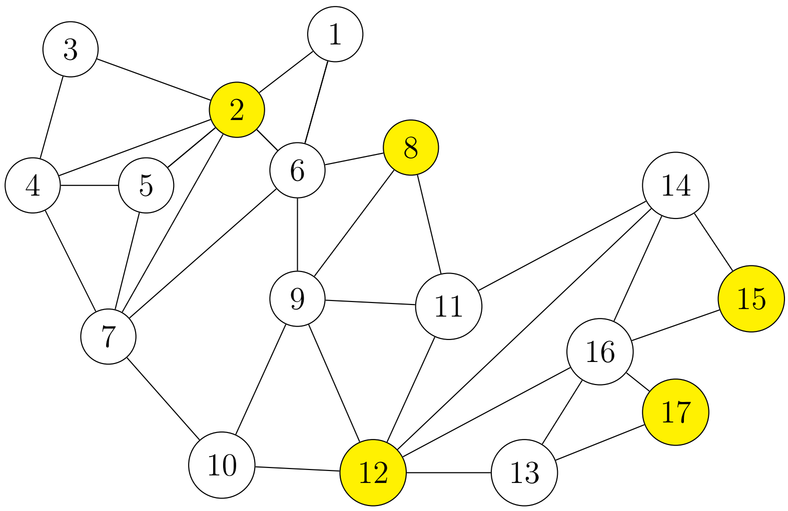


En utilise l'algorithme de Walsh et Powell.

*1.**Itération 0** : Premièrement on va numéroter les sommets de notre graphe.*

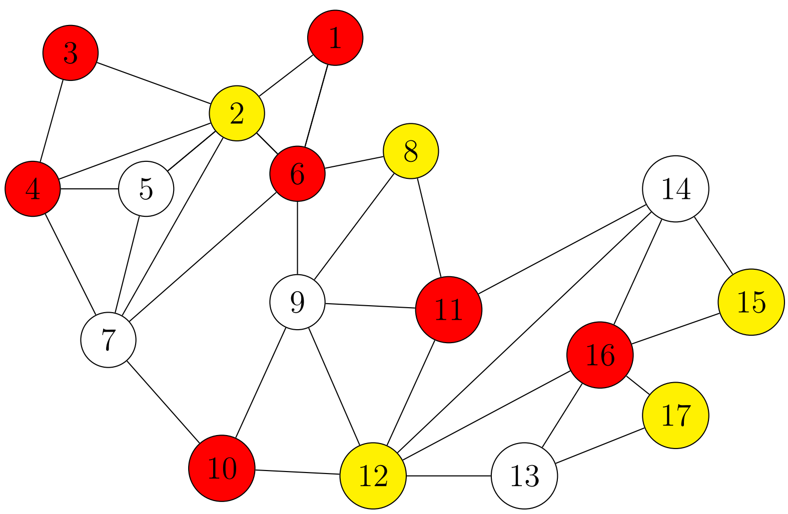
Classer les sommet du graphe dans un ordre décroissant de leur degré en attribuant à chacun des sommets un numéro d'ordre dans la liste obtenue. Les sommets classer comme suit : $v_2, v_{12}, v_6, v_7, v_9, v_{16}, v_4, v_{11}, v_{14}, v_5, v_8, v_{13}, v_{10}, v_3, v_1, v_{15}, v_{17}$

*2.**Itération 1** : On commence à colorier le sommet v_2 qui a le plus grand degré avec la couleur jaune. Et on affecte cette couleur aux sommets $v_{12}, v_8, v_{15}, v_{17}$ qui ne sont pas adjacente à v_2. Voici la figure*

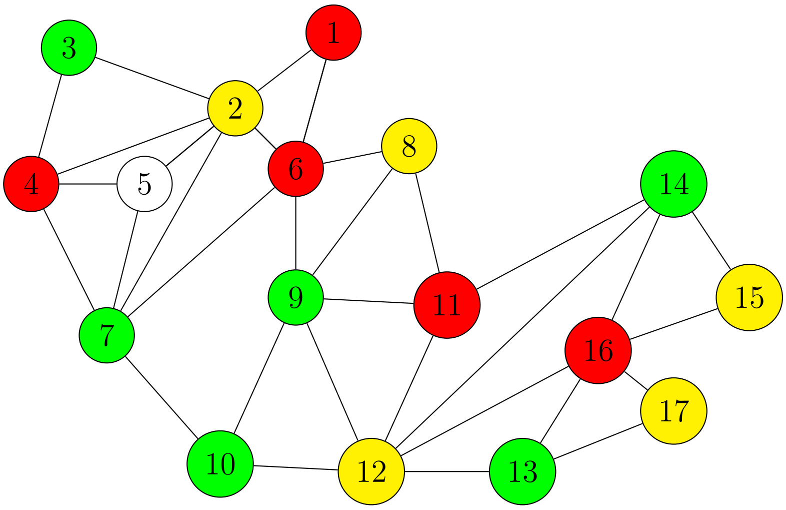


*3.**Itération 2** : On affecte la couleur gris au sommet v_6 ayant le plus haut degré.*

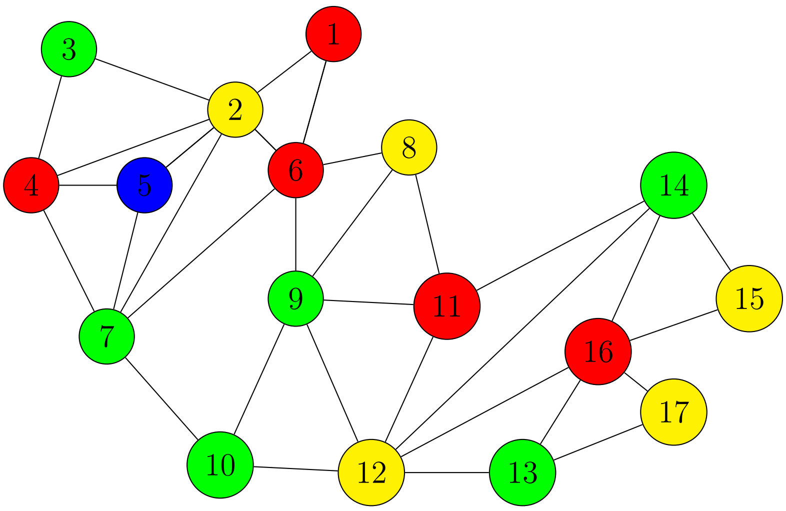
Et on affecte cette couleur aux sommets $v_{16}, v_4, v_{11}, v_{10}$ qui non encore colorié et ne sont pas adjacents à v_6.



*4.**Itération 3** : On affecte la couleur vert au sommet v_7 ayant le plus haut degré. Et on affecte cette couleur aux sommets $v_9, v_{14}, v_{13}, v_3, v_1$ qui non encore colorié et ne sont pas adjacents à v_7.*



*5.**Itération 4** : On affecte la couleur bleu pour v_5.*



2.5.2 Algorithme DSATUR

On considère un graphe $G = (V, E)$ simple et connexe. Pour chaque sommet $v$de V, on calcule le degré de saturation **DSAT**(v)de la manière suivante :

Si aucun voisin de v n'est colorié alors

$$\mathbf{DSAT}(v) = deg(v)$$

sinon
DSAT(v) =le nombre de couleurs différentes utilisées dans le premier voisinage de v.
L'algorithme DSATUR est un algorithme de coloration séquentiel ? au sens où il colorie un seul sommet à la fois et tel que :
Au départ le graphe n'est pas colorié.
On colorie un sommet non déjà colorié.
On stoppe **DSATUR** quand tous les sommets de G sont coloriés.

Dans le détail l'algorithme est le suivant :

1.Ordonner les sommets par ordre décroissant de degré.

2.Colorier un sommet de degré maximum avec le couleur 1.

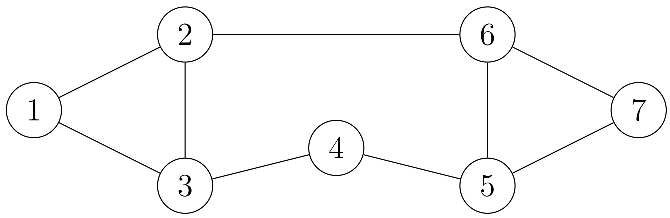
3.Choisir un sommet non colorier avec **DSAT** maximum. Si conflit, choisir celui avec degré maximum.

4.Colorier ce sommet par la plus petite couleur possible.

5.Si tout les sommets sont coloriés alors on arrête.

sinon aller en 3.

Exemple 2.6 *Étant donnée un réseau radio qui contient huit émetteur reliant ente aux par des interférence pour cela il faut pouvoir allouer différentes fréquences aux émetteurs, de telle sorte que deux émetteur voisin ne soit pas de même fréquence.*
pour résoudre notre problème, nous devons représenter le réseau d'émetteur parun graphe, telle que chaque sommets représente un émetteur et chaque une arête représente une interférence.
On obtient le graphe dans la figure :



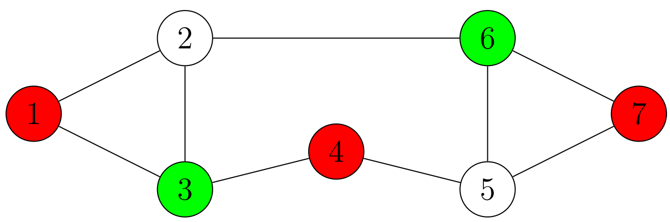
Un graphe 1

1.***Itération 0*** *: On ordonne les sommets par ordre décroissant de degré on aura le tableau suivant :*

Sommet	v_2	v_3	v_5	v_6	v_1	v_4	v_7
Degré	*3*	*3*	*3*	*3*	*2*	*2*	*2*

*2.*___Itération 1___ *: Maximum, mais tous les sommets on le même degré de saturation, alors on choisit celui de degré maximum (v_3 ou bien v_6), soit v_3 et lui donné la couleur verte, alors DSAT(v_4) = DSAT(v_1) = 2, et pour les autres sommets, leur* ***DSAT*** *est égale à 1.*
*3.*___Itération 2___ *: On choisit un autre sommet de* ***DSAT*** *maximum (v_1, v_4), soit v_1, on lui affecte la couleur rouge, le* ***DSAT*** *des autre sommets ne vont pas changer.*
*4.*___Itération 3___ *: On choisit un sommet de* ***DSAT*** *maximum (v_4), on lui donne la couleur rouge (v_4 n'est pas adjacent à v_1), ainsi les* ***DSAT*** *des autres sommets ne vont pas changer.*
*5.*___Itération 4___ *:Il nous reste deux sommets non encore coloriés (v_6, v_7),*
avec ***DSAT***(v_6) = ***DSAT***(v_7)= 1, donc on choisis le sommet de degré maximum (v_6), on lui affecte la couleur verte (car v_6 n'est pas adjacent à v_3).*
Il nous reste le sommet v_7 et on lui donne la couleur rouge.

La figure représent le graphe obtenue.



Un graphe $K_{2,3}$

2.6 Coloration fractionnaire

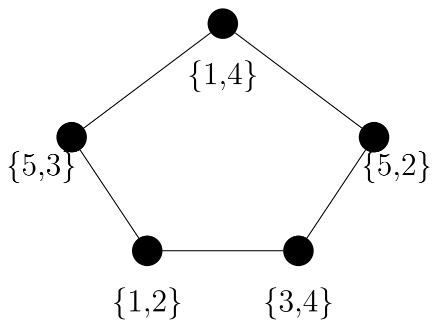
Définition 2.10 *[10] Une (a,b)-coloration d'un graphe G est une application qui associe b couleurs parmi un ensemble de a couleurs à chaque sommet de G, de sorte que deux sommets adjacents aient des ensembles de couleurs disjoints.*

Définition 2.11 *Le nombre chromatique fractionnaire $\chi_f(G)$ est le minimum du radio $\frac{a}{b}$ pour lequel il existe un (a,b)-coloration de G.*

Relation avec le nombre chromatique : pour tout graphe G d'ordre n,

$$max\{\omega(G), \frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi_f(G) \leq \chi(G)\}$$

Exemple 2.7 *Exemple de la coloration fractionnaire*
C_5 est (5,2)-coloriable (et $\chi_f(C_5) = \frac{5}{2}$).



2.6.1 Coloration fractionnaire et graphes planaires

Maille impaire = longueur du petit cycle impair.

Théorème 2.13 *[10] (**Dvorak, Skrekovski et Vallal, 2005**) Tout graphe planaire G de maille impaire au moins 9 est* $(5, 2)$*-coloriable.*

Conjecture 2.1 *[10] (**Heckman et Thomas, 2002**) Tout graphe planaire G sans triangle et de degré maximum 3 vérifie* $\chi_f(G) \leq \frac{8}{3}$

2.7 Coloration circulaire

Définition 2.12 *[10] Une* $[a, b]$*-coloration d'un graphe G est une application f qui associe une couleur parmi un ensemble de a couleurs à chaque sommet de G, de sorte que l'on ait*

$$b \leq |f(x) - f(y)| \leq a - b$$

pour tous sommets adjacents x et y.

Définition 2.13 *[10] Le nombre chromatique circulaire* $\chi_c(G)$ *est le minimum du ratio* $\dfrac{a}{b}$ *pour lequel il existe un* $[a, b]$*-coloration de G.*

Relation avec le nombre chromatique :

$$max\{\chi(G) - 1, \chi_f(G)\} \leq \chi_c(G) \leq \chi(G)$$

Conjecture 2.2 *(**X.Zhu, 2000**)[10]*
Tout graphe planaire G sans triangle et de degré maximum 3 vérifie $\chi_c(G) \leq \dfrac{20}{7}$.

3

Coloration dans les graphes doubles

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des graphes doubles, on commence à présenter la définition et quelques propriétés de cette classe de graphes, ensuite, nous présentons quelques résultats qui ont été obtenu dans le domaine de la coloration pour cette classe de graphe. Finalement nous déterminons des valeurs exacts, et des bornes pour les trois paramètres de coloration pour les graphes doubles.

3.1 Graphe double

Le double d'un graphe simple G est défini comme le graphe $\mathscr{D}[G] = G \times T_2$ (T_2 est un graphe total à 2 sommet), telle que le produit direct d'un graphe simple avec un graphe quelconque est toujours un graphe simple, alors le double d'un graphe simple est toujours un graphe simple.

Dans $\mathscr{D}[G]$, on a (v, h) est adjacent à (w, k) si et seulement si v adjacent à w dans G. Si V(T_2) = {0,1}, on a que $G_0 = \{(v, 0) : v \in V(G)\}$ et $G_1 = \{(v, 1) : v \in V(G)\}$ sont deux sous-graphes de $\mathscr{D}[G]$ tous deux isomorphes à G tels que $G_0 \cap G_1 = \emptyset$ et $G_0 \cup G_1$ est un sous-graphe partiel de $\mathscr{D}[G]$. De plus, nous avons une arête entre $(v, 0)$ et $(w, 1)$ et de même, nous avons une arête entre $(v, 1)$ et $(w, 0)$ chaque fois que v est adjacent à w dans G. Nous appellerons G_0, G_1 la décomposition canonique de $\mathscr{D}[G]$.

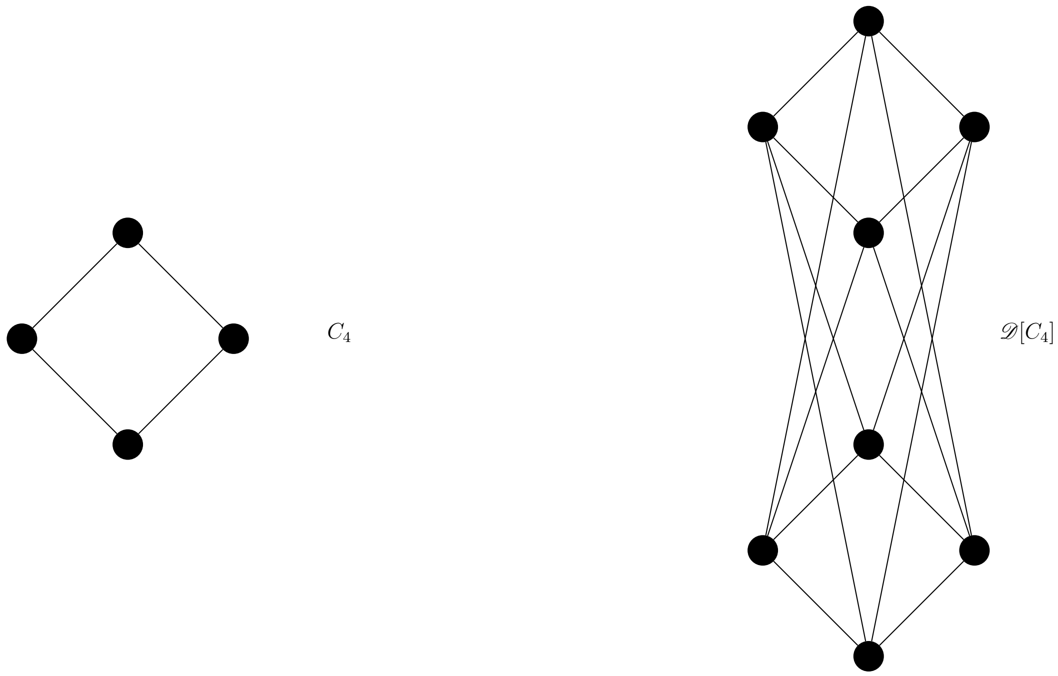


FIGURE 3.1 – Un cycle et son double

Théorème 3.1 *[20] Si G à n sommets et m arêtes, alors $\mathscr{D}[G]$ à 2n sommets et 4m arêtes. En particulier, $deg_{\mathscr{D}[G]}(v, k) = 2\ deg_G(v)$.*

Lemme 3.1 *[20] Pour tout graphe G, on a $G \times T_n = G \circ N_n$, où N_n est le graphe a n sommets sans arêtes, (T_n et N_n sont le même ensemble de sommets).*

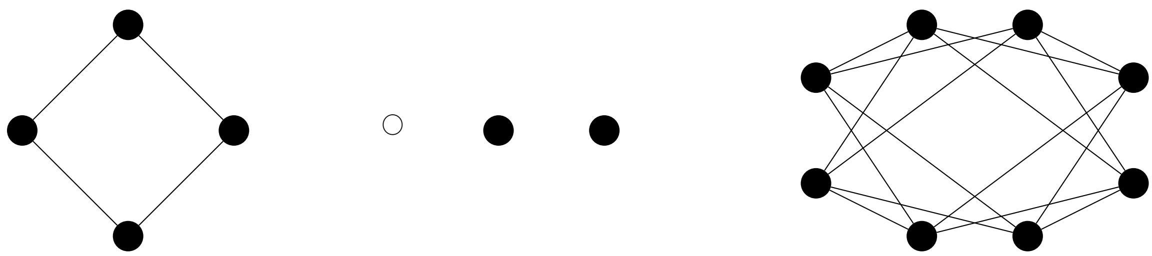


FIGURE 3.2 – Le double d'un cycle par produit lexicographique

3.2 Propriétés de base des graphes doubles

Proposition 3.1 *[20] Pour tout graphe G à n sommets, $\mathscr{D}[G] = G \circ N_2$ et $\mathscr{D}[G]$ est n-parti.*

Proposition 3.2 *[20] On écrira $\mathscr{D}^2[G]$ pour le double du double de G. Plus généralement on aura les graphes $\mathscr{D}^k[G] = G \times T_{2^K} = G \circ N_{2^K}$, pour tout $k \in N$.*

Proposition 3.3 *[20] Le double $\mathscr{D}[G]$ d'un graphe G à n sommets contient au moins $2n$ sous-graphes isomorphes à G lui-même.*

Proposition 3.4 *[20] Pour tout graphe G, G est biparti si et seulement si $\mathscr{D}[G]$ est biparti.*

Proposition 3.5 *[20] Pour tout graphe $G \neq k_1$, les propriétés suivantes sont valables :*

1. G est connexe si et seulement si $\mathscr{D}[G]$ est connexe.

2. Si G est connexe, alors chaque paire de sommets de $\mathscr{D}[G]$ appartient à un cycle.

3. Chaque arête de $\mathscr{D}[G]$ appartient à un quadruple cycle.

4. Dans un double graphe, il n'ya pas un point d'articulation.

Proposition 3.6 *[20] Pour tout graphe $G \neq k_1$, les propriétés de traversabilité suivantes sont valables :*

1. Si G est connexe, alors $\mathscr{D}[G]$ est eulérien.

2. Si G est hamiltonien, alors $\mathscr{D}[G]$ est également hamiltonien.

Proposition 3.7 *[20] Pour tout graphe G_1 et G_2, les propriétés suivantes sont valables*

1. $\mathscr{D}[G_1 \times G_2] = G_1 \times \mathscr{D}[G_2] = \mathscr{D}[G_1] \times G_2$.

2. $\mathscr{D}[G_1 \circ G_2] = G_1 \circ \mathscr{D}[G_2]$.

Proposition 3.8 *[20] Pour tout graphe, le nombre chromatique d'un graphe double égale nombre chromatique du graphe G c-à-d, $\chi(\mathscr{D}[G]) = \chi(G)$.*

3.3 Le nombre chromatique des graphes doubles

3.3.1 Le nombre chromatique du graphe double d'une chaîne

Proposition 3.9 *Pour tout $n \geq 3$, alors $\chi(\mathscr{D}[P_n]) = 2$.*

Preuve Soit $P_n = (V, E)$ une chaîne d'ordre n.
$\mathscr{D}[P_n]$ le graphe double de la chaîne P_n tel que
$(P_n)_0$ et $(P_n)_1$ est la décomposition canonique de $\mathscr{D}[P_n]$, ou partionne l'ensemble de sommets $V(\mathscr{D}[P_n])$ selon la parité de n comme soit
1^{er} cas :
Cas 1 : si n pair
$V_1 = \{(v_1, 0), (v_3, 0), ..., (v_{n-1}, 0)\} \cup \{(v_1, 1), (v_3, 1), ..., (v_{n-1}, 1)\}$.
$V_2 = \{(v_2, 0), (v_4, 0), ..., (v_n, 0)\} \cup \{(v_2, 1), (v_4, 1), ..., (v_n, 1)\}$.
2^{me} cas :
Cas 2 : si n impair
$V_1' = \{(v_1, 0), (v_3, 0), ..., (v_n, 0)\} \cup \{(v_1, 1), (v_3, 1), ..., (v_n, 1)\}$.
$V_2' = \{(v_2, 0), (v_4, 0), ..., (v_{n-1}, 0)\} \cup \{(v_2, 1), (v_4, 1), ..., (v_{n-1}, 1)\}$.
Il est clair les deux ensemble V_1 et V_2 sont des ensembles stables dans les deux cas, alors $\chi(\mathscr{D}[P_n]) \leq 2$.
D'autre part, il existe au moins deux sommets adjacents dans $\mathscr{D}[P_n]$,

alors $\chi(\mathscr{D}[P_n]) \geq 2$.
Par conséquent $\chi(\mathscr{D}[P_n]) = 2$.

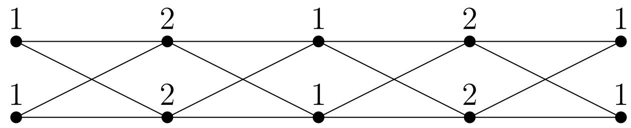


FIGURE 3.3 – $\chi(\mathscr{D}[P_5]) = 2$

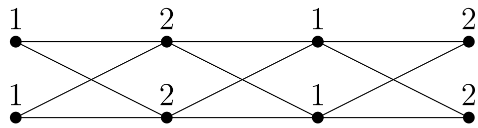


FIGURE 3.4 – $\chi(\mathscr{D}[P_4]) = 2$

Remarque 3.1 *Les nombres 1, 2 dans les figures 3.3 et 3.4 sont des coleures différentes.*

3.3.2 Le nombre chromatique du graphe double d'un graphe complet

Proposition 3.10 *Pour tout graphe simple $n \geq 3$,*
$\chi(\mathscr{D}[K_n]) = \chi(K_n) = n.$

Preuve Soit G_0, G_1 la décomposition canonique de $\mathscr{D}[K_n]$ tel que :
$G_0 = \{(v_i, 0) : 1 \leq i \leq n\}$
$G_1 = \{(v_j, 1) : 1 \leq j \leq n\}$
Si G est complet alors aussi G_0 et G_1 sont complet. Donc $\chi(G_0) = n$ et $\chi(G_1) = n$. Alors $\chi(\mathscr{D}[K_n]) \geq n$.
Maintenant, ou doit vérifier si on peut appliquer la même fonction de coloration sur G_0, G_1 en gardant la propriété que deux sommets $(v_i, 0)$ de G_0 et $(v_j, 1)$ de G_1 ne soient pas de même couleur, si $i = j$, alors $(v_i, 0)$ et $(v_i, 1)$ ne sont pas adjacents alors ces deux sommets peuvent avoir la même couleur pour $\forall i = 0, ..., n$. Donc n couleurs sont suffisantes pour colorier $\chi(\mathscr{D}[K_n])$ et $\chi(\mathscr{D}[K_n]) = \chi(K_n) = n$.

Exemple 3.1 *Le figure suivante*

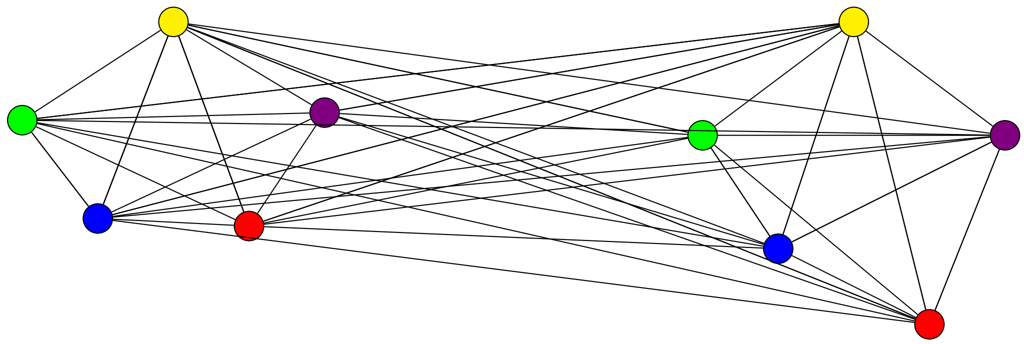


FIGURE 3.5 – $\chi(\mathscr{D}[K_5]) = \chi(K_5) = 5$

3.3.3 Le nombre chromatique du graphe double d'un graphe biparti

Proposition 3.11 *Pour tout graphe biparti $K_{m,n}$,*

$\chi(\mathscr{D}[K_{m,n}]) = \chi(K_{m,n}) = 2$

preuve Soit $\{G_0, G_1\}$ la décomposition canonique de $\mathscr{D}[G]$ tel que
$G_0 = \{(v_i, 0) : 1 \leq i \leq n\}$.
$G_1 = \{(v_j, 1) : 1 \leq j \leq n\}$.
Si G est biparti alors aussi G_0 et G_1 sont biparti. Donc $\chi(G_0) = \chi(G_1) = 2$.
Soient$\{V_0, W_0\}$ et $\{V_1, W_1\}$ les bipartitions correspondantes de G_0 et G_1 respectivement.
chaque arête de $\mathscr{D}[G]$ à une extrimitéme dans $V_0 \cup V_1$ et l'autre dans $W_0 \cup W_1$, et donc aussi $\mathscr{D}[G]$ est biparti.
Donc $\chi(\mathscr{D}[K_{m,n}]) = \chi(K_{m,n}) = 2$

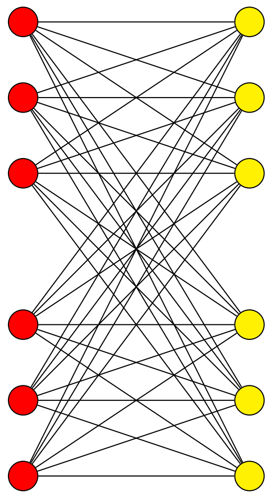


FIGURE 3.6 – $\chi(\mathscr{D}[K_{3,3}]) = \chi(K_{3,3}) = 2$

3.3.4 Le nombre chromatique du graphe double d'une étoile

Proposition 3.12 *Pour tout étoile $K_{1,n}$*

$\chi(\mathscr{D}[K_{1,n}]) = \chi(K_{1,n}) = 2.$

Preuve Soit $\{G_0, G_1\}$ la décomposition canonique de $\mathscr{D}[G]$ on a que :
$G_0 = \{(v_i, 0) : 1 \leq i \leq n\}$
$G_1 = \{(v_j, 1) : 1 \leq j \leq n\}$
Sont deux sous-graphe de $\mathscr{D}[G]$ tous deux sont isomorphe à G, alors G_0 est une étoile et aussi G_1. Donc $\chi(G_0) = \chi(G_1) = 2$.
Supposons que $(v_1, 0)$ un sommet de G_0 de degré n alors $(v_1, 0)$ adjacent à tout les sommets de $\mathscr{D}[K_{1,n}]$ sauf $(v_1, 1)$ le sommet de degré n dans G_1 ,alors on colorie les deux sommets $(v_1, 1)$ et $(v_1, 0)$ avec la même couleur, et non colorions le reste de sommets de $\mathscr{D}[K_{1,n}]$ avec une autre couleur, donc $\chi(\mathscr{D}[K_{1,n}]) = 2$.

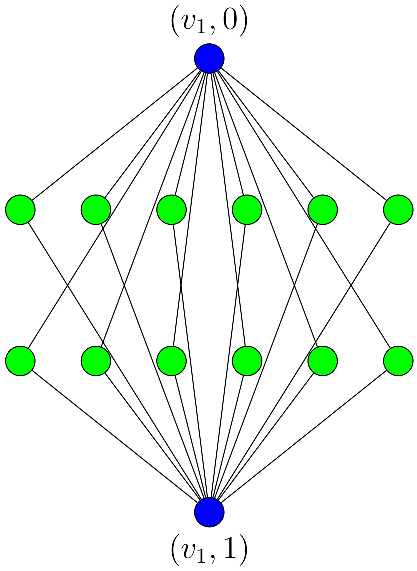


FIGURE 3.7 – $\chi(D[K_{1,3}]) = \chi(K_{1,3}) = 2$

3.4 L'indice chromatique des graphes doubles

Théorème 3.2 *[20] Si G est de classe 1, alors $\mathscr{D}[G]$ est aussi de classe 1.*

Théorème 3.3 *[21] Pour tout graphe G, on a*
$\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) \leq \chi^{'}(G) + \Delta(G)$.

Proposition 3.13 *Soit G est un graphe simple, et ($\mathscr{D}[G]$) le graphe double de G, on a :* $2\Delta(G) \leq \chi^{'}(\mathscr{D}[G])$.

Preuve La limite inférieur pour $\chi^{'}(\mathscr{D}[G])$ est le degré maximum du graphe ($\mathscr{D}[G]$) car les arêtes incidents à un sommet doivent être de couleur différente.
Il s'en suit que $\Delta(\mathscr{D}[G]) \leq \chi^{'}(\mathscr{D}[G])$, pour tout graphe double de G, soit $(v_m, 0)$ le sommet qui a le degré maximum dans G_0, et$\{(v_i, 0)/d(v_i, v_m) = 1\}$ l'ensemble de sommets adjacents à $(v_m, 0)$ dans G_0 alors le sommet $(v_1, 0)$ possède le même nombre de sommets adjacents dans G_1,
donc $\Delta(\mathscr{D}[G]) = 2\Delta(G)$ d'ou $2\Delta(G) \leq \chi^{'}(\mathscr{D}[G])$.

Proposition 3.14 *Pour tout graphe G,*
$\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) \geq \dfrac{4m}{n}$.

Preuve Soit G un graphe d'ordre n et de taille m.
D'après théorème(2.5), on a pour tout graphe G,
$\chi^{'}(G) \geq \dfrac{m}{[\frac{n}{2}]}$ et D'après théorème(3.1), pour un graphe double le nombre d'arêtes est $4m$ et le nombre des sommets est $2n$, Donc $\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) \geq \dfrac{4m}{n}$.

3.4.1 L'indice chromatique du graphe double d'un graphe complet

Proposition 3.15 *Soit G un graphe complet K_n,*

Si n est pair :

$\chi^{'}(\mathscr{D}[K_n]) \leq n - 1 + \Delta(K_n)$

Si n est impair :

$\chi^{'}(\mathscr{D}[K_n]) \leq n + \Delta(K_n)$.

Preuve Soit G un graphe complet on a
• Si n pair $\chi^{'}(K_n) = n - 1$ et $\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) \leq \chi^{'}(G) + \Delta(G)$.
Donc $\chi^{'}(\mathscr{D}[K_n]) \leq n - 1 + \Delta(K_n)$.
• Si n impair $\chi^{'}(K_n) = n$. Donc $\chi^{'}(\mathscr{D}[K_n]) \leq n + \Delta(K_n)$.

Proposition 3.16 *Soit K_n un graphe complet,*

$$\chi^{'}(\mathscr{D}[K_n]) = \begin{cases} 2n - 2, & si \quad n \text{ est pair} \\ 2n - 1, & si \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$

Preuve Pour tout graphe complet K_n on a d'après la proposition 3.13 :
$2\Delta(K_n) \leq \chi^{'}(\mathscr{D}[K_n]) \leq \chi^{'}(K_n) + \Delta(K_n)$
et d'après le proposition 3.15 on a
Si n pair :
$2(n - 1) \leq \chi^{'}(\mathscr{D}[K_n]) \leq n - 1 + (n - 1)$
alors $\chi^{'}(\mathscr{D}[K_n]) = 2n - 2$

Si n impair :
$2(n-1) \leq \chi^{'}(\mathscr{D}[K_n]) \leq n + (n-1)$
alors $\chi^{'}(\mathscr{D}[K_n]) = 2n - 1$.

3.4.2 L'indice chromatique du graphe double d'un graphe cubique

Proposition 3.17 *Soit G un graphe cubique alors* $\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) = 6$.

Preuve Si G est un graphe cubique alors $\chi^{'}(G) = 3$,
donc $\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) \leq 6$, $(\Delta(G) = 3)$ et on a $\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) \geq \dfrac{4m}{n}$, $(m = 12$ et $n = 8$) donc $\chi^{'}(D[G]) \geq 6$ par comparaison on a $\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) = 6$.

3.4.3 L'indice chromatique de graphe double d'un graphe planaire

Proposition 3.18 *Soit G un graphe simple planaire tel que* $\Delta(G) \geq 7$ *alors*
$\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) \leq 2\Delta(G)$.

Preuve Soit G graphe planaire et $\Delta(G) \geq 7$ donc $\chi^{'}(G) = \Delta(G)$
et on a $\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) \leq \chi^{'}(G) + \Delta(G)$
alors $\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) \leq 2\Delta(G)$
Si $\Delta(G) = 7$, Alors $\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) \leq 14$.

3.4.4 L'indice chromatique de graphe double d'un graphe grille

Proposition 3.19 *Soit G une grille, si* $n, m \geq 3$,
alors $\chi^{'}(\mathscr{D}[G_{m\times n}]) = \chi^{'}(G_{m\times n}) + \Delta(G_{m\times n}) = 8$.

Preuve Soit G une grille, $\mathscr{D}[G_{m\times n}]$ le graphe double d'un grille $G_{m\times n}$,
$G = \{G_0, G_1\}$ la décomposition canonique de $\mathscr{D}[G_{m\times n}]$, alors $\chi^{'}(G_0) = \chi^{'}(G_1) = 4$.
pour $n, m \geq 3$ on a $\Delta(G_{m\times n}) = 4$.
Donc $\chi^{'}(G_{m\times n}) + \Delta(G_{m\times n}) \geq 8$

Les couleurs avec lesquelles nous colorons les arêtes de G_0 sont les mêmes dans G_1 et $\Delta(\mathscr{D}[G_{m\times n}]) = 8$ Alors $\chi^{'}(\mathscr{D}[G_{m\times n}]) \leq 8$
Donc $\chi^{'}(\mathscr{D}[G_{m\times n}]) = \chi^{'}(G_{m\times n}) + \Delta(G_{m\times n}) = 8$.

3.5 Le nombre chromatique totale des graphes doubles

Théorème 3.4 *[21] Pour tout graphe G on a $\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \leq \chi^{''}(G) + \Delta(G)$.*

Proposition 3.20 *Si G est un multigraphe de degré maximum $\Delta \geq 2$ alors*
$\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \leq \frac{5}{2}\Delta(G) + 1$.

Preuve Soit G un multigraphe de degré maximum $\Delta \geq 2$.
D'après le théorème (2.6) alors $\chi^{''}(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G) + 1$
et on a $\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \leq \chi^{''}(G) + \Delta(G)$
$\chi^{''}(G) + \Delta(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G) + 1 + \Delta(G)$
Donc $\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \leq \frac{5}{2}\Delta(G) + 1$.

Proposition 3.21 *Soit G est un graphe simple, et $\mathscr{D}(G)$ le double d'un graphe G, on a $\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \leq 2(\Delta(G) + 1)$.*

Preuve D'après la proposition 2.2, Pour tout graphe simple G on a
$\chi^{''}(G) \leq \chi^{'}(G) + \chi(G)$.
D'autre part et d'après la proposition 3.8 on a $\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \leq \chi^{'}(\mathscr{D}[G]) + \chi(G)$.
et D'après le théorème 3.4 on a $\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \leq \chi^{''}(G) + \Delta(G)$, alors
$\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \leq \chi^{'}(G) + \chi(G) + \Delta(G)$
$\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \leq 2\Delta(G) + 1 + n$ car $(\chi^{'}(G) \leq 1 + \Delta(G))$ et $(\chi(G) \leq n)$
alors $\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \leq 2\Delta(G) + 2$
Donc la proposition est vrai.

Proposition 3.22 *Soit G un graphe simple, et $\mathscr{D}[G]$ le double d'un graphe G, on a $\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \geq 2\Delta(G) + 1$.*

Preuve Dans une coloration totale, pour tout graphe G on a deux sommets adjacents, deux arêtes incidentes au même sommet, un sommet et une arête incidente aient des couleurs différentes dans ($\mathscr{D}[G]$), et comme l'ayant des arêtes peut augmenter la valeur du nombre chromatique total.
alors $\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \geq \chi^{'}(\mathscr{D}[G]) + \chi(G)$.
on a d'après la proposition 3.13 $\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) \geq 2\Delta(G)$
$\chi^{'}(\mathscr{D}[G]) + \chi(\mathscr{D}[G]) \geq 2\Delta(G) + 1$ (car $\chi(\mathscr{D}[G]) \geq 1$)
et on a $\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \geq \chi^{'}(\mathscr{D}[G]) + \chi(\mathscr{D}[G])$
Alors $\chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \geq 2\Delta(G) + 1$.

D'après la proposition 3.21, et la proposition 3.22, nous constatons que
$2\Delta(G) + 1 \leq \chi^{''}(\mathscr{D}[G]) \leq 2\Delta(G) + 2$.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons essayé d'étudier quelques paramètres de coloration ; le nombre chromatique, l'indice chromatique et le nombre chromatique total dans la classe des graphes doubles. En effet, nous avons présenté les définitions qui sont utiles pour la comprehension du mémoire. Puis, nous avons présenté quelques résultats obtenus pour les trois paramètres dans d'autres classes de graphes. Dans le troisième chapitre, nous avons présenté notre apport personnel dans ce travail, nous déterminé des valeurs exactes pour les trois paramètres pour des cas particuliers de graphes. Nous avons aussi établi des bornes supérieures et des bornes inférieures pour ces paramètres en prouvant parfois que les bornes sont atteintes.
Nos résultats sont tous prouvés et accompagnés par des exemples explicatifs qui servent à faciliter la compréhension des résultats obtenus.

Comme perspectives de recherche, nous envisageons de généraliser cette étude sur les differents catégories des produits des graphes.

Bibliographie

[1] R. Lemdani, Opération sur le nombre de coloration broadcast, thése doctorat,univ Houari Boumdiene alger, 2021.

[2] C.Berge, Graphe et Hypergraphes. Dunod, deuxième édition, 1970.

[3] O.Ore, theory of graphs, Amer, Math soc. Colloq. Publ. 38(1962).

[4] B. Benmedjdoub , Colorations d'incidences, thése doctorat ,thése doctorat,univ Houari Boumdiene alger, 2018.

[5] F. Kramer et H. Kramer. Un problème de coloration des sommets d'un graphe. C. R. Acad. Sci. Paris A. 268(7) :46–48 (1969).

[6] K. Drira. Coloration d'êrtes ℓ-distance et clustering : etudes et algorithmes auto-stabilisants, Ecole doctorale informatique et mathématiques. Masters thesis, université de lyon, 2010.

[7] P. Bornsztien. Cours théorie des graphes, 2003.

[8] N. Bellharat. La théorie des graphe. Master's thesis, 2010

[9] M. Didier. Introduction ‘a la théorie des graphes. CRM, 2012.

[10] Olivier Togni, coloration de graphe, 7 janvier 2019.

[11] V.G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. Metody Diskret.Anal. 3 :25-30, (1964)

[12] A. Bondy and U.S.R. Murty. «Graph theory». (2008).

[13] H. Furmanczyk, A. Jastrzebski and M. Kubale, Equitable coloring of graphs. Recent the oretical results and practical algorithms. Archives of control sciences, vol . 26(LXII) ; no :3 :P P :281 295 :201

[14] H. Furmanczyk. Equitable coloring of graph products, Opuscula Mathematica. Vol. 26. No :1. 200

[15] H. Furmanczyk. A.Jastrzebski. M. Kubale. Equitable coloring of graphs. Gdansk University of Technology. DÈc 20

[16] W. Meyer. Equitable coloring, Amer. Math. Monthly 80(1973) ; 920922 :

[17] Sopena. Hommorphisme et Coloration de graphe. 2007

[18] S. Fiorini, R. J. Wilson, Edge-colourings of graphs, Research Notes in Mathematics, No. 16. Pitman, London, 1977.

[19] Emanuele Munarini, Claudio Perelli Cippo, On some colorings of a double graph, Discrete Mathematics, Elsevier, 2013.

[20] Emanuele Munarini, Claudio Perelli Cippo, Andrea Scagliola, Norma Zagaglia Salvi, Double graphs, Discrete Mathematics, Elsevier, 2007

[21] V. Vizing, Some unsolved problems in graph theory, Uspekhi Mat. Nauk 23 (1968), 117-174 (in Russian)

[22] H. Furmanczyk, A. Jastrzebski and M. Kubale, Equitable coloring of graphs. Recent the oretical results and practical algorithms. Archives of control sciences, vol . 26(LXII) ; no :3 :P P :281 295 :201