

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Étude de la dynamique chaotique du système de Rössler

Préparé par :

✚ Achouak Bounehal
✚ Dounia Zaabal

Soutenue devant le jury

| | | | |
|----------------|-----|---------------------------------|------------|
| Rabeh Bouden | MCA | C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila | Président |
| Labed Boudjema | MAA | C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila | Rapporteur |
| Meskine Habiba | MAA | C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila | Examineur |

Année universitaire :2022/2023

REMERCIEMENTS

*Avant Tout d'abord, nous tenons à remercier **Allah**, le tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ce travail. À nos chers parents, pour leur amour, leurs sacrifices, leur tendresse, leur soutien tout au long de nos études.*

*Nous exprimons notre sincère gratitude à notre encadreur, Monsieur **Labed Boudjama**, pour son précieux soutien, sa disponibilité et ses conseils avisés qui ont grandement contribué à l'élaboration de ce mémoire.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tous les professeurs qui ont généreusement accepté de faire partie du jury et d'évaluer ce travail avec bienveillance. Le président du jury : **Boueden Rabah**. Eximinateur : **Meskin Habiba***

DÉDICASSE

Le voyage n'était pas court et ne devait pas l'être, la science n'était pas proche et la route n'était pas pleine de facilités, mais je l'ai fait.

*Je dédie ma graduation à celui dont je porte le nom avec fierté, à celui qui a récolté les épines de mon chemin pour paver le chemin de la connaissance, À mon cher père **Ahmed**.*

*À celle à qui Dieu a placé le paradis sous ses pieds. La plus chère et la plus proche de mon cœur, ma bien-aimée mère **Malika**.*

*À la prunelle des mes yeux, mes frères **Oussama, Achref** et ma belle sœur **Ferial**.*

Et à tous ceux qui ont été une aide et un soutien dans ce chemin vous, je vous suis reconnaissant à tous, je n'aurais pas atteint d'abord votre faveur après Dieu.

DÉDICASSE

Le voyage n'était pas court et ne devait pas l'être, la science n'était pas proche et la route n'était pas pleine de facilités, mais je l'ai fait.

*Je dédie ma graduation à celui dont je porte le nom avec fierté, à celui qui a récolté les épines de mon chemin pour paver le chemin de la connaissance, À mon cher père **Saad**.*

*À celle à qui Dieu a placé le paradis sous ses pieds. La plus chère et la plus proche de mon cœur, ma bien-aimée mère **Messaouda**.*

*À la prunelle des mes yeux, mes frères **Abdenneur, Fouad, Ayoub** et ma belle sœur **Ibtissam**.*

Et à tous ceux qui ont été une aide et un soutien dans ce chemin vous, je vous suis reconnaissant à tous, je n'aurais pas atteint d'abord votre faveur après Dieu.

ملخص

في هذا البحث، نستعرض نتيجة تحليل الديناميكا الفوضوية لنظام روسلر.

في هذه الدراسة، نبدأ بتحليل طبيعة النقاط الثابتة واستقرارها باستخدام الطرق النظرية و العددية. بعد ذلك، ندرس التشعبات في النظام، والجاذبيات، ونرسم المخططات الخاصة بالتشعبات المتعلقة بكل معلمة.

الكلمات المفتاحية:

الفوضى، التشعب، الجاذبية، نظام روسلر.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous exposons la conclusion de l'analyse de la dynamique chaotique du système de Rössler.

Dans cette étude, nous commençons par analyser la nature des points fixes ainsi que leur stabilité, en utilisant des méthodes théoriques et numériques. Ensuite, nous examinons les bifurcations du système, les attracteurs et tracé les graphes des bifurcations correspondant à chaque paramètre.

Les mots clés :

Chaos, bifurcation, attracteur, système de Rössler.

ABSTRACT

In this memory, we present the conclusion of the analysis of the chaotic dynamics of the Rossler system.

In this study, we begin by analyzing the nature of the fixed points and their stability using theoretical and numerical methods. Then, we examine the system's bifurcations, attractors and we plotted the bifurcation diagrams corresponding to each parameter.

Key words :

Chaos, bifurcation, attractor, Rössler system.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|----------|
| Remerciements | i |
| Dédicasse | i |
| Dédicasse | i |
| Résumé | i |
| Abstract | i |
| Introduction Générale | 1 |
| 1 Notions de base sur les systèmes dynamiques | 3 |
| 1.1 Définitions d'un système dynamique | 3 |
| 1.1.1 Système dynamique à temps continu | 3 |
| 1.1.2 Système dynamique à temps discret | 4 |
| 1.2 Système conservative et système dissipative | 4 |
| 1.3 Système autonome et non-autonome | 5 |
| 1.4 Espace de phases | 6 |
| 1.5 Flot | 6 |
| 1.6 Trajectoires | 6 |
| 1.7 Ensembles limites | 6 |
| 1.8 Points d'équilibres | 7 |
| 1.9 Stabilité au sens de Lyapunov | 7 |
| 1.9.1 Méthode directe | 7 |
| 1.9.2 Méthode indirecte | 8 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.10 | Classification des points d'équilibres | 10 |
| 1.10.1 | Cas des systèmes linéaires | 10 |
| 1.10.2 | Cas des systèmes non linéaires | 11 |
| 1.11 | Les attracteurs | 13 |
| 1.11.1 | Les différents types d'attracteurs | 13 |
| 1.12 | Bifurcations | 15 |
| 1.12.1 | Les types de bifurcations | 15 |
| 2 | Théorie du chaos | 19 |
| 2.1 | Histoire de la théorie du chaos | 19 |
| 2.2 | Définition du chaos | 19 |
| 2.3 | Système dynamique chaotique | 20 |
| 2.4 | Routes vers le chaos | 20 |
| 2.5 | Caractéristique de chaos | 21 |
| 2.5.1 | La non-linéarité | 21 |
| 2.5.2 | Le déterministe | 21 |
| 2.5.3 | Sensibilité aux conditions initiales | 21 |
| 2.5.4 | Aspect aléatoire | 22 |
| 2.5.5 | Exposant de Lyapounov | 23 |
| 2.5.6 | Dimensions fractales des attracteurs étranges | 24 |
| 2.5.7 | Les attracteurs étranges | 25 |
| 2.6 | Quelques modèles des systèmes chaotiques | 27 |
| 2.6.1 | Exemples des systèmes chaotiques à temps continu | 27 |
| 2.6.2 | Exemples des systèmes chaotiques à temps discrets | 29 |
| 3 | Système de Rössler | 31 |
| 3.1 | Introduction | 31 |
| 3.2 | Calcul des points d'équilibres | 32 |
| 3.3 | Stabilité des points d'équilibres : | 33 |
| 3.4 | Aspect aléatoire | 34 |
| 3.5 | Changement des paramètres(a,b etc) | 35 |
| 3.5.1 | Changement du paramètre a | 35 |
| 3.5.2 | Changement de paramètre b | 36 |
| 3.5.3 | Changement de paramètre c | 37 |
| 3.6 | Système de Rössler 3D | 37 |
| 3.7 | Projection x-y du système de Rössler | 38 |
| 3.8 | L'attracteur de Rössler | 39 |

| | |
|----------------------|-----------|
| conclusion | 42 |
| Bibliographie | 43 |

TABLE DES FIGURES

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2 | 13 |
| 1.2 | Les différents types d'attracteurs. | 14 |
| 1.3 | Attracteur chaotique de chen. | 14 |
| 1.4 | Diagramme de bifurcation noeud-col. | 16 |
| 1.5 | Diagramme de bifurcation transcritique. | 16 |
| 1.6 | Diagramme de bifurcation fourche. | 18 |
| 1.7 | Diagramme d'une bifurcation de Hopf. | 18 |
| | | |
| 2.1 | Sensibilité aux condition initiale du système de lorenz | 22 |
| 2.2 | L'aspect aléatoire du système de lorenz | 22 |
| 2.3 | Attracteur de lorenz pour $\sigma = 10, r=28, \text{ et } b = 8/3$ | 28 |
| 2.4 | Attracteur de Lü | 28 |
| 2.5 | Attracteur de Hénon pour $a = 1.4, b = 0.3$ | 29 |
| 2.6 | Attracteur de lozi pour $a = 1.7, b = 0.5$ | 30 |
| | | |
| 3.1 | L'état chaotique "x" du système de Rössler | 34 |
| 3.2 | L'état chaotique "y" du système de Rössler | 34 |
| 3.3 | L'état chaotique "z" du système de Rössler | 35 |
| 3.4 | Diagramme de bifurcation Pour "a" varier | 36 |
| 3.5 | diagramme de bifurcation Pour "b" varier | 36 |
| 3.6 | Diagramme de bifurcation Pour "c" varier | 37 |
| 3.7 | Système de Rössler en 3D | 38 |
| 3.8 | Projection du système de Rössler sur le plan x-y pour différents paramètres c | 39 |
| 3.9 | Attracteur de Rössler pour $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$ | 40 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.10 | Projection 2-dimension du système chaotique sur un plan (x, y) | 40 |
| 3.11 | Projection 2-dimension du système chaotique sur un plan (x, z) | 41 |
| 3.12 | Projection 2-dimension du système chaotique sur un plan (y, z) | 41 |

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les systèmes dynamiques chaotiques sont des systèmes complexes dont le comportement est caractérisé par une sensibilité extrême aux conditions initiales. Cela signifie que de légères variations dans les conditions de départ peuvent entraîner des résultats totalement différents à long terme. Ces systèmes présentent également un aspect imprévisible et chaotique, même si les équations qui les régissent sont déterministes.

L'histoire et l'étude des systèmes dynamiques chaotiques remontent à plusieurs décennies. Les scientifiques et les mathématiciens ont cherché à comprendre les comportements complexes et imprévisibles qui se produisent dans de nombreux systèmes naturels et artificiels.

Le concept de chaos a été introduit par le mathématicien français **Henri Poincaré** au XIXe siècle. Il a constaté que certains systèmes, tels que le mouvement des planètes ou le pendule double, peuvent être sensibles aux conditions initiales, ce qui signifie que de petites variations peuvent conduire à des résultats totalement différents à long terme.

Cependant, c'est dans les années 1960 et 1970 que l'étude des systèmes chaotiques a vraiment pris son essor. Des chercheurs tels que **Edward Lorenz**, **Benoît Mandelbrot** et **Mitchell Feigenbaum** ont fait d'importantes avancées dans ce domaine. Ils ont développé des modèles mathématiques et des outils de visualisation pour étudier les systèmes chaotiques et comprendre leurs propriétés(Lorenz venait de mettre en Évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales [15]).Au fil des décennies, l'étude des systèmes dynamiques chaotiques s'est étendue à de nombreux domaines, notamment l'astronomie, la biologie, la chimie, l'économie, la physique et bien d'autres. Les scientifiques ont découvert que le chaos peut être présent dans des

phénomènes aussi divers que la météo, les fluctuations des populations animales, les marchés financiers et même les battements du cœur.

Aujourd'hui, l'étude des systèmes dynamiques chaotiques continue d'évoluer, avec de nouvelles théories, des modèles plus sophistiqués et des applications pratiques dans de nombreux domaines. Comprendre et prédire les comportements chaotiques peuvent avoir des implications importantes, tant sur le plan scientifique que sur le plan pratique, en nous aidant à prendre des décisions éclairées dans un monde complexe et imprévisible.

Nous avons présenté dans ce mémoire trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous introduisons des définitions relatives aux systèmes dynamiques et à leur comportement.

Dans le second chapitre, nous nous penchons sur l'étude des propriétés des systèmes chaotiques.

Dans le troisième chapitre, nous nous concentrons sur l'étude du système de Rössler, en cherchant les points fixes et en analysant le comportement du système.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

1.1 Définitions d'un système dynamique

Définition 1.1.1. [1] *En règle générale, un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnementale ou de tout autre domaine qui d'écrit des phénomènes qui se transforment au fil du temps. Le terme "système" désigne un ensemble de variables d'état qui changent de valeur au fil du temps, ainsi que les interactions entre ces variables. L'ensemble des variable d'état d'un système permet de construire un espace mathématique appelé "espace de phase".*

1.1.1 Système dynamique à temps continu

Définition 1.1.2. *Un système dynamique dans le cas continu est gouverne par un ensemble d'équations différentielles :*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad (1.1)$$

où

- $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $t \in \mathbb{R}^+$ désigne le temps.
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système.
- $x(t_0) = x_0$ état initial.
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$ représente l'état initial du système et t_0 l'instant initial.

Exemple 1.1.1. :

Le système de Lorenz est défini par les équations suivantes [14] :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sigma(v - u), \\ \frac{dv}{dt} = -uw + \rho u - v, \\ \frac{dw}{dt} = uv - \beta w, \end{cases}$$

où u, v et w sont les variables d'état du système. σ, ρ et β sont des paramètres réels. L'espace de phase est \mathbb{R}^3 , l'espace de paramètre est \mathbb{R}^3 .

1.1.2 Système dynamique à temps discret

Définition 1.1.3. En mode discret, un système dynamique est représenté par des équations aux différences. Ces équations sont utilisées pour décrire l'évolution des états du système à des instants discret.

Le système décrit par :

$$\begin{cases} x(k+1) = g(x(k), k), \\ x(k_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

où

k : l'instant discret.

k_0 : l'instant initial discret.

x_0 : le vecteur d'état initial.

$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ décrit la dynamique du système en temps discret.

Exemple 1.1.2. L'application de Hénon [12] :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_{n+1} - ax_n^2, \\ y_{n+1} = bx_n, \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels. L'espace des paramètres est \mathbb{R}^2 .

1.2 Système conservative et système dissipative

Définition 1.2.1. En physique, un système conservative est un système qui conserve l'énergie totale et possède un intégral premier du mouvement. Cela signifie que l'énergie du système ne change pas sauf s'il y a une influence externe. Les exemples courants de système conservative sont

les système qui obéissent à la loi de conservation de l'énergie, tels que les systèmes mécaniques qui n'ont pas de frottement, ou les systèmes électromagnétiques qui n'ont pas de pertes.

Définition 1.2.2. En revanche, un système dissipative est un système qui dissipe de l'énergie, ce qui signifie que son énergie diminue au cours de temps. Les systèmes dissipative possèdent généralement au moins un terme dépendant de la vitesse, qui représente des pertes d'énergie due au frottement, au frottement visqueux, ou à d'autre formes de dissipation. Les exemples courants de système dissipatif sont les systèmes mécaniques qui ont des frottements, les systèmes électromagnétiques qui ont des pertes de résistance, et les systèmes thermodynamiques qui ont des pertes de chaleur.

Les systèmes considérés sont des systèmes déterministes est conservative, si et seulement si la dynamique du système associé à chaque condition initiale x_0 un et un seul état final $x(t)$, il faut pour cela qu'il existe une application bijective ϕ de l'espace de phase :

$$\begin{cases} \phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow I \\ (x, t) \rightarrow \phi_t(x) = \phi(x, t), \end{cases}$$

qu'on appelle le flot. Si le système est dissipative, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système.

1.3 Système autonome et non-autonome

1. Système autonome

Définition 1.3.1. Un système d'équations différentielles est considère comme autonome lorsque la fonction f ne dépend pas explicitement du temps t , dans ce cas, on peut l'écrire :

$$\dot{x} = f(x, \mu). \tag{1.3}$$

Exemple 1.3.1. Soit le système autonome suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_2 - 5x_1. \end{cases}$$

2. Système non-autonome

Définition 1.3.2. Un système d'équations différentielles est considère comme non autonome lorsque la fonction f dépend explicitement du temps t .

Exemple 1.3.2. Soit le système non autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + t, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2. \end{cases}$$

1.4 Espace de phases

Définition 1.4.1. [4] Tout à fait, l'espace de phase est un espace géométriquement souvent multidimensionnel utilisé pour décrire géométriquement l'évolution d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.

1.5 Flot

Définition 1.5.1. [4] Soit M un ensemble quelconque et G un groupe additif (\mathbb{R} ou \mathbb{Z}). Considérons $\{\varphi^t\}_{t \in G}$ un groupe à un paramètre d'application M dans M indexé par le groupe G . On appelle flot ou système dynamique le couple $(M, \{\varphi^t_{t \in G}\})$. L'ensemble précédent constitue l'espace des phases du flot. Tout point x de cet espace représente un état du système dynamique.

1.6 Trajectoires

Définition 1.6.1. Soient $(M, \{\varphi^t_{t \in G}\})$ un système dynamique et x un état de l'espace des phases. On appelle trajectoire d'un point x de M l'application définie sur G et à valeurs dans M par

$$\begin{cases} \varphi : G \rightarrow M, \\ t \mapsto \varphi^t(x). \end{cases} \quad (1.4)$$

Donc, la trajectoire est une solution du système différentiel.

1.7 Ensembles limites

Définition 1.7.1. [5] Soit φ_t un flot dans X et soit $a \in X$

- Un point x est dans l'ensemble ω – limite : $\omega(a)$ s'il existe une suite $t_k \rightarrow +\infty$ telle que $\varphi_{t_k}(a) \rightarrow x$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

où φ_t est le flot du système $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

- Un point x est dans l'ensemble α – limite : $\alpha(a)$ s'il existe une suite $t_k \rightarrow -\infty$ telle que $\varphi_{t_k}(a) \rightarrow x$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

Définition 1.7.2. L'ensemble des points α – limite (resp ω – limite) est désigné par $\alpha(x)$ (resp $\omega(x)$), et on définit l'ensemble limite par l'ensemble :

$$\alpha(x) \cup \omega(x)$$

1.8 Points d'équilibres

Les points d'équilibres (appelé aussi stationnaires, ou points fixes, ou points singuliers ou point critique) d'un système ont une grande importance pour décrire les caractéristiques du système.

Définition 1.8.1. Un point d'équilibre de l'équation $\dot{x} = F(x)$ est un point x^* de l'espace des phases vérifiant $F(x^*) = 0$. Sinon, on dit que x^* est un point ordinaire.

1.9 Stabilité au sens de Lyapunov

On considère l'ensemble des systèmes non linéaires décrits par l'équation dynamique suivante [1] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue. On présente ici les méthodes permettant d'étudier la stabilité des points d'équilibre du système (1.5).

1.9.1 Méthode directe

Lyapunov a proposé une méthode, appelée méthode directe de Lyapunov, est basée sur la recherche d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de Lyapunov, si une telle fonction existe alors le système est stable. Cette méthode est difficile à mettre en œuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que la méthode directe de Lyapunov nous donne une condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire que le système peut être stable même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapunov car il n'y a pas de règle générale pour trouver une telle fonction.

Fonction de Lyapunov

Soit x^* est un point d'équilibre du système (1.5). Soit $V : W \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction différentiable définie sur un voisinage W de x^* telle que

$$\begin{cases} V(x^*) &= 0, \\ V(x) &> 0 \quad \text{si } x \neq x^*. \end{cases}$$

Posons :

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x),$$

alors on a le théorème suivant :

Théorème 1.9.1. – Si $\dot{V}(x) \leq 0$ dans W_{x^*} alors x^* est stable.

- Si $\dot{V} < 0$ dans W_{x^*} alors x^* est asymptotiquement stable.
- Si $\dot{V}(x) > 0$ dans W_{x^*} alors x^* est instable.

On dit aussi que la fonction \dot{V} est semi-définie négative dans le premier cas, définie négative dans le deuxième cas et définie positive dans le troisième cas.

Exemple 1.9.1. [4] Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2), \end{cases}$$

ce système à un point fixe unique $(0,0)$. Soit $V = x^2 + y^2$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2(x\dot{x} + y\dot{y}) \\ &= 2(x(y + ax(x^2 + y^2)) + y(-x + ay(x^2 + y^2))) \\ &= 2(\cancel{xy} + ax^2(x^2 + y^2) - \cancel{xy} + ay^2(x^2 + y^2)) \\ &= 2a(x^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$

D'où, d'après le théorème de Lyapunov :

- Si $a < 0$, le point fixe à l'origine est asymptotiquement stable.
- Si $a = 0$, le point est stable (ici les trajectoires sont des cercles).
- Si $a > 0$, le point est instable.

1.9.2 Méthode indirecte

Lyapunov et autres ont remarqué par l'étude des trajectoires des courbes intégrales au voisinage de l'équilibre que, dans la majorité des cas, les points d'équilibre des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux mêmes types de points d'équilibre des systèmes linéaires. Donc l'étude d'un système linéaire est aisée puisque se résout dans un critère purement algébrique. De ce fait, la méthode la plus classique pour la détermination de la stabilité non linéaire du point d'équilibre se réduit à la linéarisation du système (1.4) en ce point (point d'équilibre)

Linéarisation des systèmes dynamiques

Considérons le système dynamique non linéaire (1.5) rappelé ci-dessous :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)); \quad (1.6)$$

sur X et soit x^* un point d'équilibre (ainsi $f(x^*) = 0$).

Le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.7)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

s'appelle le linéarisé du système au point x^* et la matrice $(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j})$ s'appelle matrice jacobienne de $f(x)$.

Par un changement de coordonnées, le point fixe de (1.7) se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) et le développement de f en série de Taylor autour de $x = 0$ donne

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \dots$$

La méthode indirecte de Lyapunov, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre x^* , consiste à étudier le système linéaire $\dot{x} = Ax$.

Dans le cas où la matrice $A = Df(0)$ possède n valeurs propres $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ distinctes, la solution de (1.7) est :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i v^{(i)} e^{\lambda_i t},$$

où $v^{(i)}$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i et les $c_i, i = 1, \dots, n$ sont des constantes (déterminées par les conditions initiales).

d'où le théorème suivant pour le système linéaire $\dot{x} = Ax$.

Théorème 1.9.2. – Si toutes les valeurs propres λ_i ont leur partie réelle négative le point fixe est asymptotiquement stable.

– Si une ou plusieurs valeurs propres sont des imaginaires pures, les autres valeurs ayant leur partie réelle négative, le point fixe est un point centre ou un point elliptique (stable mais pas asymptotiquement stable).

– Si une des valeur propres a sa partie réelle positive le point fixe est instable.

Exemple 1.9.2. [6] Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x, \\ \dot{y} = x^3 - 2y - xz, \\ \dot{z} = -z + xy. \end{cases}$$

L'origine 0 est un point fixe. Son linéarisation est :

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $Df(0)$ sont $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1$ toutes négatives, d'où le point l'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

1.10 Classification des points d'équilibres

1.10.1 Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire [4] :

$$\dot{x}(t) = Ax, \tag{1.8}$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, A est une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$ inversible. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Définition 1.10.1. 1. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont réelles et de même signe, la solution $x = 0$ est appelée nœud.

2. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée selle.

3. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0; i = 1, \dots, n$, la solution $x = 0$ est appelée foyer.

4. Si les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $\text{Re}(\lambda_i) = 0; i = 1, \dots, n$, la solution $x = 0$ est appelée centre.

Tous ces cas sont regroupés dans la figure (1.1).

Exemple 1.10.1. considérons le système dynamique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Les points fixes de ce système sont les solutions des équations :

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

La seule solution est $x^* = (0, 0)$, qui est le point fixe de ce système.

La matrice Jacobienne de ce système est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2 - i$ et $\lambda_2 = -2 + i$.

Comme ces valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives.

Le point fixe $x^* = (0, 0)$ est foyer stable.

1.10.2 Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non linéaire [4] :

$$\dot{x}(t) = f(x). \tag{1.9}$$

Définition 1.10.2. Un point critique de x^* de l'équation (1.9) est appelé **un puits** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles négatives, il est appelé **source** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles positives, il est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si $A = Df(x^*)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

Théorème 1.10.1. Soit $\dot{x}_t = f(x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C^1$, un système dynamique à temps continu. Si x^* est un point fixe ($f(x^*) = 0$), alors si les valeurs propres de $Df(x^*)$ sont des parties réelles négatives x^* est stable, et instable si l'une de ces valeurs propres de $Df(x^*)$ est de partie réelle positive.

Exemple 1.10.2. Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = 2x(x^2 - 4). \tag{1.10}$$

Les points fixes sont les solutions de $2x(x^2 - 4) = 0$, qui sont $x = 0$, $x = -2$ et $x = 2$.

Pour déterminer la stabilité de ces points fixes, nous devons calculer la dérivée seconde de $\dot{x}(t)$.

En dérivant \dot{x} par rapport à x , nous obtenons : $\ddot{x}(t) = 6x^2 - 8$.

Pour déterminer la stabilité des points fixes, nous examinons le signe de la dérivée seconde $\ddot{x}(t)$ en chaque point fixe.

- Pour $x = 0$, on a $\ddot{x}(0) = -8$ qui est négatif, donc le point fixe est stable.
- Pour $x = -2$ et $x = 2$, on a $\ddot{x}(\pm 2) = 16$, donc les deux points fixes sont instables.

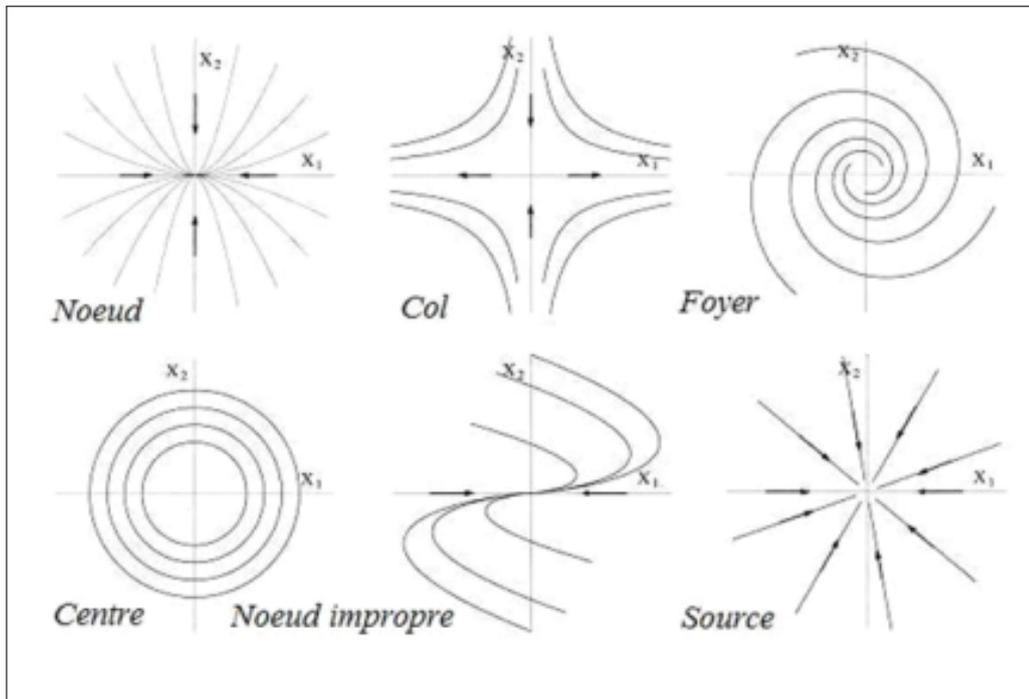


FIGURE 1.1 – Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2 .

1.11 Les attracteurs

Définition 1.11.1. [7] *L'attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est-à-dire une situation (ou un ensemble de situations) vers lesquelles évolue un système dynamique, quelles que soient ses conditions initiales.*

Quelques définitions mathématiques, pour un attracteur, sont données comme le suit :

Définition 1.11.2. *l'ensemble A est un attracteur si :*

1. *Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$.*
2. $\bigcap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$.
3. *Il existe une orbite dense dans A .*

1.11.1 Les différents types d'attracteurs

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs Étranges ou chaotique

1. **Attracteurs réguliers** : Les attracteurs réguliers spécifient l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

- **Le point fixe** : [7] c'est le cas le plus courant, et le plus simple d'attracteur. Le système évolue vers un état de repos (point).
- **Un cycle limite** : [2] c'est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. Donc c'est une solution périodique du système.
- **Un tore** : [2] représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi-périodiques".

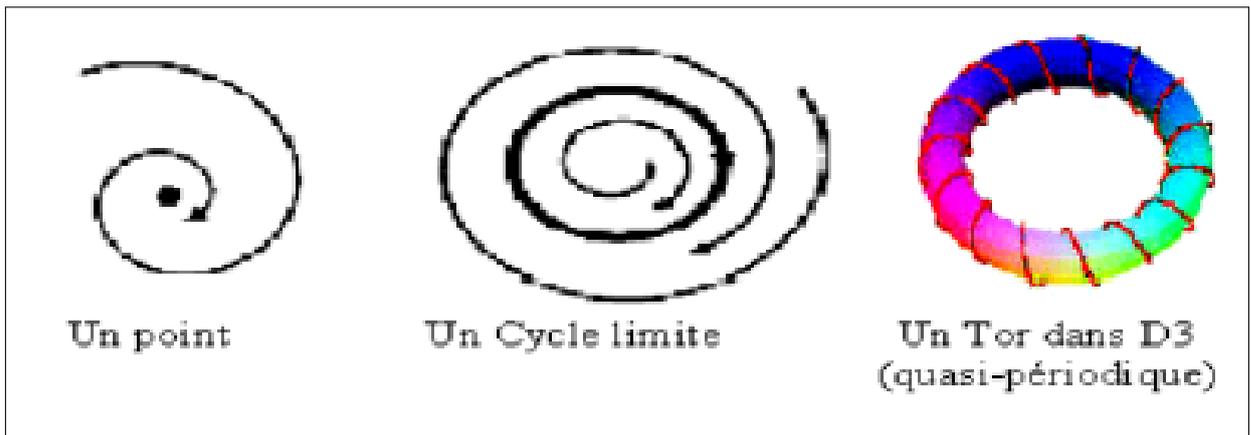


FIGURE 1.2 – Les différents types d'attracteurs.

2. **Attracteurs étranges** : Il s'agit d'une géométrie complexe de dimension fractale, associée souvent à une évolution imprévisible dans le domaine temporel. Nous développerons plus en détails ce type d'attracteur dans la partie où nous aborderons les systèmes chaotiques.

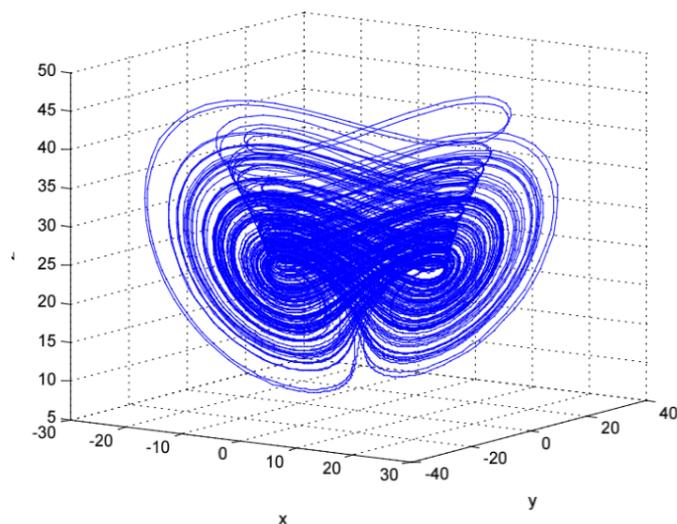


FIGURE 1.3 – Attracteur chaotique de chen.

1.12 Bifurcations

Soit le système non linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \tau), \quad (1.11)$$

avec le paramètre de contrôle τ , et soit x^* sa solution. Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x^* du système (1.11) lorsqu'on modifie τ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions. [8]

1.12.1 Les types de bifurcations

Les quatre types de bifurcations de codimension un sont exposés dans ce qui suit : noeud-col, transcritique, fourche et Hopf.

1. **Bifurcation noeud-col** : [8] Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre est le polynôme quadratique $f(x, \tau) = \tau - x^2$.

Considérons le système (1.11), et prenons pour f la fonction :

$$f(x, \tau) = \tau - x^2. \quad (1.12)$$

Nous appelons la fonction (1.12) équation générique de bifurcation noeud-col.

Étudions le comportement de l'équation (1.12), les points fixes de cette dernière sont :

- Si $\tau < 0$, l'équation $f(x, \tau) = 0$ n'admet pas de solution, alors on n'a pas de points fixes.
- Si $\tau > 0$, on a : $f(x, \tau) = \tau - x^2 = 0 \iff x_{\pm}^* = \pm \sqrt{\tau}$.

la stabilité est déterminée par :

$$f'(x, \tau) = -2x_{\pm}^* = -2(\pm \sqrt{\tau}).$$

Selon les signes de $f'(x_{\pm}^*)$ on voit que $x_+^* = \sqrt{\tau}$ est stable, tandis que $x_-^* = -\sqrt{\tau}$ est instable.

- Si $\tau = 0$ le seul point fixe est $x = 0$ est semi stable.

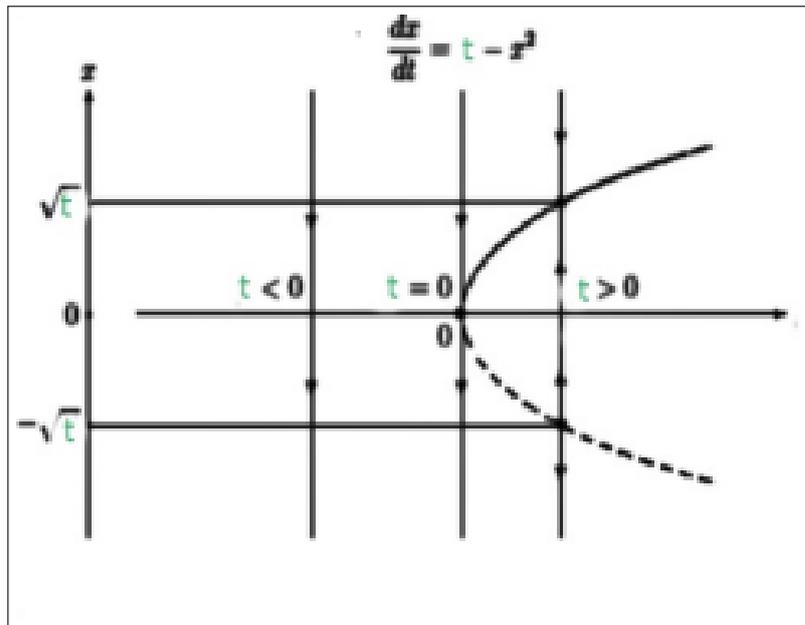


FIGURE 1.4 – Diagramme de bifurcation noeud-col.

2. **Bifurcation transcritique** : Si f est contrainte de ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d'une bifurcation transcritique.

$$\dot{x} = \tau x - x^2, \quad (1.13)$$

l'analyse usuelle donne :

$$x(\tau - x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \tau \end{cases} \implies f'(x) = \tau - 2x \iff \begin{cases} \tau & \text{pour } x = 0 \\ -\tau & \text{pour } x = \tau \end{cases}$$

Donc $x^* = 0$ est stable pour $\tau < 0$, instable pour $\tau > 0$, tandis que $x^* = \tau$ fait le contraire : ces points fixes échangent simplement leur stabilité.

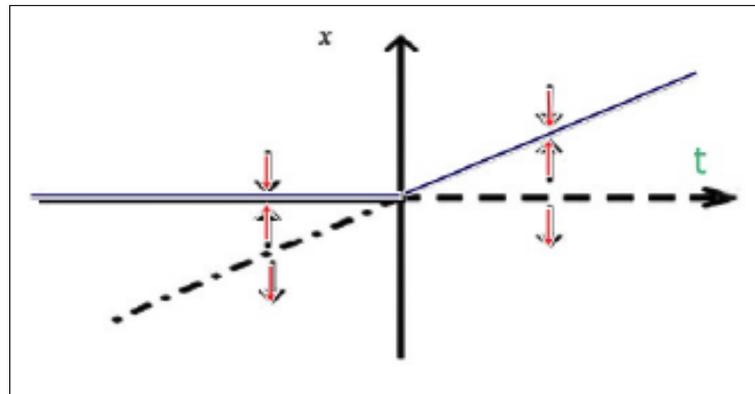


FIGURE 1.5 – Diagramme de bifurcation transcritique.

3. **Bifurcation fourche** : [8] Si on peut réduire $f(x, \tau)$ à un polynôme cubique a ces quatre cas :

$$f(x, \tau) = \tau x - x^3; \quad (1.14)$$

$$f(x, \tau) = \tau x + x^3; \quad (1.15)$$

$$f(x, \tau) = -\tau x + x^3; \quad (1.16)$$

$$f(x, \tau) = -\tau x - x^3. \quad (1.17)$$

L'équation (1.14) s'appelle la forme normale d'une bifurcation fourche supercritique.

Ses points fixes :

$$x(\tau - x^2) = 0 \iff \begin{cases} x^* = 0 \\ x^{*2} = \tau \end{cases}.$$

Alors :

- si $\tau < 0$, on a un seul point fixe $x^* = 0$.
- Si $\tau > 0$, on a trois points fixes :

$$\begin{cases} x^* = 0 \\ \text{et} \\ x^*_{\pm} = \pm \sqrt{\tau} \end{cases}$$

Stabilité de ces points fixes :

$$f'(x^*) = \tau - 3x^{*2} \iff \begin{cases} \tau & \text{pour } x^* = 0 \\ -2\tau & \text{pour } x^*_{\pm} = \pm \sqrt{\tau} \end{cases}$$

- Si $\tau < 0$, le seul point fixe $x^* = 0$ est stable.
- Si $\tau > 0$, le point fixe $x^* = 0$ est instable, mais $x^*_{\pm} = \pm \sqrt{\tau}$ sont stables.

On remarque un échange dans le nombre des points fixes et dans la stabilité en $\tau < 0$.

- Pour (1.15) qui est la forme normale d'une bifurcation fourche sous-critique, le même calcul que comme pour le cas supercritique. Le point fixe $x^* = 0$ est stable pour $\tau < 0$ et devient instable pour $\tau = 0$.

Mais contrairement au cas supercritique, les autres points fixes $x^* = \pm \sqrt{\tau}$ existent dans la région où $x^* = 0$ est stable, et sont toujours instables.

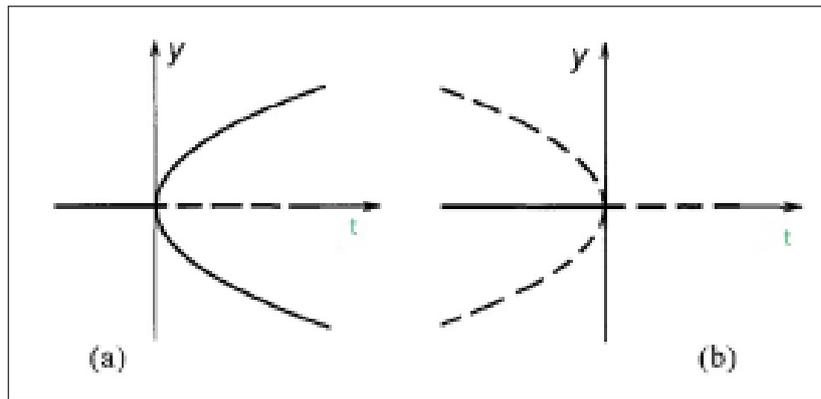


FIGURE 1.6 – Diagramme de bifurcation fourche.

4. **Bifurcation Hopf** : [9] La bifurcation Hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle τ prend une valeur critique τ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjugués qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparition d'un cycle limite.

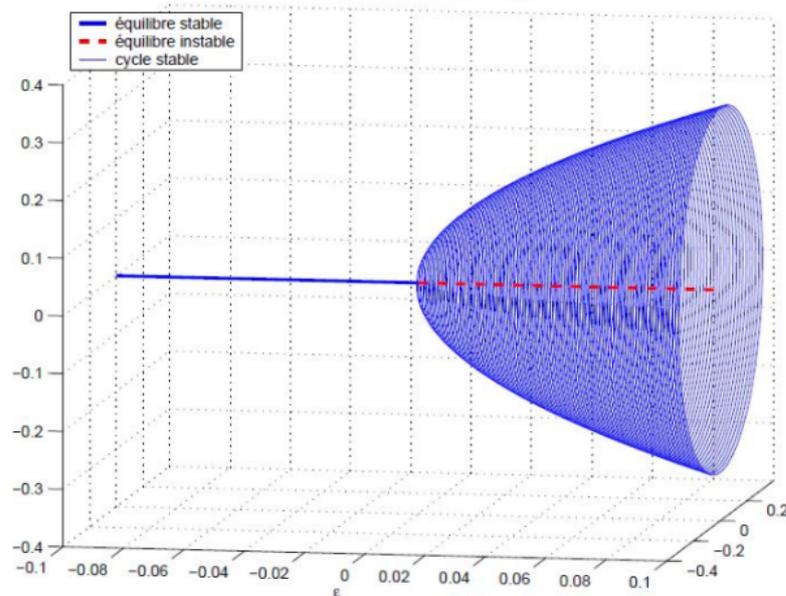


FIGURE 1.7 – Diagramme d'une bifurcation de Hopf.

CHAPITRE 2

THÉORIE DU CHAOS

2.1 Histoire de la théorie du chaos

L'étude du la chaos déterministe remonte à de nombreux scientifiques et mathématiciens à différentes époques de l'histoire. Parmi les plus importants figure Henri Poincaré, qui a travaillé sur l'étude des mouvements mécaniques des corps célestes dans le système solaire. Cependant, le physicien français Henri Poincaré a été à l'origine de la véritable révolution dans notre compréhension de ces systèmes. En 1892, Poincaré a posé le problème des trois corps en mouvement variable et, au cours des six années suivantes, il a développé les fondements mathématiques pour comprendre ce système. Le mathématicien français Jules Fabre a également travaillé sur la théorie dynamique des systèmes aléatoires. Enfin, le mathématicien américain Edward Lorenz a étudié les systèmes dynamiques et a montré que les systèmes dynamiques peuvent avoir un comportement chaotique (discontinu et aléatoire). Ces découvertes ont été considérées par les scientifiques comme une révolution scientifique dans les domaines de la physique et des mathématiques, et ont été appliquées à de nombreux autres domaines tels que l'économie, la nature et la société.

2.2 Définition du chaos

Définition 2.2.1. : [10] *Il existe plusieurs définitions du chaos, parmi lesquelles on mentionne les suivantes :*

- *Un mouvement irrégulier d'un système dynamique qui est déterministe, sensible aux conditions initiales, et impossible de prédire à long terme avec rien moins qu'une représentation*

infinitive et parfaite des valeurs analogiques.

- *Le chaos est une évolution à long terme imprévisible et désordonné qui répond à certains critères mathématiques spécifiques et qui se produit dans un système déterministe non linéaire.*
- *La propriété qui caractérise un système dynamique dont la plupart des orbites présentent dépendance sensible.*

2.3 Système dynamique chaotique

Définition 2.3.1. :

Un système dynamique chaotique est un système qui dépend de plusieurs paramètres et caractérisés par une extrême sensibilité aux conditions initiales, ils ne sont pas déterminés ou modélisés par un système d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique.

2.4 Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différentes. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas, à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on appelle **bifurcations**. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos [8] :

1- **L'intermittence vers le chaos** : un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

2- **Le doublement de période** : qui est caractérisé par une succession de bifurcations fourches. À mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit,....., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut également apparaître selon ce scénario.

3- **La quasi-périodicité** : qui intervient quand un deuxième système perturbe un

système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasipériodique. Ce scénario un peu compliqué est relié à la théorie des nombres, notamment aux travaux de **Jean-Christophe Yoccoz**, lauréat de la Médaille Fields en 1994, pour ses travaux sur les systèmes dynamiques.

2.5 Caractéristique de chaos

2.5.1 La non-linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Les systèmes linéaires sont caractérisés par une absence de comportement chaotique.

2.5.2 Le déterministe

Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer) son évolution au cours du temps. La connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, l'instant initial, permis le calcul précis de l'état du système à n'importe quel autre moment. Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule.

Donc, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes.

2.5.3 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales signifie que chaque point dans un système chaotique est arbitrairement près approchée par l'autre point avec sensiblement voie d'avenir, ou trajectoire. Ainsi que la moindre erreur ou petit changement sur les conditions initiales conduit a une mauvaise décision sur la trajectoire effectivement suivie a tout tempe, en conséquence il est impossible de faire prédire sur l'évolution a long terme du système.

La sensibilité aux conditions initiales est donc l'une des propriétés essentielles du chaos. On peut la caractériser par le mesure des taux de divergences des trajectoires.

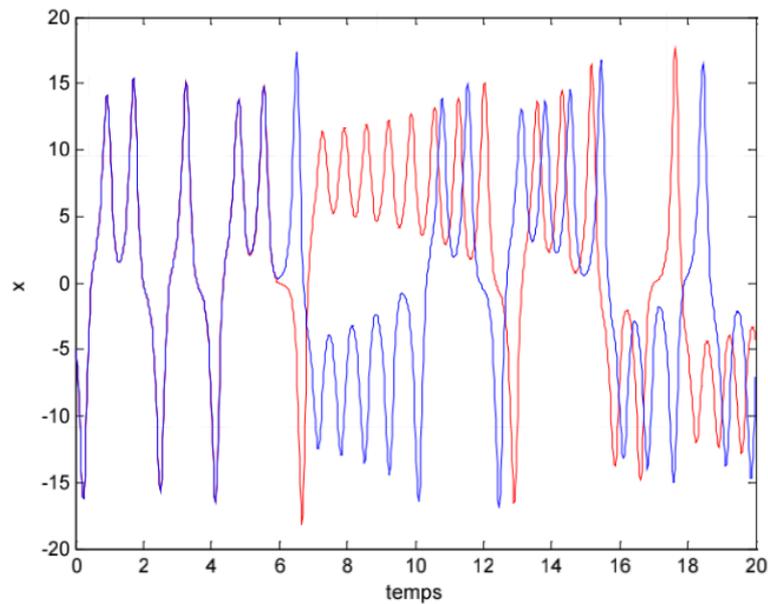


FIGURE 2.1 – Sensibilité aux condition initiale du système de lorenz .

2.5.4 Aspect aléatoire

Si le mouvement est aléatoire, les points du système se répartissent de manière aléatoire dans l'espace des phases, sans qu'aucune structure ne soit visible. En revanche, si le mouvement est chaotique, les points semblent initialement distribués de manière aléatoire. Cependant, après une observation prolongée du système, on remarque que les points dessinent une forme spécifique.

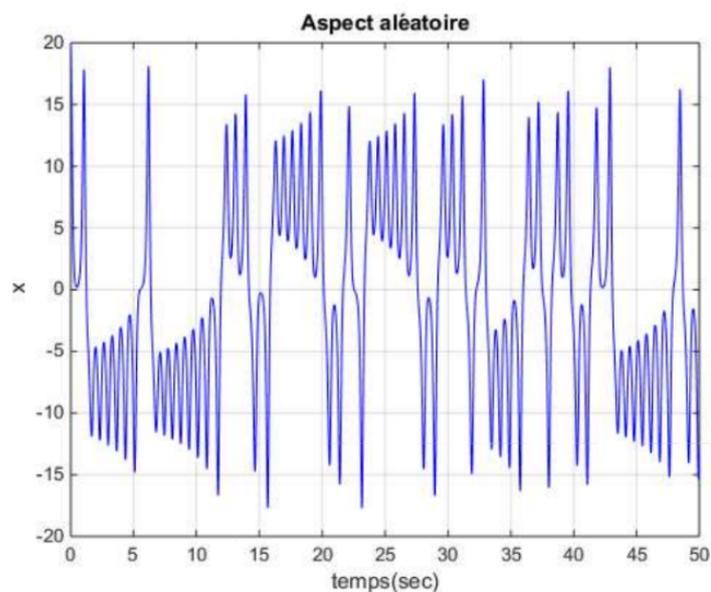


FIGURE 2.2 – L'aspect aléatoire du système de lorenz .

2.5.5 Exposant de Lyapounov

Alexandre Lyapounov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée exposant de Lyapounov qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.[9]

1. Cas d'une application unidimensionnelle

Considérons un système dynamique décrit par une application discrète f (c'est à dire $x_n = f(x_{n-1})$) et soit x_0 une condition initiale, perturbons x_0 par l'ajout d'un très petite erreur ε et on observe le comportement des trajectoires x_n et \bar{x}_n issues des deux conditions initiales x_0 et $x_0 + \varepsilon$. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne exponentiellement c'est à dire il existe un réel λ tel que après n itérations on a :

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \cong \varepsilon e^{n\lambda},$$

d'où

$$n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon},$$

et pour $\varepsilon \rightarrow 0$ on a :

$$\begin{aligned} \lambda &\cong \frac{1}{n} \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \cdot \frac{df(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right|, \end{aligned}$$

finalement pour $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

λ est appelé exposant de Lyapounov il indique le taux moyen de divergence.

- Si $\lambda > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.
- Si $\lambda < 0$ les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

2. Cas d'une application multidimensionnelle :

Dans ce paragraphe nous allons généraliser les concepts du paragraphe précédent à des trajectoires multidimensionnelles de type :

$$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, x_{n+1} = f(x_n).$$

Un système m-dimensionnel possède m exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial V_0 évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)n}.$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un λ_i soit positif, pour avoir étirement selon au moins un axe. Mais il faut aussi que la somme des λ_i soit négative. Puisque, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé et on n'aurait plus un attracteur de faible dimension, ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos déterministe. Tout d'abord nous devons calculer les λ_i . Dans ce but, nous fixons une hypersphère dans notre espace m-dimensionnel de rayon ε (petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0).$$

Posons $x'_0 = x_0 + \varepsilon$, on a le développement en série limité d'ordre 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0 suivant :

$$x_n - x'_n = \frac{df^n(x_0)}{dx_0}(x_0 - x'_0) = J^n(x_0)(x_0 - x'_0).$$

$J^n(x_0)$ dénote la matrice jacobienne de f^n au point x_0 , si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_n telle que $D_m^n = P_n^{-1} J^n P_n$, D_m^n est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de J^n qui seront notés par $\Lambda_i^n = 1, \dots, m$. On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln[\Lambda_i^n], i = 1, \dots, m.$$

2.5.6 Dimensions fractales des attracteurs étranges

On remarque qu'il y a un lien, entre les exposants de Lyapunov et la dimension de l'attracteur, comme nous l'avons mentionné précédemment si tous les exposants sont

positifs la sphère de conditions initiales va remplir tout l'espace, mais s'il sont tous négatifs la sphère va se contracter en un point.

a) Dimension de Mori

Soient m_0 le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls, m_+ le nombre d'exposants positifs, $\bar{\lambda}_+$ la moyenne des exposants positifs et $\bar{\lambda}_-$ celle des négatifs. La dimension de Mori est donnée par la relation suivante :

$$D_{M_0} = m_0 + m_0 \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|}\right)$$

b) Dimension de Kaplan et Yorke

Soit j_0 un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0.$$

On définit alors la dimension de Kaplan et Yorke par la relation suivante :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}$$

| Etat | Attracteur | Dimension | Exposants de Lyapounov |
|-------------------|------------|------------|---|
| Point d'équilibre | Point | 0 | $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$ |
| Périodique | Cercle | 1 | $\lambda_1 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$ |
| Période d'ordre 2 | Tore | 2 | $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$ |
| Période d'ordre K | K-Tore | K | $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$ |
| Chaotique | - | Non entier | $\lambda_1 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$ |
| Hyperchaotique | - | Non entier | $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$ |

TABLE 2.1 – Exposant de Lyapunov et Dimension

2.5.7 Les attracteurs étranges

Un système chaotique dissipatif possède (au moins) un attracteur d'un type particulier est appelé **attracteur étrange**. Les attracteurs étranges sont caractéristiques de l'évolution des systèmes chaotiques au bout d'un certain temps, tous les points de

l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

Un attracteur chaotique possède notamment la propriété remarquable suivante : la trajectoire ne repasse jamais par un même état. Ce qui signifie, entre autres, que cette trajectoire passe par une infinité d'états. Il est à noter que pour observer les trajectoires d'un attracteur, il est parfois intéressant de réduire la dimension de l'espace de phases.

Définition 2.5.1. *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage V de A , c'est-à-dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans R vérifiant les propriétés suivantes :*

1. **Attraction :** *V est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans V est entièrement contenue dans R . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.*
2. *Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale (non entière).*
3. *Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point : chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.*
4. *Deux trajectoires proches à l'instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).*

Définition 2.5.2. *Ruelle et Takens Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales.*

Définition 2.5.3. *Berge et al. Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale.*

Définition 2.5.4. *Farmer et Sidorowich Un attracteur étrange est un attracteur possédant un exposant de Lyapunov $\lambda_k > 0$.*

Différents types d'attracteurs chaotiques étranges

Les attracteurs chaotiques étranges peuvent être classés en trois types principaux :

1. **Attracteur hyperbolique :** Les attracteurs hyperboliques sont des ensembles-limites structurellement stables. Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à cette classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques.

2. **Quasi-attracteur** : Ces types d'attracteurs sont des ensembles-limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instables.
3. **Attracteur de type Lorenz** : Ces types des attracteurs ne sont pas structurellement stables, mais leurs orbites homoclines et hétéroclites sont structurellement stables (hyperboliques) et aucune des orbites périodiques instables apparaissent sous les petites variations des paramètre.

2.6 Quelques modèles des systèmes chaotiques

2.6.1 Exemples des systèmes chaotiques à temps continu

1. Le modèle de Lorenz

En 1963, **Edward Norton Lorenz** a étudié numériquement un système de trois équations différentielles censé représenter grossièrement la convection thermique dans l'atmosphère. (C'est un exemple célèbre de système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs des paramètre.)

Les équations du modèle :

le système dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (2.1)$$

l'espace des phases est tridimensionnel.

Les variables x , y et z représentent les états du système à chaque instant. Lorsque les paramètres réels σ , r et b prennent les valeurs suivantes : $\sigma = 10$, $r=28$, et $b = 8/3$ le comportement du système (2.1) est chaotique et présente un attracteur étrange.

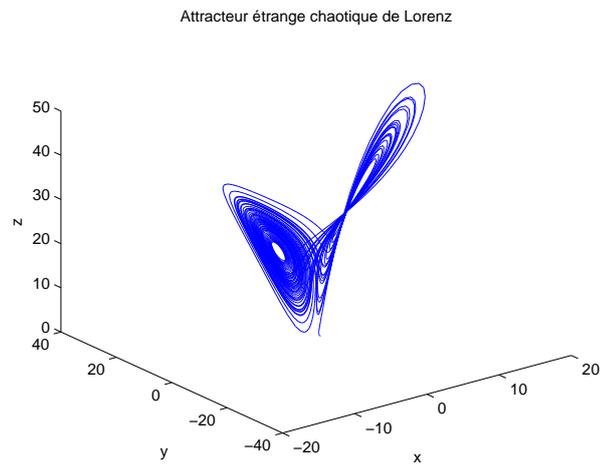


FIGURE 2.3 – Attracteur de Lorenz pour $\sigma = 10$, $r=28$, et $b = 8/3$.

2. Le modèle de Lü

Le système de Lü est défini par[12] :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = -xz + cy, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (2.2)$$

le système (2.2) avec $a = 36$, $b = 3$, $c = 20$, présente un attracteur chaotique comme montré dans la Figure suivante :

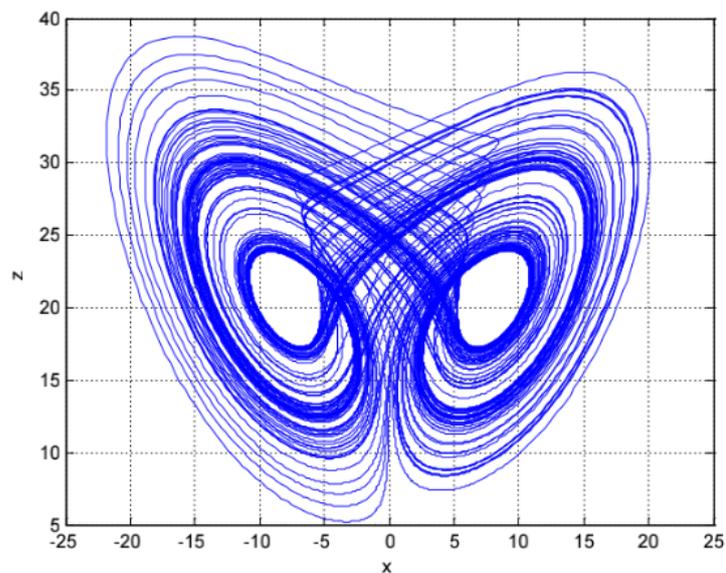


FIGURE 2.4 – Attracteur de Lü .

2.6.2 Exemples des systèmes chaotiques à temps discrets

1. Le système de Hénon

Le système de Hénon est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien **Michel Hénon**. Il s'agit d'un système à temps discret qui introduit des itérations dans le plan.

Ces itérations sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k, \\ y_{k+1} = bx_k. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les valeurs des paramètres proposées par Michel Hénon pour observer le phénomène chaotique sont : $a=1.4$ et $b=0.3$.

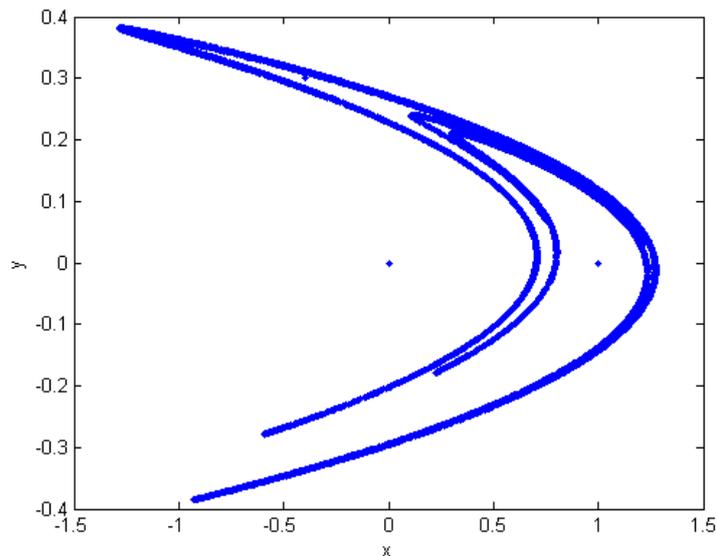


FIGURE 2.5 – Attracteur de Hénon pour $a = 1.4, b = 0.3$.

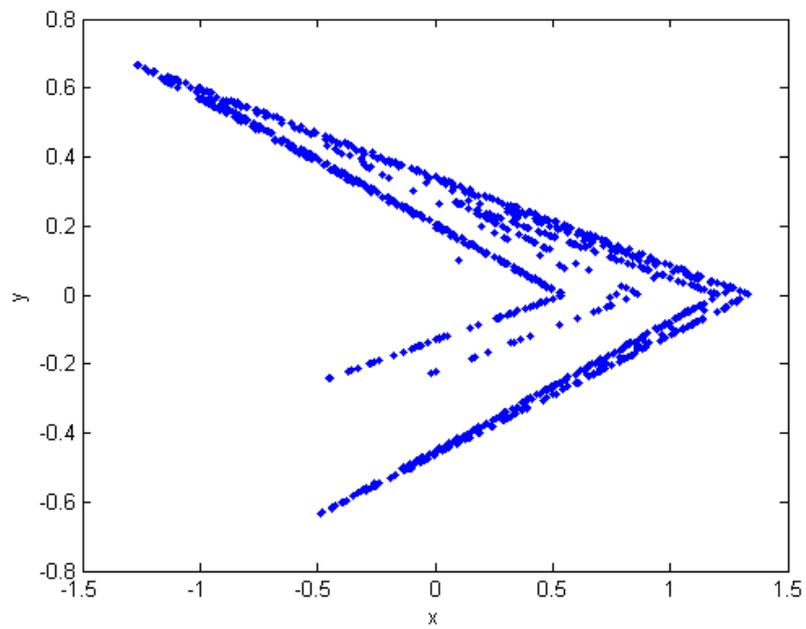
2. Le système de Lozi

La récurrence de Lozi est obtenue en remplaçant x^2 dans la récurrence du système Hénon par $|x|$ et en modifiant la valeur des paramètres.

René Lozi, propose l'application suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - a|x_k| + y_k, \\ y_{k+1} = bx_k. \end{cases} \quad (2.4)$$

L'attracteur chaotique de Lozi est représenté sur la figure (2.6) pour les valeurs numériques $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

FIGURE 2.6 – Attracteur de lozi pour $a = 1.7, b = 0.5$.

CHAPITRE 3

SYSTÈME DE RÖSSLER

3.1 Introduction

Le système de Rössler est un système dynamique chaotique à trois dimensions découvert par le chimiste allemand Otto Rössler en 1976. Il s'agit d'un exemple simple du système chaotique et d'attracteur étrange, qui est souvent utilisé comme banc d'essai pour tester les nouvelles techniques d'analyse de la dynamique non linéaire. Le système de Rössler est décrit par trois équations différentielles ordinaires couplées, qui décrivent l'évolution de trois variables d'état x, y et z dans le temps. Ces équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \quad (3.1)$$

où a, b et c sont des paramètres constants qui déterminent la forme de l'attracteur étrange.

Le système de Rössler possède des propriétés intéressantes telles que la sensibilité aux conditions initiales, la récurrence, et la topologie de l'attracteur étrange. Les simulations numériques du système de Rössler ont montré que les trajectoires du système peuvent être très complexes et se comporter de manière imprévisible. Cela rend le système de Rössler utile pour étudier les phénomènes chaotiques et les systèmes non linéaires en général.

3.2 Calcul des points d'équilibres

Pour trouver les points fixes, les trois équations du système de Rössler sont posées égales à zéro, le système est alors résolu et donne le résultat suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -(y+z) = 0 & (1) \\ x+ay = 0 & (2) \\ b+xz-cz = 0 & (3) \end{cases}$$

- (1) donne : $y = -z$.
- en remplace (1) dans (2) donne : $x = -ay = az$.
- (3) donne :

$$az^2 - cz + b = 0 \Rightarrow \Delta = c^2 - 4ab.$$

- Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $c^2 > 4ab$:

$$z_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

$$\implies \begin{cases} x_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \\ y_{1,2} = -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \\ z_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \end{cases}$$

donc Les points fixes P_1 et P_2 sont :

$$P_1 = \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right).$$

$$P_2 = \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right).$$

- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $c^2 = 4ab$:

il n'y a qu'un seul point d'équilibre :

$$z = \frac{c}{2a}.$$

Donc :

$$P_3 = \left(\frac{c}{2}, \frac{-c}{2a}, \frac{c}{2a} \right).$$

- Si $\Delta < 0$: aucun point d'équilibre n'existe.

3.3 Stabilité des points d'équilibres :

Nous allons maintenant étudier la stabilité linéaire des points fixes. La stabilité des points d'équilibre est déterminée en linéarisant le flot au voisinage de ces points et en calculant les valeurs propres, notées λ_i , de la matrice jacobienne en ces points. La matrice jacobienne s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix}; \quad (3.2)$$

et $\det(J - \lambda I)$ est donnée par :

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & a - \lambda & 0 \\ z & 0 & x - c - \lambda \end{vmatrix};$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + (a + x - c)\lambda^2 + (ac - ax - 1 - z)\lambda + x - c + az = 0. \quad (3.3)$$

• **Pour P_1 :**

les valeurs propres associées au premier point fixe P_1 des paramètres $a = 0.2$, $b = 0.2$ et $c = 5.7$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.0971 + 0.9957i, \\ \lambda_2 = 0.0971 - 0.9957i, \\ \lambda_3 = -5.6872. \end{cases}$$

Les deux paires valeurs propres (λ_1 et λ_2) ont parties réelles positives. Alors, le premier point fixe P_1 est instable.

• **Pour P_2 :**

les valeurs propres associées au deuxième point fixe P_1 des paramètres $a = 0.2$, $b = 0.2$ et $c = 5.7$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.0000046 + 5.4280259i, \\ \lambda_2 = -0.0000046 - 5.4280259i, \\ \lambda_3 = 0.1929830. \end{cases}$$

La troisième valeur propre λ_3 est positive, alors le point P_2 est instable.

• **Pour P_3 :**

le valeur propre associée au troisième point fixe P_3 des paramètres $a = 0.2$, $b = 0.2$

et $c = 5.7$:

$$\lambda = 0$$

la valeur propre λ est nulle, le point P_3 n'est pas hyperbolique, donc ne peut rien dire sur la stabilité.

3.4 Aspect aléatoire

Tous les états d'un système chaotique présentent des aspects aléatoires :

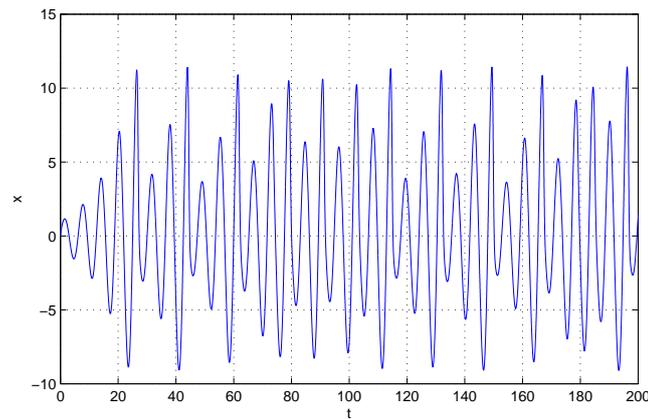


FIGURE 3.1 – L'état chaotique "x" du système de Rössler

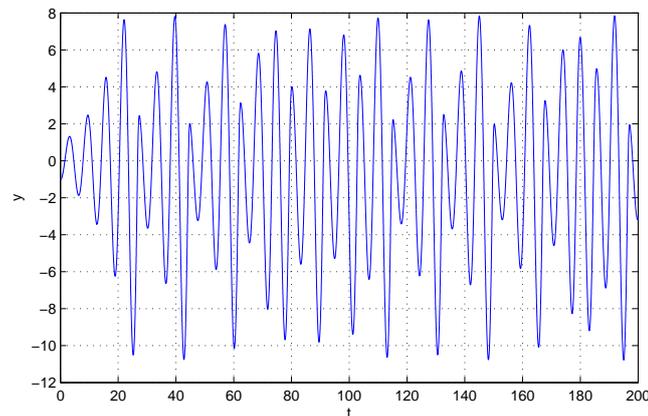


FIGURE 3.2 – L'état chaotique "y" du système de Rössler

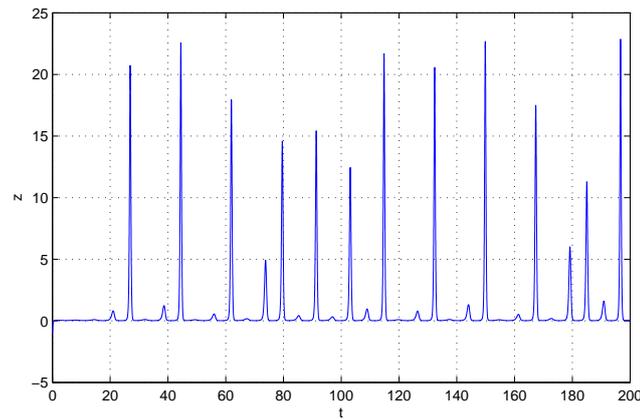


FIGURE 3.3 – L'état chaotique "z" du système de Rössler

3.5 Changement des paramètres(a,b etc)

Le comportement de l'attracteur de Rössler dépend largement de ses paramètres constants (a , b et c). En général, la variation de chaque paramètre a un effet comparable en amenant le système à converger vers une orbite périodique, un point fixe ou à s'échapper vers l'infini, mais les comportements spécifiques varient considérablement pour chaque paramètre. Les orbites périodiques, ou "cycles unitaires", du système de Rössler sont définies par le nombre de boucles autour du point central qui se produisent avant que la série de boucles ne commence à se répéter.

3.5.1 Changement du paramètre a

Nous étudions le comportement de l'attracteur de Rössler pour différentes valeurs de (a), tandis que les deux autres paramètres sont fixes ($b = 0.2$ et $c = 5.7$).

- $a \leq 0$: Le système converge vers le point fixe central.
- $a = 0.1$: Une orbite périodique de période 1, également appelée "cycle unitaire".
- $a = 0.2$: Une valeur standard du paramètre sélectionnée par Rössler pour le chaos.
- $a = 0.3$: Un attracteur chaotique, souvent représenté comme une bande de Möbius.
- $a = 0.35$: Le même comportement est observé pour (a) égal à 0.3, mais avec un degré de chaos croissant.
- $a = 0.38$: Le même comportement est observé pour (a) égal à 0.35, mais avec un degré de chaos croissant. Si la valeur de (a) devient même légèrement supérieure à 0.38, cela peut provoquer le blocage de MATLAB.[13]

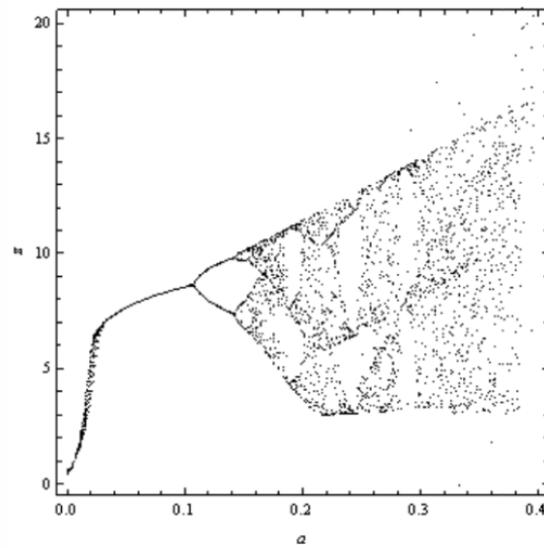


FIGURE 3.4 – Diagramme de bifurcation Pour "a" varier

3.5.2 Changement de paramètre b

L'effet de b sur le comportement de l'attracteur de Rössler est mieux illustré à travers un diagramme de bifurcation. Ce diagramme de bifurcation a été créé avec $a = 0.2$ et $c = 5.7$. Comme le montre le diagramme ci-joint, lorsque b approche de 0, l'attracteur approche de l'infini (notez la courbe ascendante pour de très petites valeurs de b). Comparativement aux autres paramètres, la variation de b semble générer une plus grande plage où des orbites périodiques de période 3 et 6 se produiront. Contrairement à a et c , les systèmes de valeurs plus élevées de b convergent vers une orbite de période 1 plutôt que des orbites de niveau supérieur ou des attracteurs chaotiques.[13]

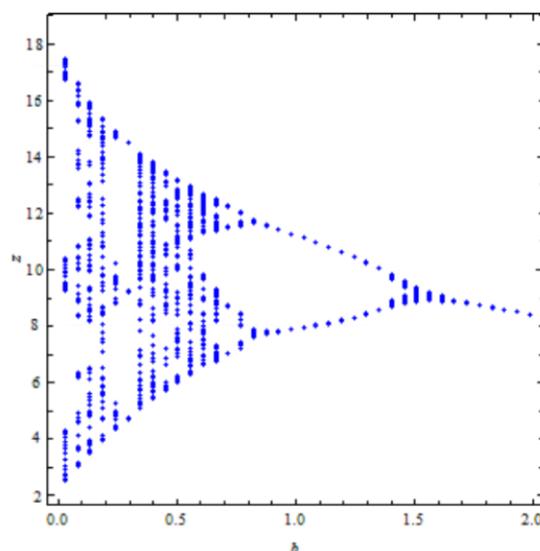


FIGURE 3.5 – diagramme de bifurcation Pour "b" varier

3.5.3 Changement de paramètre c

Le diagramme de bifurcation traditionnelle pour l'attracteur de Rössler est créé en faisant varier c avec $a = b = 0.2$. Ce diagramme de bifurcation révèle que les faibles valeurs de c sont périodiques mais deviennent rapidement chaotiques lorsque c augmente. Ce modèle se répète à mesure que c augmente - il y a des sections de périodicité entre coupées de périodes de chaos, bien que la tendance soit à des orbites périodiques d'ordre supérieur dans les sections périodiques à mesure que c augmente. Par exemple, l'orbite de période une n'apparaît que pour des valeurs de c autour de 2.7 et ne se retrouve plus jamais dans le diagramme de bifurcation. Le même phénomène est observé avec la période trois jusqu'à $c = 5.3$, des orbites de période trois peuvent être trouvées, mais par la suite, elles n'apparaissent pas.[13]

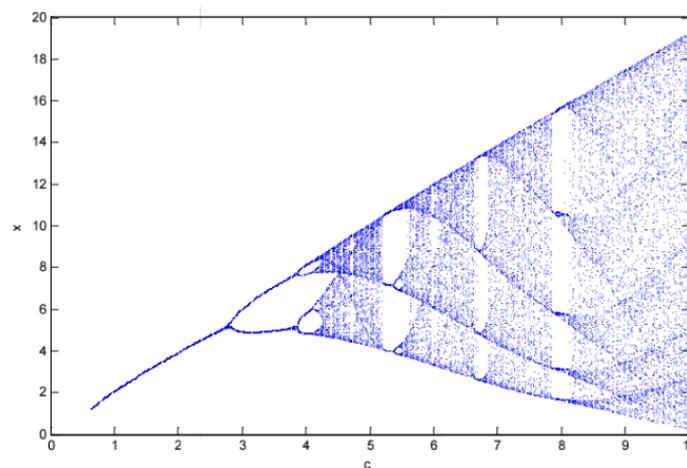


FIGURE 3.6 – Diagramme de bifurcation Pour " c " varier

3.6 Système de Rössler 3D

On a une spirale quelque peu périodique au centre ayant un mouvement circulaire assez uniforme, qui commence à se dilater de plus en plus au hasard. Le fait d'avoir les valeurs a et b très petites (0.2) par rapport à une valeur c plus élevée permet le comportement ascendant du graphique. Le saut dans la direction z devient beaucoup plus grand avec le temps, mais sur de courtes périodes.[13]

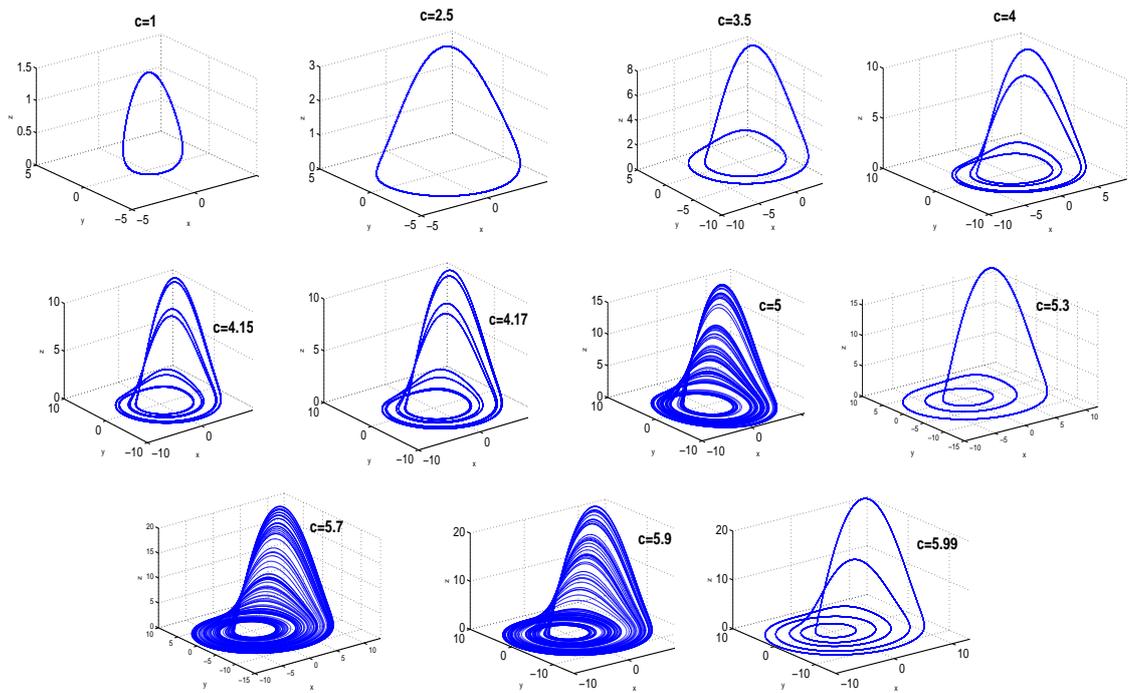


FIGURE 3.7 – Système de Rössler en 3D

3.7 Projection x-y du système de Rössler

L'ensemble de figures ci-dessus illustre les variations du système de Rössler après le transitoire lorsque " c " varie sur une plage de valeurs. Ces images ont été générées avec $a = b = 0.2$, où :

- $c = 2.5$: l'attracteur est une cycle limite simple.
- $c = 3.5$: doublement de période dans un système en temps continu Ainsi, une bifurcation par doublement de période des cycles doit s'être produite quelque part entre 2.5 et 3.5.
- $c = 4$: une autre bifurcation par doublement de période crée la boucle à 4 lobes représentée à $c = 4$.
- $c = 5$: après une cascade infinie de nouveaux doublements de période, on obtient l'attracteur étrange représenté à $c = 5$. [13]

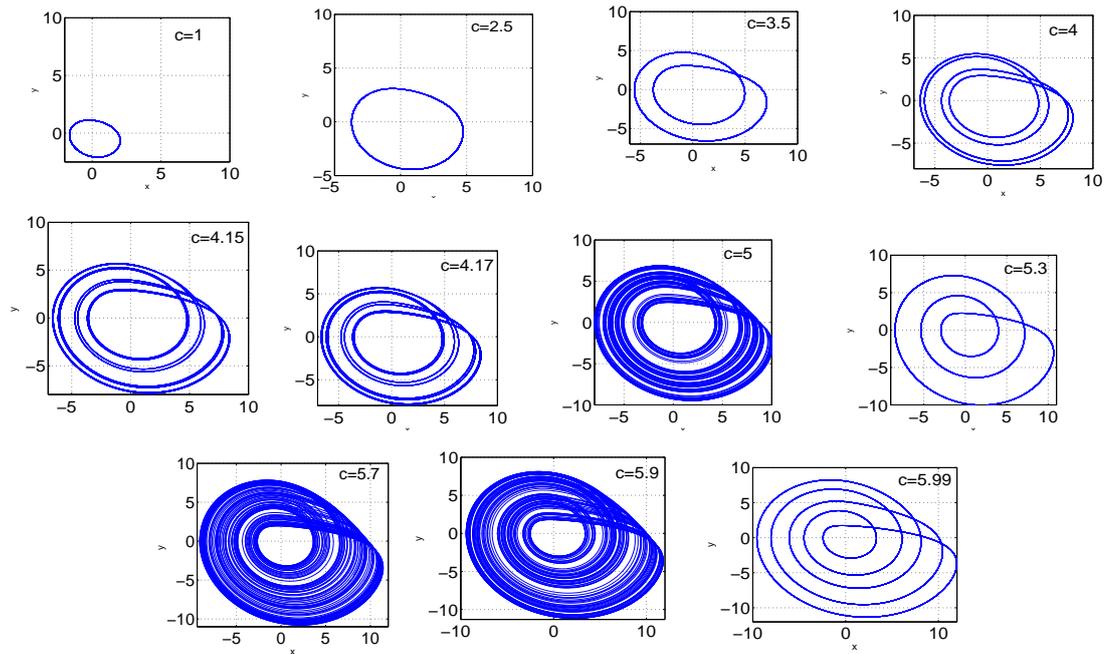


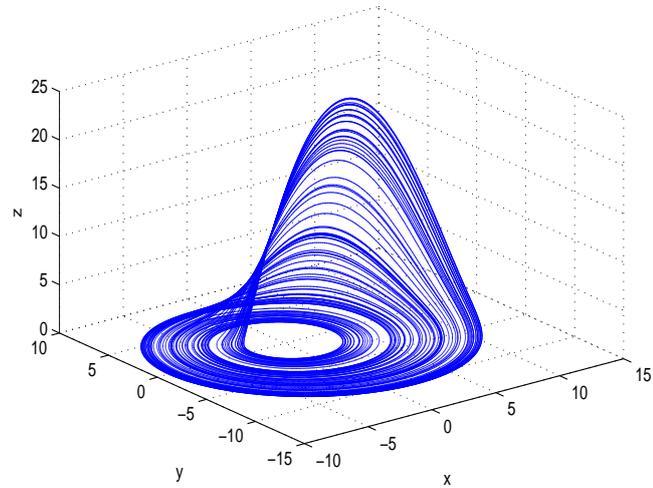
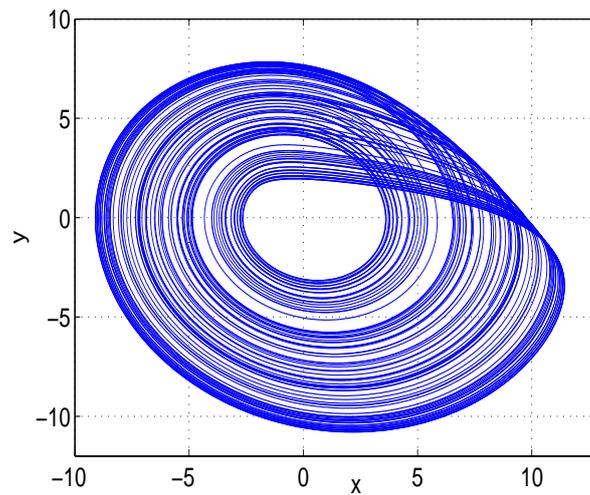
FIGURE 3.8 – Projection du système de Rössler sur le plan x - y pour différents paramètres c

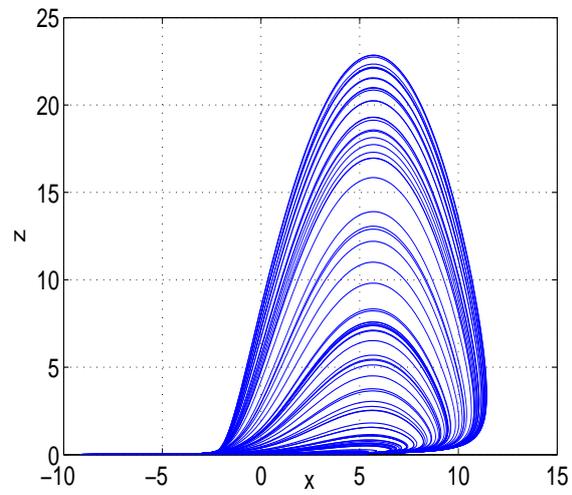
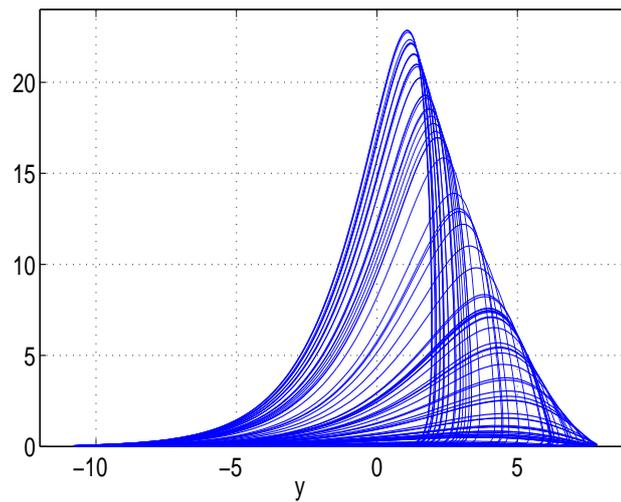
3.8 L'attracteur de Rössler

Le graphe représente l'attracteur du système de Rössler, un système dynamique célèbre qui présente un comportement dynamique complexe, y compris des filaments et des oscillations non régulières. le graphe montre la propriété attractive de ce système, qui est stable dans l'état initial et devient instable lorsque la valeur du paramètre b est augmentée.

À partir du graphe résultant, on peut également observer la caractéristique filamenteuse distincte du système de Rössler, qui se manifeste par la déviation angulaire qui apparaît sur la trajectoire tracée par le système dans l'espace tridimensionnel. Cette caractéristique filamenteuse est ce qui rend ce système intéressant dans de nombreux domaines, notamment la physique, l'ingénierie, la biologie, la chimie et de nombreux autres domaines.

En général, ce graphe est une représentation efficace des caractéristiques dynamiques du système de Rössler et peut être utile pour comprendre le comportement dynamique des systèmes similaires et multidimensionnels.

FIGURE 3.9 – Attracteur de Rössler pour $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$.FIGURE 3.10 – Projection 2-dimension du système chaotique sur un plan (x, y) .

FIGURE 3.11 – Projection 2-dimension du système chaotique sur un plan (x, z) .FIGURE 3.12 – Projection 2-dimension du système chaotique sur un plan (y, z) .

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la dynamique chaotique du système de Rössler. Nous avons abordé tous les éléments essentiels relatifs à ces systèmes, tels que les définitions et leurs caractéristiques.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit les concepts clés et les outils indispensables pour l'étude des systèmes dynamiques. Nous avons pris en compte plusieurs définitions de systèmes dynamiques, notamment ceux à temps continu et à temps discret. Nous avons également abordé le comportement des systèmes dynamiques, la stabilité au sens de Lyapunov, ainsi que les définitions des attracteurs chaotiques. De plus, nous avons présenté les bifurcations et leurs différents types.

Dans le deuxième chapitre, nous avons exploré l'histoire et la définition du chaos ainsi que des systèmes chaotiques. Nous avons discuté des différents chemins qui peuvent conduire au chaos. En outre, nous avons examiné les caractéristiques essentielles du chaos, telles que sa nature non linéaire et déterministe. Nous avons également abordé la sensibilité aux conditions initiales et les aspects apparents de comportement aléatoire. De plus, nous avons présenté le concept d'attracteur étrange et discuté de l'exposant de Lyapunov, qui mesure la quantité de chaos présente dans un système.

Nous avons consacré le troisième chapitre à l'étude de l'attracteur du système de Rössler. (Chercher les points fixes et étude de comportement du système).

En conclusion, l'étude de la dynamique et de la chaotique du système de Rössler nous a permis d'approfondir notre connaissance des phénomènes complexes dans les systèmes dynamiques. Cette recherche présente des implications significatives dans divers domaines, tels que la physique, les mathématiques appliquées et l'ingénierie.

Les résultats de cette étude peuvent servir de base pour de futures recherches visant à mieux comprendre et exploiter les propriétés chaotiques des systèmes dynamiques similaires à celui de Rössler.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Laouira Widad, "contrôle des systèmes dynamiques chaotiques", Université Constantine 1, Doctorat en Sciences, 2017-2018.
- [2] Hamaizia Tayeb, "Systèmes Dynamiques et Chaos", Université de Constantine -1-, Docteur en Sciences, 25/04/2013.
- [3] OUAHABI Rabiaa, "Systèmes dynamiques et chaos : Différentes méthodes de contrôle et de synchronisation", Université frères mentouri - Constantine 1, Doctorat en Sciences, (19 / 03 / 2018).
- [4] Gasri Ahlem, "Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques" Université FRERES MENTOURI-Constantine-1, Doctorat en sciences en Mathématiques, 12 juillet 2018.
- [5] J.L.Pac, "système dynamiques" : cours corrigés. Dunod, Paris, 2016.
- [6] BESSAM Amina, "Etude d'un système dynamique chaotique", Université Mohamed Khider, Biskra, Master en Mathématiques, juin 2020.
- [7] Tidjani Menacer, "Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires", Université Mentouri Constantine, Mémoire de Magistère en mathématiques, 2014.
- [8] Talbi Ibtissem, "Systèmes dynamiques non linéaires et phénomènes de chaos (Application à la cryptographie)", Université Mentouri de Constantine, Mémoire de Magistère en Mathématique, (29/06/2010).
- [9] Abd Elouahab Mohamed Salah, "Les Systèmes Chaotiques à Dérivées Fractionnaires", Université Mentouri Constantine, Magister En Mathématiques, (02/03/2009).

- [10] Benayache H, Rouikha O, "Compression de l'information à l'aide de systèmes chaotiques", University of Jijel Mohamed Seddik BenYahia, Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master en Electronique, Année universitaire, 2019.
- [11] Arban D, Arabe K, "Conception de crypto-systèmes à base de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire : Application au cryptage de la parole", Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou, Mémoire de Fin d'Etudes de Master Acadimique, 09 juillet 2018.
- [12] Meddour Lotfi, "Chaos, Stabilité et Coexistence dans les Systèmes Dynamiques", Université Frères Mentouri-Constantine-1, Doctorat en Sciences, 12/11/2020.
- [13] Ziga Gosar, "Chaotic dynamics, Rössler system", september 2011.
- [14] Djenhi R, Makouf A, "Introduction à la théorie des systèmes dynamiques discrets", Centre Universitaire Abd Elhafid Boussouf Mila, Mémoire de master, 2016/2017.
- [15] E. N. Lorenz "Deterministic Nonperiodic Flow" Journal of the Atmospheric sciences, March 1963.