

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire  
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologies

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master**

**En: Mathématiques**

**Spécialité: Mathématiques appliquées**

# **Équation d'évolution stochastique avec mouvement Brownien fractionnaire**

**Préparé par : Imene BOUCHAMA  
Loubna RASELAIN**

**Soutenue devant le jury**

<b>S.BOUKAF</b>	<b>MCA</b>	<b>C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila</b>	<b>Président</b>
<b>R.AHMED-YAHIA</b>	<b>MCB</b>	<b>C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>A.ZERARI</b>	<b>MAA</b>	<b>C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila</b>	<b>Examineur</b>

**Année universitaire : 2022/2023**

## *Remerciements*

J'aimerais en premier lieu remercier **ALLAH** qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord à mon professeur encadrant : **Dr.Rakia Ahmed yahia** qui m'a proposé le sujet.

Je la remercie pour son aide, son soutien, ses conseils et pour toute l'attention qu'elle a porté à ce travail.

Je tiens à remercier aussi du membres du jury d'avoir accepté l'évaluation de ce travail.

Je tiens à remercier mon cher père décédé **Mahmoud**, pour tout ce qu'il a fait pour moi et les valeurs qu'il m'a transmises. Je prie **Allah** qu'il ait pitié de lui et le fasse habiter dans les vastes jardins du paradis.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier, ma mère **Malika** , mes soeur **Hassina, Ouassila, Saida** , et mes frère **Abde Laali, Boubaker, Mouhamed**.

Je remercie mes amies **Selma,Ferial,Imene, Abla, Fatima, Manar**,...

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## *Remerciements*

J'aimerais en premier lieu remercier **ALLAH** qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord à mon professeur encadrant : **Dr.Rakia Ahmed yahia** qui m'a proposé le sujet.

Je le remercie pour son aide, son soutien, ses conseils et pour tout l'attention qu'il a portée à ce travail.

Je tiens à remercier aussi les membres du jury d'avoir accepté l'évaluation de ce travail.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à mon père **Mouloud**, ma mère **Soria**, ma soeur **Ghada**, et mon frère **Amir**.

Je remercie mes amies **Hadjer, Amel, Sara, Loubna, Nada, Wissem,...**

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## Résumé

Dans ce travail, nous étudions les équations d'évolution stochastiques avec mouvement Brownien fractionnaire, nous rappelons le mouvement Brownien fractionnaire et les intégrales stochastiques, et nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'une classe des équations d'évolution stochastiques linéaires dirigés par mBf de dimensions infinie pour  $H > 1/2$  avec des exemples.

**Mots-clés :** Mouvement Brownien fractionnaire, intégrale de Wiener, paramètre de Hurst, équation d'évolution stochastique

## Abstract

In this work, we study stochastic evolution equations with fractional Brownian motion. We mention fractional Brownian motion and stochastic integrals, and investigate the existence and uniqueness of solutions a class of linear stochastic evolution equations driven by infinite-dimensional fractional Brownian motion for  $H > 1/2$  with Examples.

**Keywords:** fractional Brownian motion, Wiener integral, Hurst parameter, stochastic evolution equations.

## ملخص

في هذه المذكرة نقوم بدراسة معادلات التطور العشوائية بحركة براونية كسرية، نذكر بالحركة البراونية الكسرية و التكاملات العشوائية، وندرس وجود ووحداية الحل لقسم من معادلات التطور العشوائية الخطية الموجهة بالحركة البراونية الكسرية ذات بعد غير منته، من اجل  $H > 1/2$ . مع امثلة

**الكلمات المفتاحية:** الحركة البراونية الكسرية ، تكامل وينر، وسيط هيرس، معادلات التطور العشوائية

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	1
<b>1 Mouvement Brownien et les intégrales stochastiques</b>	3
1.1 Rappels	3
1.2 Mouvement Brownien	4
1.2.1 Construction hilbertienne du mouvement Brownien	5
1.3 Intégrale de Wiener	6
1.4 Intégrale stochastique	7
1.4.1 Intégrale stochastique au sens d'Itô	8
1.4.2 propriétés de l'intégrale stochastique	8
1.4.3 Aspects hilbertiens de l'intégrale stochastique	8
1.4.4 Processus d'Itô	9
1.4.5 La formule d'Itô	10
<b>2 Mouvement Brownien fractionnaire</b>	12
2.1 Définition et existence du mBf	12
2.2 Représentations stochastiques du mBf	16
2.2.1 Représentation temporelle	17
2.2.2 Représentation de Volterra	17

2.3	Propriétés principales du mBf . . . . .	18
2.4	Intégral de Wiener par rapport au mBf . . . . .	20
2.5	MBf en dimension infinie et intégration stochastique . . . . .	22
2.6	Exemple de simulation du mBf en MATLAB : . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Équations d'évolution stochastiques avec mouvement brownien fractionnaire</b>	<b>26</b>
3.1	Équation d'évolution . . . . .	27
3.2	Équation d'évolution stochastique dirigée par mBf . . . . .	27
3.3	Théorème d'existence et d'unicité de la solution des équations d'évolu- tion stochastiques . . . . .	28
3.4	Méthode numérique pour les EES . . . . .	37
	<b>Conclusion</b>	<b>43</b>

---

# LES NOTATIONS

$(E, \mathcal{A})$	l'espace mesurable.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	l'espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t^{B^t}, \mathbb{P})$	l'espace de probabilité filtré.
$\mathcal{F}$	Tribu.
$\mathcal{F}_t$	filtration.
$B_t$	mouvement Brownien.
$B_t^H$	mouvement Brownien fractionnaire.
$\mathcal{N}(0, t - s)$	loi normal.
$\mathcal{E}_H$	espace linéaire des fonctions étagés sur t.
$\mathcal{L}_2(U, V)$	espace des opérateurs de Hilbert shmidt de U vers V.
$L^2(0, T)$	espace de Hilbert.
$R_H(s, t)$	covariance.
$\mathcal{F}_t^B$	filtration engendrée par le Mouvement Brownien.
$\mathcal{F}_t^{B^H}$	la filtration engendrée par le Mouvement Brownien fractionnaire.
mB	mouvement Brownien.
mBf	mouvement Brownien fractionnaire.
EES	équation évolution stochastique.
$\mathbb{P} - P.s$	presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$

---

# INTRODUCTION

Le mouvement Brownien fractionnaire est une famille de processus gaussien indexés par le paramètre de Hurst  $H$ . Ces processus à valeur dans un espace euclidien de dimension finie, ont été introduit par Kolmogorov [11] en 1940, et certaines propriétés de ce processus ont été étudiées par Mandelbrot et Van Ness [12] en 1968. En raison des propriétés d'auto-similarité et de dépendance à longue portée du mBf, ce processus a été utilisé pour décrire le modèle du marché financier et le trafic de télécommunication.

Pour ces applications pratiques, il est nécessaire de développer le calcul stochastique par rapport au mBf car le mBf ( $H \neq 1/2$ ) n'est pas une semi-martingale. Au début du vingt et unième siècle, il y a eu une série de travaux sur le calcul stochastique et les équations différentielles stochastiques par rapport à un mBf de dimension finie ( par exemple : [1] [3] [5]). La question des équations en dimension infinie a été ensuite abordée (par exemple : [17] [4] [7] [13]). En particulier, Duncan [4] et Tindel [17] considéré une équation d'évolution stochastique linéaire dans un espace de Hilbert dirigée par un mBf cylindrique avec paramètre de Hurst  $H > 1/2$ , et étudié l'existence et l'unicité des solutions mild. Soit l'équation différentielle stochastique suivante

$$X(dt) = AX(t)dt + F(X(t))\Phi dB^H(t). \quad (1)$$



Nous étudions l'existence et l'unicité de la solution mild de l'équation (1), dans le cas général et le cas particulier.

Soit  $F(u) \equiv 1$  et  $A$  un opérateur linéaire d'un autre espace de Hilbert  $V$  vers  $V$  avec  $\Phi \in \mathcal{L}(U; V)$  un opérateur linéaire déterministe ne dépendant pas de  $t$ . L'intégrale stochastique apparaissant dans la solution de l'équation (1) est une intégrale de Wiener sur un espace de Hilbert. L'objectif est de donner une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la solution.

Dans le cas particulier, le but est de formuler des conditions nécessaires et suffisantes pour les propriétés d'existence, d'unicité et de régularité de la solution telles que les conditions sur les paramètres d'entrée de l'équation  $A, \Phi$ .

Ce travail est réparti en trois chapitres, organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous allons définir certaines notions de base en probabilité. Nous aurons également besoin de rappeler quelques résultats sur le mouvement Brownien standard, ensuite sur l'intégrale de Wiener et les intégrales stochastiques.

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons le mouvement Brownien fractionnaire, nous commencerons par sa définition, son existence, Puis nous donnerons différentes représentations du mBf et quelques propriétés. Ensuite nous allons définir l'intégral de Wiener par rapport au mouvement Brownien fractionnaire, le mBf en dimension infinie et l'intégration stochastique. Enfin nous donnerons un exemple de simulation du mBf par MATLAB.

Dans le troisième chapitre, nous allons étudier les équations d'évolution stochastique avec mouvement Brownien fractionnaire. Nous commencerons par la définition de l'équation d'évolution. Ensuite nous étudierons l'existence et l'unicité de la solution des équations d'évolution stochastiques linéaires dirigées par le mBf de dimension infinie pour  $H > 1/2$ . On utilisera la méthode d'Euler-Maruyama, valable pour les équations d'évolution stochastiques, avec des exemples et des simulations.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## MOUVEMENT BROWNIEN ET LES INTÉGRALES STOCHASTIQUES

Dans ce chapitre, nous allons définir certaines notions de base en probabilité. Nous aurons également besoin de rappeler quelques résultats sur le mouvement Brownien standard, ensuite sur l'intégrale de Wiener et les intégrales stochastiques. [9][6]

### 1.1 Rappels

**Définition 1.1.1** (*Processus stochastique*) Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$  définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeur dans un autre espace mesurable  $(E, \mathcal{A})$ , et indicées par un paramètre  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} \times \Omega &\rightarrow E \\ (t, \omega) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Pour tout  $\omega \in \Omega, t \mapsto X_t(\omega)$  s'appelle la trajectoire associée à  $\omega$ . L'application  $\omega \mapsto X_t$  avec ( $t \in [0, T]$ ) fixé est une variable sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

**Définition 1.1.2** (filtration) Soient :

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, où  $\Omega$  est l'espace fondamental et  $\mathcal{F}$  une tribu sur  $\Omega$
- $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable avec  $\mathcal{A}$  sa tribu

**Définition 1.1.3** On appelle filtration toute famille croissante  $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+)$  de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  et  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  est appelé espace de probabilité filtré.

**Définition 1.1.4** (Processus Gaussiens) Un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \in T}$  est dit gaussien, si tout sous-vecteur fini  $X_s = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  ( $S = t_1, \dots, t_n \subset T$ ) est un vecteur Gaussien, c'est-à-dire tel que toute combinaison linéaire de ses composantes est une aléatoire gaussienne.

**Définition 1.1.5** (Processus croissant) Un processus  $X = (X_t, t \geq 0)$  est dit croissant si  $X_t = 0$  et  $t \mapsto X_t$  est une fonction croissante, c'est-à-dire

$$t \leq s, X_t(\omega) \leq X_s(\omega), p.s$$

## 1.2 Mouvement Brownien

**Définition 1.2.1** [6] Un processus  $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  à valeurs réelles est appelé mouvement Brownien si :

- $B_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s.$
- $\forall 0 \leq s \leq t$ , la variable aléatoire  $B_t - B_s$  est indépendante de  $\mathcal{F}_s$ .
- $\forall 0 \leq s \leq t$ ,  $B_t - B_s$  est de loi  $\mathcal{N}(0, t - s)$ .

Autrement dit, le processus  $B$  part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

**Théorème 1.2.1** 1) Soit  $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un mouvement Brownien. Alors il satisfait les propriétés suivantes :

- $B_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s.$
- $\forall 0 \leq t_1 < \dots < t_n, (B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$  est un vecteur gaussien centré,
- $\forall s, t \geq 0, \mathbb{E}(B_s B_t) = \min(s, t).$

C'est-à-dire  $B$  est un processus gaussien réel centré et de fonction de covariance  $\text{cov}(s, t) = \min(s, t).$

2) Inversement, si un processus  $B$  vérifie les conditions précédentes,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration naturelle ( $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}_t$ ) de la famille  $(B_t)_{t \geq 0}$ , alors

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$$

Est un mouvement Brownien (standard).

**Définition 1.2.2** Lorsque  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est la filtration naturelle de  $(B_t)_{t \geq 0}$ , on dit que  $B$  est un mouvement Brownien naturel.

### 1.2.1 Construction hilbertienne du mouvement Brownien

[6] Il existe de nombreuses constructions du mouvement brownien mais toutes procèdent en fait des mêmes idées. On le construit explicitement par une méthode hilbertienne à partir d'une suite de variables aléatoires normales indépendantes  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Soit  $I = [0, T]$  (où  $\mathbb{R}_+$ ) et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne orthonormale de l'espace de Hilbert  $L^2(0, T)$  des fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur  $I$ . On note  $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt$  le produit scalaire des fonctions  $f, g \in L^2(0, T)$ .

**Théorème 1.2.2** soit  $(N_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. [1] de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Pour tout  $t \in I$  on pose

$$B_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle 1_{[0,t]}, e_n \rangle N_n.$$

Alors le processus  $B = (B_t)_{t \in I}$  est bien défini et c'est un mB naturel sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

---

1. indépendant et identiquement distribuées

### 1.3 Intégrale de Wiener

[9] On note  $L^2(\mathbb{R}^+)$  l'ensemble des (classes d'équivalence<sup>2</sup>) des fonctions boréliennes  $f$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  de carrée intégrable, c'est-à-dire telles que  $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 ds < \infty$ . C'est un espace de Hilbert pour la norme  $\|f\|_2 = \left( \int_0^{+\infty} f^2(s) ds \right)^{1/2}$ .

#### a. Fonctions en escalier

Soit  $u$  et  $v$  des constantes réelles qui définissent les bornes de l'intervalle pour la fonction indicatrice  $f$ .

Pour  $f = 1_{[u,v]}$ , on pose  $\int_0^{+\infty} f(s) dB_s = B(v) - B(u)$ .

Soit  $f$  une fonction en escalier, on pose

$$\int_0^{+\infty} f(s) dB_s = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

La variable aléatoire  $I(f) = \int_0^{+\infty} f(s) dB_s$  est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance  $\int_0^{+\infty} f^2(s) ds$ . En effet,  $I(f)$  est gaussienne car le processus  $B$  est gaussien, centrée car  $B$  est centrée. De plus

$$\text{Var}(I(f)) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 \text{Var}(B(t_i) - B(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_0^{+\infty} f^2(s) ds.$$

L'intégrale est linéaire :  $I(f + g) = I(f) + I(g)$ . Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions en escalier  $E(I(f)I(g)) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)g(s) ds$  en effet

$$\begin{aligned} \text{Var}(I(f + g)) &= \text{Var}[I(f) + I(g)] = \text{Var}(I(f)) + \text{Var}(I(g)) + 2E(I(f)I(g)) \\ &= \int_0^{+\infty} (f + g)^2(s) ds = \int_0^{+\infty} f^2(s) ds + \int_0^{+\infty} g^2(s) ds + 2 \int_0^{+\infty} f(s)g(s) ds \end{aligned}$$

---

2. classes d'équivalence pour la relation d'égalité presque partout

## b. Cas général

De façon générale, on montre en analyse que, si  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , il existe une suite  $f_n$  de fonctions en escalier qui converge (dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$ ) vers  $f$ , c'est-à-dire qui vérifie

$$\int_0^\infty |f_n - f|^2(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dans ce cas, la suite  $f_n$  est de Cauchy dans  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . La suite de v.a.  $F_n = \int_0^\infty f_n(s) dB_s$  est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)$  (en effet  $\|F_n - F_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ ), donc elle est convergente. De plus, il reste à vérifier que la limite ne dépend que de  $f$  et non de la suite  $f_n$  choisie. On pose

$$I(f) = \int_0^\infty f(s) dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(s) dB_s.$$

La limite étant prise dans  $L^2(\Omega)$ . On dit que  $I(f)$  est l'intégrale stochastique (ou intégrale de Wiener) de  $f$  par rapport à  $B$ . Le sous-espace de  $L^2(\Omega)$  formé par les v.a.  $\int_0^\infty f(s) dB_s$  coïncide avec l'espace gaussien engendré par le mouvement Brownien.

## 1.4 Intégrale stochastique

**Définition 1.4.1** [6] On dit qu'un processus  $X = (X_s)_{s \in [a, b]}$  est élémentaire s'il existe une subdivision  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  de l'intervalle  $[a, b]$  et des variables aléatoires réelles  $(X_i)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , telles que

$$\forall t \in [a, b], \forall \omega \in \Omega, X_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega) 1_{[t_i, t_{i+1}[}(t), \quad (1.1)$$

et telles que pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $X_i$  soit  $\mathcal{F}_{t_i}$  mesurable. Autrement dit dans chaque intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}[$ ,  $X_t(\omega)$  ne dépend pas de  $t$  et vaut  $X_i(\omega)$ .

On notera alors  $\mathcal{E}$  (resp.  $\mathcal{E}_n$ ,  $n > 0$ ) l'ensemble de tous les processus élémentaires sur  $[a, b]$

(resp. le sous-ensemble des  $X \in \mathcal{E}$  tels que les variables aléatoires  $X_i$  ont un moment d'ordre  $n$ , i.e.  $\mathbb{E}(|X_i|^n) < +\infty$ ).

### 1.4.1 Intégrale stochastique au sens d'Itô

**Définition 1.4.2** [6] On appelle intégrale stochastique (au sens d'Itô) du processus  $X \in \mathcal{E}$  donné par (1.1), la variable aléatoire réelle

$$\int_a^b X_t dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

### 1.4.2 propriétés de l'intégrale stochastique

[6]

– linéarité : Si  $X$  et  $Y \in \mathcal{E}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_a^b (\lambda X_t + \mu Y_t) dB_t = \lambda \int_a^b X_t dB_t + \mu \int_a^b Y_t dB_t$$

– centrage : Si  $X \in \mathcal{E}_1$ , alors  $\int_a^b X_t dB_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et on a

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b X_t dB_t\right) = 0,$$

– appartenance à  $L^2$  : Si  $X \in \mathcal{E}_2$ , alors  $\int_a^b X_t dB_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dB_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_a^b X_t^2 dt\right).$$

### 1.4.3 Aspects hilbertiens de l'intégrale stochastique

[6]  $M^2$  est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert

$$L^2([a, b] \times \Omega, \mathcal{B}_{[a,b]} \otimes \mathcal{F}, dt \otimes d\mathbb{P}).$$

L'ensemble  $Prog$ <sup>4</sup> de toutes les parties  $A \subset [a, b] \times \Omega$  telles que le processus  $(t, \omega) \mapsto 1_A(t, \omega)$  est progressivement mesurable, est une sous-tribu de  $\mathcal{B}_{[a,b]} \otimes \mathcal{F}$ . De plus on a :

$$M^2 = L^2([a, b] \times \Omega, Prog, dt \otimes d\mathbb{P}).$$

Pour simplifier l'écriture, on notera  $\|X\|_{M^2} = \|X\|_{L^2([a,b] \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})}$  la norme du processus  $X$  de l'espace de Hilbert  $M^2$ .

**Théorème 1.4.1** *L'espace  $\mathcal{E}_2$  des processus élémentaires de carré intégrable est un sous-espace dense de l'espace de Hilbert  $M^2$ . (i.e.  $\forall X \in M^2, \exists (X^{(n)}) \in \mathcal{E}_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \|X^{(n)} - X\|_{M^2} = 0$ ).*

**Corollaire 1.4.1** *L'isométrie  $I : X \mapsto I(X) = \int_a^b X_t dB_t$  de  $\mathcal{E}_2$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ , se prolonge de manière unique en une isométrie de  $M^2$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{P})$  (qu'on notera toujours  $I$ ). Pour  $X \in M^2$ , on posera*

$$I(X) = \int_a^b X_t dB_t$$

*et on l'appellera l'intégrale stochastique de  $X$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .*

**Remarque 1.4.1** *Toutes les propriétés de l'intégrale stochastique des processus élémentaires sont valables pour les processus de  $M^2$ .*

#### 1.4.4 Processus d'Itô

**Définition 1.4.3** [6] *Un processus  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$  défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  est appelé processus d'Itô s'il est de la forme.*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dB_s \quad (\forall t \in [0, T]), \quad (1.2)$$

---

4. l'ensemble  $Prog$  est défini comme suit :

$$Prog = \{A \subset [a, b] \times \Omega | (t, \omega) \mapsto 1_A(t, \omega) \text{ est progressivement mesurable}\}$$



où  $a$  et  $b$  sont deux processus aléatoires.

**Remarque 1.4.2** On considérera toujours la version continue de l'intégrale stochastique. Ainsi le processus  $X$  défini en (1.2) est un processus continu et par conséquent,  $X \in \Lambda^p$  pour tout  $p \geq 0$ .

**Définition 1.4.4** Pour traduire l'égalité (1.2), on dira que le processus  $X$  admet la différentielle stochastique

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t. \quad (1.3)$$

**Remarque 1.4.3** On notera que (1.3) (équivalent à dire que pour tous  $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ , on a

$$X_{t_2} - X_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} a_s ds + \int_{t_1}^{t_2} b_s dB_s.$$

Il suffit en effet de faire la différence des valeurs prises par (1.2) pour les valeurs  $t_1 = t_2$  et  $t = t_1$ .

### 1.4.5 La formule d'Itô

[6] La propriété remarquable d'un processus d'Itô, c'est qu'il reste un processus d'Itô lorsqu'on le transforme par une application déterministe suffisamment "lisse". Plus précisément, on a le résultat suivant

**Théorème 1.4.2** Soit  $X$  un processus d'Itô sur l'intervalle  $[0, T]$ , de différentielle stochastique

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t.$$

Soit  $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ , une fonction de  $C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ . Alors :  $(f(X_t, t))_{t \in [0, T]}$ , est un processus d'Itô qui a pour différentielle stochastique :

$$d(f(X_t, t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t) (b_t)^2 dt.$$

Le terme  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)(b_t)^2 dt$  s'appelle le terme complémentaire d'Itô.

### exemple

[[6]] Pour tout  $t$  on a  $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$

Par définition

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n B_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

L'égalité

$$2 \sum_{i=0}^n B_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

montre que

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

---

---

# CHAPITRE 2

---

## MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous étudions le mouvement Brownien fractionnaire. On commence par sa définition et son existence, puis nous donnons différentes représentations du mBf et quelques propriétés. Ensuite nous étudions l'intégral de Wiener par rapport au mouvement Brownien fractionnaire, le mBf en dimension infinie et l'intégration stochastique. Enfin nous donnons un exemple de simulation du mBf. [14][8][16][4]

### 2.1 Définition et existence du mBf

**Définition 2.1.1** [14] Un(mBf)de paramètre  $H \in (0; 1)$  est un processus Gaussien centré continu noté par  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  défini sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t^{B^H}, \mathbb{P})$  et de fonction de covariance :

$$R(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (2.1)$$

## Mouvement Brownien fractionnaire

---

Le paramètre  $H$  est appelé paramètre de Hurst.

**Proposition 2.1.1** – Si  $H = \frac{1}{2}$  alors le mouvement Brownien fractionnaire est le mouvement Brownien standard.

– Si  $H = 1$ , alors  $B_t^H = tB_1^H$  presque sûrement pour tout  $t \geq 0$ .

**Preuve.**

- Nous voyons immédiatement que la covariance de  $B^{\frac{1}{2}}$  se réduit à  $(s, t)$  égale  $s \wedge t$ , ce qui veut dire que  $B^{\frac{1}{2}}$  est un mouvement Brownien standard.
- Si  $H = 1$ , nous avons pour tous  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(B_t^H - tB_1^H)^2] &= \mathbb{E}[(B_t^H)^2] + t^2\mathbb{E}[(B_1^H)^2] - 2t\mathbb{E}[(B_t^H B_1^H)] \\ &= t^2 + t^2 \times 1 - 2t\left(\frac{1}{2}(t^2 + 1 - (1-t)^2)\right) \\ &= 2t^2 - 2t^2 = 0.\end{aligned}$$

Donc on dit que  $B_t^H = tB_1^H$   $\mathbb{P}$ -p.s. ■

**Proposition 2.1.2** Soit  $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$  un mBf alors :

$$\text{var}(B_t^H) = t^{2H}.$$

**Preuve.** On a :

$$\begin{aligned}\text{var}(B_t^H) &= R(B_t^H, B_t^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + t^{2H} - |t - t|^{2H}) \\ &= \frac{1}{2}(2t^{2H}) = t^{2H}.\end{aligned}$$

■

**Proposition 2.1.3** Si  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est un processus Gaussien stationnaire et  $X_0 = 0$ , tel que  $\text{var}(X) = t^{2H}$  alors  $X$  est un mBf de paramètre  $H$ .

**Preuve.** Il suffit de montrer que la fonction de covariance de  $X$  est la quantité :

$$R(X_t, X_s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

On a

$$\text{var}(X_t - X_s) = \text{var}(X_t) + \text{var}(X_s) - 2\text{cov}(X_t, X_s).$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_t, X_s) &= \frac{1}{2}\{\text{var}(X_t) + \text{var}(X_s) - \text{var}(X_t - X_s)\} \\ &= \frac{1}{2}\{\text{var}(X_t) + \text{var}(X_s) - \text{var}(X_{t-s})\} \\ &= \frac{1}{2}\{t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H}\}. \\ &= R(X_t, X_s) \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

## Existence du mBf

**Théorème 2.1.1** [14] Si  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique positive, alors il existe un vecteur aléatoire Gaussien centré admettant  $R$  comme matrice de covariance

**Théorème 2.1.2** Il existe un processus stochastique Gaussien centré  $B^H = \{B_t^H\}_{t \geq 0}$  à trajectoires continues dont la fonction de covariance est donné par :

$$R_H(s, t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad \forall s, t \geq 0. \quad (2.2)$$

Si et seulement si  $H \in (0, 1]$ .

**Preuve.** On montre que  $R_H$  est une matrice définie positive si  $H \in (0, 1]$ . Soit

$$\sum_{i=1}^n a_i a_j R_H(i, j) \geq 0 \quad \forall a_i, a_j \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n, \forall n \in \mathbb{N}$$

si  $H > 1$  alors, pour  $n = 2$  il existe  $a_1 = -2, a_2 = 1, t_1 = 1$  et  $t_2 = 2$  tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 a_i a_j R_H(i, j) &= a_1^2 R_H(1, 1) + 2a_1 a_2 R_H(1, 2) + a_2^2 R_H(2, 2) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\right)(1 + 1) + 2(-2)\left(\frac{1}{2}\right)(1 - 2^{2H} - 1) + \frac{1}{2}(2^{2H} + 2^{2H}), \\ &= 4 - 2^{2H} < 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $R_H$  n'est pas une matrice définie positive lorsque  $H > 1$ .

Considérons maintenant le cas  $H \in (0, 1]$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  en utilisant le changement de variable  $v = u|x|$  dans l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u^2 x^2}}{u^{1+2H}} du &= \int_0^\infty \frac{1 - e^{-v^2}}{(|x|^{-1}v)^{1+2H}} |x|^{-1} dv \\ &= |x|^{2H} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-v^2}}{v^{1+2H}} dv \end{aligned}$$

$$c_H = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u^2}}{u^{1+2H}} du < \infty \text{ alors}$$

$$|x|^{2H} = \frac{1}{c_H} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u^2 x^2}}{u^{1+2H}} du$$

donc pour tout  $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H} &= \frac{1}{c_H} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u^2 s^2} + 1 - e^{-u^2 t^2} - 1 + e^{-u^2 (t-s)^2}}{u^{1+2H}} du \\ &= \frac{1}{c_H} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t^2})(1 - e^{-u^2 s^2})}{u^{1+2H}} du + \frac{1}{c_H} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2 (t^2 + s^2)}(e^{2u^2 st} - 1)}{u^{1+2H}} du. \end{aligned}$$

Notons que  $R_1(s, t) = st$  pour tout  $s, t \geq 0$  alors, pour tout  $n \geq 1, t_1, \dots, t_n \geq 0$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  pour tout  $s, t$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n R_1(t_i t_j) a_i a_j &= \sum_{i,j=1}^n (t_i t_j) a_i a_j \\ &= \left( \sum_{i=1}^n t_i a_i \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

On utilise le théorème de Taylor-young pour  $a = 0$ ,  $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  alors

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) a_i a_j &= \frac{1}{2c_H} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{i,j=1}^n (1 - e^{-u^2 t_i^2})(1 - e^{-u^2 t_j^2}) a_i a_j}{u^{1+2H}} du \\
 &+ \frac{1}{2c_H} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{i,j=1}^n \left( e^{-u^2 t_i^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2u^2 t_i t_j)^k}{k!} e^{-u^2 t_j^2} \right) a_i a_j}{u^{1+2H}} du \\
 &= \frac{1}{2c_H} \int_0^{\infty} \frac{\left( \sum_{i=1}^n (1 - e^{-u^2 t_i^2}) a_i \right)^2}{u^{1+2H}} du \\
 &+ \frac{1}{2c_H} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{\left( \sum_{i=1}^n t_i^k e^{-u^2 t_i^2} a_i \right)^2}{u^{1-2k+2H}} du \geq 0.
 \end{aligned}$$

Donc,  $R_H$  une matrice définie positive pour  $H \in [0, 1]$ . ■

## 2.2 Représentations stochastiques du mBf

[14] L'intégrale de Wiener du mB recto-verso  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  est la famille gaussienne adaptée

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} f(s) dB_s : f \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

$\{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$  est un mouvement Brownien, alors :

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(u) dB_u \right] = 0, \tag{2.3}$$

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(u) dB_u \int_{\mathbb{R}} g(u) dB_u \right] = \int_{\mathbb{R}} f(u) g(u) du \tag{2.4}$$

## 2.2.1 Représentation temporelle

**Proposition 2.2.1** Soit  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ , toute modification continue de le processus stochastique  $B^H = \{B_t^H\}_{t \geq 0}$  définie par :

$$B_t^H = \frac{1}{C_H} \left( \int_{-\infty}^0 ((t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}}) dB_u + \int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dB_u \right), \quad (2.5)$$

est un mBf de paramètre de Hurst  $H$ .

Où  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien et

$$C_H = \sqrt{\frac{1}{2H} + \int_0^{+\infty} ((1+u)^{H-\frac{1}{2}} - u^{H-\frac{1}{2}})^2 du} < \infty.$$

L'expression (2.5) est appelée représentation temporelle du mBf.

**Preuve.** voir [14]. ■

## 2.2.2 Représentation de Volterra

Soit  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ , toute modification continue du processus stochastique  $B^H = \{B_t^H\}_{t \geq 0}$  définie par :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dB_s. \quad (2.6)$$

est un mBf de paramètre de Hurst  $H$ .

Où  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien et  $0 < s < t$ .

$$K_H(t, s) = \begin{cases} \sqrt{\frac{H(2H-1)}{\int_0^1 (1-x)^{1-2H} x^{H-\frac{3}{2}} dx}} s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du & \text{si } H > \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{2H}{(1-2H) \int_0^1 (1-x)^{-2H} x^{H-\frac{1}{2}} dx}} \times \left[ \left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (H-\frac{1}{2}) s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t u^{H-\frac{3}{2}} (u-s)^{H-\frac{1}{2}} du \right] & \text{si } H < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.7)$$



L'expression (2.6) est appelée représentation de Volterra du mBf.

Preuve. voir [14]. ■

## 2.3 Propriétés principales du mBf

### Auto-similarité

**Définition 2.3.1** [16] Un processus  $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$  est dit auto-similarité d'ordre  $\beta$  s'il existe  $\beta > 0$  tel que, pour tout  $\alpha > 0$ , les processus :

$$\{X_{\alpha \cdot t}, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \{\alpha^\beta \cdot X_t, t \in \mathbb{R}\}$$

Aient même loi.

**Théorème 2.3.1** Le mouvement Brownien fractionnaire  $\{B_t^H, t \in \mathbb{R}\}$  de paramètre  $H$  est auto-similaire d'ordre  $H$

### Accroissement stationnaire

**Proposition 2.3.1** [16] Le mouvement Brownien fractionnaire  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  est un processus à accroissement stationnaire

### Propriétés de mémoire

[8] Soit  $r(n) = \text{cov}(X_k, X_{k+n})$ ;  $K \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Définition 2.3.2** Un processus stationnaire  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ , est dit à longue mémoire tant que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r(n) = +\infty \quad \text{et} \quad \text{à courte mémoire si : } \sum_{n=1}^{+\infty} r(n) < +\infty.$$

**Proposition 2.3.2** – Le mBf a une longue mémoire, si  $H > \frac{1}{2}$ .

– Le mBf a une courte mémoire, si  $H < \frac{1}{2}$ .

### Continuité de Hölder

**Théorème 2.3.2** [16] Tout mBf admet une modification dont les trajectoires ont une continuité de Hölder d'ordre  $\gamma < H$  sur tout intervalle  $[0, p]$  avec  $p > 0$ .

C'est-à-dire, pour tout  $\alpha > 0$  il existe une constante  $C_\alpha$  telle que, pour tout  $(s, t) \in [0, p]^2$  :

$$\mathbb{E}[|B_t^H - B_s^H|^\alpha] \leq C_\alpha |t - s|^{\alpha H}. \quad (2.8)$$

**Théorème 2.3.3** Les trajectoires du mBf n'ont  $\mathbb{P}$  – p.s. pas de continuité du Hölder d'ordre supérieur à  $H$  sur tout intervalle borné.

### Non différentiabilité

**Théorème 2.3.4** [16] Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ , les trajectoires du mBf sont  $\mathbb{P}$  – p.s non différentiable en  $t_0$ .

### Un processus non-Markovien

**Théorème 2.3.5** [16] Soit  $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$  un processus gaussien centré. Si  $X$  est un processus de Markov, alors  $\forall s < t < u$  avec  $R(t, t) > 0$  :

$$R(s, u)R(t, t) = R(s, t)R(t, u).$$

Où  $R$  est la fonction de covariance de  $X$ . De plus, si  $R(t, t) = 0$  alors  $\{X_s, s \leq t\}$  et  $\{X_s, s \geq t\}$  sont indépendants.

**Corollaire 2.3.1** Soit  $0 < H < 1$  et  $H \neq \frac{1}{2}$

- Le mouvement Brownien fractionnaire  $\{B_t^H, t \in \mathbb{R}\}$  n'est pas Markovien.
- Le mouvement Brownien fractionnaire  $\{B_t^H, t \in \mathbb{R}^+\}$  n'est pas Markovien.

## Le mBf n'est pas une semi-martingale

**Théorème 2.3.6** [16] *Le mBf n'est pas une semi-martingale pour  $H \neq \frac{1}{2}$ , relativement à sa filtration naturelle.*

## 2.4 Intégral de Wiener par rapport au mBf

[17] Considérons  $T = [0, \tau]$  un intervalle de temps avec un horizon arbitraire  $\tau$  fixe, et soit  $(B_t^H)_{t \in T}$  le mouvement Brownien fractionnaire unidimensionnel de paramètre de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Cela signifie par définition que  $B^H$  est un processus gaussien centré de covariance.

$$R(t, s) = E(B_s^H B_t^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (2.9)$$

Notons que  $B^{1/2}$  est un mBf standard. De plus  $B^H$  il admet l'intégrale de Wiener suivante :

$$B_t^H = \int_0^t K^H(t, s) dW_s. \quad (2.10)$$

Où  $W = (W_t, t \in T)$  est un processus de Wiener, et  $K^H(t, s)$  est le noyau donné par :

$$K^H(t, s) = c_H \left(\frac{t}{s}\right)^{H-1/2} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} + s^{\frac{1}{2}-H} F\left(\frac{t}{s}\right). \quad (2.11)$$

Où  $c_H$  une constante et

$$F(z) = c_H \left(\frac{1}{2} - H\right) \int_0^{z-1} r^{H-\frac{3}{2}} (1 - (1+r)^{H-\frac{1}{2}}) dr. \quad (2.12)$$

De (2.11) on obtient

$$\frac{\partial K^H}{\partial t}(t, s) = c_H \left(H - \frac{1}{2}\right) (t-s)^{H-\frac{3}{2}} \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H}. \quad (2.13)$$

On notera  $\mathcal{E}_H$  l'espace linéaire des fonctions en étagées sur  $T$  sous la forme :

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t). \quad (2.14)$$

Où  $t_1, \dots, t_n \in T, n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$  et par  $\mathcal{H}$  l'adhérence de  $\mathcal{E}_H$  par rapport au produit scalaire

$$\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = R(t, s).$$

Pour  $\varphi \in \mathcal{E}_H$  de la forme (2.14) on définit son intégral de Wiener par rapport au mBf comme suit :

$$\int_T \varphi_s dB^H(s) = \sum_{i=1}^n a_i (B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H). \quad (2.15)$$

Évidemment l'application

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i 1_{(t_i, t_{i+1}]} \rightarrow \int_T \varphi_s dB^H(s). \quad (2.16)$$

Est une isométrie entre  $\mathcal{E}_H$  et l'espace linéaire  $\text{vect} \{B_t^H, t \in T\}$  vu comme un sous espace de  $L^2(\Omega)$  qui peut être étendue à une isométrie entre  $\mathcal{H}$  et le premier chaos de Wiener du mBf  $\overline{\text{vect}}^{L^2(\Omega)} \{B_t^H, t \in T\}$ . L'image d'un élément  $\Phi \in \mathcal{H}$  par cette isométrie est appelée l'intégrale de Wiener de  $\Phi$  par rapport à  $B^H$ . Pour tout  $s < \tau$ , considérons l'opérateur  $K^*$  dans  $L^2(T)$

$$(K_\tau^* \varphi)(s) = K(\tau, s) \varphi(s) + \int_s^\tau (\varphi(r) - \varphi(s)) \frac{\partial K}{\partial r}(r, s) dr. \quad (2.17)$$

Lorsque  $H > \frac{1}{2}$ , l'opérateur  $K_\tau^*$  a l'expression la plus simplifiée

$$(K_\tau^* \varphi)(s) = \int_s^\tau \varphi(r) \frac{\partial K}{\partial r}(r, s) dr$$

Pour tout  $t \in T$  on définit  $K_t^*$  de la même manière.  $K_t^*$  est une isométrie entre  $\mathcal{H}$  et  $L^2(T)$ . En conséquence, nous avons la relation suivante entre l'intégrale de Wiener par

rapport ou mBf et l'intégrale de Wiener par rapport au processus de Wiener

$$W : \int_T \varphi(s) dB^H(s) = \int_T (K_\tau^* \varphi)(s) dW(s).$$

Valable pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}$  si et seulement si  $K_\tau^* \varphi \in L^2(T)$ . Pour tout  $s, t \in T$ , on peut vérifier la relation  $K_\tau^*[\varphi \mathbf{1}_{[0,t]}](s) = K_\tau^*[\varphi](s) \mathbf{1}_{[0,t]}(s)$ . Alors si on définit l'intégral stochastique défini par  $\int_0^t \varphi(s) dB^H(s)$ , comme il se doit par  $\int_0^\tau \varphi(s) \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB^H(s)$ , on obtient :

$$\int_0^t \varphi(s) dB^H(s) = \int_0^t (K_t^* \varphi)(s) dW(s). \quad (2.18)$$

Pour tout  $t \in T$  et  $\varphi \mathbf{1}_{[0,t]} \in \mathcal{H}$  si et seulement si  $K_t^* \varphi \in L^2(T)$ . Quant  $H > \frac{1}{2}$ , si  $\phi, \chi \in \mathcal{H}$  sont tels que  $\int_T \int_T |\phi(s)| |\chi(t)| |t-s|^{2H-2} ds dt < \infty$  leur produit scalaire dans  $\mathcal{H}$  est donné par

$$\langle \phi, \chi \rangle_{\mathcal{H}} = H(2H-1) \int_0^\tau \int_0^\tau \phi(s) \chi(t) |t-s|^{2H-2} ds dt. \quad (2.19)$$

Notons que dans la théorie générale de l'intégration de Skorohod de par rapport ou mBf a valeur dans un espace de Hilbert  $V$ , une relation telle que (2.18) nécessite une justification soigneuse de l'existence de son membre droit. Mais nous travaillons avec des intégrales de Wiener sur des espaces de Hilbert, dans ce cas on remarque que, si  $u \in L^2(T; V)$  est une fonction déterministe, alors la relation (2.18) est vérifiée, l'intégrale de Wiener au second membre étant bien définie dans  $L^2(\Omega; V)$  si  $k^* u$  appartient à  $L^2(T \times V)$ .

## 2.5 MBf en dimension infinie et intégration stochastique

[16] Soit  $U$  un espace de Hilbert réel et séparable, soit  $Q$  un opérateur auto-adjoint et positif sur  $U$  ( $Q = Q^* > 0$ ). Il est typique et généralement commode de supposer en outre que  $Q$  est nucléaire ( $Q \in L_1(U)$ ). Dans ce cas il est bien connu que  $Q$  admet une suite  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  de valeur propre avec  $0 < \lambda_n \searrow 0$  et  $\sum_{n \geq 0} \lambda_n < \infty$ . De plus, les vecteurs propres correspondant  $(e_n)_{n \geq 0}$  forment une base orthonormée en  $U$ . On définit le mBf

de dimension infinie sur  $U$  avec covariance  $Q$  par

$$B^H(t) = B_Q^H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n \beta_n^H(t). \quad (2.20)$$

Où  $\beta_n^H$  sont des mBf réel et indépendant. Ce processus est gaussien à valeurs dans  $U$ . Il commence à 0, de moyenne zéro et de covariance nulles

$$\mathbb{E}(B_Q^H(t)B_Q^H(s)) = R(s, t)Q, \quad \forall (s, t) \in T. \quad (2.21)$$

Nous rencontrerons ci-dessous des cas dans lesquels l'hypothèse que  $Q$  est nucléaire n'est pas pratique. Par exemple, on peut souhaiter considérer le cas d'un véritable mouvement Brownien fractionnaire cylindrique sur  $U$  en supposant.  $\lambda_n \equiv 1$ . C'est-à-dire .

$$B^H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \beta_n^H(t)$$

Plus généralement, nous énonçons ce qui suit.

**Remarque 2.5.1** *Il est possible de définir un mouvement Brownien fractionnaire généralisé sur  $U$  par la partie droite de la formule (2.20) pour n'importe quel système orthonormal complet fixe  $(e_n)_n$  dans  $U$  et n'importe quelle suite fixe de nombres positifs  $(\lambda_n)_n$ , même si  $\sum_{n \geq 0} \lambda_n = \infty$ . Bien que pour tout  $t$  fixé, la série (2.20) ne converge pas dans  $L^2(\Omega \times U)$ , nous pouvons toujours considérer un espace de Hilbert  $U_1$  tel que  $U \subset U_1$  et que cette inclusion soit un opérateur de Hilbert-Schmidt. De cette manière,  $B^H(t)$  donné par (2.20) est un processus stochastique gaussien à valeurs dans  $U_1$  bien défini.*

Soit maintenant  $V$  un autre espace de Hilbert réel séparable,  $B^H$  le processus défini ci-dessus, défini comme un processus à valeurs dans  $U_1$  si nécessaire, et  $(\Phi_s)_{s \in T}$  une fonction déterministe à valeurs dans  $\mathcal{L}_2(U; V)$ , l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de  $U$  à  $V$ . L'intégrale stochastique de  $\Phi$  par rapport à  $B^H$  est définie par :

$$\int_0^t \Phi_s dB^H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \Phi_s e_n d\beta_n^H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (K^*(\Phi e_n))_s d\beta_n(s). \quad (2.22)$$

Où  $\beta_n$  est mouvement Brownien fractionnaire utilisé pour représenter  $\beta_n^H$  dans (2.12), et la somme ci-dessus est finie quand

$$\sum_n \|K^*(\Phi e_n)\|_{L^2(T;V)}^2 = \sum_n \|\Phi e_n\|_{\mathcal{H}|_V}^2 < \infty.$$

Dans ce cas, l'intégrale (2.22) est bien définie en tant que variable aléatoire gaussienne à valeurs dans  $V$ . Cependant, comme nous allons le voir, l'équation linéaire additive dans sa forme d'évolution peut avoir une solution même si  $\int_0^t \Phi_s dB^H(s)$  n'est pas correctement définie en tant que variable aléatoire gaussienne à valeurs dans  $V$ . Une remarque similaire à la remarque 2.5.1 s'applique pour définir cette intégrale stochastique dans un espace de Hilbert plus grand que  $V$ . En particulier, il n'y a aucune raison de supposer que  $\Phi \in \mathcal{L}_2(U, V)$ .

## 2.6 Exemple de simulation du mBf en MATLAB :

Le code de simulation du mBf commence par définir le nombre de pas de temps  $N$ , le pas de temps  $dt$ , et le paramètre de Hurst  $H$ . Il génère ensuite des incréments gaussiens blancs  $dW$  à l'aide de la fonction `randn` de MATLAB.

La trajectoire du mBf est calculée en utilisant la fonction `cumsum` pour effectuer la somme cumulée des termes de la série. La fonction  $t^{(2*H)}$  calcule le facteur multiplicatif correspondant à chaque incrément dans la série. Enfin, le code trace la trajectoire du mBf en utilisant la fonction `plot` de MATLAB.

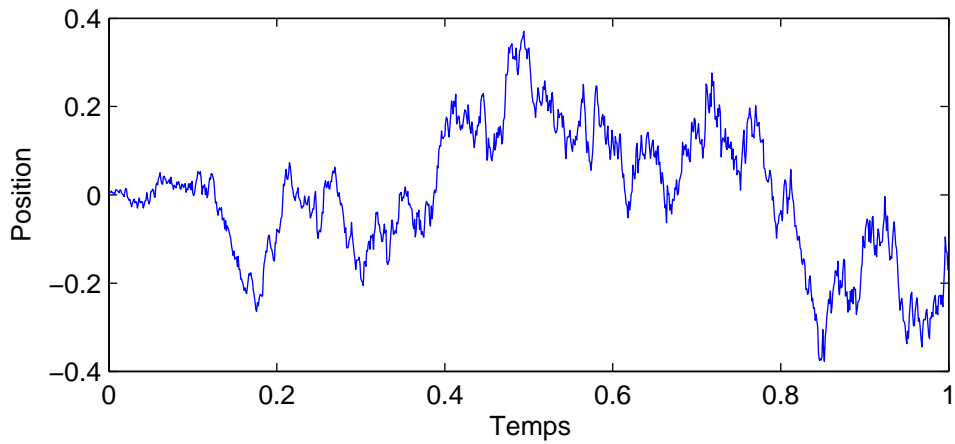


FIGURE 2.1 – *Trajectoire du mBf  $H = 0.2$*

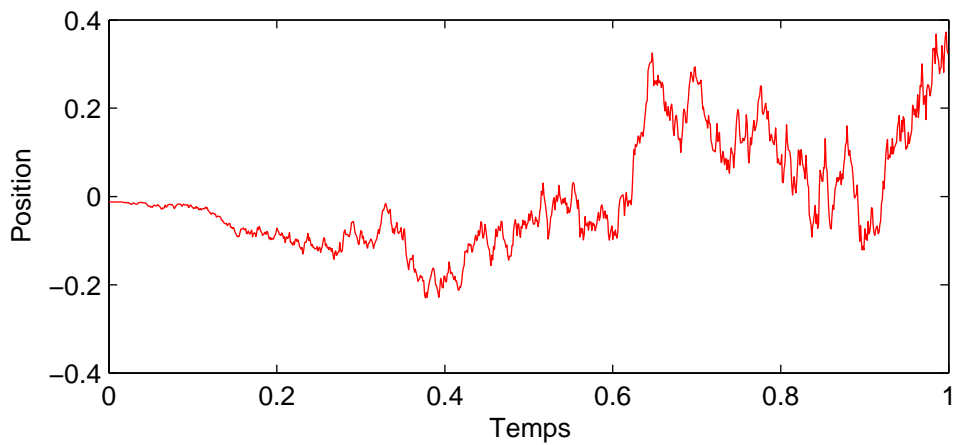


FIGURE 2.2 – *Trajectoire du mBf  $H = 0.5$*

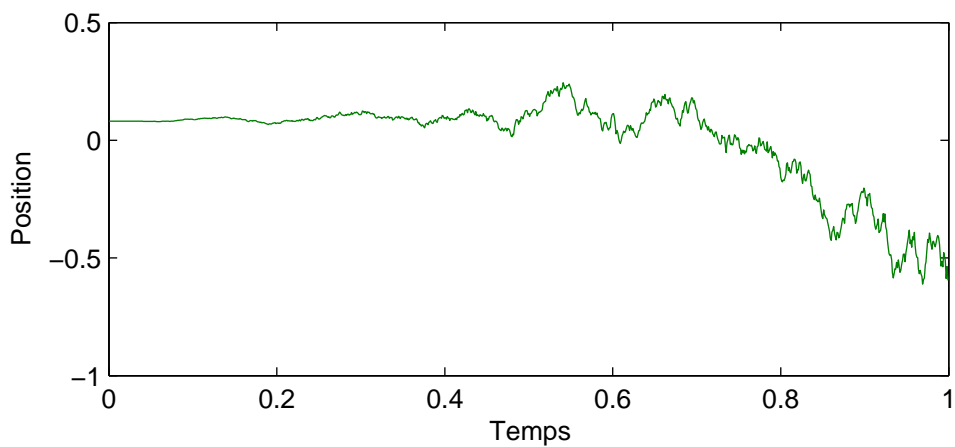


FIGURE 2.3 – *Trajectoire du mBf  $H = 0.8$*



---

---

## CHAPITRE 3

---

# ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION STOCHASTIQUES AVEC MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous étudions les équations d'évolution stochastiques avec mouvement Brownien fractionnaire. On commence par la définition de l'équation d'évolution. Ensuite nous étudions l'existence et l'unicité de la solution des équations d'évolution stochastiques linéaires dirigées par le mBf de dimension infinie pour  $H > 1/2$ , en utilisant la méthode d'Euler-Maruyama, valable pour les équations évolution stochastiques, Avec des exemples [\[15\]](#) [\[17\]](#) [\[4\]](#) [\[10\]](#)

### 3.1 Équation d'évolution

**Définition 3.1.1** [15] soit  $E$  un espace de Banach, pour chaque  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , Soient :  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ , un opérateur linéaire dans  $E$ . soit le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX(t) + F(t) \\ X(s) = X_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Le problème (3.1) est dit un problème d'évolution. La solution de (3.1) est définie par la formule :

$$X(t) = S(t)X_0 + \int_0^t S(t-s)F(S)ds. \quad (3.2)$$

Où  $S(t)X_0$  est la solution du problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Tel que  $S(t) = e^{At}$ .

### 3.2 Équation d'évolution stochastique dirigée par mBf

[17] [4]

- $U, V$  : sont des espaces de Hilbert séparables.
- $(B^H(t))_{t \in T}$ , est un mBf standard, cylindrique dans un espace de Hilbert  $U$ , est défini par la série formelle

$$B^H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \beta_n^H(t).$$

Où  $(e_n, n \in \mathbb{N})$  est une base complète et orthonormée dans  $U$ , et  $(\beta_n^H(t), n \in \mathbb{N}, t \geq 0)$  est une séquence de mouvements browniens fractionnaires indépendants, réels et standard, chacun ayant le même paramètre de Hurst  $H \in (1/2, 1)$ . Il est bien connu que la série infinie ne converge pas dans  $L^2(\mathbb{P})$ , donc  $B^H(t)$  n'est pas une

variable aléatoire bien définie à valeurs dans  $U$ .

**Définition 3.2.1** Une équation d'évolution stochastique avec mBf standard sur un espace de Hilbert séparable réel  $U$ , est donnée sous la forme :

$$dX(t) = AX(t) + \Phi dB^H(t), X(0) = x \in V. \quad (3.4)$$

- $\Phi$  : Opérateur linéaire dans  $\mathcal{L}(U, V)$ , pas nécessairement de Hilbert-Schmidt.
- $A$  :  $Dom(A) \subset V \rightarrow V$ ,  $A$  à générateur infinitésimal du semi groupe fortement continu  $(S(t), t \geq 0)$ .

Cependant l'opérateur  $A$  peut être suffisamment irrégulier de sorte qu'il n'existe pas de solution forte, même si  $\int_0^t \Phi dB^H(s)$  existe. La solution mild de l'équation (3.4) est donnée sous la forme suivante :

$$X(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)\Phi dB^H(s). \quad (3.5)$$

**Remarque 3.2.1** L'intégrale stochastique  $\int_0^t \Phi dB^H(s)$  est bien définie comme une variable aléatoire à valeur  $V$  si  $\Phi \in \mathcal{L}_2(U, V)$  car

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t \Phi dB^H(s) \right|_V^2 = \sum_n \mathbb{E} \left| \int_0^t \Phi e_n d\beta_n^H(s) \right|_V^2 = \sum_n \mathbb{E} \left| \int_0^t d\beta_n^H(s) \right|_V^2 |\Phi e_n|_V^2 = t^{2H} \|\Phi\|_{HS}^2. \quad (3.6)$$

$\|\cdot\|_{HS}$  désigne la norme de Hilbert-Schmidt.

### 3.3 Théorème d'existence et d'unicité de la solution des équations d'évolution stochastiques

#### Cas général

[4] Pour que la solution soit un processus avec des propriétés raisonnables on utilise l'hypothèse suivante :

(A1) : Pour tout  $t > 0$ ,  $S(0)\Phi \in \mathcal{L}_2(U, V)$  et il existe un  $T_0 > 0$  tel que :

$$\int_0^{T_0} \int_0^{T_0} |S(u)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} |S(v)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} \phi(u-v) dudv < \infty.$$

**Proposition 3.3.1** *Si (A1) est satisfaite, alors il existe une solution  $(X(t), t \geq 0)$  qui est un processus mesurable à trajectoires simples (presque surement) dans  $\mathcal{L}_2(0, T; V)$  pour chaque  $T > 0$  et satisfait (3.5). Le processus  $(X(t), t \geq 0)$  est continu en moyenne quadratique et pour tout  $t > 0$  la loi de probabilité de  $X(t)$  est la mesure gaussienne  $\mu_t^x = N(S(t)x, Q_t)$  où*

$$Q_t = \int_0^t \int_0^t S(u)QS^*(v)\phi(u-v)dudv. \quad (3.7)$$

$Q = \Phi\Phi^*$  et  $Q \in \mathcal{L}(V)$

**Preuve.** Pour tout  $t \geq T_0$ , il découle de (A1) et de la continuité forte du semi-groupe  $(S(t), t \geq 0)$  que

$$|S(t)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} \leq |S(t - T_0)|_{\mathcal{L}(V)} |S(T_0)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} \leq Me^{\omega t}. \quad (3.8)$$

Pour certains  $M > 0$  et  $\omega \in \mathbb{R}$ . Ainsi, l'inégalité suivante s'obtient facilement

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^t |S(u)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} |S(v)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} \phi(u-v) dudv \\ & \leq \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} |S(u)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} |S(v)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} \phi(u-v) dudv \\ & \quad + \int_{T_0}^t \int_{T_0}^t M^2 e^{\omega u} e^{\omega v} \phi(u-v) dudv \\ & \quad + 2 \int_0^{T_0} |S(u)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} \int_{T_0}^t Me^{\omega v} \phi(u-v) dudv < \infty. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Il découle de (A1) que  $|S(\cdot)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} \in L^1(0, T_0)$ . Ce qui implique aussi que pour tout  $t \geq 0$ ,  $X(t)$  a la loi gaussienne  $\mu_t^x$ , où  $Q_t$  est donné par (3.7). On montre maintenant que

le processus  $(X(t), t \geq 0)$  est continu de moyenne carré. Soit  $t > s \geq 0$ .

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left| \int_0^t S(t-r)\Phi dB^H(r) - \int_0^s S(s-r)\Phi dB^H(r) \right|^2 \\
 &= \mathbb{E} \left| \int_s^t S(t-r)\Phi dB^H(r) - \int_0^s (S(t-r) - I)S(s-r)\Phi dB^H(r) \right|^2 \\
 &\leq 2\mathbb{E} \left| \int_s^t S(t-r)\Phi dB^H(r) \right|^2 + 2\mathbb{E} \left| \int_0^s (S(t-r) - I)S(s-r)\Phi dB^H(r) \right|^2 \\
 &\leq 2Tr \int_s^t \int_s^t S(r)QS^*(\sigma)\phi(r-\sigma)drd\sigma \\
 &\quad + 2Tr \int_0^s \int_0^s (S(t-s) - I)S(u)QS^*(v)(S(t-s) - I)^*\phi(u-v)dudv \\
 &\leq 2 \int_s^t \int_s^t |S(r)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} |S(\sigma)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} \phi(u,v)dudv \\
 &\quad + \int_0^s \int_0^s |(S(t-s) - I)S(u)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} |(S(t-s) - I)S(v)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} \times \phi(u-v)dudv. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Le premier terme du membre droit de l'inégalité finale (3.10) converge clairement vers zéro lorsque  $t \rightarrow s$ . Comme  $|S(t-s) - I|_{\mathcal{L}(V)}$  est borné pour  $s, t$  dans un intervalle borné et  $S(t-s) - I \rightarrow 0$  pour la convergence forte des opérateurs lorsque  $t \rightarrow s$ , il s'ensuit que

$$\lim_{t \rightarrow s} |(S(t-s) - I)S(v)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} = 0. \quad (3.11)$$

Et

$$|(S(t-s) - I)S(v)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} \leq K|S(v)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)}. \quad (3.12)$$

Pour tout  $v \in (0, s)$  et un certain  $K > 0$ . Ainsi le second terme du membre droit de (3.10) tend vers zéro par le théorème de convergence dominée et on démontre que  $(X(t), t \geq 0)$  est un moyenne carré continu. D'après la proposition 3.6 [2], il résulte de la continuité de moyenne quadratique que  $(X(t), t \geq 0)$  a une version mesurable. Par (3.9) il est clair que pour tout  $T > 0$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}|X(t)|^2 = \sup_{0 \leq t \leq T} TrQ_t$$

$$\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \int_0^t |S(u)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} |S(v)\Phi|_{\mathcal{L}_2(U,V)} \phi(u-v) du dv < \infty. \quad (3.13)$$

$$\mathbb{E} \int_0^T |X(t)|^2 dt \leq \int_0^T \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} |X(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.14)$$

Et  $X(\cdot) \in L^2(0, T; V)$  pour tout  $T > 0$ . En utilisant la méthode de factorisation et la version légèrement plus forte de (A1), on obtient que  $(X(t), t \geq 0)$  a une version avec des trajectoires simples continues. ■

## Cas particulier

[17] On prend  $A$  un opérateur auto adjoint négatif sur un espace de Hilbert  $V$  avec un trou spectral<sup>3</sup>. Et  $\Phi \in \mathcal{L}_2(U, V)$

**Théorème 3.3.1** Soient  $B^H (H \in [1/2, 1])$  un mBf cylindrique dans un espace de Hilbert  $U$  et  $A : \text{Dom}(A) \subset V \rightarrow V$  un opérateur auto adjoint sur un espace de Hilbert  $V$ . Supposons que  $A$  est un opérateur négatif, et plus précisément qu'il existe un certain  $l > 0$  tel que :  $dP_\lambda$  est de support  $(-\infty, -l]$ . Alors pour tout  $\Phi \in \mathcal{L}_2(U, V)$  fixe, il existe une solution mild unique  $(X(t))_{t \in T}$  de (3.4) qui appartient à  $L^2(\Omega; V)$  si et seulement si  $\Phi^* G_H(-A) \Phi$  est un opérateur de classe trace, où

$$G_H(\lambda) = (\max(\lambda, 1))^{-2H}. \quad (3.15)$$

Le résultat du théorème est vrai.

---

3. Cela signifie qu'il existe un intervalle ouvert sur la droite réelle qui ne contient aucun élément propre de  $A$ . En d'autres termes, il n'y a pas de valeurs propres de  $A$  dans cet intervalle

**Preuve.** Estimons la moyenne carré de l'intégrale de Wiener de (3.5). Pour tout  $t \in T$ , nous avons ( $C(H)$  désignant une constante générique tout au long de cette preuve)

$$\begin{aligned}
 I_t &= \mathbb{E} \left| \int_0^t e^{(t-s)A} \Phi dB^H(s) \right|_V^2 = \mathbb{E} \left| \sum_n \int_0^t e^{(t-s)A} \Phi e_n d\beta_n^H(s) \right|_V^2 \\
 &= \sum_n C(H) \int_0^t \int_0^t \langle e^{(t-u)A} \Phi e_n, e^{(t-v)A} \Phi e_n \rangle_V |u-v|^{2H-2} dudv \\
 &= C(H) \sum_n \int_0^t \int_0^t \langle e^{(2t-u-v)A} \Phi e_n, \Phi e_n \rangle_V |u-v|^{2H-2} dudv \\
 &= 2C(H) \sum_n \int_0^t \left( \int_0^u \langle e^{(2t-2u+v)A} \Phi e_n, \Phi e_n \rangle_V v^{2H-2} dv \right) du. \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

Nous considérons maintenant  $d\mu_n(\lambda)$  définie par :

$$d\mu_n(\lambda) = d\langle \Phi e_n, P_\lambda \Phi e_n \rangle_V. \tag{3.17}$$

Où  $P_\lambda$  est la mesure spectrale de l'opérateur  $-A$ . On a

$$\langle e^{(2t-2u+v)A} \Phi e_n, \Phi e_n \rangle_V = \int_{\mathbb{R}} e^{(2t-2u+v)\lambda} d\mu_n(\lambda) = \int_0^\infty e^{-(2t-2u+v)\lambda} d\mu_n(\lambda).$$

Étant donné que  $A \leq 0$ ,  $P_\lambda$  s'annule pour  $\lambda > 0$ . L'expression (3.16) devient

$$\begin{aligned}
 I_t &= C(H) \sum_n \int_0^t \int_0^u v^{2H-2} \left( \int_0^\infty e^{-(2t-2u+v)\lambda} d\mu_n(\lambda) \right) dv du \\
 &= C(H) \sum_n \int_0^\infty e^{-2t\lambda} \int_0^t e^{2u\lambda} \left( \int_0^u v^{2H-2} e^{-v\lambda} dv \right) dud\mu_n(\lambda).
 \end{aligned}$$

Et en faisant le changement de variable  $v\lambda = v'$  dans l'intégral par rapport à  $dv$ , et en intégrant par parties par rapport à  $u$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 I_t &= C(H) \sum_n \int_0^\infty e^{-2t\lambda} \lambda^{1-2H} \int_0^t e^{2u\lambda} \left( \int_0^{\lambda u} v^{2H-2} e^{-v} dv \right) dud\mu_n(\lambda) \\
 &= C(H) \sum_n \int_0^\infty \lambda^{-2H} \left( \int_0^{\lambda t} v^{2H-2} e^{-v} \left[ \frac{e^{2\lambda t} - e^{2v}}{e^{2\lambda t}} \right] dv \right) d\mu_n(\lambda). \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$A(\lambda, t) = \int_0^{\lambda t} v^{2H-2} e^{-v} \left[ \frac{e^{2\lambda t} - e^{2v}}{e^{2\lambda t}} \right] dv. \quad (3.19)$$

■

**Remarque 3.3.1** *Le théorème est vrai pour les opérateurs  $A$  ne satisfaisant que à une condition de "trou spectral", c'est-à-dire tels que  $dP_\lambda$  est à support  $(-\infty, -l]$  sauf pour un atome en  $\{0\}$ , tant que l'on suppose que le noyau de  $A$  est de dimension fini. Il suffit pour vérifier d'inclure les termes correspondant a  $\lambda = 0$  dans la preuve du théorème [\(3.3.1\)](#).*

**Remarque 3.3.2** *Lorsque  $\text{supp}(P_\lambda) \subset (-\infty, -l)$  avec  $l > 0$ , on peut remplacer  $G_H(-A)$  dans le théorème précédent par  $(-A)^{2H}$ . On voit que c'est évident, par exemple, dans la preuve du cas  $H > \frac{1}{2}$*

**Lemme 3.3.1** *Pour tout  $t \in T$ , il existe des constantes positives  $c(H, t)$  et  $C(H, t)$  ne dépendant que de  $H$  et  $t$  telles que*

1. si  $\lambda > 1$ ,  $c(H, t) \leq A(\lambda, t) \leq C(H, t)$ .
2. si  $\lambda \leq 1$ ,  $c(H, t) \leq A(\lambda, t)\lambda^{-2H} \leq C(H, t)$ .

*En utilisant la notation  $A \asymp B$  pour deux quantités dont le rapport est borné en haut et en bas par des constantes positives, et en utilisant à la fois les deux estimations de  $A(\lambda)$  on obtient :*

$$\begin{aligned} I_t &\asymp \sum_n \int_0^1 d\mu_n(\lambda) + \int_1^\infty \lambda^{-2H} d\mu_n(\lambda) \\ &\asymp \sum_n \int_0^\infty (\max(\lambda; 1))^{-2H} d\mu_n(\lambda). \end{aligned}$$

*Où les constantes demandés dans les relations  $\asymp$  ne dépendent que de  $H$  et  $t$ .*

**Preuve.** notons que, d'après [\(3.19\)](#), Si  $\lambda \geq 1$ ,

$$A(\lambda, t) \leq \left( \int_0^\infty v^{2H-2} e^{-v} dv \right) = C(H)$$



et aussi que

$$\begin{aligned} A(\lambda, t) &\geq (1 - e^{-\lambda t}) \int_0^{\frac{\lambda t}{2}} v^{2H-2} dv \\ &\geq (1 - e^{-\lambda t}) \int_0^{\frac{t}{2}} v^{2H-2} e^{-v} dv, \end{aligned}$$

cette dernière est une constante positive notée de façon générale par  $c(H, t)$ . L'assertion(1)et démontrée. Pour  $\lambda \leq 1$ . on pose  $t = 1$  pour simplifier on utilise les faits suivants : pour  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} 2x &\geq 1 - e^{-2x} \geq 2x/3 \\ 1 &\geq e^{-x} \geq 1/3 \end{aligned}$$

On utilise la notation  $A \asymp [c, C]B$  pour dire  $c < A/B < C$  on obtient

$$\begin{aligned} A(\lambda, 1) &\asymp [1/3, 1] \int_0^\lambda v^{2H-2} e^{-v} 2(\lambda - v) dv \\ &\asymp [2/9, 2]. \int_0^\lambda v^{2H-2} (\lambda - v) dv \\ &= \lambda^{2H} . [c(H); C(H)]. \end{aligned}$$

■

**Remarque 3.3.3** Le théorème 3.3.1 est valable aussi pour  $H < 1/2$ .

**Preuve.** voir 4 ■

## exemple 1

4 Considérons l'équation parabolique stochastique :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi) = \Delta u(t, \xi) + \eta(t, \xi).$$

Pour  $(t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times D$  avec la condition initiale et les conditions aux limites de Dirichlet suivantes :

$$u(0, \xi) = x(\xi).$$

pour  $\xi \in D$  et

$$u|_{\mathbb{R}_+ \times \partial D} = 0.$$

Où  $D \subset \mathbb{R}^d$  est un domaine borné avec une frontière lisse et  $\eta$  un processus de bruit, qu'est la dérivée formelle du temps d'un mBf dépendant de l'espace. Le système parabolique est réécrit comme une équation différentielle stochastique de dimension infinie .

$$dX(t) = AX(t)dt + Q^{1/2}dB^H(t). \quad (3.20)$$

Pour  $t \geq 0$  où l'espace  $V$  est  $L^2(D)$ ,  $A = \Delta|_{Dom(A)}$  générateur du semi-groupe analytique  $(S(t), t \geq 0)$  sur  $V$  avec  $Dom(A) = H^2(D) \cap H_0^1(D)$ ,  $U = V$  et le bruit  $\eta$  est modélisé comme la dérivée formelle  $Q^{1/2}(dB^H/dt)(t)$ ,  $(B^H(t), t \geq 0)$  est mBf standard (cylindrique) en  $U$  et  $Q^{1/2} \in \mathcal{L}(V)$ . Si  $Q^{1/2} \in \mathcal{L}_2(V)$  ce que correspond au cas où mBf dans (3.20) est de type covariance, alors il résulte du (corollaire 3.1 et de la remarque 3.1 voire [4]) qu'il existe une solution continu pour  $\delta < 1/2$ . Puisque le semi-groupe  $(S(t), t \geq 0)$  est exponentiellement stable, il existe une mesure limite donc d'après proposition 3.3.1 il existe une solution de équation (3.20) de la forme :

$$X(t) = X(\xi) + \int_0^t S(t-s)Q^{1/2}dB^H(s).$$

## exemple 2

[10] Considérons l'équation parabolique formelle suivante avec un bruit fractionnaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi) = -\alpha(-\Delta)^m u(t, \xi) + \eta^H(t, \xi), \quad \text{pour } (t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times O.$$

Accompagné de la condition initial :

$$u(0, \xi) = x(\xi), \quad \xi \in \mathcal{O}.$$

Et les condition aux limite de Dirichlet :

$$\forall j = 0, \dots, m-1 : \frac{\partial^j u}{\partial v^j}(t, \xi) = 0, \quad \text{pour } (t, \xi) \in [0, +\infty) \times \partial\mathcal{O}.$$

Où  $\mathcal{O}$  est un domaine borné dans  $\mathbb{R}^d$  avec contour lisse  $\partial\mathcal{O}$ ,  $\Delta$  l'opérateur de Laplace,  $\alpha > 0$  un paramètre inconnu et  $\partial/\partial v$  désigne la dérivée normale. Le terme de bruit  $\eta^H(t, \xi)$  peut être considéré comme une dérivée temporelle formelle d'un mouvement Brownien fractionnaire avec le paramètre de Hurst  $H \in (0, 1)$ , soit blanc, soit corrélé dans l'espace. Notons que le cas particulier  $m = 1$  correspond à l'équation de la chaleur stochastique. Nous pouvons reformuler le problème parabolique comme l'équation d'évolution stochastique

$$dX(t) = \alpha AX(t)dt + \Phi dB^H(t) \quad X(0) = X_0. \quad (3.21)$$

Dans l'espace de Hilbert  $V = U = L^2(\mathcal{O})$ , où  $X_0 \in L^2(\mathcal{O})$ ,  $A = -(-\Delta^m)$  avec domaine

$$\text{Dom}(A) = \left\{ y \in W_2^{2m}(\mathcal{O}) : \frac{\partial^j y}{\partial v^j} = 0, \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}, j = 0, \dots, m-1 \right\}$$

Où  $W_2^{2m}(\mathcal{O})$  est l'espace se Sobolev standard. Pour la partie bruit,  $B^H$  désigne le mouvement Brownien fractionnaire cylindrique avec le paramètre de Hurst  $H$  et  $\Phi$ , étant l'opérateur borné sur  $L^2(\mathcal{O})$ , les corrélations spatiales. le fait que  $A$  génère un semi-groupe analytique ( $S(t) : t \geq 0$ ), d'après proposition [3.3.1](#) il existe une solution pour l'équation [\(3.21\)](#) de la forme :

$$X(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)\Phi dB^H(s).$$

### 3.4 Méthode numérique pour les EES

#### La méthode d'Euler-Maruyama

La méthode d'Euler-Maruyama est une méthode numérique pour résoudre les équations différentielles stochastiques (EDS). Elle est basée sur la méthode d'Euler. Lorsque l'on travaille dans un espace de Hilbert, la méthode d'Euler-Maruyama doit être adaptée pour tenir compte de la nature continue de l'espace. Voici les étapes pour appliquer la méthode d'Euler-Maruyama à une équation d'évolution stochastique linéaire avec un mouvement brownien fractionnaire dans un espace de Hilbert :

- soit l'équation d'évolution stochastique suivante définie telle que :

$$dX(t) = AX(t)dt + BX(t)dW_H(t).$$

Où  $X(t)$  est une variable aléatoire qui prend des valeurs dans un espace de Hilbert  $H$ ,  $A$  et  $B$  sont des opérateurs linéaires définis sur  $H$ ,  $dW_H(t)$  est un mBf d'indice de Hurst  $H$  compris entre  $1/2$  et  $1$ , et  $dt$  est un petit intervalle de temps.

- Discrétisation du temps en un ensemble de points équidistants. Pour simplifier, supposons que nous avons  $N$  points de temps  $t_0, t_1, \dots, t_N$ , avec un pas de temps  $h = t_{n+1} - t_n$  pour tout  $n$ .
- Initialisation de  $X(t_0)$  avec une valeur donnée dans l'espace de Hilbert  $H$ . Par exemple, si  $X(0) = 0$ , nous commencerons avec  $X(t_0) = 0$  dans l'espace de Hilbert.
- calcul de la nouvelle valeur de  $X$  pour chaque intervalle de temps, en utilisant la formule d'Euler-Maruyama :

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + A(X(t_n))h + B(X(t_n))\Delta W_H(t_{n,n+1})$$

où  $\Delta W_H(t_{n,n+1})$  est la variation de  $W_H$  entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$  est donnée par :

$$\Delta W_H(t_{n,n+1}) = (W_H(t_{n+1}) - W_H(t_n)).$$

Notons que dans l'espace de Hilbert,  $\Delta W_H(t_{n,n+1})$  n'a plus de distribution normale centrée en 0, mais est plutôt un élément aléatoire dans l'espace de Hilbert  $H$ .

- Répétition de l'étape 4 pour chaque intervalle de temps jusqu'à atteinte du temps final souhaité.

Encore une fois, il est important de noter que la méthode d'Euler-Maruyama n'est pas exacte et que la précision de la simulation dépendra de la taille du pas de temps et du nombre de points de temps choisis. Il est donc important de vérifier la sensibilité des résultats à ces choix. De plus, dans un espace de Hilbert, il peut être plus difficile de vérifier la convergence numérique de la méthode, car les critères de convergence sont souvent plus complexes que dans un espace euclidien.

### exemple 1

L'équation d'évolution stochastique linéaire dirigée par un mouvement Brownien fractionnaire cylindrique pour  $H > 1/2$  peut être représentée de la manière suivante :

$$dX(t) = (AX(t) + B)dt + CdB^H(t) \tag{3.22}$$

où  $X(t)$  est le processus stochastique à évoluer,  $A$  et  $B$  sont des constantes,  $dB^H(t)$  est le mouvement Brownien fractionnaire cylindrique,  $C$  est une constante de proportionnalité,  $dt$  est une différence infiniment petite de temps. La solution de cette équation peut être exprimée en utilisant l'intégrale de Winer comme suit :

$$X(t) = e^{At}X(0) + B \int_0^t e^{A(t-s)}ds + C \int_0^t e^{A(t-s)}dB^H(s) \tag{3.23}$$

Dans cette expression,  $X(0)$  est la valeur initiale du processus stochastique à l'instant  $t = 0$ . L'intégrale de Winer est représentée par  $\int_0^t e^{A(t-s)}dB^H(s)$ , où  $s$  est la variable d'intégration.

Voici la simulation de la solution dans **Matlab** et **Python**

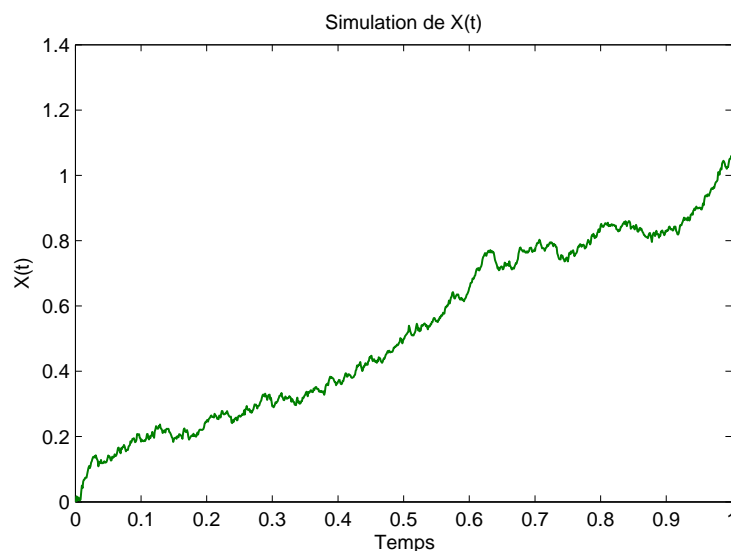


FIGURE 3.1 – Simulation de la solution  $X(t)$  en **Matlab** pour  $H = 0.8$

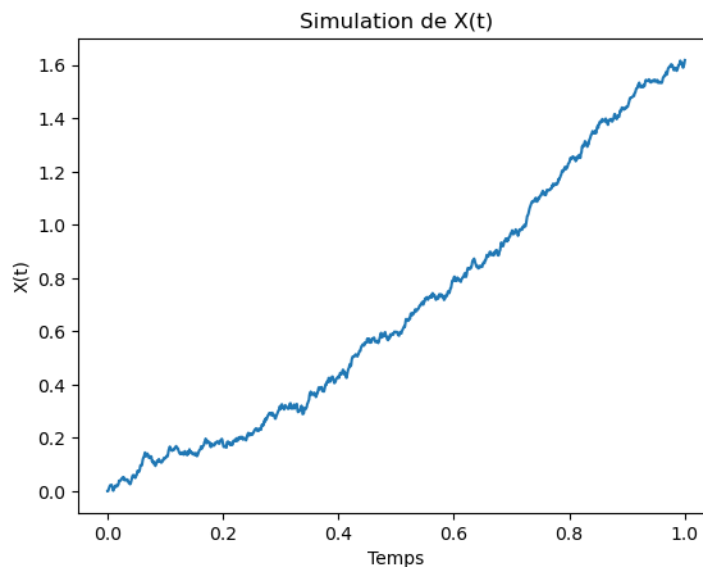


FIGURE 3.2 – Simulation de la solution  $X(t)$  en **Python** pour  $H = 0.8$

Dans l'idéal, la trajectoire de la solution simulée en **Matlab** devrait être la même que celle simulée en **Python**, étant donné que les deux implémentations suivent la même équation stochastique et utilisent la même méthode d'intégration de l'intégrale de Wiener.

Cependant, il est important de noter que la génération des nombres aléatoires peut varier légèrement entre les deux langages, même si des méthodes similaires sont utilisées. Par conséquent, il est possible que les valeurs des incréments du mouvement Brownien fractionnaire diffèrent légèrement entre **Matlab** et **Python**, ce qui peut entraîner de légères différences dans les trajectoires simulées.

De plus, si des paramètres tels que les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , le pas de temps ou le nombre de pas de discrétisation diffèrent entre les deux implémentations, cela peut également conduire à des résultats légèrement différents.

## exemple 2

Supposons que l'on souhaite simuler des échantillons de la solution de l'équation d'évolution stochastique suivante :

$$dY_t = -\lambda Y_t dt + \sigma dB_t^H$$

où  $B_t^H$  est un mBf de paramètre de Hurst  $H$ ,  $\lambda$  et  $\sigma$  sont des constantes positives, et  $Y_0$  est une condition initiale. Le code utilise les paramètres suivants :

- $H = 0.8$  : paramètre de Hurst
- $N = 1000$  : nombre de points dans la série de processus aléatoire gaussien
- $dt = 0.001$  : pas de temps
- $\sigma = 1$  : intensité de diffusion
- $M = 10$  : nombre d'échantillons à simuler.

les échantillons de la solution sont simulés en utilisant la méthode d'Euler-Maruyama :

$$Y_t = Y_0 e^{-\lambda t} + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB^H(s) \quad (3.24)$$

Voici l'échantillon de la solution dans **Matlab** et **Python**

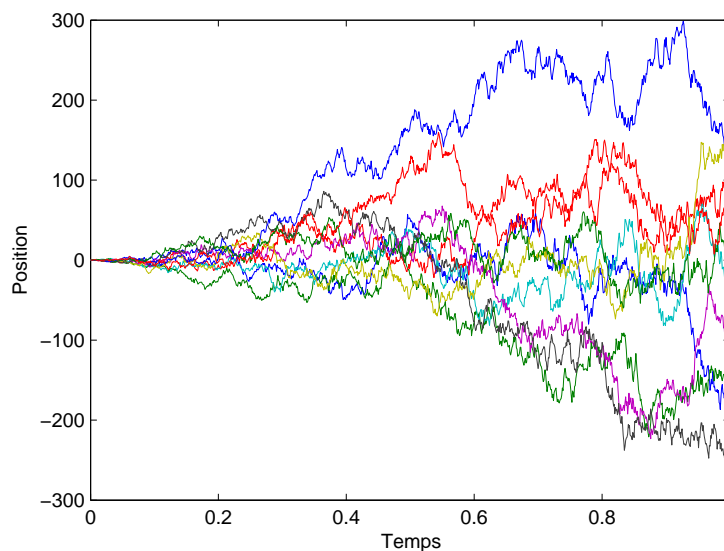


FIGURE 3.3 – Échantillons de la solution d'une EES dirigée par un mBf  $H=0.8$  en **Matlab**



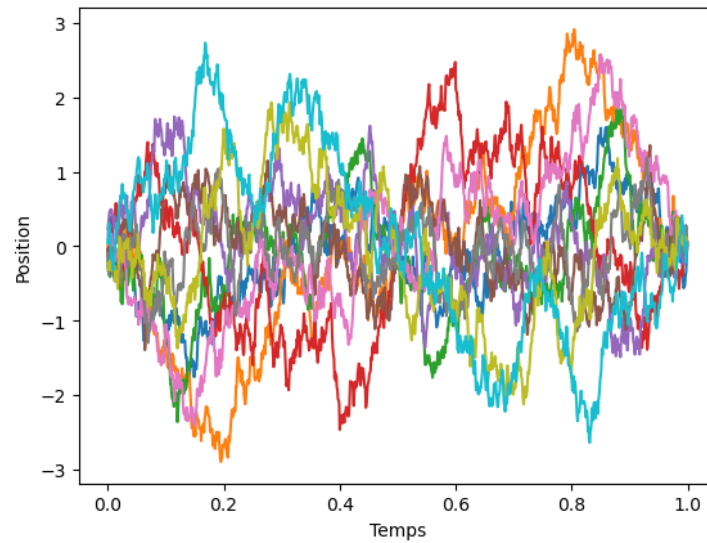


FIGURE 3.4 – Échantillons de la solution d'une EES dirigée par un mBf  $H=0.8$  en **Python**

Il est important de noter que la solution obtenue est une solution numérique approximative, et peut présenter des erreurs d'approximation numérique.

Les échantillons de la solution simulée en **Matlab** et en **Python** devraient être les mêmes, car les deux codes effectuent les mêmes calculs avec les mêmes paramètres. Dans les deux codes, la variable  $Y_t$  représente les échantillons de la solution de l'équation d'évolution stochastique. Ils sont calculés en utilisant la même formule : Par conséquent, les échantillons de la solution obtenus à partir des deux codes devraient être identiques, sous réserve de l'utilisation de la même graine aléatoire et de l'initialisation du générateur aléatoire dans les deux langages

---

# CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution d'une EES avec mBf en dimension infinie, pour  $H > 1/2$ , et en particulier, pour un opérateur auto adjoint négatif. Pour la résolution numérique nous avons utilisé la méthode d'Euler-Maruyama, et nous avons donné des exemples avec simulation à l'aide de **Matlab** et de **python**.

De façon similaire, on peut envisager l'étude des EES avec d'autres processus stochastiques, tels que le processus de Poisson, Markov, Rosenblatt, Levy...

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. Coutin, Z.Qian, *Stochastic differential equations for fractional Brownien motions*, Comptes Rendus des Séances de L'Académie des Sciences, I331,(2000), 75-80.
- [2] G. Da Prato and J. Zabczyk *Stochastic Equations in Infnite Dimensions*, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [3] L.Decreusefond, A.S.Ustunel *Stochastic analysis of the fractional Brownien motion*, Potential Analysis, 10, (2000), 177-214.
- [4] T.E. Duncan, B. Maslowski, B. Pasik-Duncan,*Fractional Brownian motion and linear stochastic equations in Hilbert space*,Stochastic Dyn. 2 (2002) 225-250.
- [5] T.E. Duncan,Y,Hu, B.Pasik-Duncan, *Stochastic calcul for fractional Brownien motions I. theory* SIAM Journal on control and optimisation ,38 , (2000), 582-612.
- [6] L.Gallardo.*Mouvemente Brownien et calcul d'Itô*, Hermann éditeurs, 6 rue de la Sorbonne 75005 Paris,2008
- [7] W.Grecksch, V.V. Anh *A parabolic stochastic differential equation with fractional Brownien motion input* , Statistics and Probability Letters, 41, (1999), 337-346.
- [8] I.Hamed, *Mouvement Brownien Fractionnaire*,Mémoire Master,Université Mohamed Khider,Biskra,2020

## Bibliographie

---

- [9] M.Jeanblanc.*Cours de calcul stochastique, DESS IM EVRYO ,option finance*.Septembre 2002.
- [10] P.Kříž, B.Maslowski *Central limit theorems and minimum-contrast estimators for linear stochastic evolution equations*,*Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, (2019), 1744-2508.
- [11] A. N. Kolmogorov, *Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum*, C. R. (Doklady) Acad. URSS (N.S.) 26 (1940) 115-118.
- [12] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness,*Fractional Brownian motion, fractional noises and applications* , SIAM Rev. 10 ,(1968) 422-437.
- [13] B. Maslowski, D. Nualart , *Evolution equations driven by a fractional Brownian motion*, *Journal of Functional Analysis*,202, (2003), 277-305.
- [14] I.Nourdin . *Aspects of fractional Brownian motion*, Bocconi et Springer series 2012.
- [15] A.Pazy, *Semi-ouvrée of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*,Springer - Verlag New York,1983.
- [16] N.Savy.*Mouvement Brownien Fractionnaire, applications aux Télécommunications.Calcul Stochastique relativement à des Processus Fractionnaires*, Thèse doctorat université de Rennes 1 (2003).
- [17] S.Tindel ,C.A.Tudor ,F.Viens ,*Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion*,*Probab. Th. Rel. Fields* 127 (2003) 186-204.