الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut de Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentale

Topologie faible

Préparé par : Fouaz Lahmari
Youcef Omara

Soutenu devant le jury

Badredine Boudjedaa	Pr	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Chafika Sekhane	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Rakia Ahmed-Yahia	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

تشكرات

بسم الله الرحمان الرحيم والحمد لله العزيز العليم الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، الحمد لله الذي وفقنا لإنجاز هذا البحث العلمي و لولا توفيقه ما كنا ها هنا نقف اليوم ولا كنا من طلبة العلم ......

نتقدم بالشكر الجزيل والعرفان الكبير إلى جميع من ساندنا في مشروعنا وكان عونا لنا باليسير أو بالكثير.

نتقدم بالشكر الخاص والمخصوص للأستاذة المشرفة سخان شفيقة التي كانت حريصة على جودة بحثنا ودقة معلوماتنا فكانت شراعا يقود سفينتنا.

نشكر اللجنة المناقشة البروفيسور بوجدع بدر الدين والأستاذة أحمد يحيى راقية على مناقشتهم بحثنا ومنحهم من وقتهم لنا.

نشكر كل أساتذتنا الذين مروا بنا وأعطونا الكثير مما حازت عليه عقولهم ولم يبخلوا.

الشكر للأصدقاء على حضورهم اليوم لأجلنا.

وفي الأخير ماكان من خطأ فمنا وما كان من صواب من الله العليم.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

mes chers parents (ma mère ***Hamama*** et mon pére ***Ammar***) qui m'ont soutenu moralement et financièrement depuis le début de ma carrière universitaire, je demande à Dieu de les protéger pour moi et de leur accorder santé et bien-être. .

A mes chers frères et soeurs.

Et à toute la grande famille

A mes amis (***Youcef, Moamen, Sohaib,Loupi,...***)

A touts collègues de travail(***Farouk, Lotfi , Omer, Wared, ...***)

A tous les autres que je n'ai pas cités nommément et qui Reconnaissance de mon dévouement.

Je dédie également ce travail à tous les professeurs qui m'ont encadré durant mon parcours académique depuis le début

Pour toutes mes promotions mathématiques fondamontale 2022/2023

Fouaz

Dédicace

Tout le monde nous aime....

celui qui nous a fait confiance et a partié sur notre arrivée de cette somme scientifique et notre succés sur notre chemin verse ce succés vous a donné .

À ceux qui ont marqué notre trajectoire difficile. des professeurs superlatifs...

Aux parents (ma mère ***Aicha*** et mon pére ***A elwahab***), fréers, amis (fouaz, A aggoune,......) et collégues .

À ma petite famille qui grandit tranquillement, que ce succés soit un pére de tous les bons .

Pour toutes mes promotions mathématiques fondamontale 2022/2023

Youcef

Résumé

Dans ce mémoire , nous avons défini le sujet plus important en l'analyse mathématique et les propriétés de la topologie faible, ainsi que son rôle dans l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions aux problémes variables.
Nous avons également défini la topologie faible-étoile et soulignéso importance pour rendre la boule unité fermée dans l'espace bilatéral avec un Banach espace monolithique.

Summary

In this thesis , we have defined the most important topic in mathematical analysis and the properties of weak topology, as well as it's role in studying the existence and uniqueness of solutions to variable problems.
We have also defined the weak-star topology and emphasized it's importance in making the closed unit ball in the Banach space a metrizable space .

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بتعريف أهم موضوع في التحليل الرياضي وخصائص الطوبولوجيا الضعيفة و دورها في دراسة وجود و وحدانية حل مشكلات متغيرة.

كما تعرفنا أيضا علي الطوبولوجيا الضعيفة نجمة و أهميتها في جعل كرة الوحدة المغلقة في الفضاء الثنائي بفضاء بناخ متراصة.

TABLE DES MATIÈRES

Abréviations et notations

$\langle .,. \rangle$: Le produit scalaire . les crochets de dualité .

H : Espace de Hilbert .

E : Espace de Banach .

E′ : Le dual de E .

E″ : Le biduale de E .

σ(E, E′) : La topologie faible .

σ(E′, E) : La topologie faible étoile .

$\rightarrow$: La convergence forte .

$\rightharpoonup$: La convergence faible .

$\rightharpoonup^{\star}$: la convergence faible étoile .

$\hookrightarrow$: l'injéction par L'inclusion .

$L^{\infty}(\Omega)$: = {u : Ω → R messurable ; sup $e_{t\in\Omega}$|u(t)| < ∞.

$L^{2}(\Omega)$:l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebésgue dx

D(Ω) : l'espace des fonctions indéfiniment différentiables á support compact.

D′(Ω) : l'espace des distributions sur Ω

$H^{1}(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre 1 .

$H^{1}_{0}(\Omega)$: l'adhérence de D(Ω) dans $H^{1}(\Omega)$.

Espace généraux

C, : Corps des nombres complexes.

Z : Groupe de entier relatifs

N : Ensemble des entiers naturels(positifs ou nuls)

R : Corps des nombres réels .

k^{n} : Espace vectoriel des n-uplets à coefficients dans k .

INTRODUCTION

La théorie de la topologie faible est un sujet important dans l'analyse fonctionnelle, Elle a ses racines dans l'étude des espaces vectoriels topologiques. Les premiers travaux sur ce sujet remontent aux années 1930.

En 1935, Banach a introduit le concept de dualité dans les espaces linéaires normés. Il a montré que chaque espace linéaire normé est naturellement associé à un autre espace, connu sous le nom d'espace dual, qui se compose de toutes les fonctionnelles linéaires continues sur l'espace d'origine. Cette idée a permis le développement de la théorie de la convergence faible, qui consiste à étudier le comportement de suite de points dans un espace topologique par rapport à une topologie plus faible induite par l'espace dual. Le concept de topologie faible a été développé par Arens et Ells dans les années 1940. Ils ont introduit la notion d'espace vectoriel topologique localement convexe, qui est un espace muni d'une famille de semi- normes définissant une topologie. En utilisant ce cadre, ils ont pu généraliser bon nombre des résultats obtenus dans l'étude des espaces linéaires normés à des espaces plus généraux.

Une autre contribution importante à la théorie de la topologie faible est venue de Mackey dans les années 1950. Il a introduit le concept de double paire, qui est une paire d'espaces vectoriels topologiques qui sont naturellement associés les uns aux autres par un appariement bilinéaire. Les travaux de Mackey ont étendu la théorie de la dualité de Banach à une classe plus large d'espaces vectoriels topologiques.

Depuis lors, la théorie de la topologie faible n'a cessé d'évoluer et a trouvé des applications dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment l'analyse fonctionnelle, les équations aux dérivées partielles et la théorie des probabilités.
En dimension infinie, il est délicat de trouver des ensembles compacts. par exemple, dans l'espace des fonctions continues, la compacité requiert des conditions additionnelles (l'équicontnuité). En pratique, une telle propriété n'est que rarement vérifiée. Pour surmonter cette difficulté, une posibilité est d' affaiblir la topologie, i.e de passer d'une convergence forte (ou convergence du norme) à une convergence faible .
Soit E = (E, τ) un espace vectoriel topologique dont le dual continu E′ peut ou non séparer des points. La topologie faible* (prononcée " faible étoile ") sur E′ est définie comme étant la topologie E sur E′, c'est-à-dire la topologie la plus plus petite (la topologie avec le moins d'ensembles ouverts) sous laquelle chaque élément x dans E correspond à une application continue sur E′ . La topologie faible* est parfois appelée topologie ultrafaible ou topologie σ-faible.

L'observation fondamentale de la définition ci-dessus est que chaque élément x ∈ E induit une fonctionnelle linéaire f_x sur E′. En particulier, f_x de la forme

$$f_x\lambda = \lambda(x)$$

pour chaque élément λ dans E′, et à cause de cela, on peut voir l'espace E comme une collection de fonctionnelles linéaires sur E′ et donc définir la topologie E sur celui-ci.

Il découle immédiatement de ce qui précéde le fait que la topologie faible* est un cas particulier d'un concept plus général. En particulier, étant donné une famille non vide Γ d'applications d'un ensemble E à un espace topologique X, on peut définir une topologie τ_Γ comme étant la collection de toutes les unions et intersections finies d'ensembles de la forme f^{-1}(O) avec f daéns Γ et O un ouvert dans X. La topologie τ_Γ est souvent appelée la Γ-topologie sur E et/ou la topologie faible sur E induite par Γ, d'où il résulte que la définition énoncée ci-dessus correspond au cas particulier de

$\Gamma = E$ pour E un espace vectoriel topologique.

La topologie faible* est fondamentale tout au long de l'analyse fonctionnelle, jouant un rôle fondamental dans un certain nombre de théorémes importants, y compris le théoréme de Banach-Alaoglu.

Le travail que nous effectuons s'organise en trois chapitres, répartis comme suit :

Le premiére chapitre, consiste à quelques rappels de topologie générale (espaces métriques, espaces topologiques, espaces réflexifs, espaces séparables).

Le deuxiéme chapitre,est consacre à la topologie faible dans un espace de Hilbert et dans un espace de Banach, et la convergence faible .

Le troisiéme chapitre, concerne la topologie faible*, la convergence faible*, le théoréme de Césaro et le théoréme Banach Aloaglu.

CHAPITRE 1

QUELQUES RAPPELS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Dans ce chapitre , nous présentons les notions de base de la topologie . Nous allons dégager les structures qui permettent de parler de limite et de continuité .

1.1 Espaces topologiques, Espaces métriques

1.1.1 Espaces topologiques

Quand on aborde des problémes de convergence, on sàperçoit assez vite que la notion de distance ou de norme est trop restrictive. Par exemple :
si on prend la suite de fonctions $f_n(x) = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ sur R , on a bien envie de dire quelle converge vers 0 puisqu'en tout point de R ou sur toute région bornée de R cette convergence est vérifiée . Cependant il n'y a pas de distance évidente que le on peut mettre pour exprimer cette convergence : L'écart , mesuré globalement sur la droite réelle , entre deux termes de la suite est toujours infini .
Les mathématiciens du 19^{eme} et du début 20^{eme} siécle ont dégagé la structure déspace topologique qui contient de façon abstraite toutes les hypothéses nécessaires à l'étude de la convergence et de la continuité .

Definition 1.1.1 *On appelle espace topologique un couple (X , T) oú X est un ensemble et T est une famille de parties de X, appelées ouverts, vérifiant :*
(i) Toute réunion d'ouverts est un ouvert .
(ii) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert .
(iii) X et Ø sont des ouverts . Une autre façon de dire est dire que la famille des ouverts est une partie de $P(X)$ stable par union quelconque, intersection finie et contenant X et Ø .
On peut voir que l'ensemble des réunions quelconques d'intervalles ouverts de R définit une topologie sur R .
Plus généralement tout espace métrique est un espace topologique .

Topologie des espaces métrique

Soit (X, d) un espace métrique .

Definition 1.1.2 *On appelle ouvert de (X , d) toute partie T de X qui est vide ou qui vérifie :*

$$\forall x \in T, \exists r > 0, B(x,r) \subset T \ .$$

On vérifie facilement les axiomes (i), (ii) et (iii). Ainsi une distance définit une topologie.

Proposition 1.1.1 *Une boule ouverte est un ouvert.*

Preuve. Soit $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte de (X , d). Soit $\in B(x_0, r_0)$. On a : $d(x_0, x) < r_0$ et on pose $\rho = \frac{r_0 - d(x_0,x)}{2}$. Alors la boule B(x , ρ) est incluse dans $B(x_0, r_0)$.
En effet pour $y \in B(x, \rho)$ on a :

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + r_0 - d(x_0, x) = \frac{r_0 + d(x_0,x)}{2} < r_0 \ .$$

■

Corollaire 1.1.1 *Un ouvert de (X , d) est une union quelconque de boules ouvertes .*

Preuve. Soit O un ouvert de (X, d). Pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que B(x, r) $\subset O$. Ainsi le réel strictement positif $r_x = sup\{r > 0, B(x,r) \subset 0\}$ est bien défini pour tout $x \in O$ et on a $O = \bigcup\limits_{x \in O} B(x, r_x)$. ■

Definition 1.1.3 *Dans un espace topologique (X , T) on appelle fermé toute partie de X dont le complémentaire est un ouvert.*
On note F la famille de tous les fermées. En résumé on a $(f \in F) \Leftrightarrow (\complement_x F \in T)$. On déduit de (i) (ii) et (iii) par passage au complémentaire les propriétés.

Proposition 1.1.2 *La famille F de tous les fermés vérifie :*
(F1) Toute intersection de fermés est un fermé.

(F2) Une réunion finie de fermés est un fermé.

(F3) Ø et X sont des fermés.

Proposition 1.1.3 *Dans un espace métrique (X , d), toute boule fermée est un fermée.*

Preuve. Soit $B_f(x_0, r_0)$ une boule fermée de (X , d). Il ságit de montrer que : $\complement_x B_f(x_0, r_0)$ est un ouvert. Soit $x \notin B_f(x_0, r_0)$. On a $d(x_0, x) > r_0$ et on pose : $\rho = \frac{d(x_0,x)-r_0}{2}$.
Alors la boule B(x , ρ) est incluse dans $\complement_x B_f(x_0, r_0)$. En effet, pour $y \in B(x, \rho)$ on a :

$$\mathrm{d}(x_0\ , \mathrm{x}) - \mathrm{d}(x_0\ , \mathrm{y}) \leq |\ \mathrm{d}(x_0\ , \mathrm{x}) - \mathrm{d}(x_0\ , \mathrm{y})| \leq d(x, y) < \rho = \frac{d(x,x_0)-r_0}{2}\ .$$

d'ou l'on tire :

$$r_0 < \frac{d(x_0,x)+r_0}{2} = \frac{d(x_0,x)-d(x_0,x)r_0}{2} < d(x_0, y)\ .$$

Cette derniére inégalité dit explicitement $y \in \complement_x B(x_0, r_0)$. ■

Exemple 1.1.1 *Dans R les intervalles fermés [a , b], $-\infty < a \leq b < +\infty$ sont fermés.*
Attention : les intervalles [a ; +∞[et]-∞ ; b] , a , b ∈R, sont des fermés comme complémentaires des ouverts]−∞ ; a[et]b ; +∞[(revenir á la définition des ouverts des espaces métriques).
En revanche [0 , 1[n'est ni ouvert ni fermé.

Remarque 1.1.1 *On peut définir la topologie avec les fermés en prenant (F1), (F2) et (F3) comme axiomes et définir ensuite les ouverts comme les complémentaires des fermés.*
Les assertion (i), (ii) et (iii) deviennent alors des propriétés .
De ce fait on préfére noter (X , T) un espace topologique T faisant référence á O ou F (voire la famille des voisinages V définie plus bas) .

Exemples 1.1.1 *(d'éspaces topologiques)*
a) Les espaces métriques et les espaces vectoriels normés sont des espaces topologiques .
b) Topologie discréte : tous les ensembles sont des ouverts (et des fermés). C'est la topologie associée à la distance triviale. Pour vérifier qu'une topologie est discréte, il suffit de vérifier que

tous les singletons sont ouverts. C'est le cas pour Z muni de la distance d(x , y) = | x - y |.

c) Topologie grossiére : C'est la topologie qui a le moins d'ouverts (de fermés) possible :

$T = \{\phi , X\}$, $F = \{X , \phi\}$.

On verra que si X a au moins 2 éléments cette topologie n'est pas métrisable.

1.1.2 Espaces métriques

Definition 1.1.4 *Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \longrightarrow R$ pour tout x, y, z∈ X :*

i) $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) .

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire) .

Definition 1.1.5 *Un espace métrique est un couple (X , d) oú X est un ensemble et d est une distance sur X.*

Exemple 1.1.2 *L'ensemble des réels muni de la distance $d(x , y) =| x - y |$ est un espace métrique .*

Propriétés de la distance

Proposition 1.1.4 *Une distance d sur un ensemble X vérifie :*

a) La distance est toujours positive ou nulle :

$$\forall x, y \in X; d(x, y) \geq 0 .$$

b) La distance entre les distances est plus petite que la distance :

$$\forall x, y, z \in X; | d(x, y) - d(x, z) | \leq d(y, z) .$$

Preuve. a) En utilisant successivement i) , iii) et ii) on obtient pour $x, y \in X$:

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y) .$$

b) En utilisant iii) on obtient pour $x, y, z \in X$: $d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$. Par symétrie et en utilisant ii) , on a aussi : $d(x,y) - d(x,z) \leq d(z,y) = d(y,z)$.
On en déduit $| \, d(x,z) - d(x,y) \, | \leq d(y,z)$. ■

Definition 1.1.6 *Soit(X , d) un espace métrique, soit $x \in X$ et soit $r \in R_+^*$. On appelle boule ouverte (rsp. boule fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble :*

$$B(x,r) = \{y \in X, d(x,y) < r\} .$$
$$\textit{resp. } B_f(x,r) = \{y \in X, d(x,y) \leq r\} .$$

Pour $0 < r < r'$, les inclusions $B(x , r) \subset B_f(x,r) \subset B(x,r')$ sont des conséquences directes de la définition .

Voisinages

Definition 1.1.7 *Soit (X , T) un espace topologique et soit $x \in X$. On appelle voisinage de x dans X, toute partie de X contenant un ouvert contenant x.*
On note V(x) l'ensemble des voisinages de x :

$$V(x)=\{V \in P(X) , o \in O , x \in o \subset V \} .$$

Proposition 1.1.5 *Si (X , d) est un espace métrique et $x \in X$, on a*

$$V(x) = \{V \in P(X) , \exists r > 0 , B(x , r) \subset V \}.$$

Preuve. Si V est un voisinage de $x \in X$, il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$. Par définition des ouverts des espaces métriques, il existe $r > 0$ tel que $B(x , r) \subset O$.
Dans le sens inverse si $B(x , r) \subset V$, alors on prend $O = B(x , r)$.
On peut caractériser les ouverts á l'aide des voisinages. ■

1.2 Espaces réflexifs, Espaces séparables

1.2.1 Espaces réflexifs

Definition 1.2.1 *soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E″. On dit que E réflexif si J(E) = E″.*

$$J : E \longrightarrow E''$$
$$f \mapsto (g \in E' \mapsto \langle g, f \rangle_{E',E} \in K)$$

c'est à dire pour tout $\varphi \in E''$, il existe un unique $f \in E$ tel que $\langle \varphi, g \rangle_{E'',E'} = \langle g, f \rangle_{E',E}$ pour tout $g \in E'$.
Lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E″.

Remarque 1.2.1 *Il est essentiel d'utilise J dans la définition présédent . On peut construire un exemple surprenant non réflexif E pour lequel il existe une isométrie surjective de E sur E″ .*
Le résultat suivant énonce une caractérisation important des espace réflexifs.

Proposition 1.2.1 *soit E une espace de Banach réflexif et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors M - muni de la norme induit par E - est réflexif.*

Theoreme 1.2.1 *.[5] Soit E et F deux espaces de Banach réflexifs. soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur linéair non-borné. fermé avec $\overline{D(A)} = E$.*
(Alors$D(A^*)$ est dense dans E′).
Ceci permet d'introduire $A' : D(A'' \subset E' \rightarrow F')$ et de considérer A'' comme un opérateur non-borné de E dans F. Alors :

$$A^{**} = A$$

1.2.2 Espace séparables

Definition 1.2.2 *On dit qu' un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble D⊂E dénombrable et dense.*

Proposition 1.2.2 *soit E un espace métrique séparable et soit F un sous-ensemble de E. Alors F est séparable.*

Démonstration : Soit (u_n)une suit dénombrable dense dans E.
Soit (r_m)une suit de réells positifs avec $r_m \to 0$.
On choisit (arbitrairement) $a_{m.n} \in B(u_n, r_m) \cap F$ lorsque cet ensemble est non vide. Il est clair que la suit ($a_{m.n}$) constitue un ensemble dénombrable dense dans F .

Lemme 1.2.1 *.[2] Soit (E, θ) un espace topologique. S'il existe une famille non dénombrable $(O_j)_{j\in J}$ d'ouverts de E, non vide et deux á deux disjoints, alors E n'est pas séparable.*

Preuve de la non dénombrabilité de P(N) : On peut utiliser l'argument de la diagonale de Cantor (qui permet aussi de démontrer la non dénombrabilité de [0, 1]). Pour toute partie dénombrable D, de P(N), on va construire un élément B de P(N) qui n'appartient pas à D, ce qui fournit la conclusion. Notons $D = \{A_n; n \in N\}$ où $A_n \subset N$ pour tout $n \in N$. On définit $B = \{n \in N; n \notin A_n\}$. Alors B est une partie de N et$B \neq A_n$ pour tout $n \in N$ donc $B \notin D$.

Espaces réflexifs :

1. Les Hilberts (Thm de Riesz) : $l^2(N), L^2(\Omega), H^1(0,1)H^1_0(0,1), ...$
2. $L^p(\Omega, \nu)$ pour $1 < p < \infty$ et ν mesure positive $\sigma-$finie. En effet , $(L^p)' = L^{p'}$ pour $1 \leqslant p < \infty$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Espaces non réflexifs :

1. On note c^0 l'espace des suites $(x_n)_{n\in N} \in l^\infty(N, R)$ qui tendent vers zéro, muni de la norme $||.||_{l^\infty}$. Alors $(c^0)' = l^1$ et $(l^1)' = l^\infty$ donc c^0 n'est pas réflexif. On en déduit que l^1 et l^∞ ne sont pas réflexifs. [un Banach E est réflexif ssi son dual E' est réflexif]

Remarque 1.2.2 *$l^1(N, C)$ est trâs pathologique : une suite qui converge faiblement dans l^1 converge fortement dans l^1. Les suites convergentes sont donc les mêmes pour la topologie forte et pour la topologie faible. Néanmoins, ces 2 topologies sont distinctes (les ouverts faibles ne sont jamais bornés).*

1.3 caractérisation séquentielle de propriétés topologiques

Continuité

Continuité en un point

Definition 1.3.1 *Soit (X , T) et (X′ , T′) deux espaces topologiques et soit $a \in X$. On dit qu'une fonction $f \in F(X , X_0)$ est continue au point a si l'image réciproque $f^{-1}(V')$ de tout voisinage V′ de f(a) est un voisinage de a. Cela séecrit :*

$$\forall\ V' \in V(f(a))\,;\, f^{-1}(V') \in V(a)\,;$$

ou bien $\forall\ t' \in T'\,;\, f(a) \in T'\,;\, a \in t$ et $f(t) \subset T'$.

Proposition 1.3.1 *Si (X, d) et (X_0, d_0) sont des espaces métriques, si $a \in X$ et si $f \in F(X, X_0)$ les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
i) f est continue au point a.
ii) $\forall \varepsilon > 0\,;\, \exists \alpha > 0\,;\, \forall\ x \in X.\ (d(x, a) \leq \alpha) \Rightarrow (d'(f(x), f(a)) \leq \varepsilon)$.
iii) Continuité séquentielle en a : Pour toute suite $(x_n)_{n \in N}$ de X convergeant vers a, la suite image $(f(x_n)_{n \in N})$ converge vers f(a).

Preuve. Déjá faite. Il suffit de traduire la continuité en limite de f(x) quand x tend vers a .
b) La propriété iii) (qui est donc toujours vraie si f est continue en a), a la conséquence suivante : Dans un espace topologique séparé (X, T), si $(x_n)_{n \in N}$ est une suite récurrente donnée par $(x_n) = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ avec $f \in F(X , X')$, si l est limite de la suite $(x_n)_{n \in N}$ et si f

est continue en l alors f(l) = l.

En effet, comme (X, T) est séparé, on écrit

$l = lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ et comme f est continue en l on a :

$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(l)$. ■

Remarque 1.3.1 *On peut munir*

$\bar{N} = N \cup\{+\infty\}$ de la topologie suivante : pour $n_0 \in N$ le singleton $\{n_0\}$ forme une base de voisinages pour n_0 (topologie discréte).

pour $+\infty$ on prend la base de voisinages,

$(+\infty) = \{\{n\,;\,n+1\,;.....\,:....\,:....\,:....\,;\,+\infty\}\,;\,n\in N\}$.

Avec cette topologie et en posant .

$f(+\infty) = lim_{n\to+\infty} x_n$, les suites convergentes d'un espace topologique séparé (X , T) ne sont rien d'autre que les fonctions de $\bar{N}$ dans X continues en tout point .

Propriétés

Theoreme 1.3.1 *.[4] Soit (X, T), (X′, T′) et (X″, T″) trois espaces topologiques. Si la fonction $f : X \to X'$ est continue en $a \in X$ et si la fonction $g : X' \to X''$ est continue en $f(a) \in X''$ alors $g \circ f$ est continue en a .*

Preuve. Soit V″ un voisinage de g [f(a)] dans X″, alors comme g est continue en f(a), g^{-1} (V″) est un voisinage de f(a). Mais comme f est continue en a.

$(g \circ f)^{-1} (V'') = f^{-1} (g^{-1} (V''))$ est un voisinage de a. ■

Proposition 1.3.2 *(Rappels sur les fonctions numériques) Soit (X, T)un espace topologique, soit $f, g \in F(X, K)$ avec K = R ou C et soit $\lambda \in K$. Si f et g sont continues en $a \in X$ alors $f + g$, λf, fg, sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.*

Preuve. On munit K^2 de la norme $\|(x, y)\|\ 1 = \max\{|x|, |y|\}$. Il est clair que si f et g sont continues en $a \in X$ alors l'application $f \times g : X \to K^2$ définie par $(f \times g)(x) = (f(x), g(x))$ et l'application $f \times \lambda : X \to K^2$ définie par

$(f\times\lambda)(x) = (f(x), \lambda)$ sont continues en a. De plus les applications $+ : (x, y) \to x + y$ et $\times$: $(x, y) \to xy$ sont continues en tout point de K^2 tandis que l'application = :
$(x, y) \to x = y$ est continue en tout point de $K \times K'$. On utilise la transitivité de la continuité pour conclure . ■

Continuité globale

Definition 1.3.2 *Soit (X, T) et (X', T') deux espaces topologiques. On dit qu'une fonction $f : X \to X'$ est continue sur X si elle est continue en toutpoint de X. On note $C^0(X, X')$ (ou $C^0(X, T, X', T')$ s'il est besoin de préciser les topologies) l'ensemble de toutes les fonctions continues de X dans X'.*

Theoreme 1.3.2 *.[4] Pour deux espaces topologiques (X, T) et (X', T') et $f\in F(X, X')$ les trois assertion suivantes sont équivalents :*
a) f est continue sur X.
b) L'image réciproque de tout ouvert de X' est un ouvert de X.

$$\forall t'\in T', f^{-1}(t')\in T.$$

c) L'image réciproque de tout fermé de X' est un fermé de X.

$$\forall f' \in F', f^{-1}(f')\in F.$$

Preuve. a) ⇒ b) : Si $t' \in T'$, alors t' est un voisinage de chacun de ses points. Si f est continue il s'ensuit que $f^{-1}(t')$ est un voisinage de chacun de ses points. C'est un ouvert. b) ⇒ a) : Montrons que pour tout point $x \in X$, $v' \in V(f(x))$ entraîne $f^{-1}(v') \in V(x)$. Si $v'\in V(f(x))$, il existe $t' \in T'$ tel que $f(x)\in t' \in v'$. On a alors $x \in f^{-1}(t')\subset f^{-1}(v')$ et par hypothèse $f^{-1}(t')$ est un ouvert de X. Donc $f^{-1}(v')$ est un voisinage de x. b) ⇒c) : On a les équivalences.

$$(\forall t' \in T, f^{-1}(t') \in T)\Leftrightarrow(\forall t' \in T, \complement_x f^{-1}(t') \in F)$$
$$\Leftrightarrow(\forall f' \in F, f^{-1}(f) \in F).$$

■

Remarques 1.3.1 *a) La continuité de f sur X n'entraîne pas f(t) ∈ T′ pour t ∈ T et f(f) ∈F′ pour f∈ F. Par exemple la fonction* $x \mapsto x^2$ *envoie l'ouvert de R]-1 ; 1[sur [0 ; 1[qui n'est ni ouvert ni fermé dans R.*
b) Les propriétés de transitivité et des fonctions numériques sont encore vraies pour la continuité globale.
c) Si l'on considère la topologie sur un ensemble comme une structure donnée par exemple par la famille d'ouverts. Le Théorème [2] dit que les applications continues sont les applications qui par image réciproque envoie la structure de X′ dans celle de X. [Ainsi l'ensemble continues est un Espaces métriques, espaces topologiques. les morphismes associés á la structure "espace topologique" (le changement de sens ne pose pas de problème et est même assez fréquent, on parle de contra variance). La topologie algébrique s'appuie sur ce point de vue.]

Compacité

Le terme de compacité évoque une idée de petitesse. Ainsi dans un espace topologique compact, il n'est pas possible de mettre une infinité de points sans qu'ils s'accumulent quelque part. On verra aussi que les parties compactes de R^n sont les parties fermées bornées. En fait de petitesse, les compacts sont définis par une propriété de finitude topologique. L'importance de la notion de compacité vient du fait qu'elle permet de ramener des problèmes de complexité apparemment infinie à l'étude d'un nombre fini de cas .

Définitions

Definition 1.3.3 *(Borel-Lebesgue) On dit qu'un espace topologique (X, T) est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini :*

$$(X = \textstyle\bigcup_{i\in I} O_i) \Rightarrow (\exists J \in I, J \text{ fini}, X = \textstyle\bigcup_{i\in J} O_i).$$

Par passage au complémentaire on a une définition équivalente avec les fermés que nous donnons ici comme propriété.

Proposition 1.3.3 *Un espace topologique (X, T) est compact s'il est séparé et si de toute famille de fermés d'intersection vide on peut extraire une sous famille finie d'intersection vide :*

$$(\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset).$$

Le résultat suivant est une conséquence utile dans le cas ou les fermés sont emboîtés.

Proposition 1.3.4 *Si (X, T) est un espace compact, toute suite décroissante de fermés non vides.*

$$(F_n)_{n \in N}, F_{n+1} \subset F_n, F_n \neq \emptyset.$$

a une intersection non vide.

Preuve. Par la contra posée, si $\bigcap F_n = \emptyset$, il existe $n_1, ..., ..., ..., ..., n_N \in N$ tels que : $F_{n_1} \cap, ..., .., \cap F_{n_N} = \emptyset$.
Dans ce cas $F \max\{n_1, ..., ..., n_N\} = F_{n_1} \cap ...., ..., \cap F_{n_N} = \emptyset$. ce qui contredit l'hypothèse.
En fait il n'est pas nécessaire de supposer la famille de fermés dénombrable. Dès que l'ensemble I est muni d'une relation d'ordre total (toute partie finie admet un maximum et un minimum), la famille (F_i) étant décroissante par rapport à l'ordre sur I et l'inclusion dans F, le résultat est vrai. ■

CHAPITRE 2

TOPOLOGIE FAIBLE

2.1 Topologie faible dans un espace de Hilbert (H sur $K = R$ ou C)

Definition 2.1.1 *La topologie faible de* $(H, \langle ., . \rangle)$*est la topologie la moins fine (contenant le moins d'ouverts) rendant continues les application* $\varphi_g : h \in H \mapsto \langle g, h \rangle \in K$*. On note* H^ω *pour* H *muni de sa topolopie faible.*

2.1.1 Application :calcule des variations

Optimisation sur un espace topologie

On est habitué à ce qu'une fonction continue sur un compact atteigne son infimum. Sur un espace métrique, une preuve classique utilise une suite minimisante (caractérisation séquentielle des compacts et de la continuité). L'énoncé est en fait vrai sur un compact topologique et avec une fonction moins que continue, mais la preuve doit être modifée.

Theoreme 2.1.1 *.[1] Soit* (X, θ) *un espace* ***topologique compact*** *et* $\Phi : X \to R$ *une application* ***semicontinue inférieurement****, c'est à dire* $\Phi^{-1}(]a, \infty[)$ *est ouvert,* $\forall a \in R$*. Alors* Φ *est minorée et atteint son infimum :* $\exists x_* \in X$ *tq* $\Phi(x_*) = \min_X(\Phi)$.

Preuve. topologie : Du recouvrement ouvert $X \subset \cup_{n \in Z} \Phi^{-1}(]n, \infty[)$ on peut extraire un sous recouvrement fini. Comme ces ouverts sont décroissants, on obtient $N \in Z$ tel que $X \subset \Phi^{-1}(]N; \infty[)$, c'est à dire Φ est minorée par N sur X. Notons $m = \inf_X(\Phi)$. Alors $(\Phi^{-1}(] - \infty, m + 1/n]))_{n \in N^*}$ est une suite décroissante de fermés non vides de X donc son intersection est non vide.
Ceci fournit $x_* \in X$ tel que $\Phi(x_*) = m$ ■

optimisation et topologie faible

Theoreme 2.1.2 *.[1] Soit H un hilbert et* $\Phi : H \to R$ *une fonction*

- convexe,

- coercive : $\lim_{\|h\| \to \infty} \Phi(h) = +\infty$

- semi-continue inférieurement (pour la topologie forte) :$\Phi^{-1}(]a; +1[)$ *est un ouvert(fort) pour tout* $a \in R$ *ou, de façon équivalente,* $\Phi^{-1}(] - \infty, a])$ *est un fermé (fort) pour tout* $a \in R$*. Alors* Φ *est minorée sur H et atteint son infimum.*

Preuve. :

Soit $h_0 \in H$. Par coercivité de Φ , il existe $R > 0$ tel que $\|h\| > R$ tel que $\Phi(h) > \Phi(h_0) + 1$. Alors $inf_H(\Phi) = inf_{\bar{B}_H(0,R)}(\Phi)$. On considére l'espace topologique $X = \bar{B}_H(0, R)$, muni de la topologie faible de H (c'est un espace métrique ssi H est séparable, ce qu'on ne suppose pas a priori). On a montré que (X, θ) est compact. Montrons que Φ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible , c'est à dire que $\Phi^{-1}(] - \infty, a]) \cap \bar{B}_H(0, R)$ est un fermé faible de $\bar{B}_H(0, R)$ pour tout $a \in R$. L'ensemble $\Phi^{-1}(] - \infty, a]) \cap \bar{B}_H(0, R)$ est

- convexe, par convexité de Φ,

- fermé fort, car Φ est (fortement) si et seulement si, donc c'est un fermé faible .

■

2.1.2 Convergence faible

Définition, Propriéts élémentaires

Definition 2.1.2 *soit* $(H, \langle ., . \rangle)$ *un espace da Hilbert .*

Une suite $(f_n)_{n \in N}$ *de H converge faiblement vers f si* $\langle f_n, g \rangle \to \langle f, g \rangle$ *pour tout* $g \in H$ *(la limite est nécessairement unique). On note alors* $f_n \rightharpoonup f$ *.*

Proposition 2.1.1 *1.*$(f_n \to f) \Longrightarrow (f_n \rightharpoonup f)$

2.$(f_n \rightharpoonup f) \Longrightarrow (\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\|)$

3. $(f_n \rightharpoonup f) \Longrightarrow ((f_n)$ *bornée)*

4. $(f_n \longrightarrow f) \Longleftrightarrow (f_n \rightharpoonup f$ *et* $\|f_n\| \longrightarrow \|f\|)$

5. $(f_n \rightharpoonup f$ *et* $g_n \longrightarrow g\ ) \Longrightarrow (\langle f_n, g_n\rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle)$. *la convergence faible des* (g_n) *ne suffit pas*

6.Si $f_n \rightharpoonup f$ *alors f appartient à l'enveloppe convexe fermée (fort) de* $\{f_n; n \in N\}$

Exemples convergences faibles

Il y a essentiellement 3 phénoménes qui empêchent une suite faiblement convergente de converger fortement .

Considéron dans $l^2(N, C)$ l'élément e_n dans les n premiers termes valent $\frac{1}{n}$ et dans les autre sont nuls. Ces élément forment une suite dans $l^2(N, C)$.

Perte à l'infni : Dans $l^2(N, C)$, $e_n \rightharpoonup 0$ (car $(x_n)_{n\in N} \in l^2(N) \Longrightarrow x_n \longrightarrow 0$) mais e_n ne converge pas fortement vers zéro car $\|e_n\|_{l^2} = 1$.
même dans $L^2(R)$ avec $(\tau_n f)_{n\in N}$ où $f \in L^2(R)$ est à support minoré $\subset [a; \infty[$:

$$\left|\langle \tau_n f, g\rangle\right| = \left|\int_{a+n}^{\infty} f(x-n)g(x)dx\right| \leqslant \|f\|_{L^2(R)}(\int_{a+n}^{\infty} |g(x)|^2 dx)^{1/2} \longrightarrow 0\ .$$

Concentration : Dans $L^2(0, 1)$, $f_n = \sqrt{n}1_{[0,1/n]}$ converge faiblement vers zéro

$$\left|\sqrt{n}\int_0^{1/n} g(x)dx\right| \leq (\int_0^{1/n} |g(x)|^2 dx)^{1/2} \to 0$$

mais ne converge pas fortement car $\|f_n\|_{L^2(0,1)} = 1$.

Oscillations : Dans $L^2(0, 1)$, e^{inx} converge faiblement vers zéro (Lemme de Riemann Lebesgue) mais pas fortement car $\|e^{inx}\| = 1$. La preuve se fait lorsque la fonction test estC^1 puis par densité de C^1 dans L^2 lorsque la fonction test est seulement L^2

Extraion de sous suites

Le grand intérêt des suites faiblement convergente provient de la propriété suivante.

théoréme de Riesz : Soit H un espace de Hilbert et f une forme linéaire définie sur H.Alors il existe un unique vecteur $y \in H$ tel que ,
pour tout $x \in H$,

$$f(x) = \langle x, y \rangle.$$

De plus , $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Theoreme 2.1.3 *.[1] Soit H un Hilbert sur K = R ou C. De toute suite bornée de H, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans H.*

Preuve sur un Hilbert séparable :
Soit $D = \{h_k; k \subset N\}$ une partie dénombrable dense dans H et $(f_n)_{n\in N}$ une suite bornée de H : $\|f_n\| \leqslant M, \forall n \in N$.
Étape 1 : On extrait une sous-suite qui converge 'contre' D.
La suite $(\langle f_n, h_0 \rangle)_{n\in N}$ est bornée dans K donc il existe une extraction φ_0 (application strictement croissante $N \longrightarrow N$) telle que la sous-suite $(\langle f_{\varphi_0(n)}, h_0 \rangle)$ converge dans K.
La suite $(\langle f_{\varphi_0(n)}, h_1 \rangle)_{n\in N}$ est bornée dans K donc il existe une extraction φ_1 telle que la sous-suite $(\langle f_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n}, h_1 \rangle)_{n\in N}$ converge dans K.
En itérant ce précédé, on obtient, pour tout $p \in N$ une extraction φ_p elle que la suite $(\langle f_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n}, h_p \rangle)_{n\in N}$ converge dans K. Alors

$$|\psi : N \longrightarrow N$$
$$n \mapsto \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$$

est une extraction [car $\varphi_p(j) \geqslant j$ pour tout $p, j \in N$ et pour tout $p \in N$, $(\langle f_{\varphi()n}, h_p \rangle)$ est un sous-suite de $(\langle f_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p(n)}, h_p \rangle)_{n\in N}$ donc la suite $(\langle f_{\psi_n}, h_p \rangle)$ converge dans K.

Étape 2 : On montre que $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in N}$ converge dans R pour tout $g \in H$.

Soit $g \in H$ et $\epsilon > 0$. Il existe $K \in N$ tel que $\|g - h_k\| < \epsilon/(3M)$. Il existe $N \in N$ tel que

$$m, n \geqslant N \Longrightarrow |\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m),h_k}\rangle| < \epsilon/3.$$

Pour $m, n \geq N$, on a

$$\left|\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}, g\rangle\right| \leq \left|\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}, h_k\rangle\right| + \left|\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}, g - h_k\rangle\right| < \frac{\epsilon}{3} + 2M\frac{\epsilon}{3m} = \epsilon$$

Ainsi, $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in N}$ est de Cauchy dans R, qui est complet, donc elle converge. Notons $L(g)$ sa limite.

Étape 3 : On applique le théoréme de Riesz.

La forme linéaire L est continue sur H car $|L(g) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |\langle f_{\psi(n)}, g\rangle| \leqslant M\|g\|$. D'aprés le théoréme de Riesz, il existe $f \in H$ tel que $L(g) = \langle f, g\rangle$ pour tout $g \in H$.

Ainsi, $f_{\psi(n)} \rightharpoonup f$ quand $[n \longrightarrow \infty]$.

Preuve sur un Hilbert non séparable :

Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite bornée de H $\|f_n\| \leq m, \forall n \in N$. Alors $\widetilde{H} = Adh_H(Vect_H\{f_n; n \in N\})$, muni du produit scalaire de H, est un Hilbert séparable. Donc, il existe $f \in \widetilde{H}$ et une extraction ψ telle que $f_{\psi(n)}$ converge faiblement vers f dans $\widetilde{H}$.

Montrons que $f_{\psi(n)}$ converge faiblement vers f dans H. Soit $h \in H$ et $h = \widetilde{h} + h_{\perp}$une décomposition adaptée à $H = \widetilde{H} + \widetilde{H}^{\perp}$. Alors

$$\langle f_{\psi(n)}, h\rangle = \langle f_{\psi(n)}, \widetilde{h}\rangle \longrightarrow \langle f, \widetilde{h}\rangle = \langle f, h\rangle$$

Exemple 2.1.1 *$f_n = 1_{\omega_n}$ où $(\omega_n)_{n\in N}$ est une suite d'ensembles mesurables bornés de R. Alors $\|f_n\|_{L^2(R)} = \sqrt{|\omega_n|}$ donc $(f_n)_{n\in N}$ admet une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2(R)$.*

Résolition variationelle d'un problem ou limites

Proposition 2.1.2 *Soit $\alpha \in L^\infty(0, 1)$ telle que*

$$0 < \alpha_{\min} \leqslant \alpha(x) \leqslant M \text{ pour presque } x \in (0, 1)$$

Pour tout $f \in L^2(0,1)$, il existe une unique fonction $u \in H_0^1(0,1)$ telle que $-(\alpha u')' + u = f$ dans $D'(0,1)$

Preuve.

Étape 1 : Existence. On travaille sur l'espace $H_0^1(0,1)$, muni du produit scalaire et de la norme de $H^1(0,1)$, qui en font un Hilbert. Pour $v \in H_0^1(0,1)$, la quantité ■

$$J(v) = \int_0^1 \left(\frac{\alpha(x)}{2}|v'(x)|^2 + \frac{1}{2}|v(x)|^2 - f(x)v(x)\right)dx$$

est bien définie car $\alpha \in L^\infty(0,1)$ et $v', v, f \in L^2(0,1)$. De plus, l'application

$J : H_0^1(0,1) \longrightarrow R$ est

1. de classe C^∞ car somme d'une forme quadratique et d'une forme linéaire, toutes deux continues sur $H_0^1(0,1)$

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{\alpha(x)}{2}|v'(x)|^2 + \frac{1}{2}|v(x)|^2\right)dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\max\{\alpha_{\max}; 1\}\|v\|_{H^1}^2, \forall v \in H_0^1(0,1)\ .$$

$$\left|\int_0^1 f(x)v(x)dx\right| \leqslant \left\|f\right\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leqslant \left\|f\right\|_{L^2}\|v\|_{H^1}, \forall v \in H_0^1(0,1).$$

2. strictement convexe (trivial),

3. coercive car

$$J(v) \geqslant \frac{1}{2}\min\{\alpha_{min}; 1\}\|v\|_{H^1}^2 - \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}^2 \longrightarrow +\infty \text{ quand } \|v\|_{H^1} \longrightarrow \infty$$

(fonction polynomiale en la variable $\|v\|_{H^1}$).

Étape 2 : Unicité. Soit $\widetilde{u} \in H_0^1(0,1)$ telle que $-(\alpha\widetilde{u'})' + \widetilde{u} = f$ dans $D'(0,1)$. Pour montrer que $\widetilde{u} = u$, on va utiliser l'unicité de l'Étape 1. Soit $v \in H_0^1(0,1)$. Par définition de $H_0^1(0,1)$, il existe $(\phi_n)_{n\in N} \subset C_c^\infty(0,1)$ tell que $\|v - \phi_n\|_{H^1} \longrightarrow 0$ quand $[n \longrightarrow \infty]$. On a

$$\int_0^1 (\alpha\widetilde{u'}\phi_n' + (\widetilde{u} - f)\phi_n) = 0, \forall n \in N.$$

ou,

$$\left|\int_0^1 \alpha\widetilde{u'}(\phi'_n - v') + (\widetilde{u} - f)(\phi_n - v)\right| \leqslant \alpha_{\max}\|\widetilde{u'}\|_{L^2}\|\phi'_n - v'\|_{L^2} + \|\widetilde{u} - f\|_{L^2}\|\phi_n - v\|_{L^2} \longrightarrow 0,$$

donc

$$\int_0^1 (\alpha\widetilde{u'}v' + (\widetilde{u} - f)v) = 0.$$

L'énoncé suivant fournit un autre exemple de probléme aux limites, qu'on peut résoudre avec une méthode variationnelle. Cette fois, la nature non-linéaire de l'équation empàche de conclure avec seulement le théoréme de Riesz ou le théoréme de Lax-Milgram.

Theoreme 2.1.4 *.[3] Soit $f \in L_2(0,1)$ et $p \geqslant 1$. - Il existe une unique fonction $u \in H^2 \bigcap H^1_0(0,1)$ telle que $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$.*
- Si $f \in C^0([0,1])$ alors $u \in C^2([0;1])$ est solution classique, c'est à dire

$$-u''(x) + |u|^{p-1}u(x) = f(x), \forall x \in [0,1].$$

Preuve. Soit $f \in L^2(0,1)$ et $p \geqslant 1$.
Éape 1 : On démontre l'existence et l'unicité de $u \in H^1_0(0,1)$ tel que

$$\left|\int_0^1 \left[u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}\, u(x)v(x) - f(x)v(x)\right] dx\right| = 0, \forall v \in H^1_0(0,1)$$

Pour $v \in H^1_0(0,1)$, la quantité

$$J(v) = \int_0^1 (\tfrac{1}{2}|v'(x)|^2 + \tfrac{|v(x)|^{p+1}}{p+1} - f(x)v(x))dx$$

est bien définie car $v', v, f \in L^2(0,1)$ et $v \in C^0([0,1], R)$.
Alors l'application $J : H^1_0 \longrightarrow R$ est :
1. différentiable
2. strictement convexe (trivial)
3. coercive , **grâce à l'inégalité de Poincaré**

$$J(v) \geqslant \int_0^1 \tfrac{1}{2}|v'(x)|^2 dx - \|f\|_{L^2}\|v\|_2$$
$$\geqslant C_p\|v\|^2_{H^1} - \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} \longrightarrow +\infty \text{ quand } \|v\|_{H^1} \longrightarrow \infty.$$

Étape 2 : On montre que $u \in H^1_0(0,1)$ et que $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$. avec $v \in C^\infty_c(0,1)$ montre que $u'' = |u|^{p-1}u - f$ dans $D'(0,1)$. Le mb de droite est dans $L^2(0,1)$ donc, par définition, $u \in H^2(0,1)$. Alors $-u'' + |u|^{p-1}u - f$ est une fonction de $L^2(0,1)$ qui est nulle dans $D'(0,1)$, donc elle est nulle dans $L^2(0,1)$.

Étape 3 : On montre l'unicité. Soit $\widetilde{u} \in H^2(0,1)$ telle que $-\widetilde{u}'' + |\widetilde{u}|^{p-1}\widetilde{u} = f$ dans $L^2(0,1)$. Pour montrer que $\widetilde{u} = u$, on va utiliser l'unicité de l'Etape 1. Soit $v \in H^1_0(0,1)$.
En intégrant contre v l'égalité $-\widetilde{u}'' + |\widetilde{u}|^{p-1}\widetilde{u} = f$ dans $L^2(0,1)$, on obtient

$$\int_0^1 (-\widetilde{u}'' + |\widetilde{u}|^{p-1})(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Ou,

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \widetilde{u}''(x)v(x)dx &= -\int_0^1 \widetilde{u}''(x)\int_0^x v'(t)dtdx && \text{car : } v \in H^1_0(0,1) \\
&= \int_0^1 v'(t)\int_t^1 u''(x)dxdt && \text{par le théoréme de Fubini} \\
&= -\int_0^1 v'(t)[u'(1) - u'(t)]dt && \text{car : } u' \in H^1(0,1) \\
&= -u'(1)\int_0^1 v' + \int_0^1 v'u' \\
&= -\int_0^1 v'u' && \text{car : } v \in H^1_0(0,1).
\end{aligned}$$

L'application du théoréme de Fubini est justifiée car

$$\int_0^1 |v'(t)| \int_t^1 |u''(x)| dx dt \leqslant \|v'\|_{L^1} \|u''\|_{L^1} \leqslant \|v'\|_{L^2} \|u''\|_{L^2} < \infty.$$

Étape 4 : Si f est continue sur $[0, 1]$ alors $u'' = |u|^{p-1}u - f$ est continue sur $[0, 1]$ donc u est C^2 et l'égalité dans L^2 est une égalité ponctuelle. ■

2.2 Topologie faible dans un espace de Banach

Soit E un $R - espacevectorielenorm$ et $E' = \zeta_c(E, R)$ son dual, qui est muni de la norme

$$\|g\|_{E'} = \sup \{\langle g, f\rangle_{E',E}; f \in E, \|f\|_E \leqslant 1\} \ldots \ (1)$$

2.2.1 Queleques outils pour compenser l'absence de caractére hilbertien

Theoreme 2.2.1 *.[6] Soit E un R-espace vectoriele normé.*
1. ***(Hahn-Banach analytique)*** *Soit F un sous espace vectoriele de E et $g \in F'$. Alors il existe $\widetilde{g} \in E'$ tel que $\widetilde{g}|_F = g$ et $\|\widetilde{g}\|_{E'} = \|g\|_{F'}$.*
2. Pour tout $f_0 \in E$ on a

$$\|f_0\|_E = \max \{\langle g, f_0\rangle_{E',E}; g \in E', \|g\|_{E'} \leqslant 1\} \ldots \ (2)$$

3. ***(Hahn-Banach géométrique, 2^{eme} forme)*** *Soit A ; B deux convexes non vides disjoints de E avec A fermé et B compact. Alors il existe $g \in E'$, $a \in R$ et $\epsilon > 0$ tels que*

$$\langle g, f\rangle_{E',E} \leqslant a - \epsilon, \forall f \in A \text{ et } \langle g, f\rangle_{E',E} \geqslant a + \epsilon, \forall f \in B$$

4. Soit F un sous espace vectoriele de E. Alors (F dense dans E) $\Longleftrightarrow (g \in E'; g|_F = 0) = 0$.

Remarque 2.2.1 *Il faut bien distinguer la formule (1), qui est une* ***définition*** *(avec un sup qui n'est pas forcément un max) de la formule (2), qui est un résultat.*

Preuve.
1. La preuve de Hahn-Banach analytique est élémentaire si E est Hilbert, ou si E est de dimension finie (récurrence). Dans le cas général, c'est une application du Lemme de Zörn.
2. On applique le 1. avec $F = Rf_0$ et $g(tf_0) = t\|f_0\|_E$.
3. Le théoréme de Hahn-Banach géométrique découle du thm de Hahn-Banach analytique, dans lequel la norme est remplacée par la jauge d'un convexe .
4. L'implication $\Rightarrow$ est évidente. Montrons $\Leftarrow$. On suppose que $g \in E'; g|_F = 0 = 0$. Par l'absurde, supposons que F n'est pas dense dans $E : \exists f_0 \in E \backslash \overline{F}$. Alors $\overline{F}$ et $\{f_0\}$ sont des convexes non vides disjoints, l'un fermé, l'autre compact donc il existe $g \in E'$ et $a \in R$ tels que

$$\langle b, f\rangle_{E',E} < a < \langle g, f_0\rangle_{E',E}, \forall f \in \overline{F} \ldots (3)$$

Grâce à la structure d'espace vectoriel de F , on en déduit que $g|_F = 0$. Alors, par hypothêse $g = 0$. Or, $0 < a < \langle g, f_0\rangle_{E',E}$: contradiction
Le théoréme de Hahn-Banach géométrique va jouer, dans un espace de Banach, le rôle du théoréme de projection sur un convexe fermé dans un Hilbert : notez la similarité entre (3) et la caractérisation dans le théoréme de projection sur un convexe fermé. Les 2 théoréme de Hahn-Banach s'énoncent sur un espace vectoriele normé (et pas sur un Banach) : ils n'ont donc pas leur place dans la leçon sur les espaces complets... ∎

Remarque 2.2.2 *Notons que l'injection canonique $J : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (E'', \|.\|_{E''})$ est toujours une isométrie, grâce à (2).*
Rappelons que, si X est un espace vectoriele normé et Y est un Banach alors $\zeta_c(X, Y)$ est complet. C'est la complétude de l'espace d'arrivée Y qui est utilisée dans la preuve.
*Ainsi, la notion de réflexivité n'a de sens que sur un espace E **complet**. En effet, si E est un espace vectoriele normé et J est surjective de E sur E'' alors E est isométrique à $E'' = (E')'$ qui est complet (grâce Ã la complétude de R), donc E est complet.*
*Dans ce qui suit, **l'hypothêse de complétude de E n'interviendra qu'á travers l'hypothêse de réflexivité**.*

La notion de réflexivité va permettre de démontrer les mêmes résultats, pour un Banach réflexif, que pour un espace de Hilbert, en remplaçant le produit scalaire par des crochets de dualité $\langle ., . \rangle_{E',E}$. Elle compense l'absence de théoréme de Riesz. Par exemple, á l'issue de la prochaine section, nous serons en mesure de démontrer le résultat suivant.

Theoreme 2.2.2 *.[6] Soit E un Banach réflexif et $\Phi : E \longrightarrow R$ une fonction*
- convexe,
- coercive : $\lim_{\|f\| \longrightarrow \infty} \Phi(f) = +\infty$
- semi-continue l'exttiment (pour la topologie forte) : $\Phi^{-1}(]a, \infty[)$ *est un ouvert (fort) de E pour tout* $a \in R$ *ou, de façon équivalente,* $\Phi^{-1}(] - \infty, a])$ *est un fermé (fort) de E pour tout* $a \in R$*.*
Alors Φ est minorée sur E et atteint son infinum.

2.2.2 Topologie faible :théorie

Definition 2.2.1 *Soit E un R-**espace vectoriele normé**. La **topologie faible** $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi_g : f \in E \mapsto \langle g, f \rangle_{E'E} \in R$ pour tout $g \in E'$.*

Proposition 2.2.1 *Soit E un R-**espace vectoriele normé**.*
1. Les ouverts de $\sigma(E, E')$ sont les $\bigcup_{qlq} \bigcap_{finie} \varphi_g^{-1}$(ouvert de R).
2. Pour $f_0 \in E$, une base de voisinages de f_0 dans $\sigma(E, E')$ est

$$V_{f_0, \epsilon, g_1, \ldots, g_p}; \epsilon > 0, p \in N^*, g_1, \ldots, g_p \in E'$$
$$\text{où } V_{f_0, \epsilon, g_1, \ldots, g_p} = f \in E; |\langle g_j, f - f_0 \rangle_{E',E}| < \epsilon, \forall 1 \leqslant j \leqslant p$$

3. $(f_n \rightharpoonup f \text{ pour } \sigma(E, E')) \Longleftrightarrow (\langle g, f_n \rangle_{E',E} \longrightarrow \langle g, f_n \rangle_{E',E}, \forall g \in E'$
4. $(f_n \longrightarrow f \text{ dans E fort }) \Longrightarrow (f_n \rightharpoonup f \text{ pour } \sigma(E, E'))$
5. $(f_n \rightharpoonup f \text{ pour } \sigma(E, E')) \Longrightarrow ((f_n) \text{ bornée dans E et } \|f\|_E \leqslant \liminf_{n \longrightarrow \infty} \|f_n\|_E)$
6. $f_n \rightharpoonup f \text{ pour } \sigma(E, E') \text{ et } g_n \longrightarrow g \text{ dans } E') \Longrightarrow (\langle g_n, f_n \rangle_{E',E} \longrightarrow \langle g, f \rangle_{E',E})$

Preuve. tràs similaire au cas Hilbertien, on remplace les produits scalaires $\langle ., . \rangle$ par des crochets de dualité $\langle ., . \rangle_{E',E}$.

5.a) On applique le théoréme de Banach-Steinhauss aux applications

$$T_n : E' \longrightarrow R$$
$$g \mapsto \langle g, f_n \rangle_{E',E}$$

ce qui est licite car E′ est complet (même si E ne l'est pas : c'est la complétude de R qui importe !)

5.b) On utilise la caractérisation (4). Soit $g \in E'$ tel que $\|g\|_{E'} \leqslant 1$ et $\|f\|_E = \langle g, f \rangle_{E',E}$.On a $\|f\|_E = \langle g, f \rangle_{E',E} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle g, f_n \rangle_{E',E}$ et ,pour tout $n \in N, \langle g, f_n \rangle_{E',E} \leqslant \|g\|_{E'} \|f_n\|_E \leqslant \|f_n\|_E$, donc $\|f\|_E \leqslant \liminf_{n \longrightarrow \infty} \|f_n\|_E$

6. La convergence faible des (g_n) ne suffit pas : cf contre-exemple hilbertien. ? ■

Proposition 2.2.2 *Soit E un R-espace vectoriele normé.*

1. $\sigma(E, E')$ *est séparée.*

2. Soit $C \subset E$ *un convexe. Alors* (*C fermé fort*) $\Longleftrightarrow$ (*C fermé faible* $\sigma(E, E')$).

3. Si E est de dimension infinie alors $\sigma(E, E')$ *n'est pas métrisable sur E.*

4. (E′ séparable) $\Longleftrightarrow$ ($\overline{B}_E(0, 1)$ *munie de* $\sigma(E, E')$ *est métrisable)*

Preuve. 1. Le théoréme de Hahn-Banach remplace les manipulations avec le produit scalaire. Soit$f_1 \neq f_2 \in E$. Alors f_1 et f_2 sont deux convexes, non vides, disjoints, l'un fermé, l'autre compact, donc il existe $g \in E'$ et $a \in R$ tels que $\langle g, f_1 \rangle_{E',E} < a < \langle g, f_2. \rangle_{E',E}$. Alors f_1, f_2 appartiennent á deux ouverts faible $\sigma(E', E)$ disjoints $\varphi_g^{-1}(-\infty, a)$ et $\varphi_g^{-1}(a, \infty)$.

2. Le théoréme de Hahn-Banach remplace le théoréme de projection sur un convexe fermé. Pour tout $f_0 \in E\ C$, il existe $g = g(f_0) \in E'$ et $a \in R$ tel que

$$\langle g, f \rangle_{E',E} \leqslant a, \forall f \in \mathrm{C} \text{ et } \langle g, f_0 \rangle_{E',E} > a$$

Pour le démontrer, on sépare $\{f_0\}$ et C.

3. Même preuve que dans le cas hilbertien. Au lieu de prendre $f_n \in Vect\{g_1, ..., g_{p_n}\}^{\perp}$, on

prend $f_n \in \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant p_n} \ker(g_j)$. Cette intersection est non vide car E est de dimension infinie.
4. L'implication $\Longrightarrow$ fonctionne comme dans le cas hilbertien :
- de la séparabilité de E', on déduit l'existence de $(g_k)_{K \in N} \subset \overline{B}_{E'}(0,1)$ dense dans $\overline{B}_{E'}(0,1)$,
- on définit alors $d(f, \widetilde{f}) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{2^K} \left| \langle g_k, f - \widetilde{f} \rangle_{E',E} \right|, \forall f, f \in B_E(0,1)$.
- alors tout voisinage ouvert faible $V_{f,\epsilon,g_1,\dots,g_p}$ contient une boule $B_d(f,r)$
- et toute boule $B_d(f,r)$ contient un voisinage ouvert faible de la forme $V_{f,\epsilon,g_1,\dots,g_p}$.
L'implication $\Leftarrow$ est plus délicate . Nous allons la démontrer sous l'hypothése supplémentaire que E est réflexif : alors la preuve hilbertienne s'adapte facilement.
Supposons que la topologie faible $\sigma(E,E')$ sur $\overline{B}_E(0,1)$ est associée á une distance $d : \overline{B}_E(0,1) \times \overline{B}_E(0,1) \longrightarrow R$. Alors pour tout $n \in N^*$, la boule $B_d(0, 1/n)$ est un ouvert faible contenant 0 donc il existe $\epsilon^n >, p_n \in N^*$ et $g_1^n, \dots, g_{p_n}^N \in E'$ tels que

$$V_{0,\epsilon^n,g_1^n,\dots,g_{p_n}^n} \bigcap \overline{B}_E(0,1) \subset B_d(0,1)/n$$

(les ouverts du mb de gauche forment une base de voisinage ouverts). Montrons que $V = Vect_R g_j^n; 1 \leqslant j \leqslant p_n, n \in N^*$ est dense dans E'. Pour cela, on va utiliser le critére du Théoréme 2.5.1. Soit $\varepsilon \in E''$ tel que $\langle \varepsilon, g \rangle_{E'',E} = \langle g, f_0 \rangle_{E',E}$ pour tout $g \in E'$. Comme E est réflexif, il existe $f_0 \in E$ tel que $\langle \varepsilon, g \rangle_{E'',E'} = \langle g, f_0 \rangle_{E',E}$ pour tout $g \in E'$. Alors $\langle g, f_0 \rangle_{E';E} = 0$ pour tout $g \in V$. Supposons $f_0 \neq 0$. Alors

$$\frac{f_0}{\|f_0\|_E} \in ((\bigcap_{n \in N^*} V_{0,\epsilon^n,g_1^n,\dots,g_{p_n}^n}) \bigcap \overline{B}_E(0,1)) \subset (\bigcap_{n \in N^*} B_d(0, \tfrac{1}{n})) = \{0\}$$

ce qui est impossible. Donc $f_0 = 0$, cad $\varepsilon = 0$. On conclut que E' est séparable car $Vect_Q\{g_j^n; 1 \leqslant j \leqslant p_n, n \in N^*\}$ est dénombrable et dense dans E' ? ■

Proposition 2.2.3 *Soit E* ***un Banach*** *:*
1. E est réflexif,
2. $\overline{B}_E(0,1)$ *est (topologiquement) compacte pour* $\sigma(E,E')$*,*
3. $\overline{B}_E(0,1)$*est séquentiellement compacte pour* $\sigma(E,E')$
1. $\Rightarrow$ 2. *résulte du théoréme de Tikhonov* . 3. $\Rightarrow$ 1. *est un peu délicat . On va démontrer* 1. $\Rightarrow$ 3. *pour voir comment s'adapte la preuve hilbertienne. On aura, pour cela, besoin de 2 Lemmes.*

Lemme 2.2.1 .*[5] soit Z un Banach .Si Z′ est séparable alors Z est séparable .*

Remarque 2.2.3 *La réciproque est fausse :* $Z = L^1(0,1)$ *est séparable mais* $Z' = L^\infty(0,1)$ *ne l'est pas.*

Preuve. Soit $(g_n)_{n\in N}$ suite de Z′ dense dans Z′. Comme

$$||g_n||_{Z'} = \sup\{\langle g_n, f\rangle_{Z',Z}; f \in Z, ||f||_Z = 1\}$$

alors, pour tout $n \in N$, il existe $f_n \in Z$ tel que

$$||f_n||_Z = 1 \text{ et } \langle g_n, f_n\rangle_{Z',Z} \geqslant \frac{1}{2}||g_n||_{Z'}$$

Montrons que $Vect f_n, n \in N$ est dense dans E. Pour cela, on va utiliser le critére du théoréme 2.2.1. Soit $g \in E'$ tel que $\langle g, f_n\rangle_{E',E} = 0$ pour tout $n \in N$ et $\epsilon > 0$. Par densité des (g_n), il existe $N \in N$ tel que $||g - g_N||_{Z'} < \frac{\epsilon}{3}$. Alors
$\frac{1}{2}||g_N||_{Z'} \leqslant \langle g_N, f_N\rangle Z', Z = \langle g - g_N, f_N\rangle Z', Z + \langle g, f_N\rangle Z', Z = ||g_N - g||_{Z',Z}||f_N||Z < \frac{\epsilon}{3}$
et donc

$$||g||_{Z'} \leqslant ||g - g_N||_{Z'} + ||g_N||_{Z'} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $g = 0$.
On conclut que les combinaisons linéaires des f_n à coefficients dans $Q + iQ$ sont denses dans Z, donc Z est séparable. ■

Lemme 2.2.2 .*[5] Soit E un Banach réflexif et F un sous ev fermé de E. Alors F est réflexif*

Preuve. Soit E un Banach réflexif : l'isométrie $J^E : (E, ||.||_E) \longrightarrow (E'', ||.||_{E''})$ est surjective. Soit F un sev fermé de E. Montrons que l'isométrie $J^F : F \longrightarrow F''$ est surjective.
Soit $\varepsilon \in F''$. On cherche $f_0 \in F$ tel que $\langle \varepsilon, g\rangle_{F'',F} = \langle g, f_0\rangle_{F',F}$ pour tout $g \in F'$. L'application $g \in E' \mapsto \varepsilon(g_{\ F})$ définit un élément de E″. Par réflexivité de E, il existe $f_0 \in E$ tel que

$$\varepsilon(g|F) = \langle g, f_0\rangle_{E',E}, \forall g \in E' \ ...(1)$$

Etape 1 : Montrons que $f_0 \in F$. Par l'absurde, supposons que $f_0 \notin F$. Alors F et $\{f_0\}$sont deux convexes non vides disjoints de E, F est fermé et $\{f_0\}$ est compact, donc (Hahn-Banach géométrique) il existe $L \in E' - \{0\}$ et $a \in R$ tels que

$$\langle L, f\rangle_{E',E} < a < \langle L, f_0\rangle, \forall f \in F.$$

En utilisant la structure d'ev de F , on en déduit que $L|_F = 0$ et donc $\langle L, f_0\rangle > a > 0$. Or, $\langle L, f_0\rangle = \varepsilon(L|_F) = 0$: Contradiction.
Etape 2 : Montrons que $J^F(f_0) = \varepsilon$ dans F″. Soit $g \in F'$. D'aprés le théoréme de Hahn-Banach analytique, il existe $\widetilde{g} \in E'$ telle que $\widetilde{g}|_F = g$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon, g\rangle_{F'',F'} &= \langle \varepsilon, \widetilde{g}|_F\rangle_{F'',F} && \text{car : } \widetilde{g}|_F = g \\
&= \langle \widetilde{g}, f_0\rangle_{E',E} && \text{grâce à ....(1)} \\
&= \langle \widetilde{g}|_F, f_0\rangle_{F'',F} && \text{car : } f_0 \in F \\
&= \langle g, f_0\rangle_{F',F}.
\end{aligned}$$

■

Preuve de 1. $\Longrightarrow$ 3. lorsque E est séparable : Soit E un espace de Banach réflexif et séparable et $(f_n)_{n\in N}$ une suite bornée de E. Comme E = (E′)′ est séparable alors E′ est séparable, d'aprés le Lemme 2.2.1. Soit $(g_k)_{k\in N}$ une suite de E′ dense dans E′. Par un procédé d'extraction diagonale on obtient une extraction telle que $(\langle g, f_{\psi(n)}\rangle_{E',E})_{n\in N}$ converge pour tout $k \in N$. Via un critére de Cauchy, on en déduit que $(\langle g, f_{\psi(n)}\rangle_{E',E})_{n\in N})$ converge pour tout $g \in E'$. Alors $L(g) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\langle g, f_{\psi(n)}\rangle_{E',E}$ définit $L \in L''$ donc (réflexivité de E) il existe $f \in E$ tel que $\langle g, f\rangle_{E',E}$ pour tout $g \in E'$. Ainsi $f_{\psi(n)} \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E, E')$
Preuve de 1.$\Longrightarrow$ 3. lorsque E n'est pas séparable. Soit E un espace de Banach réflexif non séparable et $(f_n)_{n\in N}$ une suite bornée de E. Alors $F = Adh_E\{f_n; n \in N\}$ est un Banach séparable et réflexif d'aprés le Lemme 2.2.2. D'aprés ce qui précéde, il existe $f \in F$ tel

que $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(F,F')$: $\langle \widetilde{g}, f_n - f\rangle_{F',F} \longrightarrow 0$ pour tout $\widetilde{g} \in F'$. Pour tout $g \in F'$, on a $g|_F \in F'$ donc

$$\langle g, f_n - f\rangle_{E',E} = \langle g|_F, f_n - f\rangle_{F',F} \longrightarrow 0$$

Ceci montre que $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E,E')$.

2.2.3 Comparaison avec la convergence au sens des distributions

Proposition 2.2.4 ***(Comparaison avec la convergence des distributions)*** *Soit $d \in N^*, \Omega$ un ouvert de $R^d, p \in [1,\infty[$.*
1. Lorsque $1 < p < \infty$, alors

$$(f_n \rightharpoonup f \text{ pour } \sigma(L^p,(L^p)')) \Leftrightarrow (f_n \rightharpoonup f \text{ dans } D'(\Omega) \text{ et } (f_n) \text{ bornée dans } L^p(\Omega))$$

2. L'implication $\Leftarrow$ est fausse pour p = 1.
3. Lorsque $p = \infty$, alors $(f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(L^\infty, L^1)) \Leftrightarrow (f_n \rightharpoonup f$ dans $D'(\Omega)$ et (f_n) bornée dans $L^\infty(\Omega))$

Preuve. : similaire au cas hilbertien.
1. On utilise $(L^p)' = L^{p'}$, qui requiert $p < \infty$, ainsi que la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$, qui requiert $p' < \infty$ c-á-d $p > 1$.
2.$f_n = n 1_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$
- converge vers zéro dans D′(0, 1), car un compact de (0, 1) est à distance > 0 de x = 0,
- est bornée dans $L^1(0,1)$ car $\|f_n\|_{L^1(0,1)} = 1$,
- mais ne converge pas vers zéro pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ car

$$\int_0^1 f_n.1 \equiv 1 \text{ ne tend vers } 0$$

(la fonction test g = 1 appartient à $L^\infty(0,1)$)
3. Les fonctions test pour la topologie $*\sigma(L^\infty, L^1)$ sont dans $L^1(\Omega)$ et $C_c^\infty(\Omega)$ est bien dense dans $L^1(\Omega)$ ■

CHAPITRE 3

TOPOLOGIE FAIBLE *

Etant donné un espace de Banach X et son dual topologique X′ , on peut bien entendu définir la topologie faible sur X′ .
On va en fait définir une topologie encore moins fine (strictement si X n'est pas réflexif) .

3.1 Définition

Definition 3.1.1 *La topologie faible* sur X′ est la topologie la moins fine telle que toutes applications*

$$\begin{aligned} Jx : X' &\to R \\ f &\mapsto \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

avec $x \in X$ soient continues.

Proposition 3.1.1 *La topologie faible* est séparée.*
Ceci résulte quasiment directement des définitions.
En effet, si f_1 et f_2 sont deux éléments distincts de X', il existe $x \in X$ tel que

$$\langle f_1, x \rangle < \langle f_2, x \rangle.$$

En choisissant un nombre réel

$$\alpha \in]\langle f_1, x \rangle ; \langle f_2, x \rangle[$$

on peut prendre
$O_1 = \{f \in X'; \langle f, x \rangle < \alpha\}$ et $O_2 = \{f \in X'; \langle f, x \rangle > \alpha\}$ comme ouverts faibles séparant f_1 et f_2 .*
Quel que soit $f_0 \in X'$, une base de voisinages faibles de f_0 est formée par les ouverts faibles* de la forme*

$$\{f \in X'; |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \epsilon, \forall i \in I\}$$

où $\epsilon > 0$, I est fini et $x_i \in X$.

3.2 Théoréme de Césaro et Théoréme de Banach Alaoglu

3.2.1 Théoréme de Césaro

Definition 3.2.1 *Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite réelle ; on lui associe la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par : $v_0 = u_0$ et $\forall n \in N^*, v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}$*
La suite $(v_n)_{n\in N}$ est appelée moyenne de Césaro de la suite $(u_n)_{n\in N}$.

Theoreme 3.2.1 *.[8] Si la suite $(u_n)_{n\in N}$ converge vers l alors la suite $(v_n)_{n\in N}$ converge aussi vers l.*

Remarque 3.2.1 *1. La réciproque est en général fausse : $lim_{n\to+\infty} v_n = l$ n'implique pas nécessairement que $lim_{n\to+\infty} u_n = l$ comme le montre l'exemple suivant. Considérons, par exemple, $u_n = (-1)^n$; alors*

$$v_n = \frac{(-1) + (+1) + ... + (-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \\ \dfrac{-1}{n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Nous avons donc $lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors que la suite $(u_n)_{n\in N}$ diverge.
2. En revanche, si la suite $(u_n)_{n\in N}$ est monotone alors la réciproque est vraie.

Definition 3.2.2 *Lorsque la suite (v_n) converge vers un réel l, on dit que la suite (u_n) converge en moyenne vers l. Nous voyons donc que la convergence d'une suite entraîne sa convergence en moyenne (avec la même limite), la réciproque étant fausse.*

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ fixé, on veut montrer que

$$\exists N = N(\epsilon) \in N \text{ tel que } \forall n \geq N \text{ on ait } |v_n - 1| < \epsilon.$$

Or par hypothése $lim_{n\to+\infty} u_n = l$, donc :

$$\exists p = p(\epsilon) \in N \text{ tel que } \forall n \geq p \text{ on ait } |u_n - 1| < \frac{\epsilon}{2}$$

On a, pour tout $n \geq p$

$$\begin{aligned}
u_n - l &= \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n} - l \\
&= \frac{u_1 + u_2 + ... + u_p + u_{p+1} + ... + u_n - nl}{n} \\
&= \frac{(u_1 - l) + (u_2 - l) + ... + (u_p - l) + (u_{p+1} - l) + ... + (u_n - l)}{n} \\
&= \frac{(u_1 - l) + (u_2 - l) + ... + (u_p - l)}{n} + \frac{(u_{p+1} - l) + ... + (u_n - l)}{n}
\end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité triangulaire :

$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p} |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=p+1}^{n} |u_k - l|.$$

En posant

$$\mathrm{C} = \sum_{k=1}^{p} |u_k - l| \;.$$

(notons que C est une constante indépendante de n) et puisque $|u_k - l| < \frac{\epsilon}{2}$ pour tout k ≥ p, on a :

$$|v_n - l| \leq \frac{C}{n} + \frac{n-p}{n}\frac{\epsilon}{2} \leq \frac{C}{n} + \frac{\epsilon}{2} \text{ car } \frac{n-p}{n} < 1$$

Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} \frac{C}{n} = 0$. donc $\exists q = q(\epsilon) \in N$ tel que $\forall n \geq q$ on ait $\left|\frac{C}{n}\right| = \frac{C}{n} < \frac{\epsilon}{2}$.

Donc, en prenant N = max(p, q), on a finalement $\forall n \geq N, |v_n - l| < \epsilon$. ■

Theoreme 3.2.2 *.[8] Si la suite $(u_n)_{n\in N}$ converge vers $+\infty$*
alors la suite $(v_n)_{n\in N}$ converge aussi vers $+\infty$. De même, si la suite $(u_n)_{n\in N}$ converge vers $-\infty$ alors la suite $(v_n)_{n\in N}$ converge aussi vers $-\infty$.

Preuve. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et montrons que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Soit $A > 0$. Il existe alors $N \in N$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n \geq 2A$. Pour $n \geq N$, nous écrirons alors

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k$$
$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} u_k + \frac{n-N+1}{n} \times 2A.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 2A lorsque n tend vers $+\infty$ (N et A étant fixés), il est donc possible de le rendre supérieur à A en choisissant n assez grand ($n \geq N'$) ; pour $n \geq max\{N, N'\}$, nous aurons donc $v_n \geq A$; nous avons donc prouvé que

$$\forall A \in R, \exists N_0 \in N n \geq N_0 \Rightarrow v_n \geq A$$

donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ ■

3.2.2 Théoréme de Banach Alaoglu

Theoreme 3.2.3 *.[7] Soit E un espace de Banach. La boule unité fermée de E′*

$$B_{E'} = \{f \in E'/|f(x)| \leq ||x||_E, \forall x \in E\}$$

est compacte pour la topologie faible⋆

Démonstration

Avec les notations du théoréme de Tychonov, on pose A = E et X_α = R pour tout $\alpha \in A$. On a alors

$$X = \prod_{x \in E} R = R^E$$

que l'on identifie à l'ensemble des fonctions de E dans R via l'application (bijective)

$$\begin{aligned} \Phi : F(E, R) &\to R^E \\ f &\mapsto \{f(x)\}_{x \in E}. \end{aligned}$$

Les éléments de R^E sont notés $\omega = (\omega_x)_{x \in E}$. Les projections canoniques sont donc, pour tout $y \in E$,

$$\begin{aligned} p_y : E^E &\to R \\ \omega &\mapsto \omega_y. \end{aligned}$$

Soit Ψ la bijection réciproque de Φ, restreinte à $\Phi(E')$:

$$\begin{aligned} \psi : \Phi(E') \subset R^E &\to F(E, R) \\ \omega &\mapsto f \text{t.q}, f(y) = \omega_y, \forall y \in E. \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord que est continue de $\Phi(E')$ (muni de la topologie produit de R^E) dans E' (muni de la topologie faible⋆) : il suffit de vérifier que pour tout $y \in E$, l'application

$$\begin{aligned}\Lambda : \Phi(E') &\to R\\ \omega &\mapsto \Psi(\omega)(y)\end{aligned}$$

est continue.

On a $\Lambda_y(\Phi(f)) = f(y) = P_y(\Phi(f))$ pour tout $f \in$ E′ donc

$$\Lambda_y = P_{y|\Phi(E')}$$

et le résultat suit du fait que P_y est continue .

Pour démontrer le théoréme, il suffit alors de montrer que la boule unité fermée de E′ est l'image par d'un compact de R^E. Soit

$$K = \{\omega \in R^E / \forall x \in E, |\omega_x| \leq \|x\|_E\} .$$

Alors

$$K = \prod_{x\in E} [-\|x\|_E, \|x\|_E]$$

donc K est compact par le théoréme de Tykhonov. Soit enfin

$$F = \Big\{\omega \in R^E / \forall (x,y) \in E \times E, \forall (\lambda,\mu) \in R^2, \omega_{\lambda x+\mu y} = \lambda\omega_x + \mu\omega_y\Big\}.$$

Pour $(x, y) \in E \times E$ et $(\lambda, \mu) \in R \times R$ donnés, l'application

$$\begin{aligned}\Lambda_{x,y}^{\lambda,\mu} = R^E &\to R\\ \omega &\mapsto \omega_{\lambda x+\mu y} - \lambda\omega_x - \mu\omega y\end{aligned}$$

est continue .

L'ensemble F est l'intersection de l'image réciproque de $\{0\}$ par des fonctions continues, donc $K \cap F$ est compact. Comme

$$B_{E'} = \Psi(K \cap F)$$

on a le résultat cherché. Le théoréme est démontré .

3.3 Convergence faible*

Nous introduisons ici un autre mode de convergence, appelée convergence faible* dans le dual E′ d'un espace de Banach (E, $\|\ .\ \|_E$).
Ce mode de convergence sâppliquera notamment aux espaces de Lebesgue $L^p(X)$ pour $1 < p < \infty$ qui sont le dual de $L^p(X)$ (avec q = p /(p-1) si p < 1 et q = 1 si p = 1) ou encore de léspace des mesures de Radon bornées $M(\Omega)$ qui est le dual de $C_0(\Omega)$.

Definition 3.3.1 *Une suite* $(f_n)_{n\in N}$ *d'éléments de E′ converge faible* vers f dans E′, et on note* $f_n \rightharpoonup^* f$, *si*

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \text{ pour tout } x \in E \,.$$

La limite faible est toujours unique car si f et g sont deux limites faible* de* $(f_n)_{n\in N}$, *alors* $\langle f - g, x\rangle = 0$ *pour tout* $x \in E$, *puis par passage au sup en x, il vient d'aprés la définition de la norme dans E′ que* $\|f - g\|_{E'} = 0$, *soit f = g.*

Remarque 3.3.1 *1. Si (H,⟨., .⟩), d'aprés le Théoréme de Riesz, la convergence faible** $x_n \rightharpoonup^* x$ *dans H signifie que*

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \text{ pour tout } y \in H.$$

2. Si (X, A, μ) est un espace mesuré σ-fini et $1 < p < +\infty$, *la convergence faible** $f_n \rightharpoonup^* f$ *dans* $L^p(X)$ *s'écrit*

$$\int_x f_n g d\mu \to \int_x f g d\mu \text{ pour tout } g \in L^q(X)$$

où q = p / (p-1) si p < ∞ et q = 1 si p = ∞

3. Si Ω est un ouvert de R^n, la converge faible $\lambda_n \rightharpoonup^* \lambda$ *dans M(Ω) signifie que*

$$\int_\Omega f d\lambda_n \to \int_\Omega f d\lambda$$

pour tout $f \in C_0(\Omega)$ *. Le résultat suivant montre que la convergence faible* fournit effectivement une notion plus faible de convergence que celle pour la topologie de la norme.*

Exemple 3.3.1 *Soit E l'espace $C_0(R)$ des suites réelles $x = (x_n)$ de limite nulle, muni de la norme* $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|, n \in N\}$.

Son dual E′ est l'espace $l^1(R)$ des suites $\varphi = (\varphi_n)$ telle que la série $\sum \varphi_n$ soit absolument convergente, muni de la norme $\|\varphi\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n|$. Le bidual E″, c'est-à-dire le dual de $l^1(R)$, est l'espace $l^\infty(R)$ des suites réelles bornées $u = (u_n)$ muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup\{|u_n|, n \in N\}$.

On a $\langle \varphi, x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x_n$ et $\langle u, \varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n u_n$. Considérons dans E′ l'élément e_n dont les n-premiers termes valent 1/n et dont tous les autres sont nuls. Ces éléments forment une suite dans E′ qui ne converge pas vers 0 pour la topologie forte puisque $\|e_n\|_1 = 1$. Elle ne converge pas non plus vers 0 pour la topologie faible de E′, puisque, si l'on prend l'élément u de E″ égal á la suite constante 1, alors $\langle u, e_n\rangle = 1$.

Mais elle converge vers 0 pour la topologie faible⋆ puisque, si l'on prend un élément x quelconque de E (donc une suite de limite nulle), alors $\langle e_n, x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k$,

qui converge bien vers 0 d'aprés le théoréme de Cesáro .

Proposition 3.3.1 *Si $(f_n)_{n\in N}$ est une suite de E′ qui converge (fortement) vers f, i.e., $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$, alors $f_n \rightharpoonup^* f$ faible* dans E′*

Démonstration

Si x ∈ E, par définition de la norme dans E′,

$$\left|\langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle\right| = \left|\langle f_n - f, x\rangle\right| \leq \|f_n - f\|_{E'} \|x\|_E \to 0 .$$

ce qui établit le résultat .

Comme le montre le résultat suivant, la réciproque est en général fausse .

Definition 3.3.2 *Soit H un espace de Hilbert. On dit que la famille $(e_n)_{n\in N}$ est une base Hilbertienne de H si elle est*

i) orthornormée : pour tout $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$;

ii) totale : Vect $(e_n)_{n\in N}$ est dense dans H , i.e., tout élément de H est la limite d'une suite de combinaisons linéaires d'éléments de Vect$(e_n)_{n\in N}$.

Notons que le principe d'orthogonalisation de Gram-Schmidt montre que tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne .

Proposition 3.3.2 *Soit $(H, \langle .,.\rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in N}$ une base Hilbertienne de H. Alors $\|e_n\|_H = 1$ pour tout $n \in N$ et $x_n \rightharpoonup^{\star} 0$ faible* dans H.*

Démonstration

Le fait que $\|e_n\|_H = 1$ pour tout $n \in N$ résulte du fait que la base est orthonormée . Notons $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, ..., e_n)$ qui est un sous espace fermé (car de dimension fini) de E. Par conséquent, la projection orthogonale $P_n(x)$ d'un élément $x \in H$ sur F_n est bien définie. Par ailleurs, on a :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

En effet, $P_n(x) \in F_n$ et pour tout $0 \leq j \leq n$, on a

$$\langle x - P_n(x), e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle + \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = 0.$$

car $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Ceci montre que $\langle x - P_n(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in F_n$, que $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. Par ailleurs, le fait que la base $e_0, ..., e_n$ est orthonormée montre que

$$\|p_n(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

Une nouvelle application montre que $x = P_n(x)+x-P_n(x)$ avec $P_n(x) \in F_n$ et $x-P_n(x) \in F_n^{\perp}$ et, d'aprés Pythagore, on a que :

$$||x||^2 = ||P_n(x)||^2 + ||x - P_n(x)||^2 \geq \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \ .$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient l'inégalité de Bessel

$$||x||^2 \geq \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \ .$$

La série précédente étant convergente, son terme général tend vers zéro, soit $\langle x, e_n\rangle \to 0$, ce qui montre bien que $e_n \rightharpoonup^* 0$ faible* dans H. Le résultat précédent nous fournit un cas de suite faiblement convergente qui ne converge pas fortement. Toutefois, en dimension finie, les deux notions de convergence coïncident .

Proposition 3.3.3 *Soient E un espace de dimension finie et $(f_n)_{n\in N}$ une suite de E'. Si $f_n \rightharpoonup^* f$ faible* dans E' , alors $f_n \to f$ fortement dans E'.*

Démenstration

Soit d = dim(E) = dim(E') , B = $(e_1, ..., e_d)$ une base de E et $(e'_1, ..., e'_d)$ la base de E' duale de B (i.e. $\langle e'_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$). Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on considére la norme suivante sur E' :

$$||f||^2 = \sum_{i=1}^{d} f_i^2 \text{ , où } f = \sum_{i=1}^{d} f_i e'_i.$$

Comme $f_n \rightharpoonup^* f$ faible* dans E' on a en particulier que $(f_n)_i = \langle f_n, e_i\rangle \to \langle f, e_i\rangle = f_i$ pour tout i = 1, ..., d, et donc

$$||f_n - f||^2 = \sum_{i=1}^{d} |(f_n)_i - f_i|^2 \to 0$$

car la somme est finie .

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons présenté un important sujet principal de l’analyse mathématique ,les caractéristiques de la topologie faible et son rôle dans l’étude de l’existence et de l’unicité des solutions aux problémes variables.
Nous avons également défini la topologie faible-étoile et son importance dans la compacité de la boule unité fermée dans un espace dual.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Henrot, M. Pierre, Variation et optimisation de formes Une analyse géométrique, Books on Demand 2006

[2] B. Beauzamy, Espaces d'interpolation réels, topologie et geometrie, Springer 2006

[3] C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti, Discrétisations variationnelles de problémes aux limites elliptiques, Springer 2004

[4] J. Simon, Espaces de Banach, Fréchet, Hilbert et Neumann, Jacques Simon 2017

[5] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Master, Théorie et applications, Springer (2010).

[6] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Springer 2007

[7] N. El Karoui, M. Benaïm, Promenade aléatoire chaînes de Markov et simulations, martingales et stratégies, Ecole Polytechnique 2005

[8] S. Sarfati, méthodes, savoir-faire et astuces , Bréal 1997