

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire  
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master**

**En Mathématiques**

**Spécialité: Mathématiques appliquées**

# **Bifurcations et chaos de quelques circuits électriques**

**Préparé par: Ibtissam Djebaili  
Rayane Djama**

**Soutenue devant le jury**

<b>Labeled Boudjema</b>	<b>MAA</b>	<b>C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila</b>	<b>Président</b>
<b>Abdelouahab Mohammed Salah</b>	<b>PROF</b>	<b>C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Meskine Habiba</b>	<b>MAA</b>	<b>C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila</b>	<b>Examineur</b>

**Année universitaire :2022/2023**

# Remerciements

*Au terme de ce travail, nous tenons tout d'abord à remercier notre*

*Créateur «Allah»,*

*qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.*

*Nous tenons à saisir cette occasion et adresser nos profonds*

*remerciements et nos profondes reconnaissances à nos*

*«Parents».*

*Un remerciement particulier à notre encadreur Dr*

*«Abdelouahab Mohammed Salah»*

*Pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux*

*conseils durant toute la période du travail.*

*Nous remercions également les membres de jury «Labad Boudjema» ,*

*pour avoir accepté de présider et «Meskine Habiba»*

*qui ont accepté d'examiner ce travail et pour l'honneur qu'ils nous*

*font d'avoir assisté à notre soutenance.*

*Mes grandes remerciements vont aussi à tous les enseignants du*

*département de Mathématiques et Informatique du centre*

*universitaire de Mila pour leur formation à nous durant les cinq*

*années.*

# Dédicace

*Ma carrière universitaire s'est terminée après de la fatigue et des difficultés, voilà enfin en train de terminer mes recherches de fin d'études. Dieu soit loué, et qui m'a honoré en appréciant cette phase de ma carrière universitaire.*

*Merci beaucoup*

*A la personne la plus précieuse du monde, à la source de tendresse, à ma chère mère*

*«Rahima»*

*que dieu prolonge sa vie.*

*A celui à qui je dois la vie, à celui qui m'a soutenu et a été une bougie allumée pour éclairer mon chemin,*

*à mon cher père*

*«Abdelyamine»*

*que dieu prolonge sa vie.*

*A ma chère grand-mère «Djanat».*

*A mon cher frère «Abderrahmane».*

*A mes belles soeurs «Lamis», «Zeynab» et «Aïcha».*

*Ma chère binôme «Rayan».*

*A mes chères amies «Yassamine», «Chourok», «Yasmine» et «Chaima».*

*À tous les membres de ma famille.*

*«Jbtissam»*

# Dédicace

*Je dédie ce mémoire:*

*Louange à Allah qui m'a préparé pour cela, et je ne serais pas venu à*

*lui sans la faveur d'Allah*

*A ma très chère mère*

*«Fadila»*

*, qui m'a encouragé durant toutes mes études, et qui sans elle, ma réussite n'aurait pas eu lieu. Qu'elle trouve ici mon amour et mon*

*affection.*

*A mon très cher père «Abdelbaki»*

*, qui est toujours disponible pour nous, et prêt à nous aider, je lui confirme mon attachement et mon profond respect.*

*A mes frères «Massoud», «Aziz», «Hicham».*

*A ma sœur «Ahlam».*

*A mon binôme «Ibtissam».*

*À tous les membres de ma promotion du master 2023, et surtout mes amis «Chourouk», «Yasmine», «Chaima» et «Yassamine», «Amel Boulemdaoud».*

*Enfin, nous remercions toutes personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.*

*«Rayane»*



---

## *Résumé*

Dans ce mémoire, nous abordons l'étude qualitative du circuit de Chua modifié en remplaçant le diode de Chua par l'élément électrique "memristor" (résistance à mémoire) comme élément non linéaire de base, développé dans le but d'augmenter les caractéristiques du chaos et de complexité afin d'améliorer ses performances et d'élargir les possibilités de ses utilisations, notamment dans le domaine de la sécurisation des données et des communications.

En appliquant la loi de Kirchhoff, on forme le modèle mathématique de ce circuit comme un système non linéaire de quatre équations différentielles du premier degré.

La bifurcation, le chaos et l'hyperchaos sont étudiés en calculant les points d'équilibre et en étudiant leur stabilité en adoptant la méthode d'approximation linéaire (méthode indirecte) basée sur le critère de Routh-Hurwitz. Pour détecter le chaos, nous calculons les exposants de Lyapunov et dessinons leur énoncé en utilisant le programme (MATLAB).

Les résultats obtenus montrent que pour certaines valeurs des arguments, un ou deux des exposants de Lyapunov sont complètement positifs, et la somme de tous ces exposants est inférieure à zéro, ce qui confirme la capacité du circuit à montrer un comportement chaotique ou comportement hyper chaotique.

## *Mots clés*

Système chaotique, système hyper chaotique, circuit électrique Chua, bifurcation, exposants de Lyapunov.

---

## **Abstract**

In this research, we address the qualitative study of the modified Chua circuit based on the classic Chua circuit by including the electrical element “memristor” (resistance with memory) as a basic non-linear element, as it is developed with the aim of increasing the characteristics of chaos and complexity in order to improve its performance and expand the possibilities of its uses, especially In the field of securing data and communications.

By applying Kirchhoff's law, we extract the mathematical model for this circuit in the form of a set of four nonlinear differential equations of the first order.

Bifurcation, chaos, and hyper chaos are studied by calculating the equilibrium points and studying their stability by adopting the linear approximation method (indirect method) based on the Routh-Hurwitz criterion. To detect chaos, we calculate the Lyapunov exponents and draw their statement using the MATLAB program.

The obtained results show that for certain values of the arguments, one or two of Lyapunov exponents are completely positive, and the sum of all these exponents is less than zero, which confirms the ability of the circuit to show chaotic behavior or hyperchaotic behavior.

## **Key words**

Chaotic system, heper chaos, Chua electric circuit, bifurcation, Lyapunov exponents.

## ملخص

نتطرق في هذا البحث إلى الدراسة النوعية لدارة شوا المعدلة انطلاقاً من دارة شوا الكلاسيكية بإدراج العنصر الكهربائي "memristor" (مقاومة ذات ذاكرة) كعنصر أساسي غير خطي ، حيث يتم تطويرها بهدف زيادة خصائص الفوضى والتعقيد من أجل تحسين أدائها وتوسيع إمكانيات استخداماتها و خاصة في مجال تأمين البيانات و الاتصالات.

بتطبيق قانون كيرشوف نستخرج النموذج الرياضي لهذه الدارة على شكل جملة أربع معادلات تفاضلية غير خطية من الدرجة الأولى.

تتم دراسة التشعب و الفوضى و فوق الفوضى، من خلال حساب نقاط التوازن ودراسة استقرارها باعتماد طريقة التقريب الخطي (الطريقة غير المباشرة) استناداً إلى معيار روت-هورويتز، للكشف عن الفوضى نقوم بحساب أسس ليايونوف و رسم بيانها باستخدام برنامج (MATLAB).

النتائج المحصل عليها تبين أنه من أجل قيم معينة للوسائط يكون واحد أو اثنين من أسس ليايونوف موجب تماماً و مجموع كل هذه الأسس اقل من الصفر مما يؤكد قدرة الدارة على إظهار السلوك الفوضوي أو السلوك الفرط فوضوي.

## كلمات مفتاحية

النظام الفوضوي، النظام الفرط فوضوي ، أسس ليايونوف ، التشعب ، الميمرستور، دارة شوا الكهربائية.

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions générales sur les systèmes dynamiques</b>	<b>4</b>
1.1 Définition de système dynamique . . . . .	4
1.2 Flot, Orbite, Point d'équilibre, Portrait de phase . . . . .	5
1.3 Ensembles limites . . . . .	7
1.4 Attracteurs . . . . .	8
1.4.1 Bassin d'attraction . . . . .	9
1.4.2 Types d'attracteurs . . . . .	9
1.5 Notion de stabilité . . . . .	10
1.5.1 Stabilité d'un système linéaire . . . . .	12
1.5.2 Stabilité d'un système non linéaire . . . . .	13
1.5.3 Théorème de Hartman-Grobman . . . . .	17
1.5.4 Critère de Routh-Hurwitz . . . . .	18
1.6 Bifurcations . . . . .	20
1.6.1 Bifurcation locales en dimension un . . . . .	21
1.6.2 Bifurcation en dimension supérieure à 1 . . . . .	22
<b>2 Systèmes chaotiques</b>	<b>26</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

2.1	Définitions du chaos . . . . .	26
2.2	Caractéristique des systèmes chaotiques . . . . .	27
2.3	Routes vers le chaos (Scénarios de transition vers le chaos) . . . . .	30
2.4	Quantification du chaos . . . . .	32
2.4.1	Exposants de Lyapunov . . . . .	32
2.4.2	Le teste 0-1 . . . . .	39
2.5	Circuit de Chua classique . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Bifurcations et chaos dans un circuit de Chua modifié</b>	<b>51</b>
3.1	Circuit de Chua basé sur un memristor . . . . .	51
3.2	Dynamique du circuit . . . . .	53
3.2.1	Les équation du système . . . . .	53
3.3	Analyse de la stabilité . . . . .	55
3.4	Bifurcation et spectre des exposants de Lyapunov . . . . .	59
3.4.1	Comportements dynamiques en fonction du paramètre $b$ . . . . .	59
3.4.2	Comportements dynamiques en fonction de l'état initial $\omega_0$ . . . . .	60
	<b>Conclusion</b>	<b>64</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>65</b>

---

# TABLE DES FIGURES

1.1	<i>Représentation du flot</i>	6
1.2	<i>Trois portrait de phase</i>	6
1.3	<i>Orbite hétérocline et orbite homocline</i>	7
1.4	<i>Stabilité de cycle limite</i>	8
1.5	<i>Attracteurs réguliers</i>	9
1.6	<i>Quelques exemples d'attracteurs étranges</i>	10
1.7	<i>Différents types de stabilité de Lyapunov.</i>	12
1.8	<i>Le diagramme de stabilité</i>	17
1.9	<i>Convention graphique</i>	20
1.10	<i>Regroupement de quelques bifurcations</i>	25
2.1	<i>L'aspect aléatoire du système de Lorenz</i>	28
2.2	<i>Sensibilité aux condition initiales du système de Lorenz</i>	28
2.3	<i>Structure fractale : (a) Traingle de Sierpinski. (b) Ensemble de Mendelbrot.</i>	29
2.4	<i>Transition vers le chaos par doublement de période.</i>	30
2.5	<i>Transition vers le chaos par l'intermittence</i>	31
2.6	<i>Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov</i>	38
2.7	<i>Organigramme montrant le Description du test 0 - 1</i>	44
2.8	<i>Circuit de Chua</i>	45

2.9	<i>Attracteur de Chua</i> . . . . .	49
2.10	<i>Circuit de Chua basé sur un memristor</i> . . . . .	49
2.11	<i>(a)Attracteur chaotique à double volute pour <math>L = 3H; C = 1F; \alpha = 0.9; \beta = 10.1; \gamma = 0.4</math>, (b) attracteur chaotique à 4 volutes pour <math>L = 3H; C = 1F; \alpha = 0.9; \beta = 3; \gamma = 0.4</math>.</i> . . . . .	50
3.1	<i>Schéma des 4 éléments fondamentaux des circuits électroniques. Les 4 grandeurs <math>i, v, q</math> et <math>\varphi</math> sont reliées deux à deux soit par un élément passif, soit par une des lois de l'électromagnétisme.</i> . . . . .	52
3.2	<i>Circuit de Chua modifié basé sur un memristor</i> . . . . .	53
3.3	<i>Diagramme de bifurcation par rapport au paramètre <math>b</math> pour <math>\omega_0 = -1</math></i> . . . . .	59
3.4	<i>Les trois plus grands exposants de Lyapunov du système (3.8) en fonction du paramètre <math>b</math> pour <math>\omega_0 = -1</math></i> . . . . .	59
3.5	<i>Diagramme de bifurcation par rapport à la quatrième coordonnée <math>\omega_0</math> de la condition initiale pour <math>b = 1</math></i> . . . . .	61
3.6	<i>Les trois plus grands exposants de Lyapunov du système (3.8) en fonction du paramètre <math>\omega_0</math> pour <math>b = 1</math></i> . . . . .	61
3.7	<i>Les attracteurs pour différentes valeurs de condition initial <math>\omega_0</math> : (a) <math>\omega_0 = -12</math>, (b) <math>\omega_0 = -10.22</math>, (c) <math>\omega_0 = -7.30</math>, (d) <math>\omega_0 = -4</math>, (e) <math>\omega_0 = 0.7</math>, (f) <math>\omega_0 = 3</math>.</i> . . . . .	63

---

# INTRODUCTION

Un système dynamique est un système qui évolue au fil du temps en réponse à des forces internes ou externes qui agissent sur lui ([17] [8]). Il peut s'agir de système physique, tels qu'un pendule, un circuit électronique, un moteur, ou de système abstraits, tels qu'un modèle mathématique. Les systèmes dynamiques présentent souvent des comportements chaotiques ou non linéaire, ce qui signifie que de petites variations dans les conditions initiales peuvent entraîner des résultats très différents. Les systèmes dynamiques sont donc souvent utilisés pour modéliser des phénomènes complexes tel que la météorologie, l'économie, la biologie ou la physique, où de nombreux facteurs interagissent pour influencer le comportement du système [4].

L'histoire des systèmes chaotiques remonte aux travaux du mathématicien français **Henri Poincaré** au 19<sup>ème</sup> siècle, qui a étudié les systèmes de mouvement astronomique et développé des cartes décrivant le mouvement des corps célestes. Poincaré [16] a découvert que certains systèmes dynamiques présentent un comportement chaotique et imprévisible en raison de leur sensibilité aux conditions initiales. Au 20<sup>ème</sup> siècle, la théorie des systèmes dynamiques chaotiques a été développée par plusieurs scientifiques, notamment le mathématicien américain **Edward Lorenz**, qui a étudié le comportement des systèmes climatiques et découvert l'attracteur appelé attracteur de Lorenz [23].

Aujourd'hui, la théorie du chaos est utilisée dans différents domaines tel que la phy-



sique, la chimie, la biologie, les mathématiques, l'ingénierie, l'économie, où ils peuvent être utilisés pour analyser les modèles qui peuvent sembler aléatoires et prédire le comportement de systèmes complexes.

Au cours des deux dernières décennies, un grand nombre des circuits électroniques et des systèmes présentant un comportement chaotique ont été proposés. Parmi ces circuits, on peut citer le circuit de Chua [12], qui est un circuit électronique non linéaire inventé par **Leon O. Chua** en 1983, elle est compose d'une résistances, inductance, des condensateurs et des éléments non linéaires appelés memristors. Le circuit de Chua est l'un des exemples les plus célèbres de systèmes chaotiques dans les sciences de l'ingénierie et de la physique, et il présente plusieurs caractéristiques distinctives :

- Le circuit de Chua est un système chaotique qui génère des motifs d'oscillation irréguliers et imprévisibles.

- Le comportement du circuit de Chua est caractérisé par la présence d'un attracteur étrange dans l'espace d'état dynamique, cet attracteur est généralement représenté par une forme géométrique tridimensionnelle connue sous le nom d'attracteur étrange de Chua.

- Memristor est l'un des éléments fondamentaux du circuit de Chua modifié. C'est un élément non linéaire qui se caractérise par une variation de sa résistance en fonction de la charge électrique qui le traverse [7].

Grâce à ces caractéristiques uniques, le circuit de Chua peut être utilisé dans une variété d'applications tel que le radar, les communications sécurisées, utilisé dans la recherche scientifique et les applications technologiques, la synchronisation des systèmes et la génération des motifs chaotiques.

Le développement et l'amélioration des circuits classiques représentent un domaine fascinant de la recherche scientifique, dans lequel des modifications ont été apportées pour étendre ses capacités et améliorer ses performances. Les modifications peuvent inclure l'ajout d'éléments supplémentaires au circuit classique, le changement des valeurs des condensateurs de la fonction non linéaire du circuit. L'objectif de cette modification est d'améliorer les caractéristiques souhaitées du circuit, tel que l'élargissement de la plage d'oscillation ou l'amélioration de sa réponse à des signaux spécifique.

Dans ce mémoire on s'intéresse à la modification de circuit de chua on remplaçant la diode de chua par un memristor pour d'augmenter les caractéristiques du chaos, ce mémoire comporte trois chapitres :

**Dans le premier chapitre** de ce mémoire on aborde les concepts et les notions fondamentales de la théorie des systèmes dynamiques. Afin de faciliter la compréhension des sections suivantes de ce mémoire.

**Le deuxième chapitre** est dédié à l'étude des systèmes dynamiques chaotiques. On commencer par des définitions du chaos ainsi que différentes propriétés mathématiques utilisées pour décrire un comportement chaotique. Ensuite, aborder deux méthodes permettant de déterminer si un système est chaotique ou non, à savoir l'exposant de Lyapunov et test 0-1.

**En fin dans Le troisième chapitre** on va étudier les bifurcations et chaos sur un circuit de Chua modifié basé sur un memristor.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Dans ce chapitre nous rappelons les notions de base des systèmes dynamiques, tel que : les propriétés des systèmes dynamiques, classification des cycles limites, puis on donne des notions de stabilité et des méthodes pour leur étude (méthode directe et indirecte), finalement on donne une bref introduction sur la notion de bifurcation des points fixe.

### 1.1 Définition de système dynamique

Un système dynamique est un triplet  $(X, T, f)$ , où  $T$  est un ensemble de temps,  $X$  est un espace d'états, et  $f : X \rightarrow X$  est un famille d'opérateurs d'évolution paramétrés par  $t \in T$ , qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant [17].

les systèmes dynamiques se divisent en deux types selon le temps.

- Si  $T = \mathbb{R}$  le système dynamique en temps continu est représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x}_t = f(x, t, p) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r.$$

- Si  $T = \mathbb{Z}$  le système dynamique en temps discret est représenté par une application sous la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, p) \text{ où } x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3, \dots$$

## 1.2 Flot, Orbite, Point d'équilibre, Portrait de phase

Considérons le système autonome suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, f \in C^r, U \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

### 1) Flot

Le flot d'un système dynamique est l'expression des trajectoires ou faisceau de ses trajectoires dans l'espace des phases [34].

Soit  $x(t, x_0)$ ,  $x_0 \in U$  une solution de (1.1) avec conditions initiales  $x(0) = x_0$ . On appelle flot de (1.1) l'application :  $\varphi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par :

$$\varphi_t(x_0) = x(x_0, t). \quad (1.2)$$

$\varphi_t(x_0)$  possède les propriétés suivantes :

- (i)  $\varphi_t(x_0)$  est de classe  $C^r$ .
- (ii)  $\varphi_0(x_0) = x_0$ .
- (iii)  $\varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t(\varphi_s(x_0))$ .



FIGURE 1.1: Représentation du flot

## 2) Point d'équilibre

**Définition 1.2.1** Un point d'équilibre (ou point fixe, ou point critique, ou point stationnaire) de système (1.1) est un point  $\bar{x}$  de l'espace des phases vérifiant [10] :

\*  $f(\bar{x}) = 0$ , (dans le cas continu).

\*  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ , (dans le cas discret).

- Par un changement de variable  $z = x - \bar{x}$ , on peut ramener le point  $\bar{x}$  à l'origine.

## 3) Portrait de phase

**Définition 1.2.2** Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace des phases [11]. La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour avoir une idée du comportement du système (voir la figure 1.2).

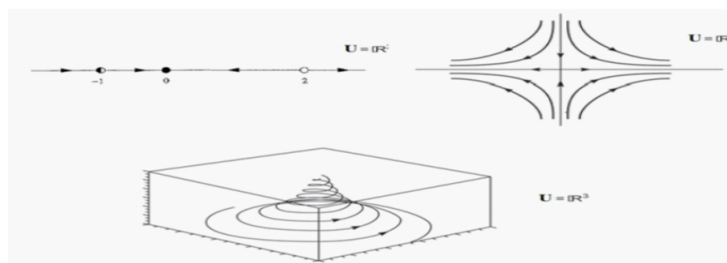


FIGURE 1.2: Trois portrait de phase

### 1.3 Ensembles limites

**Définition 1.3.1** Un point  $a \in U$  est un point  $\omega$ -limite d'une trajectoire  $x(x_0, t)$  de (1.1) s'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  tel que (voir [10]) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{t_n} = a.$$

**Définition 1.3.2** Un point  $b \in U$  est un point  $\alpha$ -limite d'une trajectoire  $x(x_0, t)$  de (1.1) s'il existe une suite  $t_n \rightarrow -\infty$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{t_n} = b.$$

• L'ensemble des points  $\alpha$ -limite ( resp  $\omega$ -limite) de  $x(x_0, t)$  est désigné par  $\alpha(x_0)$  (resp ( $\omega$ -limite)), l'ensemble  $\alpha(x_0) \cup \omega(x_0)$ . Est appelé l'ensemble limite de  $x(x_0, t)$ .

**Exemple 1.3.1** Si le point  $c$  appartient à une orbite hétérocline alors par définition il existe  $a, b \in U$  tel que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, c) = a, \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, c) = b$$

alors  $a$  est un point  $\omega$ -limite de  $\gamma_c$  et  $b$  est un point  $\alpha$ -limite de  $\gamma_c$  de plus :  $\omega(c) = \{a\}$  et  $\alpha(c) = \{b\}$ .

**Théorème 1.3.1** Les ensembles  $\omega$ -limite et  $\alpha$ -limite d'une trajectoire  $\gamma_{x_0}$  de (1.1) sont des sous-ensembles fermés de  $U$  et si  $\gamma_{x_0}$  est contenue dans un sous-ensemble compact de  $U$  alors :  $\omega(x_0)$  et  $\alpha(x_0)$  sont non vides compacts [2] et connexes dans  $U$ .

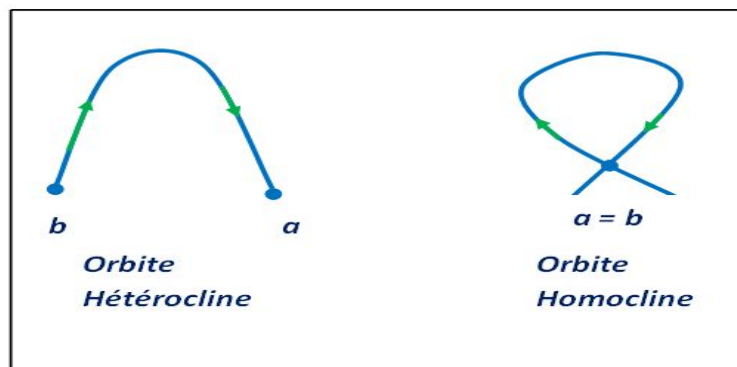


FIGURE 1.3: *Orbite hétérocline et orbite homocline*

\* Cycle et cycle limite et classification

**Définition 1.3.3** (Définition de Cycle [17])

Un cycle  $\gamma$  est une orbite périodique (une courbe fermée), tel que pour chaque point  $x_0 \in \gamma$  on a  $\varphi_{t+T_0}(x_0) = \varphi_t(x_0), \forall t \in T$  avec  $T_0 > 0$  est la période du cycle  $\gamma$ .

**Définition 1.3.4** (Définition de Cycle limite [26])

Un cycle limite est une trajectoire fermée isolée du système, au moins d'un côté.

**- Classification des cycles limites**

**Définition 1.3.5** Soit  $\gamma$  un cycle limite [26] alors  $\gamma$  est :

- 1-**Stable** : si toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle convergent vers  $\gamma$ .
- 2-**Instable** : si toutes les trajectoires divergent de  $\gamma$ .
- 3-**Semi-stable** : si certaines trajectoires convergent vers  $\gamma$  et d'autre divergent de  $\gamma$ .

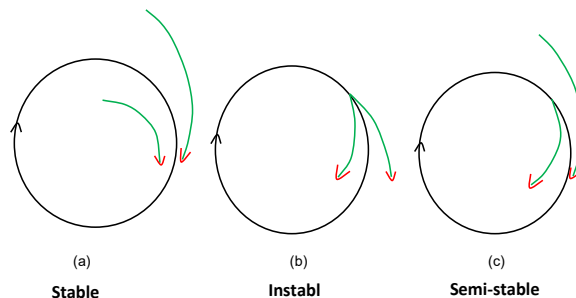


FIGURE 1.4: Stabilité de cycle limite

## 1.4 Attracteurs

**Définition 1.4.1** [10]

Soit  $A$  un ensemble compact fermé dans l'espace des phases, et supposons que  $A$  est invariant (i. e.  $\varphi(A) = A$  pour tout  $t$ ). On dit que  $A$  est stable si pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(x_0, t) \equiv \varphi_t(x_0)$  reste dans  $U$  si  $x_0 \in V$ . Si de plus :

$$\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A,$$

et s'il existe une orbite dense dans  $A$ , alors  $A$  est un attracteur.

### 1.4.1 Bassin d'attraction

On appelle bassin d'attraction  $B(A)$  (voir [29]) de  $A$ , un ensemble des points dont les trajectoires convergent asymptotiquement vers  $A$  donc :

$$B(A) = \bigcup_{t < 0} \varphi_t(V).$$

### 1.4.2 Types d'attracteurs

On distingue deux types d'attracteurs :

#### 1. Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes [21] :

a) **Le point fixe** : c'est le plus simple attracteur, le système évolue vers un état de repos (point). On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des nœuds stables et des foyers stables, représentés (Figure 1.5).

b) **Le cycle limite périodique** : on appelle cycle limite d'un système dynamique, toute solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques de ce système.

c) **Le cycle limite pseudo-périodique** : il correspond à une somme de solutions périodiques, dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi-périodique peut être représenté dans l'espace d'état par un tore.

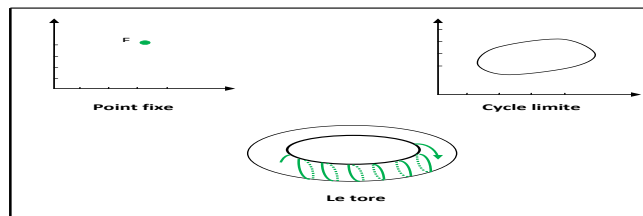


FIGURE 1.5: *Attracteurs réguliers*



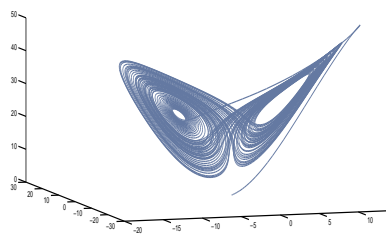
## 2. Attracteurs étrange

Un autre type d'attracteur intéressant est l'attracteur étrange. Cet attracteur a été introduit par Ruelle et Takens [10]. Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :

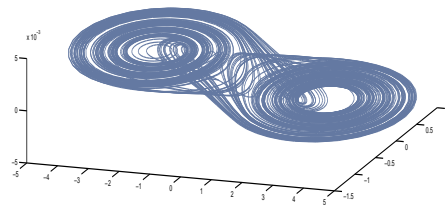
a) Dans l'espace des phases, l'attracteur est de volume nul.

b) La dimension  $d$  de l'attracteur est fractale et non entière (ce qui explique l'adjectif étrange) avec  $2 < d < n$  (pour un système continu autonome), où  $n$  est la dimension de l'espace des phases.

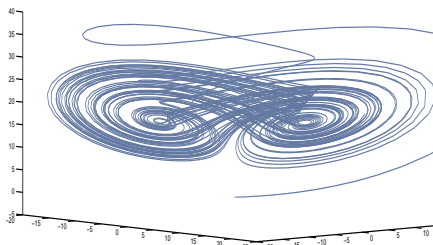
c) Sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'écartier l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique.



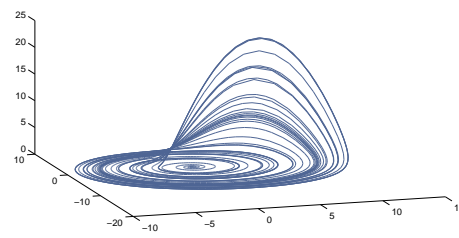
(a) Attracteur de Lorenz



(b) Attracteur de Chua



(c) Attracteur de Chen



(d) Attracteur de Rössler

FIGURE 1.6: Quelques exemples d'attracteurs étranges

## 1.5 Notion de stabilité

La notion de stabilité est très importante pour l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires requiert une compréhension approfondie de la stabilité [27]. Cela implique d'analyser la trajectoire de l'état du système lorsqu'il est déplacé d'un

point d'équilibre dynamiques, ce qui implique une analyse de la trajectoire de son état initial lorsque celui-ci se rapproche d'une trajectoire d'équilibre.

Les point d'équilibre sont d'une importance capitale dans l'étude des système dynamique. Henri Poincaré (1854-1912) a montré n'est pas nécessaire de calculer les solutions explicitement d'un système dynamique à plusieurs variables pour le caractériser, il suffit en effet de connaître les point fixes et leur stabilité. Cette découverte a une grande importance car elle simplifie considérablement l'étude des systèmes non-linéaires au voisinage de ces points. Pour déterminer la stabilité d'un point d'équilibre, il suffit d'étudier le comportement des solutions dans un petit voisinage de celui-ci.

Plusieurs définitions de la stabilité ont été proposées, donc celle de la stabilité au sens de Lyapunov.

### Stabilité au sens de Lyapunov

**Définition 1.5.1** Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (1.3)$$

Où  $f$  est une fonction non linéaire.

Le point d'équilibre  $\bar{x}$  du système (1.3) est :

- Stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0, \quad (1.4)$$

- Asymptotiquement stable si  $\bar{x}$  est stable et si de plus :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0,$$

- Exponentiellement stable s'il existe deux réels positifs  $a$  et  $b$  tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| < a \|x(t_0) - \bar{x}\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0.$$

- Instable la condition (1.4) n'est pas satisfaite [29].

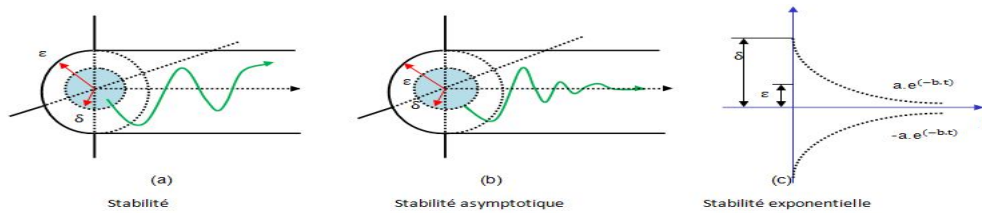


FIGURE 1.7: Différents types de stabilité de Lyapunov.

### 1.5.1 Stabilité d'un système linéaire

**Théorème 1.5.1** *Considérons le système linéaire [30] :*

$$\dot{x} = Ax,$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $A$  est une matrice à coefficients constants appartenant à  $\mathbb{R}^{n \times n}$  inversible.

Soient  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  les valeurs propres de  $A$  alors l'origine est un :

- 1) **Point selle** : si les valeurs propres  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  sont réelles, non nulles et de signe différent.
- 2) **Nœud** : si les valeurs propres  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  sont réelles et de même signe.
- 3) **Foyer** : si les valeurs propres  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  sont complexes avec  $Re(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ .
- 4) **Centre** : si les valeurs propres  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  sont imaginaire pure.

Voici le tableau d'analyse qui résume ce qui a été dit ci-dessus dans  $\mathbb{R}^2$  :

Valeurs propres	Type des point fixe	Stabilité
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nœud	Instable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nœud	Asymptotiquement stable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Point selle	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nœud propre ou impropre	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nœud propre ou impropre	Asymptotiquement stable
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi$ a>0 a<0	Foyer	Instable Asymptotiquement stable
$\lambda_1 = bi, \lambda_2 = -bi$	Centre	Stable

TABLE 1.1: Type et stabilité des points d'équilibres d'un système linéaire dans  $\mathbb{R}^2$

### 1.5.2 Stabilité d'un système non linéaire

- Pour étudier la stabilité d'un système non-linéaire nous présentons deux méthode :
  - Méthode direct (fonction de Lyapunov)
  - Méthode indirect (linéarisation)

#### a) Méthode directe ( Fonction de Lyapunov )

La méthode directe est plus complexe à appliquer [29], mais elle a un portée beaucoup plus générale. Elle repose sur la définition d'une fonction particulière, appelée fonction de Lyapunov et notée  $V(x)$ , qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction.

Soit  $\bar{x}$  un point fixe de (1.3). Soit  $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction différentiable définie sur un voisinage  $W$  de  $\bar{x}$  tel que  $V(\bar{x}) = 0$  et  $V(x) > 0$  si  $x \neq \bar{x}$ .

Posons :

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x).$$

Alors on a le théorème suivant [10].

#### **Théorème 1.5.2** ( Lyapunov )

(i) Si  $\dot{V} \leq 0$  dans  $W - \{\bar{x}\}$  alors  $\bar{x}$  est stable.

(ii) Si  $\dot{V} < 0$  dans  $W - \{\bar{x}\}$  alors  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable.

(iii) Si  $\dot{V} > 0$  dans  $W - \{\bar{x}\}$  alors  $\bar{x}$  est instable.

Il n'y a aucune méthode générale pour déterminer une fonction de Lyapunov [29]. Mais en mécanique on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

**Exemple 1.5.1** Le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax, \\ \dot{y} = -x + ay. \end{cases}$$

Il existe un point fixe unique  $(0, 0)$ . Soit  $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  alors :

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = a(x^2 + y^2).$$

D'où, d'après le théorème de Lyapunov

- Si  $a < 0$  le point fixe à l'origine est asymptotiquement stable.
- Si  $a = 0$  le point fixe est stable (ici les trajectoires sont des cercles).
- Si  $a > 0$  le point fixe est instable.

## b) Méthode indirecte ( linéarisation )

Supposons que, par un changement de coordonnées [10], le point fixe ait été ramené à l'origine :  $f(0) = 0$ . Le développement de Taylor en  $x = 0$  s'écrit :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \dots \quad (1.5)$$

Où l'on a posé  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,

$$Df(x)x = \sum_j \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right) x_j, \quad D^2f(x)(x, x) = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) x_i x_j,$$

$$D^3f(x)(x, x, x) = \sum_{i,j,k} \left( \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) x_i x_j x_k.$$

La matrice

$$Df(x) = \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right),$$

s'appelle matrice jacobienne de  $f(x)$  (son déterminant est le jacobien). Pour  $x$  petit, (1.5) montre que le comportement du système au voisinage de 0 est celui du système linéarisé :

$$\dot{x} = Df(0)x. \tag{1.6}$$

tel que :

$$Df(0) = A = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \dots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix}.$$

Si  $A$  admet  $n$  valeurs propres  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  distinctes, la solution de (1.6) est :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i \alpha^{(i)} \exp \lambda_i t.$$

où  $\alpha^{(i)}$  est le vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$  et les  $c_i, i = 1, 2, \dots, n$  sont des constantes (déterminées par les conditions initiales). On en déduit que :

a) Si toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  ont leur partie réelle négative le point fixe est asymptotiquement stable.

b) Si une des valeurs propres a sa partie réelle positive le point fixe est instable.

c) Si  $Df(0)$  n' a pas de valeur propre nulle ou purement imaginaire le point fixe est un point hyperbolique, dans le cas contraire il est non-hyperbolique.

d) S'il existe  $i$  et  $j$  tel que  $Re\lambda_i < 0$  et  $Re\lambda_j > 0$ , le point fixe est un point selle.

e) Si toutes les valeurs propres de  $Df(0)$  sont réelles et de même signe, le point fixe est un nœud. (Un nœud stable est un puits. Un nœud instable est une source).

**Exemple 1.5.2** Dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^2$ , l'équation (1.6) s'écrit (voir [10]) :

$$\dot{x} = Ax, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - \text{tra}\lambda + \text{det} = 0, \quad \text{avec } \text{tra} = a + d, \quad \text{det} = ad - bc.$$

Supposons que la matrice  $A$  soit diagonalisable, les solutions de (1.7) sont alors de la forme :

$$x(t) = c_1\alpha^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha^{(2)}e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = (\text{tra} \pm \sqrt{\Delta})/2, \quad \text{si } \Delta = \text{tra}^2 - 4\text{det} \neq 0.$$

$$x(t) = (c_1\alpha^{(1)} + tc_2\alpha^{(2)})e^{\text{tra} t/2}, \quad \text{si } \Delta = \text{tra}^2 - 4\text{det} = 0.$$

où  $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$  sont des vecteurs propres de  $A$ ,  $c_1, c_2$  sont des constantes d'intégration. On en déduit la classification des points fixes.

- a) Si  $\Delta = \text{tra}^2 - 4\text{det} < 0, \text{tra} \neq 0$  : le point fixe est asymptotiquement stable si  $\text{tra} < 0$ , instable si  $\text{tra} > 0$ . Les trajectoires au voisinage de 0 sont des spirales. Le point fixe s'appelle un foyer.
- b) Si  $\Delta = \text{tra}^2 - 4\text{det} < 0, \text{tra} = 0$  : le point fixe est un centre ou un point elliptique. Les trajectoires au voisinage de 0 sont des ellipses. L'origine est un point fixe stable mais pas asymptotiquement stable.
- c) Si  $\Delta = \text{tra}^2 - 4\text{det} = 0, \text{tra} \neq 0$  : le point fixe est un nœud, asymptotiquement stable si  $\text{tra} < 0$ , instable si  $\text{tra} > 0$ .
- d) Si  $\Delta = \text{tra}^2 - 4\text{det} > 0, \text{det} > 0$  : les valeurs propres sont réelles et de même signe le point fixe est un nœud impropre, asymptotiquement stable si  $\text{tra} < 0$ , instable si  $\text{tra} > 0$ .
- e) Si  $\text{tra}^2 - 4\text{det} < 0$  et  $\text{det} > 0$  : les valeurs propres sont réelles et de signe différent le point fixe est un point selle.

Les différents point fixe de l'espace des phases  $\mathbb{R}^2$  sont indiqués sur (la figure 1.8) où l'on distingue aussi les nœud (valeurs propres réelles, égales) et les nœud impropres (valeurs propres réelles, de même signe mais non-égales).

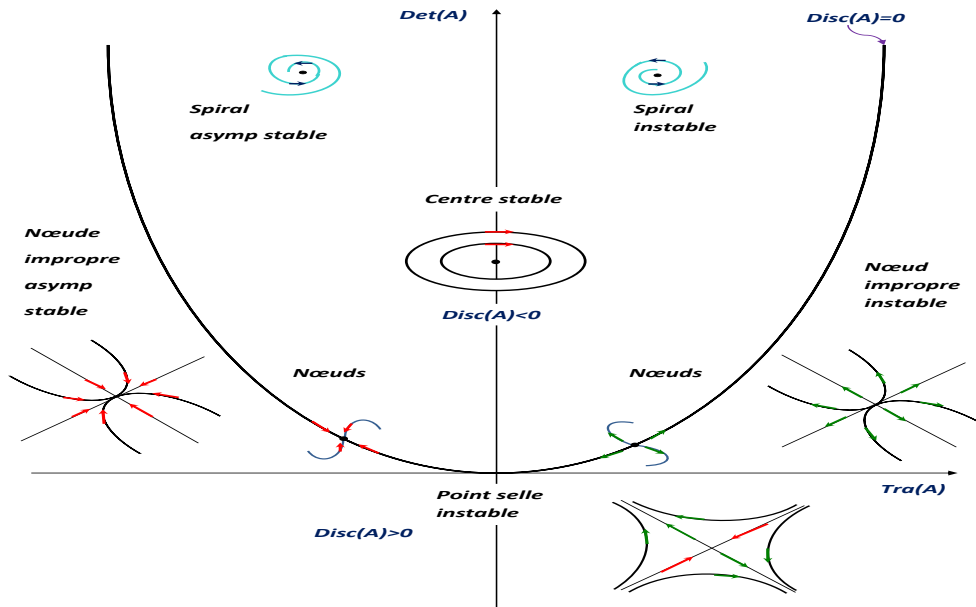


FIGURE 1.8: Le diagramme de stabilité

### 1.5.3 Théorème de Hartman-Grobman

En mathématiques [22], lorsqu'on étudie des systèmes dynamiques, le théorème de Hartman-Grobman ou théorème de linéarisation est un théorème important concernant le comportement local des systèmes dynamiques au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique.

Soit le système dynamique :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.8}$$

**Définition 1.5.2** Deux flots  $\varphi_t$  et  $\psi_t$  sont dits topologiquement équivalents dans un voisinage de point d'équilibre, s'il existe un homéomorphisme  $h$  qui envoie le point d'équilibre du premier flot en le point d'équilibre du deuxième flot et qui conjugue les flots, c'est à dire  $h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$ .

**Théorème 1.5.3** (Théorème de Hartman-Grobman)

Considérons un système (1.8), de flot  $\varphi_t$ . Si  $x^*$  est un point d'équilibre hyperbolique, alors il existe un voisinage  $V$  de  $x^*$  sur lequel le flot  $\varphi_t$  est topologiquement équivalent au flot du linéarisé du système en  $x^*$ .



### 1.5.4 Critère de Routh-Hurwitz

Afin de prouver qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable [22], il est nécessaire de calculer les  $n$  valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $A$  et vérifier que leur parties réelles sont strictement négatives c'est-à-dire que  $\forall i, \text{Re}(\lambda_i) < 0$ .

Une méthode algébrique a été développée par Routh-Hurwitz. Elle repose sur le calcul des déterminants particuliers appelés déterminants de Routh-Hurwitz.

Soit le système linéaire de dimension  $n$  suivant :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,$$

Avec  $i \in [1, n]$ , où  $A = [a_{ij}]$  est une matrice carrée de dimension  $n$  à coefficients constants.

Les valeurs propres de  $A$  sont solutions de l'équation caractéristique :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Considérons les  $n$  déterminants suivants :

$$H_1 = |a_1|,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix},$$

**Théorème 1.5.4** (Critère de Routh-Hurwitz)

Soit  $p(\lambda)$  un polynôme tel que  $a_0 > 0$ .

Pour que le point fixe soit uniformément asymptotiquement stable (u. a. s), il est nécessaire que les déterminants principaux des matrices d' Hurwitz soient strictement positifs.

**1.10.1 Critère de Routh-Hurwitz dans  $\mathbb{R}^3$**

Considérons le système :

$$\dot{x} = Ax,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont :

$$H_1 = |a_1| = a_1,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3H_2,$$

Ainsi les conditions de stabilité de l'origine sont :

si  $H_1 > 0, H_2 > 0$  et  $H_3 > 0$ , alors l'origine est asymptotiquement stable.

## 1.6 Bifurcations

**Définition 1.6.1** Généralement le terme *bifurcation* est associé à la notion de changement du type topologique du portrait de phases d'un champ de vecteurs qui dépend différemment d'un paramètre  $\mu \in \mathbb{R}^k$  :

$$\dot{x} = f(x, \mu). \tag{1.9}$$

lorsque le paramètre  $\mu$  varie autour d'une certaine valeur  $\mu^*$ .

Le plus petit dimension  $k$  de l'espace des paramètres permettant d'avoir ce changement topologique est appelé *codimension de la bifurcation* [2].

Soit le système (1.9) tel que  $f \in C^1(U), x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ . En dimension 1 un équilibre non-hyperbolique  $(x_e, \mu^*)$  si caractérisé par  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, \mu^*) = 0$ .

L'analyse de bifurcation peut être utilement effectuée en utilisant le développement de Taylor de  $f(x, \mu)$  par rapport à deux variables  $x$  et  $\mu$  :

$$f(x, \mu) = a_{00} + a_{10}\mu + a_{01}x + a_{20}\mu^2 + a_{11}x\mu + a_{02}x^2 + \dots$$

### 1. Diagramme de bifurcations

Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation [13].

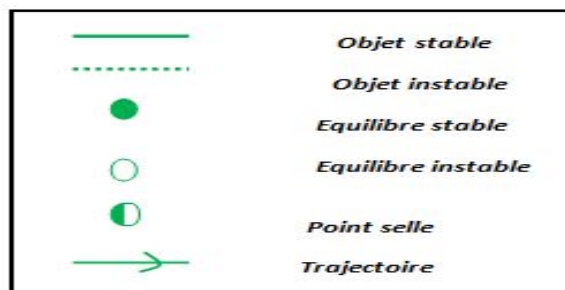


FIGURE 1.9: Convention graphique

## 2. Quelques types de bifurcations

Dans cette étude on considère quatre types de bifurcations locales :

- Bifurcation de type nœud-col.
- Bifurcation transcritique.
- Bifurcation fourche.
- Bifurcation de Hopf.

### 1.6.1 Bifurcations locales en dimension un

#### a) Bifurcation de type nœud-col

La bifurcation nœud-col correspond à  $a_{10} = -1$  et  $a_{02} = 1$ , tous les autres  $a_{ij}$  étant nuls [28]. On a donc  $\dot{x} = x^2 - \mu$ , système dont l'analyse est aisée à savoir :

- pour  $\mu < 0$ , il n'y a aucun équilibre.
- pour  $\mu = 0$ ,  $x = 0$  est un équilibre instable, plus précisément il est « stable à gauche » et « instable à droite », donc semi-stable.
- pour  $\mu > 0$ , il y a deux équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable  $-\sqrt{\mu}$  et l'équilibre instable  $\sqrt{\mu}$ .

#### b) Bifurcation d'échange de stabilité (transcritique)

La bifurcation transcritique correspond à  $a_{11} = -1$  et  $a_{02} = 1$ , tous autres  $a_{ij}$  étant nuls [28]. On a donc  $\dot{x} = x^2 - \mu x$ , système présentant un ou deux équilibres :

- pour  $\mu < 0$ , il y a l'équilibre asymptotiquement stable  $\mu$  et l'équilibre instable 0.
- pour  $\mu = 0$ ,  $x = 0$ , est un équilibre instable : c'est comme pour la bifurcation nœud-col l'équilibre semi-stable du système  $\dot{x} = x^2$ .
- pour  $\mu > 0$ , il y a deux équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable 0 et l'équilibre instable  $\mu$ .

#### c) Bifurcation fourche sous-critique

La bifurcation fourche sous-critique correspond à  $a_{11} = -1$  et  $a_{03} = 1$ , tous autres  $a_{ij}$  étant nuls (voir [28]). On a donc  $\dot{x} = x^3 - \mu x$ , système dont l'analyse est ainsi :

- pour  $\mu < 0$ , il y a le seul équilibre 0, qui est instable.
- pour  $\mu = 0$ , on a  $\dot{x} = x^3$  : est toujours l'équilibre unique, instable.
- pour  $\mu > 0$ , il y a trois équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable 0, et les deux équilibres instables  $\pm \sqrt{\mu}$ .

#### d) Bifurcation fourche super-critique

La bifurcation fourche super-critique correspond à  $a_{11} = 1$  et  $a_{03} = -1$ , tous les autres  $a_{ij}$  étant nuls. On a donc  $\dot{x} = -x^3 + \mu x$ , système dont s'analyse ainsi :

- pour  $\mu < 0$ , il y a le seul équilibre 0, qui est stable.
- pour  $\mu = 0$ , on a  $\dot{x} = -x^3$  : est toujours l'équilibre unique, instable.
- pour  $\mu > 0$ , il y a trois équilibres : l'équilibre asymptotiquement instable 0, et les deux équilibres stables  $\pm \sqrt{\mu}$ .

### 1.6.2 Bifurcation en dimension supérieure à 1

#### a) Bifurcation de hopf super-critique

Considérons le système planaire avec un paramètre  $\mu \in \mathbb{R}$  suivant (voir [14], [5]) :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - w y - (x^2 + y^2)x, \\ \dot{y} = w x + \mu y - (x^2 + y^2)y. \end{cases} \quad (1.10)$$

Pour toute valeur de  $\mu$ , le système (1.10) admet l'origine  $(0, 0)$  comme point d'équilibre, la matrice jacobienne est :

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & -w \\ w & \mu \end{pmatrix},$$

qui possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_{\pm} = \mu \pm iw$ .

- Pour  $\mu < 0$  l'origine est un foyer stable.
- Pour  $\mu > 0$  l'origine est un foyer instable.
- Pour  $\mu = 0$  l'origine est non hyperbolique avec des valeurs propres linéarisées  $\lambda_{\pm} = \pm iw$ , lorsque  $\mu = 0$ . D'après l'expérience des sections précédentes, nous nous attendons à une sorte de bifurcation se produire lorsque  $\mu = 0$ . A fin de découvrir ce

qui se passe, il est plus facile de transformer le système en coordonnées polaires cela donne :

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3, \\ \dot{\theta} = w. \end{cases} \quad (1.11)$$

À partir de (1.11), il est clair que, à condition que  $w > 0$ , le seul point stationnaire est l'origine,  $r = 0$ , il n'y a donc pas de solution stationnaire bifurquant.

Alors pour  $\mu = 0$  on a  $\dot{r} = -r^3 < 0$  d'où l'origine est un foyer stable, et pour  $\mu > 0$  il ya un cycle limite stable qui correspond à  $r = \sqrt{\mu}$ .

Ceci est un exemple de bifurcation de hopf super-critique (super-critique car se produit quand un foyer stable se transforme en un foyer instable entourée d'un cycle limite).

### b) Bifurcation de hopf sous-critique

Considérons le système planaire avec un paramètre  $\mu \in \mathbb{R}$  suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x - w y + (x^2 + y^2)x, \\ \dot{y} = w x - \mu y + (x^2 + y^2)y. \end{cases} \quad (1.12)$$

Pour tout valeur de  $\mu$ , le système (1.12) admet l'origine  $(0, 0)$  comme point d'équilibre, la matrice jacobienne est :

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} -\mu + 3x^2 + y^2 & -w + 2xy \\ w + 2xy & -\mu + x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Pour le point d'équilibre  $(0, 0)$  alors :

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & -w \\ w & -\mu \end{pmatrix}.$$

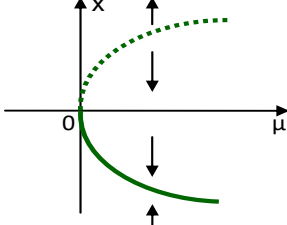
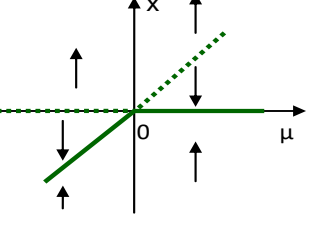
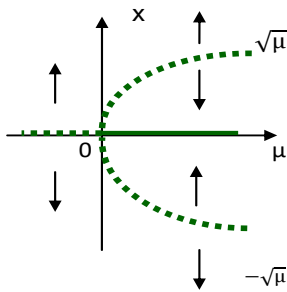
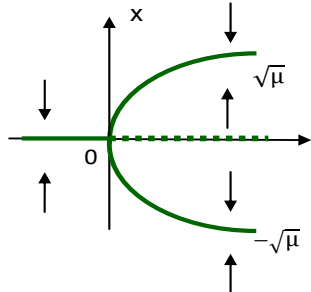
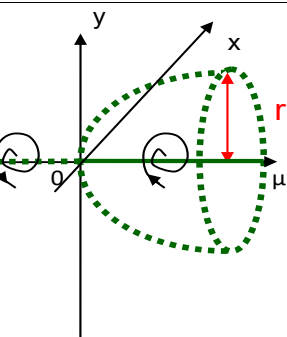
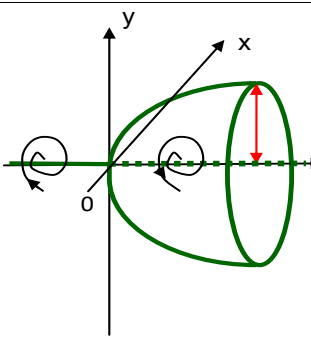
Les valeur propres de  $Df(0, 0)$  sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\mu + iw, \\ \lambda_2 = -\mu - iw. \end{cases}$$

- Pour  $\mu < 0$ , alors  $Re(\lambda_{1,2}) = -\mu > 0$  donc le point d'équilibre  $(0, 0)$  est un foyer instable.
- Pour  $\mu > 0$ , alors  $Re(\lambda_{1,2}) = -\mu < 0$  donc le point d'équilibre  $(0, 0)$  est un foyer stable.
- Pour  $\mu = 0$ , l'origine est non hyperbolique, le système possède une paire des valeurs propres complexes conjugués purement imaginaires le système (1.12). Les coordonnées polaire s'écrit dans :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\mu r + r^3, \\ \dot{\theta} = w. \end{cases}$$

À partir de ce système, il est clair qu'a, à condition que  $w > 0$ , le seul point stationnaire est l'origine,  $r = 0$ , il n'y a donc pas de solution stationnaire bifurquant. Alors pour  $\mu = 0$  on a  $\dot{r} = r^3 > 0$  d'où l'origine est un foyer instable, et pour  $\mu > 0$  il ya un cycle limite instable qui correspond à  $r = \sqrt{\mu}$ . Ceci est un exemple de bifurcation de hopf sous-critique (sous-critique car un foyer instable se transforme en un foyer stable entourée par un cycle limite instable).

<p><i>L'équation différentielle</i></p>	<p><b>Bifurcation nœud-col</b></p>	<p><i>L'équation différentielle</i></p>	<p><b>Bifurcation transcritique</b></p>
<p><math>\dot{x} = -\mu + x^2</math>  <b>Point fixes:</b>  <i>si</i> <math>\mu &gt; 0</math></p> $\begin{cases} x = \sqrt{\mu} \\ x = -\sqrt{\mu} \end{cases}$		<p><math>\dot{x} = -\mu x + x^2</math>  <b>Point fixes:</b></p> $\begin{cases} x = 0 \\ x = \mu \end{cases}$	
<p><i>L'équation différentielle</i></p>	<p><b>Bifurcation fourche Sous-critique</b></p>	<p><i>L'équation différentielle</i></p>	<p><b>Bifurcation fourche Super-critique</b></p>
<p><math>\dot{x} = -\mu x + x^3</math>  <b>Point fixes:</b></p> $\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\mu} \\ x = -\sqrt{\mu} \end{cases}$		<p><math>\dot{x} = \mu x - x^3</math>  <b>Point fixes:</b></p> $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{\mu} \\ x = \sqrt{\mu} \end{cases}$	
<p><i>L'équation différentielle</i></p>	<p><b>Bifurcation de Hopf Sous-critique</b></p>	<p><i>L'équation différentielle</i></p>	<p><b>Bifurcation de Hopf Super-critique</b></p>
<p><math>\begin{cases} \dot{r} = -\mu r + r^3 \\ \dot{\theta} = \omega \\ (\omega &gt; 0) \\ x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}</math>  <b>Point fixes:</b>  <math>(y,x)=(0,0)</math></p> <p><i>si</i> <math>\mu &gt; 0</math> :  <b>Cycle limite:</b>  <math>r = \sqrt{\mu}</math></p>		<p><math>\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = \omega \\ (\omega &gt; 0) \\ x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}</math>  <b>Point fixes:</b>  <math>(y,x)=(0,0)</math></p> <p><i>si</i> <math>\mu &gt; 0</math> :  <b>Cycle limite:</b>  <math>r = \sqrt{\mu}</math></p>	

—: *Objet stable*

- - - - -: *Objet instable*

FIGURE 1.10: Regroupement de quelques bifurcations



---

---

# CHAPITRE 2

---

## SYSTÈMES CHAOTIQUES

Les systèmes chaotiques ne sont pas définis de manière spécifique, mais en générale le chaos est un phénomène complexe et imprévisible qui peut se produire dans différents types de systèmes dynamiques déterministes. En outre, les systèmes chaotiques peuvent différer considérablement les uns des autres en fonction de leurs caractéristiques mathématiques et de leur comportement dynamique. Poincaré [16] a été l'un des premiers à envisager la théorie du chaos. Il a découvert la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème de l'interaction de trois corps célestes. Le terme chaos désigne un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais et qui est très sensible aux conditions initiales, et imprévisible à long terme. Des chercheurs de différents horizons sont alors intéressés à ce comportement.

### 2.1 Définitions du chaos

**Définition 2.1.1** (*Chaos au sens de Li-Yorke [34]*)

*Une application continue  $f : I \rightarrow I$  où  $I$  est l'intervalle unitaire ( $I = [0, 1]$ ), est chaotique au sens de Li-York s'il y a un nombre indénombrable de  $S \subset I$  tel que les trajectoire de deux*

points distincts  $x, y$  dans  $S$  sont proximaux et non asymptotique, ie :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

**Définition 2.1.2** (définition de Devaney du chaos [34])

Soit  $V$  un ensemble. Une application continue  $f : V \rightarrow V$  est dite chaotique sur  $V$  si :

- $f$  est topologiquement transitif : pour toute paire d'ensembles ouverts non vides  $U, W \subset V$  il existe un  $K > 0$  tel que  $f^K(U) \cap W \neq \emptyset$ .
- Les points périodiques de  $f$  sont denses dans  $V$ .
- $f$  a une dépendance sensible aux conditions initiales : il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in V$  et tout voisinage  $v(x)$  ils existent un  $y \in v(x)$  et un  $n \geq 0$  tel que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ .

## 2.2 Caractéristique des systèmes chaotiques

Il existe plusieurs approches de définitions possibles du chaos, ces définitions ne sont pas toutes équivalentes, mais elles convergent vers certains points communs caractérisant ainsi le chaos [3].

### 1. La non-linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique [25].

### 2. Le déterminisme

La notion de déterminisme implique la capacité de prédire le futur d'un phénomène à partir de ses événements passés ou présents [25]. Cependant, les non-linéarités présentes dans les phénomènes chaotique conduisent à une évolution imprévisible et irrégulière du comportement des systèmes chaotiques. Contrairement aux phénomènes aléatoires, il est possible de déterminer la trajectoire d'une particule dans un système chaotique car ce dernier suit des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.

### 3. L'aspect aléatoire

Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases

au hasard : aucune structure n'apparaît. Quand le mouvement est chaotique, les points paraissent à première vue aléatoires. Néanmoins, quand on observe le système suffisamment longtemps, on constate que les points dessinent une forme particulière. La figure (2.1) illustre l'aspect aléatoire du système de Lorenz [21].

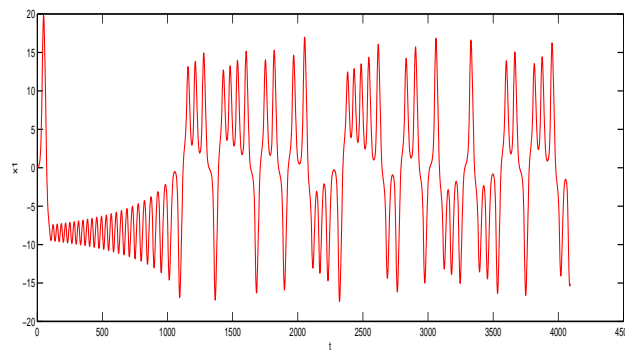


FIGURE 2.1: *L'aspect aléatoire du système de Lorenz*

### **4. Sensibilité aux conditions initiales**

De légères variations dans l'état initial peuvent entraîner des résultats totalement différents à l'état final.

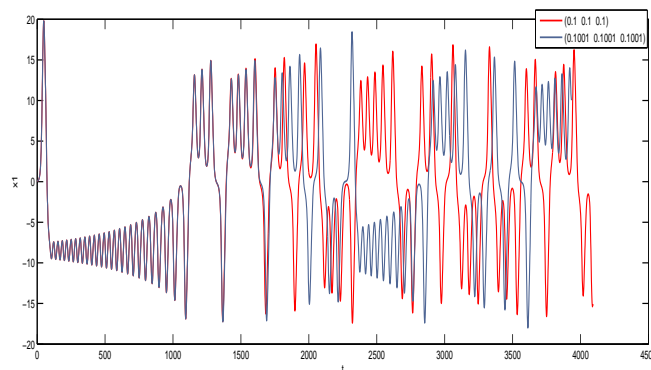


FIGURE 2.2: *Sensibilité aux condition initiales du système de Lorenz*

### **5. La structure fractale**

Le comportement d'un système chaotique se reproduit de manière autosimilaire à des échelles différentes. Plus on le regarde de près [30], plus on découvre de nouveaux détails comparables à ceux qu'on observait aux échelles supérieures. Sa représentation géométrique ne s'intègre pas dans un espace de dimension entière, mais de dimension

fractionnaire (ce n'est plus tout a fait une courbe, mais aussi elle n'est pas devenue une surface).

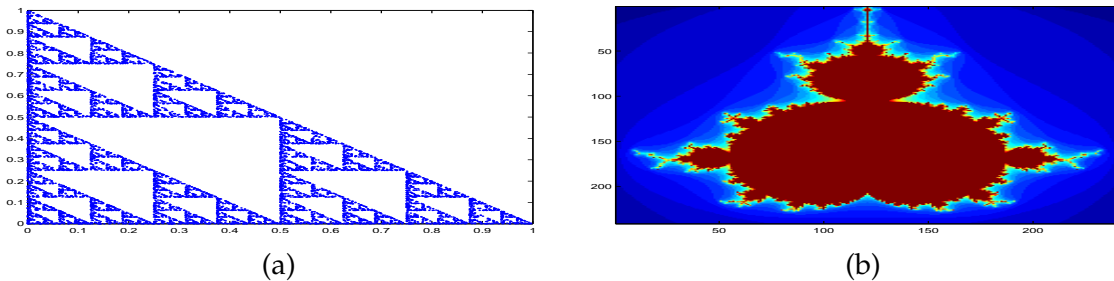


FIGURE 2.3: Structure fractale : (a) Triangle de Sierpinski. (b) Ensemble de Mandelbrot.

## 6. Les attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont nettement plus complexes que les attracteurs prévisibles comme points fixes, cycles limites ou tores. À grande échelle, un attracteur étrange n'est pas une surface lisse, mais une surface qui replie plusieurs fois sur elle-même [9]. Une "définition" d'attracteur étrange peut être formulée ainsi : un sous-ensemble borné  $A$  de l'espace est un attracteur étrange pour une transformation  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $V$  de  $A$  vérifiant les propriétés suivantes [16] :

- **Attraction** :  $V$  est une zone de capture, ce qui signifie que tout orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $V$  est entièrement contenue dans  $V$ . De plus, tout orbite de ce type devient et reste aussi proche de  $A$  que l'on veut.

- **Sensibilité** : Les orbites dont le point initial dans  $V$  sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.

- **Fractal** :  $A$  est un objet fractal.

- **Mélange** : Pour tout point de  $A$ , il existe des orbites démarrées dans  $V$  qui passent aussi près que l'on veut de ce point.

Les attracteurs chaotiques (étranges) peuvent être classés en trois types principaux :

- Attracteur hyperbolique.
- Attracteur de type Lorenz.
- Quasi-attracteurs.

## 2.3 Routes vers le chaos (Scénarios de transition vers le chaos)

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit souvent à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système. Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent.

Trois scénarios de transition vers le chaos (voir [16]) peuvent se produire.

### ✓ Le doublement de période

Ce phénomène se produit sur un oscillateur soumis à une force extérieure. À mesure que la contrainte augmente, la période de l'oscillateur est doublée, puis quadruplée, octuplée, et ainsi de suite. Ces doublons de période deviennent de plus en plus proches les uns des autres ; lorsque la période devient infinie, le système devient chaotique.

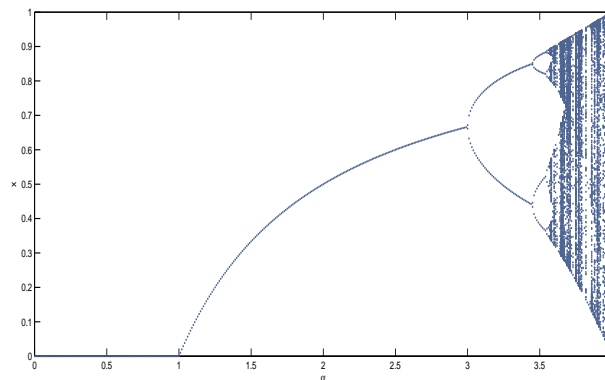


FIGURE 2.4: Transition vers le chaos par doublement de période.

✓ **L'intermittence**

Un mouvement périodique stable est perturbé par des éruptions aléatoires de bruit, ou "spots". Lorsque le paramètre de contrôle est augmenté, les éruptions deviennent de plus en plus fréquentes, jusqu'à ce que le chaos apparaisse finalement.

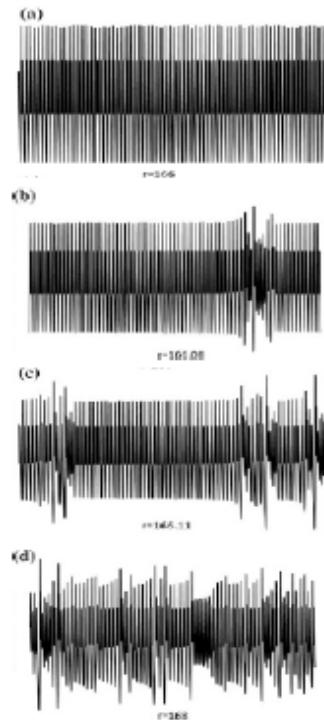


FIGURE 2.5: *Transition vers le chaos par l'intermittence*

✓ **La quasi-périodicité**

Bien que le doublement de la période soit le scénario le plus connu des variations chaotiques, plusieurs autres schémas ont été étudiés et observés. Dans une proposition de Newhouse et al (1978) [30], ils imaginent un système qui subit successivement des instabilités dynamique avant de passer au chaos. Par exemple, supposons qu'un système soit initialement stable, mais devienne dynamiquement instable après avoir changé un paramètre. À mesure que le mouvement grandit, les non-linéarités entrent en vigueur et le mouvement devient un cycle limite. Ces transitions sont appelées bifurcations Hopf en mathématiques. Si, après d'autres changements de paramètres, le système subit deux autres bifurcations Hopf de sorte que trois cycles limites couplés simultanés sont présents, des mouvements chaotiques deviennent possibles.

Ainsi, le précurseur d'un tel mouvement chaotique est la présence de deux oscillations périodiques simultanées. Lorsque les fréquences de ces oscillations,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ne sont pas proportionnelles, le mouvement lui-même observé n'est pas périodique mais il est quasi-périodique.

## 2.4 Quantification du chaos

### 2.4.1 Exposants de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov est une mesure de sensibilité d'un système dynamique aux conditions initiales. Il est utilisé pour caractériser la stabilité ou l'instabilité d'un système dynamique.

Plus précisément, l'exposant de Lyapunov mesure la moyenne exponentielle du taux de divergence des trajectoires dans l'espace des phases d'un système dynamique. En d'autres termes, il quantifie à quelle vitesse les trajectoires initialement proches s'éloignent les unes des autres à mesure qu'elles évoluent dans le temps.

#### i) Cas d'une application discrète unidimensionnelle

Considérons un système dynamique par une application suivant :

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.1}$$

et soient  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$  deux conditions initiales très proches (voir [24]), tel que  $\varepsilon$  est une erreur très petite. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. Donc il existe un réel  $\lambda$  tels qu'après  $N$  itérations on a :

$$|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)| \simeq \varepsilon e^{N\lambda}$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\ln\left(\frac{|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|}{\varepsilon}\right) \simeq N\lambda$$

Alors :

$$\frac{1}{N} \ln \left( \frac{|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|}{\varepsilon} \right) \simeq \lambda$$

Lorsque N vers l'infini et  $\varepsilon$  tendre vers zéro, on trouve l'expression suivante :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left( \frac{|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|}{\varepsilon} \right) = \lambda$$

Donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right| = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln \left| (f^N)'(x_0) \right| = \lambda$$

En utilisant la règle de différenciation en chaîne, nous obtenons l'expression :

$$\begin{aligned} (f^N)'(x_0) &= (f(f^{N-1}))'(x_0) \\ &= (f'(f^{N-1}))(x_0) \cdot (f^{N-1})'(x_0) \\ &= f'(f^{N-1}(x_0)) \cdot (f'(f^{N-2}))(x_0) \cdot (f^{N-2})'(x_0) \\ &= f'(f^{N-1}(x_0)) f'(f^{N-2}(x_0)) \cdot f'(f^{N-3}(x_0)) \dots f'(f(x_0)) f'(x_0) \end{aligned}$$

Avec  $x_j = f^j(x_0)$

$$\begin{aligned} (f^N)'(x_0) &= f'(x_{N-1}) \cdot f'(x_{N-2}) \cdot f'(x_{N-3}) \dots f'(x_1) \cdot f'(x_0) \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i). \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| = \lambda \quad (2.2)$$

$\lambda$  est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence.

✓ Si  $\lambda > 0$  alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.

✓ Si  $\lambda < 0$  les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

**Exemple 2.4.1** *Exposant de Lyapunov de l'application logistique donne par :*

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) = f(x_n), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$



On a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| = \lambda.$$

tel que :  $f'(x) = \alpha - 2\alpha x$ .

Les point d'équilibres sont :  $x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{\alpha-1}{\alpha}$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |\alpha - 2\alpha x^*| = \lambda.$$

✓ Pour  $x_1^* = 0$  on a :  $\lambda = \ln \alpha$ .

Si  $\alpha > 1$  alors  $\lambda > 0$  donc l'origine instable.

Si  $\alpha < 1$  alors  $\lambda < 0$  donc l'origine stable.

✓ Pour  $x_2^* = \frac{\alpha-1}{\alpha}$  on a :

$$\lambda = \ln \alpha \left| 1 - 2 \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) \right|,$$

$$\lambda = \ln \alpha \left| \frac{2-\alpha}{\alpha} \right|,$$

$$\lambda = \ln |2 - \alpha|.$$

• Pour  $|2 - \alpha| < 1$

$$-1 < 2 - \alpha < 1$$

$$1 < \alpha < 3$$

Alors  $\lambda < 0$  donc  $x_2^*$  stable.

• Pour  $|2 - \alpha| > 1 \quad \alpha \in [0, 1[ \cup ]3, +\infty[$

Alors  $\lambda > 0$  donc  $x_2^*$  instable.

On utilise le programme (MATLAB) pour calculer le trajectoire au voisinage de  $\lambda$  numériquement on pose :  $\alpha = 3.9$  et  $x_0 = 0.1$ , tel que  $x_0 \neq x_1^*$  et  $x_0 \neq x_2^*$ . On trouve  $\lambda = 0.4$ .

Alors le système est chaotique.

## ii) Cas d'une application discret multidimensionnelle

Dans cette partie nous allons définir les fondations de lyapunov pour les systèmes de dimension supérieure [2]. Considérons un système de dimensions représenté par :

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, x_{n+1} = f(x_n). \quad (2.3)$$

Un système à dimensions  $m$  dispose de  $m$  exposant de lyapunov, qui mesurent chacun le taux de divergence le long d'un des axes du système. Ainsi, en moyenne, un hyper-volume initial  $V_0$  évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_m)n},$$

Afin de générer du chaos déterministe, il est essentiel qu'au moins un  $\lambda_i$  soit positif pour créer une étirement le long d'au moins un axe. Cependant, il est également nécessaire que la somme des  $\lambda_i$  soit négative ( surtout pour un système continue autonome), sinon le volume initial finira par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé, et il n'y aura plus d'attracteur de faible dimension, ce qui signifie qu'il n'y aura pas de chaos déterministe.

Pour calculer les valeurs des  $\lambda_i$ , nous commençons par fixer une hyper-sphère dans notre espace de dimension  $m$  avec des conditions initiales d'un rayon  $\varepsilon$  (petit) et observons son évolution. On règle générale, nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0),$$

On pose  $x'_0 = x_0 + \varepsilon$ , on a le développement en série limité d'ordre 1 de  $f^n(x_0)$  au voisinage de  $x'_0$  suivant :

$$x_n - x'_n \simeq \frac{df^n(x_0)}{dx_0}(x_0 - x'_0) \simeq J(x_0)J(x_1)\dots J(x_n)(x_0 - x'_0) \simeq \prod_{i=0}^n J^n(x_i)(x_0 - x'_0),$$

On note  $\prod_{i=0}^n J^n(x_i)$  par  $J^n(x_0)$ , ainsi

$$x_n - x'_n \simeq J^n(x_0)(x_0 - x'_0)$$

tel que  $J^n(x_0)$  la matrice jacobienne de  $f^n(x_0)$  au point  $x_0$ . Il s'agit d'une matrice carrée  $m \times m$ , si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible  $P_n$  tel que  $D_m^n = P_n^{-1} J^n P_n$ .  $D_m^n$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $J_n$  qui seront notés par  $u_i(f^n(x_0)), i = 1, \dots, m$ .

Nous pouvons définir les  $m$  exposants de Lyapunov comme suit :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |u_i(f^n(x_0))|, i = 1, \dots, m.$$

**Exemple 2.4.2** La transformation de boulanger (voir [10]) sur  $E = [0, 1] \times [0, 1]$  définit par :

$$f(x, y) = \begin{cases} x \rightarrow 2x(\text{mod}1), \text{ pour } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ y \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}ay, \text{ pour } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(ay + 1), \text{ pour } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases} \end{cases}$$

$(0, 0)$  est seul point fixe de  $f$  dont la jacobienne  $J$  est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix},$$

Les valeurs propres de  $J$  de  $f^n(x_0)$  au point  $x_0 = (0, 0)$  sont :

$$q_1(f^n(x_0)) = 2 \text{ et } q_2(f^n(x_0)) = \frac{a}{2} (\forall n \in \mathbb{N})$$

Appliquant la limite dans deux directions on obtient les exposants de Lyapunov :

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} \ln 2,$$

$$\lambda_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} \ln \frac{a}{2},$$

$$\lambda_1 = \ln 2, \lambda_2 = \ln \frac{a}{2}.$$

### iii) Cas d'une système continue multidimensionnelle

En 1985, Wolf et al. Ont proposé une méthode de calcul du plus grand exposant et de la somme des  $n$  exposants de Lyapunov à partir des séries chronologiques. Leur

l'algorithme est basé sur le contrôle de la divergence entre les trajectoires voisines (voir [35, 13]). On choisit dans un premier temps deux orbites très voisines, et on note  $d(t_0)$  leur distance en un temps ultérieur, soit  $t_1$ , cette distance est devenue  $d'(t_1)$ . On effectue alors un remplacement : on choisit une autre orbite située à une distance  $d(t_1)$  (figure 2.6). On recommence alors ces opérations un grand nombre de fois pour les temps  $t_1, \dots, t_M$ , et on calcule l'estimateur du plus grand exposant par la relation suivante :

$$\lambda = \frac{1}{t_m - t_0} \sum_{i=0}^n \frac{d'(t_i)}{d(t_{i-1})}.$$

1. Variation du paramètre de contrôle.
2. Choix aléatoire d'une condition initiale.
3. Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une perturbation.
4. Évolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calcul de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires.
5. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédent le calcul d'une moyenne de la divergence.
6. Retour au point (5) effectué selon un nombre donné.
7. Retour au point (1).
8. Dessin de l'exposant de Lyapunov le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné.

### Classifications des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapunov

Généralement, on peut distinguer trois cas des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapunov :

1. Si  $\lambda < 0$ , cela signifie que l'orbite est attirée vers un point fixe ou une orbite périodique stable, ce qui caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système présente une stabilité asymptotique, et plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est grande. Les points fixes et les orbites périodiques super-stables ont un exposant de Lyapunov  $\lambda$  qui tend vers  $-\infty$ .

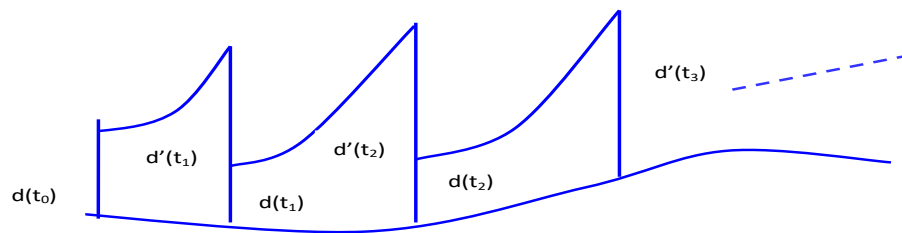


FIGURE 2.6: Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov

2. Si  $\lambda = 0$ , l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservatif. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.
3. Si  $\lambda > 0$ , l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités, ces points sont appelés instables. Dans un système discret, on a un ensemble de points sans aucune relation de liaison. Dans un système continu, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées [13].

Etat stable	Attracteur	Dimension de Lyapunov	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	0	$\lambda_n < \dots < \lambda_1 < 0$
Périodique	Cycle	1	$\lambda_1 = 0, \lambda_n < \dots < \lambda_2 < 0$
Période d'ordre 2	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_n < \dots < \lambda_3 < 0$
Période d'ordre K	K-Tore	K	$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_K = 0,$ $\lambda_n < \dots < \lambda_{K+1} < 0$
Chaotique	Attracteur	Non entier	$\lambda_1 > 0 \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper chaotique	Attracteur	Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

TABLE 2.1: Exposants de Lyapunov et Dimensions

Il existe plusieurs types de dimensions pour les attracteurs chaotiques, parmi les quels (voir [2]) :

**(a) Dimension de Kaplan et Yorke**

Soient  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$ , les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et soit  $j_0$  le plus grand entier tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i \leq 0.$$

Alors la dimension de l'attracteur selon Kaplan et Yorke est donné par :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0}|}.$$

**(b) Dimension de Mori**

Soient  $m_0$  le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls,  $m_+$  le nombre d'exposants positifs,  $\bar{\lambda}_+$  la moyenne des exposants positifs et  $\bar{\lambda}_-$  celle des exposants négatifs. La dimension au sens de mori est donnée par la relation suivante :

$$D_{M_0} = m_0 + m_+ \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|}\right).$$

**2.4.2 Le teste 0-1**

Le test habituel pour savoir si un système dynamique déterministe est chaotique ou non chaotique implique le calcul de l'exposant de lyapunov.

Nous allons présenter dans cette partie une autre méthode inédite pour détecter le chaos dans un système dynamique déterministe, introduite par *Gottwald et Melbourne*. Cette méthode est appliquée directement aux données de la série chronologique et ne nécessite pas de reconstruction de l'espace des phases. De plus, la dimension du système dynamique et la forme des équations sous-jacentes sont sans importance. L'entrée est les données de la série chronologique et la sortie est 1 si le système est chaotique sinon 0. Les principaux avantages de ce type sont (voir [15]) :

- (i) Il est binaire (minimisant les problèmes de distinction entre les petits nombres

positive et zéro).

(ii) La nature du champ vectoriel ainsi que sa dimensionnalité ne posent pas de limitations pratiques.

(iii) Il ne souffre pas des difficultés liées à la reconstruction de l'espace des phases.

### Description du test 0 - 1

Nous examinons brièvement comment le test est mis en œuvre.  $\phi(j)$  est un observable dans le temps pour  $j = 1, \dots, N$  nous effectuons la séquence suivante d'étapes (voir [31]) :

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} p_c(n+1) = p_c(n) + \phi(n) \cos(v_c(n)), \\ q_c(n+1) = q_c(n) + \phi(n) \sin(v_c(n)). \end{cases} \quad (2.4)$$

1- Pour  $c \in [0, \pi]$ , on calcule les variables de translation

$c$  désigne la fréquence qui dépend de la période d'échantillonnage et  $n = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} p_c(n) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \cos jc, \\ q_c(n) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \sin jc. \end{cases}$$

2- Le comportement diffusif (ou non diffusif) de  $p$  et  $q$  peut être étudié en analysant le déplacement quadratique moyen  $M(n)$  tel que :

$$M(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( (p_c(j+n) - p_c(j))^2 + (q_c(j+n) - q_c(j))^2 \right).$$

Si la dynamique est régulière, le déplacement quadratique moyen est une fonction bornée dans le temps, alors que si la dynamique est chaotique, le déplacement quadratique moyen évolue linéairement avec le temps.

3- Nous calculons en suite le taux de croissance asymptotique  $K_c$ , du déplacement carré :

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M(n)}{\log n}.$$

Dans le cas régulier (dynamique périodique ou quasi périodique) les trajectoires du système (2.4) sont généralement bornées, alors que dans le cas chaotique, les trajectoires de (2.4) se comportent généralement approximativement comme un mouvement brownien.

Dynamique de base	Dynamique de p(n) et q(n)	M(n)	K
Régulier	Délimité	Délimité	0
Chaotique	Diffusif	Linéaire	1

### Calcul du déplacement quadratique moyen

Pour une série chronologique donnée  $\phi$  avec  $j = 1, \dots, N$ , nous calculons le déplacement quadratique moyen des variables de traduction  $p_c(n)$  et  $q_c(n)$  définies en (2.4) pour plusieurs valeurs de  $c \in [0, \pi]$ . Le déplacement quadratique moyen est défini comme suit (voir [15]) :

$$M_c(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( (p_c(j+n) - p_c(j))^2 + (q_c(j+n) - q_c(j))^2 \right).$$

$$M_c(n) = V(c)n - V_{osc}(c, n) + e(c, n). \tag{2.5}$$

où l'erreur  $e(c, n)/n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  uniformément en  $c \in [0, \pi]$  et

$$V_{osc}(c, n) = E(\phi)^2 \frac{1 - \cos(nc)}{1 - \cos(c)}. \tag{2.6}$$

Tel que  $E(\phi)$  est donnée par

$$E(\phi(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi(j).$$

La forme (2.5) suggère une amélioration pour le test : on peut soustraire explicite terme  $V_{osc}(c, n)$  du déplacement quadratique moyen et introduire

$$D_c(n) = M_c(n) - V_{osc}(c, n). \tag{2.7}$$



La fonction d'autocorrélation pour l'observation  $\phi(j)$  est donnée par :

$$\rho(K) = E(\phi(1)\phi(K + 1)) - E(\phi)^2, K = 0, 1, 2... \quad (2.8)$$

Donc  $V(c)$  est donnée par

$$V(c) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} e^{iKc} \rho(|K|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left| \sum_{j=0}^{n-1} e^{ijc} \phi(j) \right|^2, \quad (2.9)$$

• **Calcul de  $K_e$**

Pour estimer le taux de croissance asymptotique  $K_e$ . Nous présentons deux méthodes différentes :

**1. Méthode de régression**

La méthode de régression consiste en une régression linéaire pour le tracé log – log du déplacement quadratique moyen. Pour le déplacement quadratique moyen original  $M_c(n)$ , le taux de croissance asymptotique  $K$  donné par la relation (voir [6]) :

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M(n)}{\log n}.$$

Pour éviter le logarithme négative on calcule :

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(M(n) + 1)}{\log n}.$$

**2. Méthode de corrélation**

Dans la méthode de corrélation (voir [15]), on peut former les vecteurs  $\zeta = (1, 2, \dots, N_0)$  et  $\Delta = (D_c(1), D_c(2), \dots, D_c(N_0))$  avec  $D_c(n)$  donnés dans (2.7). La variance et la covariance sont définies pour les vecteurs  $x$  et  $y$  de longueurs  $q$  par :

$$cov(x, y) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q (x(j) - \bar{x})(y(j) - \bar{y})$$

où :

$$\bar{x} = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q x(j),$$

$$\text{var}(x) = \text{cov}(x, x).$$

On définit le coefficient de corrélation

$$K_c = \text{corr}(\zeta, \Delta) = \frac{\text{cov}(\zeta, \Delta)}{\sqrt{\text{var}(\zeta)\text{var}(\Delta)}} \in [-1, 1],$$

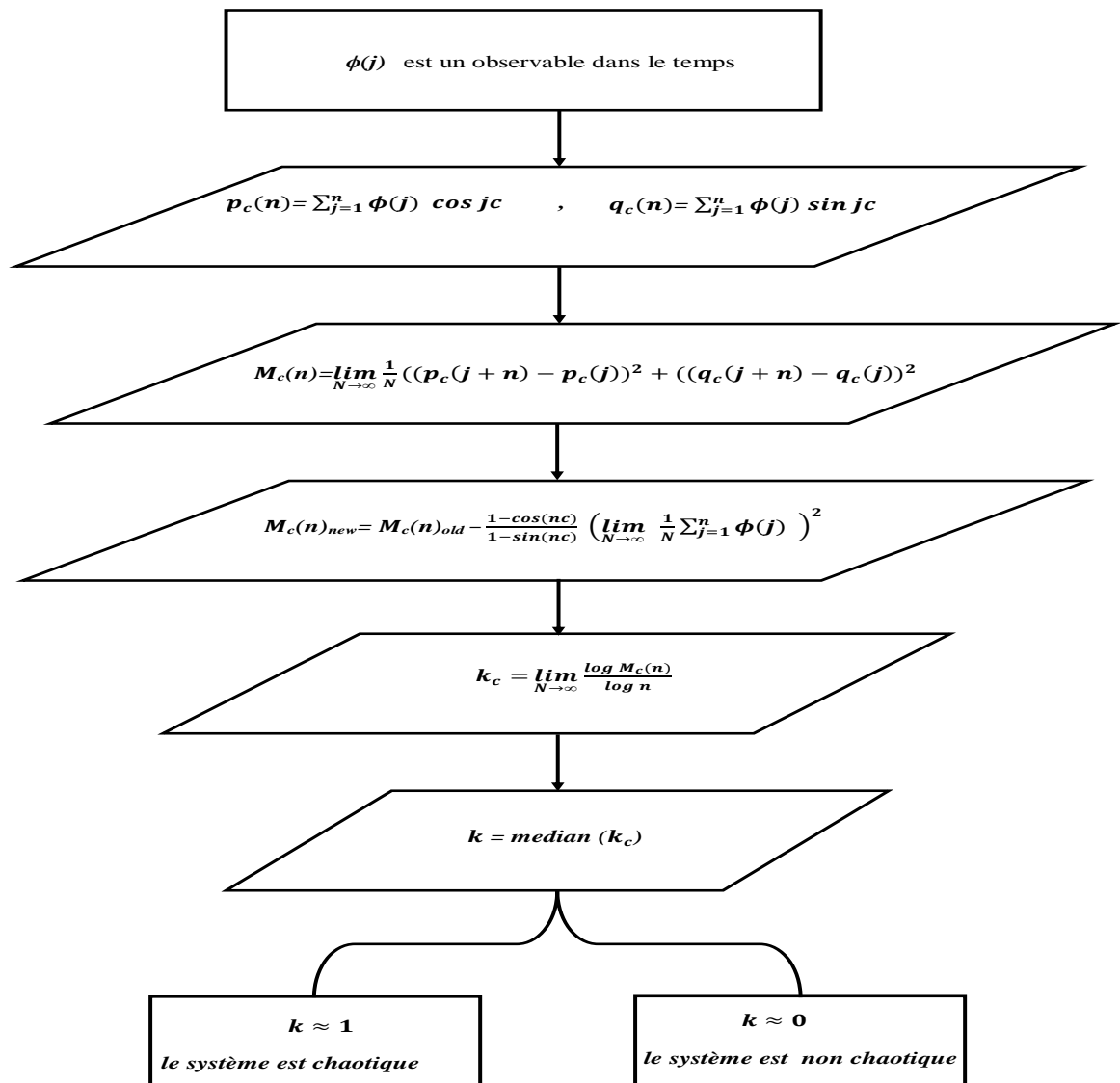


FIGURE 2.7: Organigramme montrant le Description du test 0 - 1

## 2.5 Circuit de Chua classique

### 1- Circuit de Chua basé sur un diode

Le système de Chua est un système dynamique chaotique non linéaire introduit par L.Chua en 1983. Il est modélisé d'un circuit électronique (RLC) simple appelé (circuit

de Chua) qui se compose :

- Une résistance linéaire  $R$ .

- inductance  $L$ .

- Deux condensateurs  $C_1, C_2$  et d'une résistance non linéaire  $Nr$  appelée diode de Chua comme représenté dans la figure (2.8) ci dessous. Il est donné par le système d'équations suivant (voir [6]) :

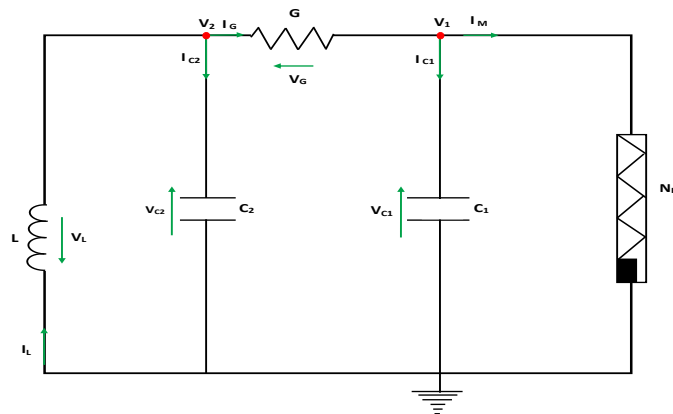


FIGURE 2.8: *Circuit de Chua*

Le système de Chua donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(-x + y - g(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y. \end{cases} \quad (2.10)$$

Où  $g(x) = m_1x + \frac{m_0 - m_1}{2}(|x + 1| - |x - 1|)$ . Est la caractéristique non linéaire de la diode du circuit de Chua, avec  $m_0$  et  $m_1$  des constantes négatives,  $x, y, z$  sont les variable d'état du système,  $\alpha, \beta$  sont des paramètres constantes.

$$g(x) = \begin{cases} (m_0 - m_1) + m_1x, & x > 1 \\ m_0x, & -1 \leq x \leq 1 \\ m_1x - m_0 + m_1, & x < -1 \end{cases} \quad (2.11)$$

\* Les points d'équilibres du système (2.10) sont :  $x_1^* = (0, 0, 0)$ ,  $x_2^* = (\frac{m_0 - m_1}{1 + m_1}, 0, \frac{m_0 - m_1}{1 + m_1})$

**a) Étude de la stabilité des points d'équilibres**

La matrice jacobienne du système est :

$$D_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\alpha(m+1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

Avec :

$$m = \begin{cases} m_0, & |x| \leq 1, \\ m_1, & |x| > 1. \end{cases}$$

La stabilité du point d'équilibre  $x_1^*$  :

$$D_f(x_1^*) = \begin{pmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique de  $D_f(x_1^*)$  est :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha(m_1 + 1) + 1)\lambda^2 + \beta\alpha(m_1 + 1).$$

Alors

$$a_1 = (\alpha(m_1 + 1) + 1),$$

$$a_2 = (\beta + \alpha m_1),$$

$$a_3 = \beta\alpha(m_1 + 1).$$

Les déterminants de Hurwitz sont :

$$H_1 = (\alpha(m_1 + 1) + 1),$$

$$H_2 = a_1 a_2 - a_3 = m_1(1 + m_1)\alpha^2 + \alpha m_1 + \beta,$$

$$H_3 = a_3 H_2 = \beta\alpha(m_1 + 1)H_2.$$

par exemple pour  $m_1 = \frac{-5}{7}, m_0 = \frac{-8}{7}, \beta = \frac{100}{7}$  :

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{2}{7}\alpha + 1, \\ H_2 &= \frac{-10}{49}\alpha^2 - \frac{5}{7}\alpha + \frac{100}{7}, \\ H_3 &= \frac{200}{49}\alpha H_2. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{cases} H_1 > 0 & \text{si } \alpha > -3.5, \\ H_2 > 0 & \text{si } -10.29 < \alpha < 6.79, \\ H_3 > 0 & \text{si } 0 < \alpha < 6.79. \end{cases} \quad (2.12)$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz le point d'équilibre  $x_1^*$  est stable si  $0 < \alpha < 6.79$ .

Stabilité du point d'équilibre  $x_2^*$  :

$$D_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha(m_0 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $D_f(x_2^*)$  est :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha(m_0 + 1) + 1)\lambda^2 + \beta\alpha(m_0 + 1).$$

Alors

$$\begin{aligned} a_1 &= (\alpha(m_0 + 1) + 1), \\ a_2 &= (\beta + \alpha m_0), \\ a_3 &= \beta\alpha(m_0 + 1). \end{aligned}$$

Les déterminants d'Hurwitz sont :

$$\begin{aligned} H_1 &= (\alpha(m_0 + 1) + 1), \\ H_2 &= a_1 a_2 - a_3 = m_0(1 + m_0)\alpha^2 + \alpha m_0 + \beta, \\ H_3 &= a_3 H_2 = \beta\alpha(m_0 + 1)H_2. \end{aligned}$$

Par exemple pour  $m_1 = \frac{-5}{7}, m_0 = \frac{-8}{7}, \beta = \frac{100}{7}$  :

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{-1}{7}\alpha + 1, \\ H_2 &= \frac{8}{49}\alpha^2 - \frac{8}{7}\alpha + \frac{100}{7}, \\ H_3 &= \frac{-100}{49}\alpha H_2. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{cases} H_1 > 0, & \text{si } \alpha < 7, \\ H_2 > 0, & \text{si } \alpha < 0, \\ H_3 > 0, & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.13)$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz le point d'équilibre  $x_2^* = (0, 0, 0)$  est stable si  $\alpha < 0$ .

### 1) Les exposantes de Lyapunov du système de Chua

Les exposantes de Lyapunov du système de Chua (2.10) pour les paramètres :  $m_0 = -8/7$ ,  $m_1 = -5/7$ ,  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 100/7$ , avec les conditions initiale  $(x, y, z) = (0.7, 0, 0)$

Sont :

$$L_1 = 0.2, L_2 = 0, L_3 = -4.3,$$

On a :  $L_1 > 0$  et  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -4.1 < 0$ , alors le système de Chua (2.10) est chaotique.

### 2) Dimension de l'attracteur de Chua

#### a) La dimension Kaplan-Yorke

Soit  $j_0 = 2$  alors la dimension du système (2.10) est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} D_{KY} &= j_0 + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|} \\ &= 2 + \frac{0.2}{4.3} \\ &= 2.0465. \end{aligned}$$

#### b) Dimension de Mori

Soit  $m_0 = 1$  le nombre des exposants nulle et  $m_+ = 1$  le nombre des exposants positive alors la dimension du système (2.10) est :

$$D_{M_0} = m_0 + m_+ \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{\bar{\lambda}_-}\right),$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{0.2}{4.3}\right),$$

$$= 2.0465.$$

L'attracteur de Chua est représentée sur la figure ( 2.9).

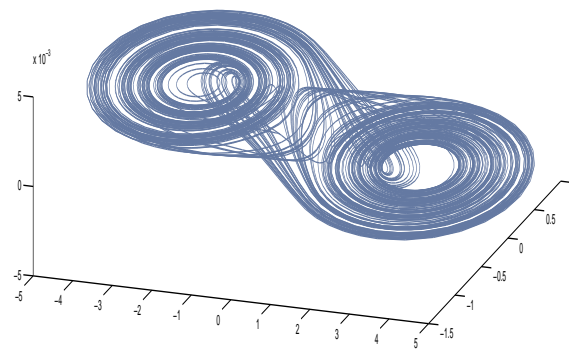


FIGURE 2.9: *Attracteur de Chua*

## 2- Circuit de Chua basé sur un memristor

Le circuit de Chua basé sur un memristor (la figure 2.10) est le circuit électronique le plus simple présentant un comportement chaotique.

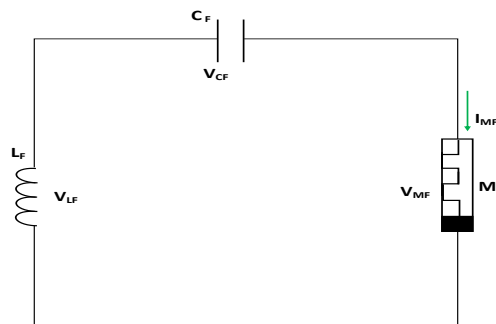


FIGURE 2.10: *Circuit de Chua basé sur un memristor*



La dynamique de circuit est décrite par le modèle mathématique suivant [1] :

$$\begin{cases} \dot{x} = ay, \\ \dot{y} = -b(x + M(z)y), \\ \dot{z} = -y - \alpha z + \gamma^2 z. \end{cases} \quad (2.14)$$

Où  $x(t) = V(t)$  est la tension aux bornes du condensateur,  $y(t) = IL(t)$  est le courant traversant l'inductance,  $z(t)$  désigne la variable d'état interne du memristor,  $a = 1/C$  est la capacité inverse,  $b = 1/L$  est l'inductance inverse et la fonction memristor est donnée par :

$$M(z) = \gamma z^2(t) - \beta.$$

L'attracteur de Chua basé sur un memristor représentée sur la figure(2.11).

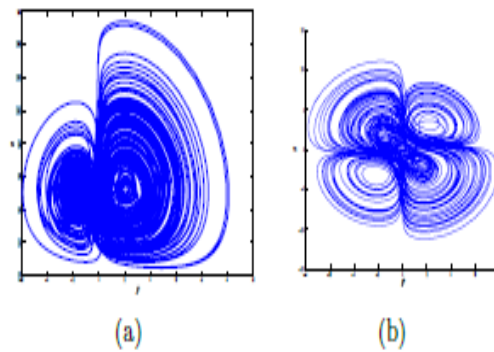


FIGURE 2.11: (a) Attracteur chaotique à double volute pour  $L = 3H; C = 1F; \alpha = 0.9; \beta = 10.1; \gamma = 0.4$ , (b) attracteur chaotique à 4 volutes pour  $L = 3H; C = 1F; \alpha = 0.9; \beta = 3; \gamma = 0.4$ .

Ainsi, la diode et le memristor ont des rôles différents dans un circuit de Chua, où la diode est utilisée pour la commutation rapide et la direction du courant, tandis que le memristor est utilisé pour stocker l'état et contrôler dynamiquement le niveau de résistance.

---

---

## CHAPITRE 3

---

# BIFURCATIONS ET CHAOS DANS UN CIRCUIT DE CHUA MODIFIÉ

Le circuit de Chua est un circuit électrique du troisième ordre autonome, fabriqué à partir des composants standards [résistance, condensateur, inductance], il a été investi entièrement et expérimentalement sur le plan numérique et analytique. Ce circuit, connu pour son répertoire riche de phénomènes dynamiques non linéaire et devenu un paradigme universel pour le chaos [7].

Le circuit contenu :

- 1- Au moins trois éléments de stockage d'énergie.
- 2- Il doit contenir un ou plusieurs éléments non linéaires.
- 3- Au moins une résistance active.

### 3.1 Circuit de Chua basé sur un memristor

Le terme « memristor » désigne un élément passif à 2 bornes introduit en 1971 par Léon Chua qui signifie (résistance à mémoire). Chua décrit le memristor comme le quatrième élément électronique de base (Figure 3.1). Pour affirmer cela, Chua énumère

les combinaison sont possibles de deux grandeurs utilisées pour l'électronique : la tension ( $v$ ), le courant ( $i$ ), ainsi que leur intégrale temporelle, le flux ( $\varphi$ ) et la charge ( $q$ ). Il remarque que les doublets ( $\varphi, v$ ) et ( $q, i$ ) forment deux des lois de l'électromagnétisme, tandis que les doublets ( $v, i$ ), ( $q, v$ ) et ( $\varphi, i$ ) définissent respectivement la résistance, la capacitance et l'inductance [32]. Le dernier doublet ( $\varphi, q$ ) n'a pas de correspondance. C'est ce doublet qui engendre la définition du memristor qui est divisé en deux cas. Celui du memristor contrôlé en charge qui donne :

$$M(q) = \frac{d\varphi}{dq}, v = M(q)i. \quad (3.1)$$

Le cas du memristor contrôlé en flux :

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi}, i = W(\varphi)v \quad (3.2)$$

Avec  $W(\varphi)$  et  $M(q)$  sont respectivement appelés memductance et memristance.

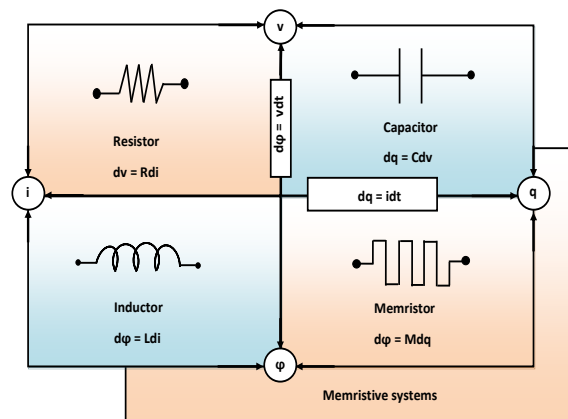


FIGURE 3.1: Schéma des 4 éléments fondamentaux des circuits électroniques. Les 4 grandeurs  $i$ ,  $v$ ,  $q$  et  $\varphi$  sont reliées deux à deux soit par un élément passif, soit par une des lois de l'électromagnétisme.

Pour décrire un memristor, il existe plusieurs modèles mathématiques disponibles, mais nous avons choisi d'utiliser un modèle spécifique qui est défini par une fonction non linéaire quadratique [7] :

$$q(\varphi) = -a\varphi + 0.5b\varphi |\varphi|. \quad (3.3)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux paramètres positifs, et la fonction memductance donnée par :

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = -a + b|\varphi|.$$

### 3.2 Dynamique du circuit

Dans cette section, un circuit de Chua basé sur un memristor alternatif est proposé en remplaçant la diode non linéaire du circuit d'origine par une conductance négative et un memristor passif contrôlé par flux d'écrit par l'équation (3.2) en parallèle et en changeant la position de l'inductance qui se situe entre les deux capacités, comme le montre (figure 3.2)

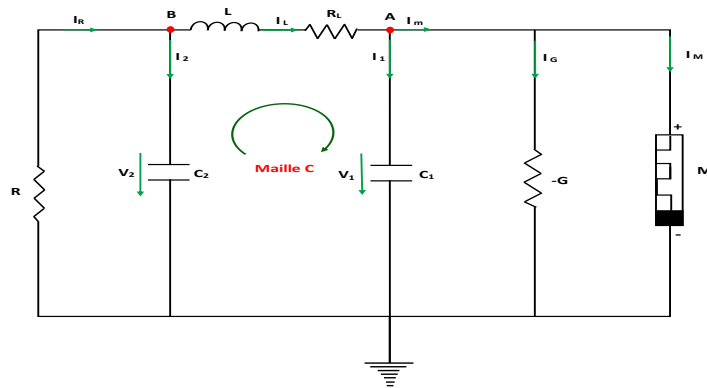


FIGURE 3.2: *Circuit de Chua modifié basé sur un memristor*

#### 3.2.1 Les équations du système

On applique la lois de Kirchhoff pour obtenir les équation du système :

$$\sum I_{\text{entre}} = \sum I_{\text{sortie}}.$$

**Noeud A :**

On a  $I_L = I_1 + I_m$  tel que :  $I_m = I_G + I_M$

Alors

$$I_1 = I_L - (I_G + I_M)$$

et

$$\begin{cases} I_1 = C_1 \frac{dV_1}{dt}, \\ I_G = -GV_1, \\ I_M = W(\phi)V_1. \end{cases}$$

Donc :  $C_1 \frac{dV_1}{dt} = I_L - (-GV_1 + W(\phi)V_1)$

$$\Rightarrow \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{C_1} [I_L + GV_1 - W(\phi)V_1] \quad (3.4)$$

**Noeud B :**

On a  $I_R = I_2 + I_L$  et comme  $I_2 = I_R - I_L$

$$\begin{cases} I_2 = C_2 \frac{dV_2}{dt}, \\ I_R = \frac{V_2}{R}. \end{cases}$$

Donc :

$$\Rightarrow \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} \left[ \frac{V_2}{R} - I_L \right] \quad (3.5)$$

**Maille C :**

On a  $-V_2 + V_L + V_1 = 0$  et comme  $V_L = L \frac{dI_L}{dt} + R_L I_L$

On remplace  $V_L$  on obtient

$$L \frac{dI_L}{dt} + R_L I_L - V_2 + V_1 = 0 \Rightarrow \frac{dI_L}{dt} = \frac{1}{L} [V_2 - V_1 - R_L I_L] \quad (3.6)$$

D'après (3.4), (3.5), (3.6) on trouve le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dV_1(t)}{dt} = \frac{1}{C_1} [I_L(t) + G V_1(t) - W(\phi) V_1(t)], \\ \frac{dV_2(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} \left[ \frac{V_2(t)}{R} - I_L(t) \right], \\ \frac{dI_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} [V_2(t) - V_1(t) - R_L I_L(t)], \\ \frac{d\phi(t)}{dt} = V_1(t). \end{cases} \quad (3.7)$$

On faisant le changement de variables suivantes pour simplifier :  $x = V_1, y = V_2, z = I_L, \omega = \phi, C_2 = 1, R = 1, \alpha = \frac{1}{C_1}, \beta = \frac{1}{L}, \gamma = \frac{R_L}{L}, \zeta = G$

Le système (3.7) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha [z + \zeta x - (-a + b |\omega|) x], \\ \dot{y} = y - z, \\ \dot{z} = -\beta (x - y) - \gamma z, \\ \dot{\omega} = x. \end{cases} \quad (3.8)$$

avec  $W(\omega) = -a + b |\omega|$  et  $x, y, z$  et  $\omega$  sont les états et  $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$  et  $a, b$  sont supposés être des paramètres constants positifs.

### 3.3 Analyse de la stabilité

Nous allons étudier la stabilité du système dynamique (3.8), l'espace de phase de dimensions 4.

#### Les points d'équilibre du système

On cherche les points d'équilibres :

on pose  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0, \dot{\omega} = 0$  Alors :

$$\begin{cases} \alpha[z + \zeta x - (-a + b|\omega|)x] = 0, \\ y - z = 0, \\ -\beta(x - y) - \gamma z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

on obtient les points d'équilibres suivants :

$$P_e = (x, y, z, \omega); \quad x = y = z = 0, \omega = \omega_e \in \mathbb{R}$$

**Stabilité du système :**

Pour étudier la stabilité du système non linéaire (3.8) nous utilisons la méthode de linéarisation autour des points d'équilibres.

La matrice jacobienne du système (3.8) est :

$$J(x, y, z, \omega) = \begin{pmatrix} \alpha(\xi - W(\omega)) & 0 & \alpha & \text{sing}(\omega)(-abx) \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -\beta & \beta & -\gamma & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Au point d'équilibre  $P_e$  on a :

$$J(P_e) = \begin{pmatrix} \alpha(\xi - W(\omega_e)) & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -\beta & \beta & -\gamma & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$P(\lambda) = |\lambda I - J(P_e)| = \begin{vmatrix} \alpha(\zeta - W(\omega_e)) - \lambda & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -\beta & \beta & \gamma - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix},$$

d'où

$$P(\lambda) = [\alpha(\zeta - W(\omega_e)) - \lambda][-\lambda[(1 - \lambda)(-\gamma - \lambda) + \beta]] - \alpha\lambda[\beta(1 - \lambda)].$$

On pose  $(\zeta - W(\omega_e)) = E$ ,  $P(\lambda)$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda[(\alpha E - \lambda)[(\lambda - 1)(-\gamma - \lambda) - \beta] - \alpha\beta(1 - \lambda)] \\ &= \lambda[(\alpha E - \lambda)(\gamma + \lambda - \lambda\gamma - \lambda^2 - \beta) - \alpha\beta + \alpha\beta\lambda]. \\ &= \lambda[\alpha E\gamma + \alpha E\lambda - \alpha E\lambda\gamma - \alpha E\lambda^2 - \alpha E\beta - \lambda\gamma - \lambda^2 + \lambda^2\gamma + \lambda^3 + \lambda\beta - \alpha\beta + \alpha\beta\lambda] \\ &= \lambda[\lambda^3 + [\gamma - 1 - \alpha E]\lambda^2 + [(1 - \gamma)\alpha E + (1 + \alpha)\beta - \gamma]\lambda + \alpha[E(\gamma - \beta) - \beta]]. \end{aligned}$$

Donc :

$$P(\lambda) = \lambda[\lambda^3 + [\gamma - 1 - \alpha(\zeta - W(\omega_e))]\lambda^2 + [(1 - \gamma)\alpha(\zeta - W(\omega_e)) + (1 + \alpha)\beta - \gamma]\lambda + \alpha[(\zeta - W(\omega_e))(\gamma - \beta) - \beta]] = \lambda Q(\lambda). \quad (3.9)$$

par exemple pour

$$\alpha = 5, \beta = 5, \gamma = 0.11, \zeta = 3, a = 1.5, b = 1 \text{ et } w(\omega_e) = -a + b |\omega_e|. \quad (3.10)$$

le polynôme caractéristique (3.9) s'écrit :

$$P(\lambda) = \lambda Q(\lambda).$$

$$= \lambda[\lambda^3 + (5 |\omega_e| - 23.4)\lambda^2 + (50.15 - 4.5 |\omega_e|)\lambda + 24.5 |\omega_e| - 135.25] = 0. \quad (3.11)$$

Afin de trouver le domaine de  $\omega_e$  il est clair que  $P(\lambda)$  admet une valeur propre nulle



$\lambda_0 = 0$  pour lequel le système (3.8) possède une variété stable de dimension trois (indépendamment de la valeur propre nulle), on applique le critère de stabilité de Routh-Hurwitz à  $Q(\lambda)$ . Ainsi, toutes ses racines ont des parties réelles négatives si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} 5 |\omega_e| - 23.4 > 0, \\ 24.5 |\omega_e| - 135.25 > 0, \\ -22.5 |\omega_e|^2 + 331.55 |\omega_e| - 1038.3 > 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\omega_e| > 4.68, \\ |\omega_e| > 5.5204, \\ |\omega_e| > 4.5151, \quad |\omega_e| < 10.2204. \end{cases}$$

Alors :

$$5.5204 < |\omega_e| < 10.2204$$

Pour générer du chaos, il faut qu'au moins un  $\lambda_i$  de polynôme (3.11) soit positif. Mais aussi que la somme  $\lambda_i$  soit négative. En effet, dans le cas contraire le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est émergé et on aurait plus un attracteur de faible dimension ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos déterministe.

$$|\omega_e| < 5.5204, \text{ ou } |\omega_e| > 10.221,$$

Selon les résultats ci-dessus, nous déduisons que la variable d'état  $\omega(t)$  peut considérablement influencer le comportement dynamique du système (3.8).

### 3.4 Bifurcation et spectre des exposants de Lyapunov

#### 3.4.1 Comportements dynamiques en fonction du paramètre $b$

Dans cette section, les paramètres prennent les valeurs suivantes :  $\alpha = 5, \beta = 5, \gamma = 0.11, a = 1.5, \zeta = 3$  et on less  $b$  varier sur l'intervalle  $]0, 17[$  pour discuter de la dynamique complexe du système (3.8) avec les conditions initiale  $(x, y, z, \omega_0) = (-0.5, 0.1, 0.01, -1)$ .

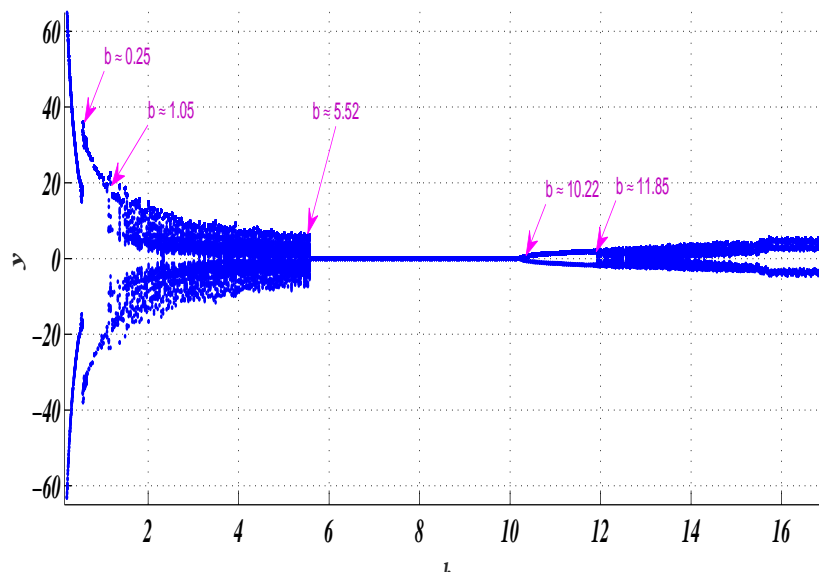


FIGURE 3.3: Diagramme de bifurcation par rapport au paramètre  $b$  pour  $\omega_0 = -1$

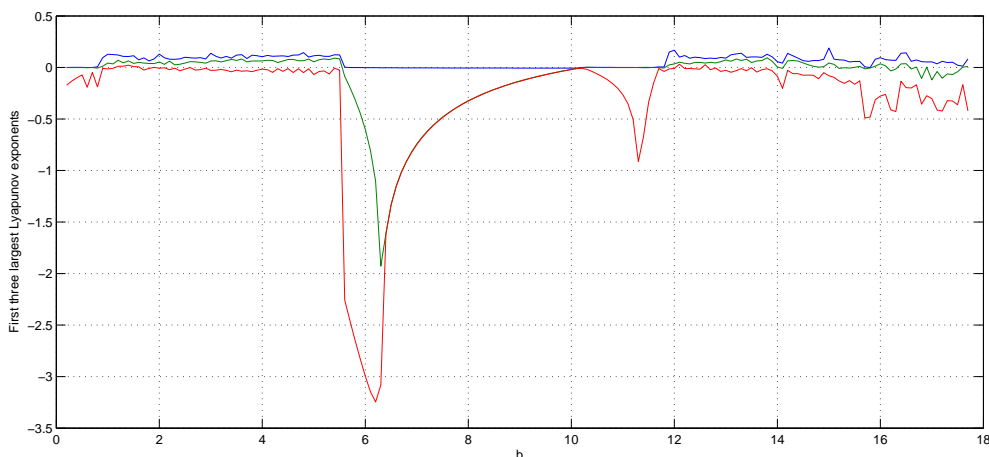


FIGURE 3.4: Les trois plus grands exposants de Lyapunov du système (3.8) en fonction du paramètre  $b$  pour  $\omega_0 = -1$

La figure (3.3) et (3.4) représentent le diagramme de bifurcation de  $y$  et le spectre d'exposants de Lyapunov correspondant, pour  $b$  variant dans l'intervalle  $]0, 17]$  avec une taille de pas  $h = 0.001$ .

- Pour  $b \in ]0.25, 1.05[ \cup ]10.22, 11.85[$  le système (3.8) présente une orbite périodique stable de période 1.

- Pour  $b \in ]5.52, 10.22[$  le système (3.8) un point fixe asymptotiquement stable.

- Pour  $b \in ]1.05, 5.52[ \cup ]11.85, 17[$  le système démontre un comportement chaotique et hyper chaotique.

Les exposants de Lyapunov au système (3.8) pour  $b = 3$  (calculer en utilisant l'algorithme de wolf suift) :

$$L_1 \approx 0.1031, L_2 \approx 0.0378, L_3 \approx -0.0272, L_4 \approx -38.0019.$$

La somme des exposants de Lyapunov est négative ( $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = -37.8882$ ) et les deux exposant ( $L_1, L_2$ ) positives. Ce que montre que le système (3.8) est hyper chaotique. La dimension au sens de Kaplan et Yorke de son attracteur est :

$$D_{KY} \approx 3 + \frac{L_1 + L_2 + L_3}{|L_4|} = 3 + \frac{0.1031 + 0.0378 - 0.0272}{38.0019} = 3.0029.$$

Qui est une dimension fractale.

### 3.4.2 Comportements dynamiques en fonction de l'état initial $\omega_0$

Pour d'étudier l'effet des valeurs de l'état initial sur le comportement dynamique de système (3.8). Nous fixons les paramètres (3.10), et on varié  $\omega_0$  dans l'intervalle  $[-15, 15]$ , avec les conditions initiale  $(x, y, z, \omega_0) = (-0.5, 0.1, 0.01, \omega_0)$ .

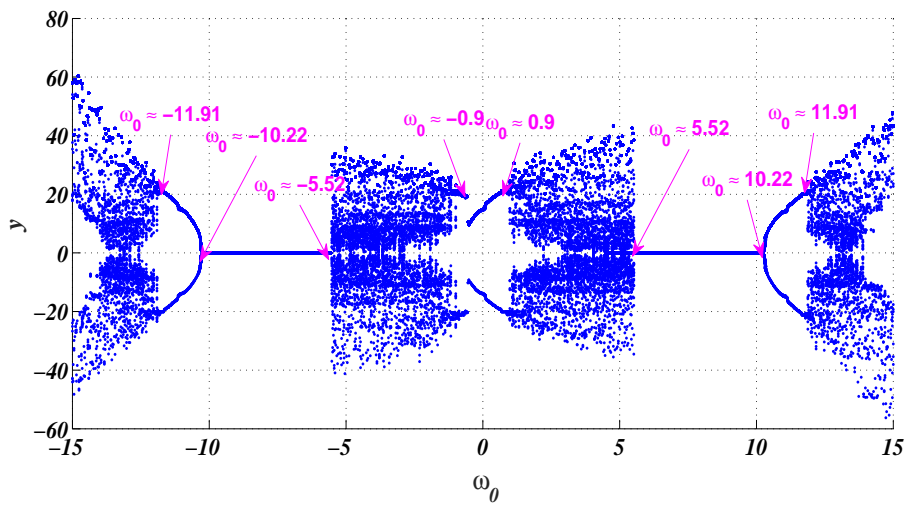


FIGURE 3.5: Diagramme de bifurcation par rapport à la quatrième coordonnée  $\omega_0$  de la condition initiale pour  $b = 1$

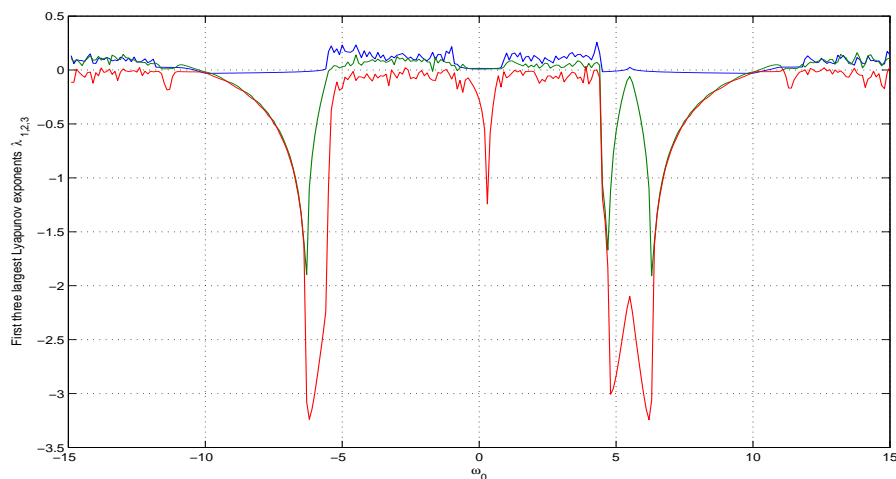


FIGURE 3.6: Les trois plus grands exposants de Lyapunov du système (3.8) en fonction du paramètre  $\omega_0$  pour  $b = 1$

La figure (3.5) et (3.6) représentent les exposants de Lyapunov spectre et le diagramme de bifurcation correspondant de  $y$ , en fonction de  $\omega_0$ .

Lorsque la valeur de l'état initial  $\omega_0$  appartient aux quatre intervalles suivantes :  $(-15, -11.91)$ ,  $(-5.52, -0.9)$ ,  $(0.9, 5.52)$ ,  $(11.91, 15)$  le système (3.8) présente le chaos. De plus, les deux diagrammes indiquent une symétrie par rapport à  $\omega_0 = 0$ .

En particulier, si on prend  $\omega_0 = -12$ , les valeurs des exposant de Lyapunov de système

(3.8) sont :

$$L_1 \approx 0.0664, L_2 \approx 0.0660, L_3 \approx -0.0007, L_4 \approx -34.6837.$$

On a :  $L_1 > 0, L_2 > 0$  et  $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = -34.6837 < 0$ , alors le système (3.8) hyper chaotique.

La dimension Kaplan et Yorke de son attracteur est :

On a  $j_0 = 3$  alors la dimension calculée comme suit :

$$D_{KY} = 3 + \frac{L_1 + L_2 + L_3}{|L_4|} = 3.0037$$

**\* Les attracteurs**

Les attracteurs chaotiques sont représentés dans le figure (3.7), où chaque attracteur correspond à une valeur différente de l'état initial. Ces attracteurs ont été obtenus en simulant le système (3.8) avec les paramètres (3.10) et les conditions initiales  $(x, y, z, \omega_0) = (-0.5, 0.1, 0.01, \omega_0)$ .

En particulier, les orbites périodiques de période 1 sont représentées en (figure (3.7) (b, e, c)) représente un point d'équilibre stable, alors que (figure(3.7) (a, d, f)) affiche des attracteurs chaotiques.

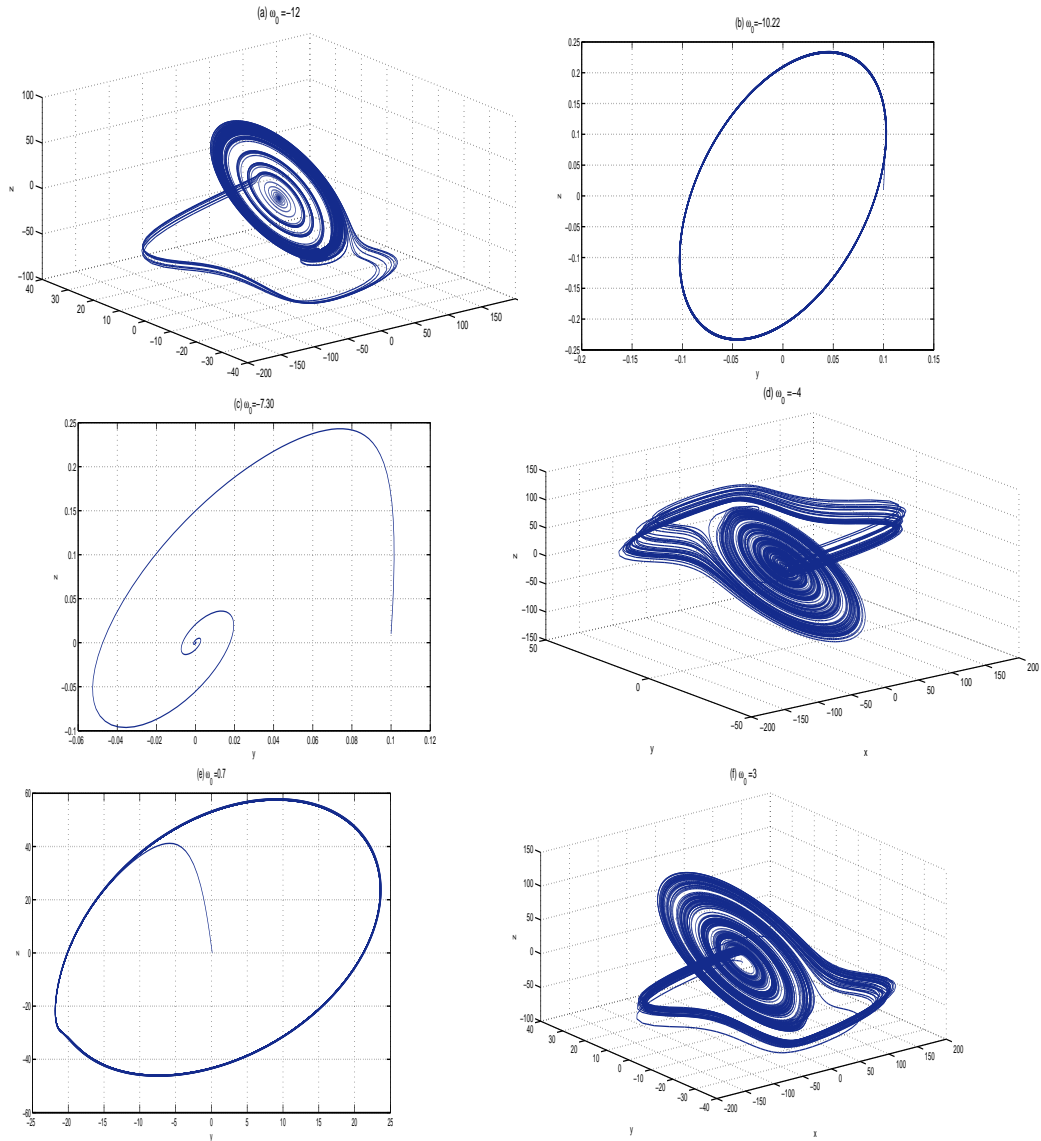


FIGURE 3.7: Les attracteurs pour différentes valeurs de condition initial  $\omega_0$  : (a)  $\omega_0 = -12$ , (b)  $\omega_0 = -10.22$ , (c)  $\omega_0 = -7.30$ , (d)  $\omega_0 = -4$ , (e)  $\omega_0 = 0.7$ , (f)  $\omega_0 = 3$ .

---

# CONCLUSION

Le but de ce mémoire est d'analyser les bifurcations et le chaos d'un circuit de Chua modifié.

Au début nous avons utilisé les concepts et les généralités du système dynamique chaotique pour étudier le comportement dynamique d'un circuit chaotique basé sur un memristor, en remplaçant la diode de Chua par un memristor à deux bornes actif.

Pour détecter le chaos nous avons présenté deux méthodes, à savoir les exposants de Lyapunov et le test 0-1.

Après avoir présenté les concepts et les outils nécessaires, on a abordé l'étude d'un circuit de Chua modifié basé sur un memristor, nous avons obtenu un système différentiel de quatre dimensions avec une fonction non-linéaire, ce qui peut générer un attracteur chaotique à double spirale, à une seule spirale et dynamique non linéaire complexe sous différents états initiaux.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. Abdelouahab, R. Lozi, *Hopf Bifurcation and Chaos in Simplest Fractional-Order Memristor-based Electrical Circuit*. Vol 6, 2015.
- [2] M. S. Abdelouahab, S. *Théorie des bifurcations et chaos*. Cours de master MA. centre universitaire abdelhafid boussouf mila, 2022.
- [3] M. S. Abdelouahab. *Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires*. Mémoire de magistère. Univ. Mentouri. Constantine 1, 2009.
- [4] M. S. Abdelouahab, N. Hamri. *Fractional-order hybrid optical system and its chaos control synchronization*. EJTP 11.30 (2014) : 49-62.
- [5] M. S. Abdelouahab, R. Lozi, *Hopf-like bifurcation and mixed mode oscillation in a fractional-order FitzHugh-Nagumo model*. AIP Conference Proceedings. Vol 2183. No. 1. AIP Publishing, 2019.
- [6] R. Amira, S. E. Bouzeraa, *Sur le test 0-1 pour confirmer le comportement chaotique d'un système dynamique*. Mémoire de mastre, centre universitaire abd elhafid boussouf mila, 2018.
- [7] N. Boudjerida, M. S. Abdelouahab, R. Lozi, *Modified projective synchronization of a fractional-order hyperchaotic memristor-based Chua's circuit*, Journal of Innovative Applied Mathematics and Computational Sciences, 69-85, 2022.
- [8] H. Broer, F. Takens, *Dynamical Systems and Chaos*, Groningen, Springer, 2009.



- [9] J. Crutchfield, D. Farmer, N. Packard et R. Shaw, *Le chaos*. October 1986.
- [10] H. Dang-Vu, C. Delcarte, *Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathématica*. Ellipses, 2000.
- [11] R. Djenhi, A. Makouf, *Introduction à la théorie des systèmes dynamiques discrets*, mémoire de master, Université abd elhafid boussouf mila, 2017.
- [12] L. Fortuna, M. Frasca, M. Gabriella Xibilia, *Chua's circuit implementations-yesterday, today, and tomorrow*. World Scientific, Series A-Vol. 65 , 2009.
- [13] A. Gasri, *Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques*, Thèse de doctorat, université Constantine 1, 2018.
- [14] P. Glendinning, *Stability, Instability and Chaos : an introduction to the theory nonlinear differential equations*. Cambridge University Press, 1994.
- [15] G. A. Gottwald, I. Melbourne, *On the Implementation of the 0-1 Test for Chaos*. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 8 : 129-145, 2009.
- [16] E. Goncalvés Da Silva, *Introduction aux systèmes dynamiques et chaos*, 2007.
- [17] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition*. Springer, 1998.
- [18] S. Kaouache, and M. S. Abdelouahab. *Modified projective synchronization between integer order and fractional order hyperchaotic systems*. *Jour. of Adv. Research in Dynamical and Control Systems* 10.5 (2018) : 96-104.
- [19] S. Kaouache, and M. S. Abdelouahab. *Inverse matrix projective synchronization of novel hyperchaotic system with hyperbolic sine function non-linearity*. *DCDIS B : Applications and Algorithms* 27 (2020) : 145-154.
- [20] B. Labed, S. Kaouache, and M. S. Abdelouahab. *Control of a novel class of uncertain fractional-order hyperchaotic systems with external disturbances via sliding mode controller*. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* 20.2 (2020) : 203-213.
- [21] M. Labid, *Contrôle et synchronisation de quelques types de systèmes dynamiques chaotiques*, Thèse de doctorat, centre universitaire abdelhafid boussouf mila, 2020/2021.
- [22] W. Laouira, *Contrôle des systèmes dynamiques chaotiques*, Thèse de doctorat, université constantine 1, 2018.

- [23] E. N. Lorenz, *Deterministic non-periodic flow*. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20 : 130-141, 1963.
- [24] G. C. Layek, *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2015.
- [25] O. Megherbi , *Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques*, mémoire de magister, université mouloud mammeri tizi-ouzou, 2013.
- [26] P. Müllhaupt, *Introduction à l'Analyse et à la Commande des Systèmes Non Linéaires*. Lausanne, Juin 2007.
- [27] R. Ouahabi, *Systèmes dynamiques et chaos : Différentes méthodes de contrôle et de synchronisation*, Thèse de doctorat, université constantine 1, 2018.
- [28] J. L. Pac, *Systèmes dynamiques : Cours et exercices corrigés 2<sup>e</sup> édition*. Dunod, Paris, 2016.
- [29] S. Rezzag, *Etude et estimation des bornes de systèmes dynamiques chaotiques et hyper-chaotiques*, Thèse de doctorat, université larbi ben m'hidi.
- [30] A. Senouci, *Systèmes dynamiques chaotiques et synchronisation*, Thèse de doctorat, université Mohamed Khider, Biskra, 2020.
- [31] C. H. Skokos, G. A. Gottwald, J. Laskar, *The 0-1 Test for Chaos : A Review, Physics Chaos Detection and Predictability* 915 : 221-247, 2016.
- [32] C. Théo, *Etude, réalisation et caractérisation de memristors organiques électro-greffés en tant que nanosynapses de circuits neuro-inspirés*, Thèse de doctorat, université Paris-sud, 2014.
- [33] M. Tidjani, *Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires*, Thèse de doctorat, université constantine 1, 2013.
- [34] T. Vialar, A. Goergen, *Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics*. Springer, 2009.
- [35] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, et J. A. Vastano, *Determining Lyapunov Exponents from a time Series*. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 16 : 285-317, 1985.