الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Etude qualitative de certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire implicite

Préparé par : **Lina BEN CHERRIERE**
Roumaissa BOUAFIA

Soutenue devant le jury

Yacine HALIM	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Smail KAOUACHE	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Boudjemaa LABED	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciements

Au terme de ce travail nous remercions ***Allah*** *le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour la réaliser.*

Tout d'abord nous souhaitons avant tout remercier notre professeur ***Mr. Smail KAOUACHE*** *de nous avoir donné le privilège d'encadré nos travaux, il nous a fait des suggestions et des critiques pendant cette période.*

Nous tenons à remercier également, Monsieur ***Boudjemaa LABED*** *et Monsieur* ***Yacine HALIM*** *pour m'avoir fait l'honneur d'être examinateurs de ce mémoire.*

Et nos remerciements les plus sincères vont à toute personne ayant eu la bonté et la patience de satisfaire notre curiosité et de nous aider dans notre travail par leurs précieux conseils, réponses et recommandations

Dédicaces

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père **Abd Elkrime.**

A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non àmes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse: mon adorable mère **Nadia .**

A mes chères sœurs **Hiba , Meriem ,Ikram** et mon frére **Salah Edine** et sa femme **Nihed** qui n'ont pas cessée de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.

A mon adorable petite sœur **Wiam** qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour toute la famille.

A mes source de ma joie **Israa ,Mayar** et **Iline.**

A mes amis **Nesrine, Imene, Safa, Merieme** et **khadija**

Merci pour leurs amours et leurs encouragements.

Sans oublier mon binôme **Roumaissa** pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.

Lina.B

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à celui qui m'a toujours encouragée pour réaliser mes rêves ses sacrifices et son encouragement m'ont accompagnés tout au long du chemin.

*Mon cher papa **Mouhamed***

A la plus courageuse personne dans le monde , celle qui a souffert sans me laisser souffrir, tes prières étaient la lumière qui m'a montrée toujours la bonne voie .

*Ma chére mama **Fatiha***

*À ma chère et aimée tante **Saliha ,** je te remercie encouragements et ton soutien . Que Dieu et la préserve et lui accorde la santé.*

*À mes chères bien aimées, mes sœurs **Abir ,Nihad** et **Anfal,** je vous remercie du fond du cœur pour votre soutien et vos encouragements. vous êtes le trésor de ma vie et ma source de force , Que Dieu vous protège et votre chemin soit illuminé.*

*À mes petits poussine et mes chers amours **Layan** , **Jinan** et **Yamen abd lkhalek** Que Dieu les protège .*

*A mes amis **Merieme, Safa, Ahlam, Zobayda , Ilham.***

*A ma cousin **Rouaya ,** ainsi tous mes **oncles** et mes **cousins.***

*À Sans oublier mon binôme **Lina** pour son soutien et son accompagnemet tout au long du chemin .*

Roumaissa.B

ملخص

يدور العمل المقدم في هذه المذكرة بشكل أساسي حول الدراسة النوعية لبعض المعادلات التفاضلية دوات رتب إشتقاق كسرية. بالإضافة إلى ذلك ، سنوضح كيفية تكييف الفرضيات وشروط انكماش باناخ مع موضوع دراستنا و ذلك من أجل ضمان وجود ، وحدانية واستقرار حلول المعادلات الكسرية. سنستشهد في الاخير بمثالين توضيحيين للتحقق من صحة وقدرة المخططات السابقة لدراسات الاستقرار.

الكلمات المفتاحية :

معادلة كسرية ضمنية ، اشتقاق كابوتو ، استقرار أولام هايرز ، انكماش باناخ.

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire porte fondamentalement sur l'étude qualitative de certaines équations différentielles d'ordre de dérivée fractionnaire. Par ailleurs, on va montrer comment adapter les hypothèses et les conditions de contraction de Banach à notre étude afin d'assurer l'existence et l'unicité ainsi que la stabilité de la solution d'une équation fractionnaire. Enfin, nous présentons deux exemples illustratifs pour vérifier la validité et la capacité des schémas de la stabilité étudie.

Mots-clés :

Equation fractionnaire implicite, dérivation au sens de Caputo, stabilité d'Ulam-Hyers, Contraction de Banach.

Abstract

The work presented in this memory is fundamentally focus on the qualitative study of certain fractional-order equations. In addition, we will show how to adapt the hypotheses and the Banach contraction conditions to our study in order to ensure the existence and uniqueness as well as the stability of the solution of a fractional equation. Finally, we present two illustrative examples to verify the validity and ability of the stability studies.

Keywords:

Implicit fractional equation, Caputo derivation, Ulam-Hyers stability, Banach contraction.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATION

$C([a,b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$C^n([a,b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions n fois continuement différentiables.
$\Gamma(.)$	La fonction Gamma.
$B(.,.)$	La fonction Bêta.
$Re(.)$	Partie réelle d'un nombre complexe.
$\mathcal{I}_a^\alpha$	Intégrale fractionnaire d'ordre α.
${}_a^R\mathcal{D}^\alpha$	Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.
${}_a^C\mathcal{D}^\alpha$	Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo.
${}_a^G\mathcal{D}^\alpha$	Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Grünwald-Letnikov.

INTRODUCTION

Avec un grand intérêt des chercheurs scientifiques ainsi que des ingénieurs, de nombreux d'articles scientifiques remarquables ont été consacrés à la théorie de calcul fractionnaire. Ils ont assuré que l'usage des opérateurs différentiels fractionnaires est bien souhaitable pour la description de la mémoire et des propriétés héréditaires de différents matériaux. En effet, il existe de nombreuses études théoriques et expérimentales nous montrent que certaines équations thermiques (diffusion de la chaleur) [1], physiques (électricité) [2] et rhéologiques (viscoélasticité) [3] sont soumises à des équations fractionnaires.

D'autre part, le concept de la stabilité d'une équation fonctionnelle apparaît lorsqu'on remplace cette équation par une inégalité qui agit comme une perturbation de l'équation. Ainsi, la question de la stabilité des équations fonctionnelles est de savoir comment les solutions de l'inégalité diffèrent de celles de l'équation fonctionnelle donnée ? Une attention considérable a été accordée à l'étude de la stabilité d'Ulam-Hyers et d'Ulam-Hyers-Rassias de toutes sortes d'équations fonctionnelles. Pour plus de détails sur ces information voir les références [4, 5, 6, 7].

Le travail présenté dans ce mémoire porte fondamentalement sur l'étude qualitative de certaines équations différentielles fractionnaires. Par ailleurs, on va montrer comment adapter les conditions de contraction de Banach à notre étude afin d'assurer l'existence et l'unicité ainsi que la stabilité de la solution d'une équation fractionnaire avec des conditions non locales.

Ce mémoire comporte trois chapitres, une conclusion générale et une petite annexe. Il est structuré de la façon suivante :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques concepts de base du calcul fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse l'existence et l'unicité de problème de Cauchy non local d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire implicite.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers de ce problème.

Nous présentons également deux exemples illustratifs pour vérifier la validité du schéma de la stabilité étudie.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une conclusion générale.

CHAPITRE 1

CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques concepts de la théorie du calcul fractionnaire, notamment les fonctions spéciales, transformée de Laplace et quelques définitions de dérivation et d'intégration d'ordre fractionnaire telles que : Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov.

1.1 Fonctions spéciales et transformée de Laplace

1.1.1 Fonctions spéciales

♦ Fonction Gamma

Définition 1.1.1 *[8] La fonction Gamma d'Euler est l'une des fonctions spéciales qui définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \quad Re(z) > 0, \tag{1.1}$$

où $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma(0^+) = +\infty$.

Exemple 1.1.1 *Calculons* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. *On a :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{-1}{2}} e^{-t} dt.$$

On pose $t = u^2$, $dt = 2udu$, on a alors :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Pour calculer cette intégrale, on pose

$$\mathcal{I} = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Cette dernière intégrale est convergente.

Soit

$$\mathcal{I}_A = \int_0^{A} e^{-u^2} du.$$

Donc

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_A)^2 &= \int_0^A e^{-v^2} dv \int_0^A e^{-u^2} du \\ &= \int_0^A \int_0^A e^{-(u^2+v^2)} dudv.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables :

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta, \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_A)^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}A} re^{-r^2} drd\theta \\ &= \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2A^2}) \longrightarrow \frac{\pi}{4}, \quad quand \;\; A \longrightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Puisque $e^{-u^2} > 0$, donc $\mathcal{I} \geq 0$, Par suit $\mathcal{I} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Finalement

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Lemme 1.1.1 *[8]*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, nous avons :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Preuve.

En effectuant l'intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[-e^{-t}t^z\right]_0^x + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

Proposition 1.1.1

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, nous avons :

1/ $\Gamma(0) = \infty$.

2/ $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3/ $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve.

1/ Du Lemme 1.1.1, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+1)}{z} \\
\lim_{z\to0}\Gamma(z) &= \lim_{z\to0}\frac{\Gamma(z+1)}{z} \\
\lim_{z\to0}\Gamma(z) &= \infty.
\end{aligned}$$

2/ La deuxième égalité se déroule directement du Lemme 1.1.1.

3/ On va démontrer la formule $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, par récurrence.

⋆ Pour $n=0$, on a $\Gamma\left(0+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

⋆ Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$; c'est à dire que
$\Gamma((n-1)+\frac{1}{2})=\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}$ est vérifiée.
On a, alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}\\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}\\
&= \frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}\\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}
\end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n. ■

Corollaire 1.1.1

La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatives non entières est donnée par la formule

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)...(z+n-1)},0\leq z+n\leq 1 \tag{1.2}$$

Exemple 1.1.2 *Calculons* $\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)$.
On prend $n=1$*, dans l'égalitée* (1.2)*, on trouve*

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{-1}{2}\right)}\\
&= -2\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

♦ **Fonction Bêta**

Définition 1.1.2 *[8] la fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante :*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \tag{1.3}$$

où : $Re(z) > 0$ et $Re(w) > 0$.

Proposition 1.1.2 *[9] la relation entre la fonction Bêta et la fonction Gamma est donnée par la forme suivante :*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.4}$$

Preuve

Soit $D = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

On a :

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{z-1}s^{w-1}e^{-(t+s)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

On pose :$s = u - t$ et $\mathrm{d}s = \mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{u} t^{z-1}(u-t)^{w-1}e^{-u}\mathrm{d}t\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u}\int_0^{u} t^{z-1}(u-t)^{w-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

On pose :$t = ku$, $\mathrm{d}t = u\mathrm{d}k$.

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} e^{-u}\int_0^{1} k^{z-1}u^{z-1}(1-k)^{w-1}u^{w}\mathrm{d}k\mathrm{d}u \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{z+w-1}\mathrm{d}u\right)\left(\int_0^{1} k^{z-1}(1-k)^{w-1}\mathrm{d}k\right) \\ &= \Gamma(z+w)B(z,w).\end{aligned}$$

Exemple 1.1.3 *Calculons* $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\pi.$$

Proposition 1.1.3 *[10]*

1/ $B(z,w)=B(w,z),\quad Re(z)>0\quad et\quad Re(w)>0$, *i.e B est symétrique.*

2/ $zB(z,w+1)=wB(z+1,w)$.

3/ $B(1,w)=\dfrac{1}{w}$.

4/ $B(z+1,w)=\dfrac{z}{z+w}B(z,w)$.

Preuve

1/ Il suffit d'éffectuer le changement de variable $t=1-x$.

2/ En utilisent (1.4), on trouve.

$$\begin{aligned}
zB(z,w+1)&=z\left(\frac{\Gamma(z)\Gamma(w+1)}{\Gamma(z+w+1)}\right)\\
&=z\left(\frac{\Gamma(z)w\Gamma(w)}{(z+w)\Gamma(z+w)}\right)\\
&=\frac{zw}{z+w}\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$zB(z,w+1)=\frac{zw}{z+w}B(z,w)\tag{1.5}$$

D'autre par :

$$\begin{aligned}
wB(z+1,w)&=w\left(\frac{\Gamma(z+1)\Gamma(w)}{\Gamma(1+z+w)}\right)\\
&=w\left(\frac{z\Gamma(z)\Gamma(w)}{(z+w)\Gamma(z+w)}\right)\\
&=\frac{zw}{z+w}\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.
\end{aligned}$$

Par suite :

$$wB(z+1,w)=\frac{zw}{z+w}B(z,w).\tag{1.6}$$

Alors d'après (1.5) et (1.6), on a :

$$zB(z, w+1) = wB(z+1, w).$$

3/ En utilisent (1.4), on trouve :

$$\begin{aligned} B(1, w) &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(w)}{\Gamma(1+w)} \\ &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(w)}{w\Gamma(w)} \\ &= \frac{1}{w} \end{aligned}$$

4/ D'après l'équation (1.6).

♦Fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittage-Leffler est une fonction importante dans le calcul fractionnaire. Elle joué le même rôle que la fonction exponentielle dans le cas du calcul entier.

Définition 1.1.3 *[11] Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler d'un seul paramétre est définie par :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (Re(z) > 0,\ \alpha > 0). \tag{1.7}$$

Cette fonction peut-être généralisée à deux paramètres [11] par la formule :

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{1.8}$$

Exemples 1.1.1 *Voici les fonctions de Mittag-Leffer de quelques valeurs spéciales de α et β :*

$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$

$E_2(z) = E_{2,1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{z})^{2k}}{(2k)!} = \cosh(\sqrt{z}).$

$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = E_1(z) = e^z.$

$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}.$

$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}.$

$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{(k!)}\right].$

Remarque 1.1.1

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction de Mittag-Leffler E est infiniment différentiable et la n^{ime} dérivée de E est donnée par :

$$E^{(n)}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \alpha n + \beta)}.$$

1.1.2 Transformée de Laplace

Définition 1.1.4 *[12] La transformée de Laplace d'une fonction f(t) est définie par :*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t), s\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad t > 0. \tag{1.9}$$

L'existence de l'intégrale (1.9) *nécessite que la fonction f(t) soit d'ordre exponentiel σ tel que pour des constantes positives M et t, on a :*

$$|f(t)| < Me^{(\sigma t)}$$

Définition 1.1.5 *[12]La transformée de Laplace inverse d'une fonction F(s) est définie par la formule suivante :*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s), t\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)ds, \quad (c = \Re e(s) > c_0), \tag{1.10}$$

tel que c_0 se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale (1.9).

Proposition 1.1.4 *[13] • La transformée de Laplace et son inverse sont des opérateurs linéaires ; c'est à-dire pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, on a :*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t).$$

• *Le produit de convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est donné par :*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx.$$

• *La transformée de Laplace de produit de convolution de f et g est donnée par :*

$$\mathcal{L}\{(f(t) * g(t))\} = F(s)G(s).$$

• *La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n de $f(t)$ est donnée par :*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left[f^{(k)}(t)\right]_{t=0}. \tag{1.11}$$

Exemple 1.1.4

A titre d'exemple, on prend la fonction $g(t) = t^{p-1}$.
Soit $\mathcal{L}\{g(t), s\} = \mathcal{L}\{t^{p-1}, s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{p-1} dt$
Une intégration par partie p-fois, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{p-1} dt &= \frac{(p-1)(p-2)...1}{s^{p-1}} \left[\frac{-1}{s} e^{-st}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{(p-1)!}{s^{p-1}} \left[\frac{-1}{s} e^{-st}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\Gamma(p)}{s^p}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{L}\{t^{p-1}, s\} = \frac{(p-1)!}{s^p} = \Gamma(p)s^{-p}.$$

1.2 Dérivation et intégration d'ordre fractionnaire

Dans ce travail, les symboles d'une dérivée fractionnaire ont été normalisés comme suit :

$$
{}_a\mathcal{D}_t^\alpha = \begin{cases} \dfrac{d^\alpha}{(dt)^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int\limits_a^t d\tau^{(\alpha)}, & \alpha < 0, \end{cases} \tag{1.12}
$$

où ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$ désigne l'opérateur de dérivation d'ordre α. a et t sont respectivement des limites inférieure et supérieure de cet opérateur.

1.2.1 Dérivation et intégration au sens de Riemann-Liouville

Dans cette section, nous regroupons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire.

a **•Intégrale d'ordre fractionnaire**

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale :

$$(\mathcal{I}_a^1 f)(t) = \int\limits_a^t f(\tau)d\tau.$$

La deuxième primitive de f définit comme suite :

$$(\mathcal{I}_a^2 f)(t) = \int\limits_a^t \left(\int\limits_a^s f(\tau)d\tau \right) ds.$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$(\mathcal{I}_a^2 f)(t) = \int\limits_a^s \left(\int\limits_a^t ds \right) f(\tau)d\tau.$$

En utilisant le Théorème de Fubini, on peut écrire :

$$(\mathcal{I}_a^2 f)(t) = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Le n^{ieme} itéré de l'opérateur $\mathcal{I}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_a^{(n)} f)(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{t_1} d\tau_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Définition 1.2.1 *[14] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f, l'intégrale définie par la formule suivante :*

$$(\mathcal{I}_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.13}$$

où α est un nombre réel ou complexe.

Définition 1.2.2 *[12]*

•***Intégrale fractionnaire de Riemenn-Liouville à gauche****.*

$$\forall t > a, \quad {}_a^R\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.14}$$

•***Intégrale fractionnaire de Riemenn-Liouville à droite****.*

$$\forall t < b, \quad {}_a^R\mathcal{D}_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau - t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.15}$$

Proposition 1.2.1

Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$, on a alors :

1/ $\mathcal{I}_a^\alpha(\mathcal{I}_a^\beta f) = \mathcal{I}_a^{\alpha+\beta} f$, $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$.

2/ $\dfrac{d}{dt}(\mathcal{I}_a^{\alpha} f)(t) = (\mathcal{I}_a^{\alpha-1} f)(t), \quad Re(\alpha) > 1.$
3/ $\lim_{\alpha\to 0^+}(\mathcal{I}_a^{\alpha} f)(t) = f(t)\ , \quad Re(\alpha) > 0.$

Exemple 1.2.1 *Soit la fonction* $f(t) = (t-a)^{\beta}$, *ou* $\beta > -1$. *On va essayer de calculer*$\mathcal{I}_a^{\alpha} f(t)$. *D'après* (1.13), *on obtient :*

$$\mathcal{I}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}d\tau,$$

En effectuent le changement de variables $\tau = a + (t-a)s$, *on trouve*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}(s)^{\beta}ds\\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1)\\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\times\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\mathcal{I}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}. \tag{1.16}$$

En particulier, si $\alpha = \dfrac{1}{2}$ *:*
Supposons que $x = t-a$ *:*

$${}_a^R\mathcal{D}_t^{-\frac{1}{2}}x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})}(x)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

$${}_a^R\mathcal{D}_t^{-\frac{1}{2}}x^1 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{5}{2})}(x)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}.$$

$${}_a^R\mathcal{D}_t^{-\frac{1}{2}}x^2 = \frac{2\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{7}{2})}(x)^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}.$$

b-**Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville**

Définition 1.2.3 *Soit* $m-1 < \alpha < m$ *avec* $m \in \mathbb{N}^*$ *et soit* f *une fonction intégrable sur* $[a,b]$, *alors la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction* f *d'ordre* α *est donnée* *par :*

$$ {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m}[(\mathcal{I}_{a}^{(m-\alpha)} f)(t)] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \qquad (1.17) $$

★ *Si $\alpha = m-1$, nous avons une dérivée conventionnelle d'ordre $m-1$:*

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{m-1} f(t) &= \frac{d^m}{dt^m}({}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-(m-(m-1))} f(t)) \\ &= \frac{d^m}{dt^m}({}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-1} f(t)) \\ &= f^{(m-1)}(t). \end{aligned} $$

• En particulier $m = 1$, on a : ${}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{0} f(t) = f(t)$.

Proposition 1.2.2 *L'une des propriétés très importantes de la dérivée au sens de Riemann-Liouville pour $\alpha > 0$ et $t > 0$ est :*

$$ {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}({}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-\alpha} f(t)) = {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}(\mathcal{I}_{a}^{\alpha} f(t)) = f(t) \qquad (1.18) $$

qui signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville est inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du même ordre

• *Si ${}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{\alpha} f(t)$, $(m-1 \leq \alpha < m)$ existe, on a alors :*

$$ {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-\alpha}\left({}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{\alpha} f(t)\right) = f(t) - \sum_{i=1}^{m} \left[{}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{\alpha-i} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}. \qquad (1.19) $$

Exemple 1.2.2 *Soit la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ où $\beta > -1$, $t \in [a,b]$, $\beta \in \mathbb{R}$:*
En utilisant (1.16), *on obtient :*

$$ {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}(t-a)^{m+\beta-\alpha}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)} \frac{d^m}{dt^m}(t-a)^{m+\beta-\alpha}. \qquad (1.20) $$

On sait que :

$$ \frac{d^m}{dt^m}(t-a)^{\beta+m-\alpha} = (\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1).....(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha}. \qquad (1.21) $$

$$\frac{d^m}{dt^m}(t-a)^{\beta+m-\alpha} = \frac{\Gamma(m+\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Par substitution de (1.21) *dans* (1.20)*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
{}_a^R\mathcal{D}_t^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

- *Pour* $\alpha = 1$ *:*

$$ {}_a^R\mathcal{D}_t^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} = \beta(t-a)^{\beta-1}.$$

- *Pour* $\beta = 0$

$$ {}_a^R\mathcal{D}_t^\alpha (t-a)^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

C'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante ni nulle ni constante et on a :

$$ {}_a^R\mathcal{D}_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

1.2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.2.4 *([14],[15]) La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction f(t) sur l'intervalle* $[a, b]$ *est définie par la relation suivante :*

$$ {}_a^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.22}$$

où $m \in \mathbb{N}$ *et* $m = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ *désigne la partie entière de* α*.*

Définition 1.2.5 *[12](**Dérivée fractionnaire de Caputo à gauche**)*

$$\forall t > a, \quad {}_a^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

Définition 1.2.6 *[12](**Dérivée fractionnaire de Caputo à droite**)*

$$\forall t < b, \quad {}_a^C\mathcal{D}_t^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)}(-1)^m \int_t^b (\tau - t)^{m-\beta-1} f^{(m)}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

Remarque 1.2.1 *(Relation de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo avec la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville [9])*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}^*$, $m = [\alpha] + 1$.Supposons que ${}_a^C\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t)$ et ${}_a^R\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t)$ existent, alors :

(a)

$${}_a^C\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = {}_a^R\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} \tag{1.23}$$

Si $f^{(i)}(a) = 0$, pour tout $i = 0, 1, ..., m-1$, on aura : ${}_a^C\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = {}_a^R\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t)$

(b)

$${}_a^C\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = {}_a^R\mathcal{D}_t^{\alpha} \left(f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{(i!)}(t-a)^i \right) \tag{1.24}$$

cas particulier : Si $0 < \alpha < 1$, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont définie respectivement par :

$${}_a^R\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left({}_a^R\mathcal{D}_t^{-(1-\alpha)} f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.25}$$

$${}_a^C\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) = {}_a^R\mathcal{D}_t^{-(1-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.26}$$

• **Propriétés**

On a les propriétés suivantes ([9]) :

1.

$$\begin{aligned} {}_a^R\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(t-a)^{\alpha}} + \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{f(a)}{(1-a)^{\alpha}} + {}_a^C\mathcal{D}_t^{\alpha} f(t). \end{aligned}$$

2. Si f est continue sur $[a, b]$, alors :

$$ {}_{a}^{C}\mathcal{D}_{t}^{\alpha} I_{a}^{\alpha} = f(t). \tag{1.27}$$

3. Si $f \in C^{m}[a, b]$, alors :

$$ I_{a}^{\alpha}\, {}_{a}^{C}\mathcal{D}_{t}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^{i}. \tag{1.28}$$

• En particulier, pour $0 < \alpha \leq 1$, on a :

$$ I_{a}^{\alpha}({}_{a}^{C}\mathcal{D}_{t}^{\alpha} f(t)) = f(t) - f(a). \tag{1.29}$$

Alors, l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville du même ordre.

Exemple 1.2.3 *Soient la fonction* $f(t) = (t-a)^{\beta}$ *,m un entier et p un réel tels que* $0 \leq m-1 < \alpha < m$, *avec* $\beta > m-1$

On a :

$$ f^{(m)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)}(\tau-a)^{\beta-m} $$

Donc :

$$ {}_{a}^{C}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{m-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-m} \mathrm{d}\tau. $$

En effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, *on obtient :*

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{C}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{m-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-m} \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \int_{0}^{1} (1-s)^{m-\alpha-1} s^{\beta-m} \mathrm{d}s \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(m-\alpha, \beta-m+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} $$

Donc :

$${}^{C}_{a}\mathcal{D}^{\alpha}_{t}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha},$$

En particulier, si $\alpha = \frac{1}{2}$ *:*

Supposons que $x = t - a$ *:*

$${}^{C}_{a}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{t}x^{0} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x\pi}}.$$

$${}^{C}_{a}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{t}x^{1} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}(x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}(x)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

$${}^{C}_{a}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{t}x^{2} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}(x)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\Gamma(1)}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}(x)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{x^{3}}{\pi}}.$$

1.2.3 Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov :

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires. La dérivée de premier ordre de la fonction $f(t)$ est défini par :

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h}. \tag{1.30}$$

L'application de cette définition deux fois donne :

$$f''(t) = \frac{d^2f}{dt^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(t)-f'(t-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)}{h^2}. \tag{1.31}$$

En utilisant (1.30) et (1.31), nous obtenons :

$$f'''(t) = \frac{d^3f}{dt^3} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t)-3f(t-h)+3f(t-2h)-f(t-3h)}{h^3}. \tag{1.32}$$

Par dérivation successive, on obtient :

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^nf}{dt^n} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}f(t-rh), \tag{1.33}$$

où :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}.$$

La formule (1.33) représente la dérivée d'ordre entier n si n est positif, et l'intégrale répétée n fois si n est négatif.

Grâce à la propriété fondamentale $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, on peut arriver à une expression plus générale dans le cas où n est négatif ou nul :

$$(-1)^r \binom{n}{r} = \frac{-n(1-n)(2-n)...(r-n-1)}{r!} = \frac{\Gamma(r-n)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-n)}.$$

Donc on a :

Définition 1.2.7 *Soit $f \in C([a,t], \mathbb{R})$: la dérivée fractionnaire de f au sens de Grünwald-Letnikov est donnée par :*

$$ {}_a^G\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.34}$$

Tandis que l'intégrale fractionnaire et donnée par :

$$ {}_a^G\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.35}$$

Définition 1.2.8 *Si f est de classe C^m, des intégrations par parties de* (1.34) *et* (1.35) *nous permit d'écrire :*

$$ {}_a^G\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau.$$

Et :

$$ {}_a^G\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r+\alpha}}{\Gamma(r+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau.$$

La Définition (1.2.8) *est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées* $f^{(r)}(t)$, $(r = 1, 2, ..., m)$ *sont* *continues sur l'intervalle fermé* $[a, t]$ *et que* m *est un entier vérifiant la condition* $m > \alpha$*, la plus petite valeur possible de* m *est déterminée par l'inégalité suivante :* $m - 1 < \alpha < m$

CHAPITRE 2

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES AVEC DES CONDITIONS NON LOCALES

Dons cette section, on s'intéresse à l'étude d'un problème d'existence et d'unicité d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(t)), & t \in J = [0, T],\ T > 0,\ 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) + g(y) = y_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : C(J, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, et y_0 une constante réelle.

A titre d'exemple, on prend :

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i),$$

où $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < T$ et c_i, $i = 1, ..., n$ sont des constantes.

Commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème (2.1).

Définition 2.0.9 *Une fonction* $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ *est dite solution du problème* (2.1)*, si y satisfait l'équation :*

$$^C\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t), ^C\mathcal{D}^\alpha y(t)), \qquad t \in J.$$

et la condition :

$$y(0) + g(y) = y_0.$$

2.1 Equivalence entre problème de Cauchy et l'équation intégrale de Voltera (Solution intégrale)

Lemme 2.1.1 *[16]*
soient $0 < \alpha \leq 1$ *et* $h : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, alors le problème de Cauchy suivant :*

$$^C\mathcal{D}^\alpha y(t) = h(t), \qquad t \in J, \tag{2.2}$$

$$y(0) + g(y) = y_0, \tag{2.3}$$

peut se représenté de la maniére suivante :

$$y(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Preuve

En appliquant l'opérateur $\mathcal{I}^\alpha$ au deux membres de l'égalité (2.2) et en utilisant la formule (1.29), on obtient :

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

En utilisant la condition (2.3), on trouve :

$$y(0) = y_0 - g(y)$$

Par suite
$$y(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

2.2 Existence et Unicité de la solution

Lemme 2.2.1 *[16]* *Soit $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors le problème* (2.1) *est équivalent au problème :*
$$y(t) = y_0 - g(y) + \mathcal{I}^\alpha P_y(t),$$
où
$$P_y(t) = f(t, y(t), P_y(t)).$$

Par le principe de contraction de Banach, le théorème suivant nous donne l'unicité de la solution du problème (2.1) :

Théorème 2.2.1 *[16]*
•*($\mathcal{H}_1'$) il existe trois constantes $K > 0$, $0 < \overline{K} < 1$ et $0 < L < 1$, telles que :*
$$|f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| \leq K|u-\bar{u}| + \overline{K}|v-\bar{v}| \quad \forall t \in J \quad et \quad \forall\, u, \bar{u}, v, \bar{v} \in \mathbb{R},$$
et
$$|g(y) - g(\bar{y})| \leq L\|y-\bar{y}\|_\infty, \quad \forall y, \bar{y} \in C(J,\mathbb{R}).$$
De plus, si
$$L + \frac{KT^\alpha}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{2.4}$$
alors, le probléme (2.1) *a une unique solution.*

Démonstration : Nous allons transformer le problème (2.1) en un problème de point fixe.
Considérons l'opérateure
$$F : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$$

défini par :

$$Fy(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_y(s)ds,$$

où

$$P_y(t) = f(t, y_0 - g(y) + \mathcal{I}^{\alpha} P_y(t), P_y(t)).$$

Par les Lemmes (2.1.1) et (2.2.1) , il est clair que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (2.1).

Si $y \in C(J, \mathbb{R})$, alors $(F_y) \in C(J, \mathbb{R})$, et donc l'opérateur F est bien défini.

Nous allons montrer que F admet un unique point fixe, et pour cela , il suffit de montrer que F est une contraction.

Soient $x, y \in C(J, \mathbb{R})$, et $t \in J$, on a alors ;

$$\begin{aligned} |Fy(t) - Fx(t)| \leq& |g(y) - g(x)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |P_y(s) - P_x(s)| ds \\ \leq& L|y(t) - x(t)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |P_y(s) - P_x(s)| ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

D'autre part, on a pour tout $t \in J$:

$$\begin{aligned} |P_y(t) - P_x(t)| =& |f(t, y(t), P_y(t)) - f(t, x(t), P_x(t))| \\ \leq& K|y(t) - x(t)| + \overline{K}|P_y(t) - P_x(t)|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|P_y(t) - P_x(t)| \leq \frac{K}{1 - \overline{K}} |y(t) - x(t)|. \tag{2.6}$$

En remplaçant (2.6) dans l'inégalité (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned} |Fy(t) - Fx(t)| \leq& L|y(t) - x(t)| + \frac{K}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y(s) - x(s)| ds \\ \leq& \left[L + \frac{KT^{\alpha}}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+1)} \right] \|y - x\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|F_y - F_x\|_\infty \leq \left[L + \frac{KT^\alpha}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+1)}\right]\|y - x\|_\infty.$$

D'après (2.4), F est une contraction, et par la Théorème de point fixe de Banach, F admet un unique point fixe qui est la solution du problème (2.1).

CHAPITRE 3

STABILITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE SOUS CERTAINES CONDITIONS

Dans cette partie, on s'intéresse à la notion de stabilité d'Ulam-Hyers [17, 18] de l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y_t = f(t, y(t), {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y_t), \qquad t \in J = [0, T],\ T > 0,\ 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.1}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

3.1 Types de stabilité

3.1.1 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers

Définition 3.1.1

L'équation (3.1) *est stable au sens d'Ulam-Hyers, s'il existe un nombre réel* $c_f > 0$, *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour chaque solution* $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'inégalité :*

$$|{}^C\mathcal{D}^\alpha x(t) - f(t, x(t), {}^C\mathcal{D}^\alpha x(t))| \leq \varepsilon, \quad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'équation* (3.1) *vérifiant :*

$$|x(t) - y(t)| \leq c_f \varepsilon, \quad t \in J.$$

3.1.2 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée

Définition 3.1.2

L'équation (3.1) *est stable au sens d'Ulam-généralisée, s'il existe une fonction* $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $\psi_f(0) = 0$, *telle que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour chaque solution* $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'intégralité :*

$$|{}^C\mathcal{D}^\alpha x(t) - f(t, x(t), {}^C\mathcal{D}^\alpha x(t))| \leq \varepsilon, \quad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'équation* (3.1) *vérifiant :*

$$|x(t) - y(t)| \leq \psi_f(\varepsilon), \quad t \in J.$$

3.1.3 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassias

Définition 3.1.3

L'équation (3.1) *est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassias par rapport à* $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *s'il existe un nombre réel* $c_f > 0$, *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour chaque solution* $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'inégalité :*

$$|{}^C\mathcal{D}^\alpha x(t) - f(t, x(t), {}^C\mathcal{D}^\alpha x(t))| \leq \varepsilon\varphi(t), \quad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J,\mathbb{R})$ de l'équation (3.1) vérifiant :

$$|x(t) - y(t)| \leq c_f \varepsilon \varphi(t), \quad t \in J.$$

3.1.4 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassias généralisée

Définition 3.1.4

L'équation (3.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassias généralisée par rapport à $\varphi \in C(J,\mathbb{R}_+)$, s'il existe un nombre réel $c_{f,\varphi} > 0$, tel que pour chaque solution $x \in C^1(J,\mathbb{R})$ de l'inégalité :

$$|{}^C\mathcal{D}^\alpha x_t - f(t, x(t), {}^C\mathcal{D}^\alpha x_t)| \leq \varphi(t), \quad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J,\mathbb{R})$ de l'équation (3.1) vérifiant :

$$|x(t) - y(t)| \leq c_{f,\varphi} \varphi(t), \quad t \in J.$$

Remarque 3.1.1

Une fonction $x \in C^1(J,\mathbb{R})$ est dite solution de l'inégalité :

$$|{}^C\mathcal{D}^\alpha x(t) - f(t, x(t), {}^C\mathcal{D}^\alpha x(t))| \leq \varepsilon, \quad t \in J,$$

si et seulement s'il existe une fonction $g \in C(J,\mathbb{R})$(qui dépend de la solution y) vérifiant :

1. $|g(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in J.$

2. ${}^C\mathcal{D}^\alpha x(t) = f(t, x(t), {}^C\mathcal{D}^\alpha x(t)) + g(t), \quad t \in J.$

3.2 Étude de la stabilité

Cette section est consacrée à l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers de l'équation différentielle fractionnaire (2.1).

3.2.1 Stabilité d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions non locales

Nous allons étudier la stabilité du problème :

$$^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), ^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(t)), \qquad t \in J,\ T > 0,\ 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.2}$$

$$y(0) + g(y) = y_0, \tag{3.3}$$

où $g : C(J, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, et y_0 une constante réelle.

Théorème 3.2.1
Supposons que les hypothèses ($\mathcal{H}'_1$) *et* (2.4) *sont satisfaites, alors le problème* (3.2) *avec la condition non locale* (3.3) *est stable aux sens de Ulam-Hyers .*

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ une fonction qui satisfait l'inégalité :

$$|^{c}\mathcal{D}^{\alpha}x(t) - f(t, x(t), ^{c}\mathcal{D}^{\alpha})| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in J, \tag{3.4}$$

et soit $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} ^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), ^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(t)), & t \in J,\ 0 < \alpha \leq 1 \\ x(0) + g(y) = y_0. \end{cases}$$

Par les lemmes (2.1.1)-(2.2.1), on obtient :

$$y(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_y(s) ds,$$

oú

$$P_y(t) = f(t, y(t), P_y(t)),$$

Par intégration de l'inégalité (3.4), on trouve :

$$\left|x(t) - y_0 + g(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_x(s)ds\right| \leq \frac{\varepsilon t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

où

$$P_x(t) = f(t, x(t), P_x(t)).$$

Pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &\leq \left|x(t) - y_0 + g(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_x(s)ds\right| \\
&+ \left|g(y) - g(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(P_x(s) - P_y(s))ds\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + |g(x) - g(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|P_x(s) - P_y(s)|ds.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.6), on trouve :

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + L|x(t) - y(t)| + \frac{K}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s) - y(s)|ds.$$

Donc,

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{K}{(1-L)(1-\overline{K})\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s) - y(s)|ds.$$

Par le Lemme de Gronwall (voir Annexe), on trouve :

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &\leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\gamma \varepsilon K T^\alpha}{(1-L)^2(1-\overline{K})\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}\left[1 + \frac{\gamma k T^\alpha}{(1-L)(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+1)}\right] = c\varepsilon,
\end{aligned}$$

où $\gamma = \gamma(\alpha)$ une constante. Alors le probléme (3.2)-(3.3) est stable au sens de Ulam-Hyers.

Remarque 3.2.1 *Si on pose $\Psi(\varepsilon) = c\varepsilon$, alors $\Psi(0) = 0$, et donc le probléme* (3.2)-(3.3) *devient stable au sens de Ulam-Hyers généralisée.*

Théorème 3.2.2

Supposons que ($\mathcal{H}'_1$), (2.4) *sont satisfaites.Supposons également que*

►*($\mathcal{H}'_2$) il existe une fonction croissante* $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$*et il existe* $\lambda_\varphi > 0$ *telles que :*

$$\mathcal{I}^\alpha \varphi(t) \leq \lambda_\varphi \varphi(t), \forall t \in J$$

est satisfaite.

Alors le probléme(3.2)-(3.3) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias.*

Preuve

: voir [16].

3.3 Exemples

Dans cette parties, nous présentans deux exemples illustratifs pour vérifier la validité des schémas de la stabilité étudiés

Exemple 3.3.1 *Soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} y(t) = \dfrac{a}{6+t^2}\left[\dfrac{|y(t)|}{a+|y(t)|} - \dfrac{|{}^C\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} y(t)|}{a+|{}^C\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} y(t)|}\right], & t \in [0,1], a \in [1, +\infty[\\ y(0) + \sum_{i=1}^n C_i y(t_i) = 1, & \end{cases} \tag{3.5}$$

où $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < 1$ *et* $C_i, i = 1, ..., n$ *sont des constantes positives avec :*

$$\sum_{i=1}^n C_i \leq \frac{1}{5}.$$

Posons :

$$f(t,u,v) = \frac{a}{6+t^2}\left[\frac{|u|}{a+|u|} - \frac{|v|}{a+|v|}\right], \qquad t \in [0,1], a \in [1, +\infty[, u, v \in \mathbb{R}.$$

et

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} C_i u.$$

Il est clair que la fonction f est continue. Pour tous $u, v, \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}$ *et* $t \in [0.1]$*, on a :*

$$\begin{aligned}
|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| &= \left| \frac{a}{6+t^2} \left[\frac{a(|u| - |\overline{u}|)}{(a+|u|)(a+|\overline{u}|)} + \frac{a(|\overline{v}| - |v|)}{(a+|v|)(a+|\overline{v}|)} \right] \right| \\
&\leq \frac{a^2}{6+t^2} \left[\left| \frac{|u| - |\overline{u}|}{(a+|u|)(a+|\overline{u}|)} \right| + \left| \frac{|\overline{v}| - |v|}{(a+|v|)(a+|\overline{v}|)} \right| \right] \\
&\leq \frac{a^2}{6+t^2} \frac{1}{a^2} [|u - \overline{u}| + |v - \overline{v}|] \\
&\leq \frac{1}{6+t^2} [|u - \overline{u}| + |v - \overline{v}|] \\
&\leq \frac{1}{6} [|u - \overline{u}| + |v - \overline{v}|].
\end{aligned}$$

finalement,

$$|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| \leq \frac{1}{6} [|u - \overline{u}| + |v - \overline{v}|].$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
|g(u) - g(\overline{u})| &= \left| \sum_{i=1}^{n} C_i u - \sum_{i=1}^{n} C_i \overline{u} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} C_i |u - \overline{u}| \\
&\leq \frac{1}{5} |u - \overline{u}|
\end{aligned}$$

ainsi $(\mathcal{H}'_1)$ *est satisfaite avec* $K = \overline{K} = \dfrac{1}{6}$ *et* $L = \dfrac{1}{5}$.

Il reste plus qu'à vérifier la condition (2.4). *On a :*

$$\begin{aligned} L + \frac{KT^{\alpha}}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+1)} &= \frac{1}{5} + \frac{\frac{1}{6}}{(1-\frac{1}{6})\Gamma(\frac{3}{2})} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5\Gamma(\frac{3}{2})} \\ &= \frac{5\sqrt{\pi}+10}{25\sqrt{\pi}} < 1. \end{aligned}$$

Comme les hypothèses du Théorème (2.2.1) *sont satisfaites, le problème* (3.5) *admet une unique solution, et par le théorème* (3.2.1), *le problème* (3.5) *est stable au sens de Ulam-Hyers .*

Exemple 3.3.2 *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} y(t) = \dfrac{a}{6+t^2}\left[\dfrac{|y(t)|}{a+|y(t)|} - \dfrac{|{}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} y(t)|}{a+|{}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} y(t)|}\right], \qquad t \in [0,1], a \in [1,+\infty[\\ y(0) + \dfrac{a}{3}\left(\dfrac{|y(t)|}{a+|y(t)|}\right) = 1, \end{cases} \tag{3.6}$$

Posons :

$$f(t,u,v) = \frac{a}{6+t^2}\left[\frac{|u|}{a+|u|} - \frac{|v|}{a+|v|}\right], \quad \forall t \in [0,1].a \in [1,+\infty[, \quad u,v \in \mathbb{R}.$$

et

$$g(y) = \frac{a}{3}\left(\frac{|u|}{a+|u|}\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

D'après l'exemple(3.3.1), *on a :*

$$|f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| \leq \frac{1}{6}\left[|u-\bar{u}| + |v-\bar{v}|\right].$$

Ensuit,pour tous u, $\bar{u} \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
|g(u) - g(\bar{u})| &= \frac{a}{3}\left|\frac{a(|u|-|\bar{u}|)}{(a+|u|)(a+|\bar{u}|)}\right| \\
&\leq \frac{a^2}{3}\frac{1}{a^2}||u|-|\bar{u}|| \\
&\leq \frac{1}{3}|u - \bar{u}|
\end{aligned}$$

ainsi :

$$K = \overline{K} = \frac{1}{6} \quad et \quad L = \frac{1}{3}$$

Par conséquent $(\mathcal{H}'_1)$ *est satisfaite.*

D'autre part,

$$\begin{aligned}
L + \frac{KT^{\alpha}}{(1 - \overline{K})\Gamma(\alpha + 1)} &= \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{6}}{(1 - \frac{1}{6})\Gamma(\frac{3}{2})} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{5\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{5\sqrt{\pi} + 6}{15\sqrt{\pi}} < 1.
\end{aligned}$$

Comme les hypothèses du Théorème (2.2.1) *sont satisfaites, le problème* (3.6) *admet une unique solution, et par le théorème* (3.2.1), *le problème* (3.6) *est stable au sens de Ulam-Hyers .*

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail de mémoire, nous avons étudie différentes types de la stabilité au sens de Ulam-Hyers d'un problème de Cauchy avec des conditions non locales d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire implicite. Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques résultats classiques de calcul fractionnaire, qui nous semblent utiles pour la bonne compréhension de travail de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la résolution d'un problème de Cauchy avec des conditions non locales d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire implicite.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la stabilité des équations différentielles fractionnaires. L'utilisation de cette étude a nous permis de montrer sous certaines conditions adéquates la démonstration de la stabilisation de telles équations.

Enfin, deux exemples illustratifs ont été fournis pour vérifier la validité du schéma de la stabilité considéré.

ANNEXE

Définition 3.3.1

Soient X un espace de Banach et $F : X \to X$. On dit que $x \in X$ est un point fixe de F si :

$$F(x) = x.$$

Théorème 3.3.1 *(Théorème de point fixe(Contraction de Banach))*

Soient X un espace de Banach et $F : X \longrightarrow X$ une contraction, c'est-à-dire, il existe $0 \leq k < 1$ *tel que :*

$$\forall x, y \in X : \|f(x) - f(y)\|_X \leq K\|x - y\|_X,$$

alors F a un unique point fixe.

Lemme 3.3.1 *(Lemme de Gronwall)*

Soient $v : [0, T] \to [0, \infty)$ une fonction réelle et $w(.)$ une fonction non négative, localement intégrable sur $[0, T]$. *Supposons qu'il existe des constantes $a > 0$ et $0 < \alpha \leq 1$ telles que :*

$$v(t) \leq w(t) + a \int_0^t (t - s)^{-\alpha} v(s) ds.$$

Alors, il existe une constante $K = K(\alpha)$ telle que :

$$v(t) \leq w(t) + Ka \int_0^t (t - s)^{-\alpha} w(s) ds. \qquad \forall t \in [0, T].$$

Théorème 3.3.2 *(théorème de Schauder)*
Soit B un espace de Banach, U un fermé, borné, convexe et non vide de B et $T : U \to U$ une application telle que l'ensemble $Tu : u \in U$est relativement compact dans B. Alors, T possède au moins un point fixe dans U.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Jesus, I. S and Machado, J. T. Fractional control of heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics*. **54** (3) (2008). 263–282.

[2] Schmidt, V. H. and Drumheller, J. H. Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate. *Physical Review B* . **4** (1971). 4582-4597.

[3] Bagley, R. L. and Calico, R. A. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *Journal of Guid Control Dyn.* **14** (2) (1991). 304-311.

[4] Abbas, S. and Benchohra, M. On the generalized Ulam-Hyers-Rassias stability for darboux problem for partial fractional implicit diferential equations. *Applied. Mathematics. E-Notes* . **14** (2014). 20-28.

[5] Gavruta, P. A Generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of approximately additive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **184** (1994). 431-436.

[6] Rassias, T. M. Brzdek, J. Functional equations in mathematical analysis. *Springer*. **89** (2012).

[7] Takahasi, S. E. Miura, T. and Miyajima, S. On the Hyers-Ulam Stability of the banach spacevalued diferential equation $\dot{y} = \lambda y$. *Bulletin of the Korean Mathemamatical Society* . **39** (2002). 309-315.

[8] Podlubny, I. Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *Mathematics in Science and Engineering*. **198** (1998).

[9] Kilbas, A. A. Srivastava, H. M. Trujillo, J. J. Theory and applications of fractional differential equation. *North-holland mathematics studies*. **204** (2006).

[10] Bragdi, A. Existence des solutions de certaines équation intégro-différentielles non linéaires. These de doctorat. *Université El Arbi Bin M'hidi Oum El-Bouaghi* . (2021).

[11] Magin, R. Fraction calculus in Bioengineering. *begell House publishers*. (2004).

[12] Changpin, L. and Fanhai, Z. Numerical methods for fractional calculus. *CRC Press*. **24** (2015).

[13] Diethelm, K. The Analysis of Fractional Differential Equations : An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. *Lecture Notes in Mathematics (2004). Springer-Verlag Berlin Heidelberg*. 1 edition. (2010).

[14] Podlubny, I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *fractional calculus and applied analysis*. **5** (4) (2002).

[15] Roman, H. E. and Massimiliano, G. Fractional diffusion equation on fractals : three-dimensional case and scattering function. *Journal of Physics A : Mathematical and General*. **25** (8) (1992).

[16] Benchohra, M. and Bouriah, S. Existence and stability results for non linear boundary value problem for implicit diferential equations of fractional order. *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis 1*. **1** (2015). 22-37.

[17] Karthikeyen, K. Murugapandian, G. S. and Ege, O. On the solutions of fractional integro-differenal equations involving Ulam-Hyers-Rassais stability results via $\psi-frational$ derivative with boundary valu conditions. *Turkish jornal of Mathematics*. **46** (2022). 2500-2512.

[18] Benchohra, M. Bouriah, S. and Nieto, J. J. Existence and Ulam stability for nonlinear implicit differential equations with Riemann-liouville fractional derivative. *De Gruyter*. **52** (2015). 437-450