

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire AbdelhafidBoussouf - Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Mécanique et Électromécanique



N° Ref:

Projet de Fin d'Etude
En vue de l'obtention du diplôme de Master
Génie Mécanique Énergétique

Spécialité : ÉNERGÉTIQUE

La Convection Forcée Avec Des Propriétés Variables Dans Une Espace Annulaire Entre Deux Cylindres Elliptique

Réalisé par :

-Atrouz Salah Eddine

-Difi Mouloud

Dirigé par :

Dr. Zerari Khalil

Devant le jury composé de :

Président :	M ^{me} . Ilhame Zeghbid	M.C.A	Centre Universitaire - Mila
Rapporteur :	M ^r . Zerari Khalil	M.C.B	Centre Universitaire - Mila
Examineurs :	M ^r . Fakiri Fateh Allah	M.C.A	Centre Universitaire - Mila

Année Universitaire: 2022/2023

Remerciement

NOUS REMERCIONS DIEU LE TOUT-PUISSANT DE NOUS AVOIR ACCORDÉ LA SANTÉ ET LA VOLONTÉ D'ENTREPRENDRE ET DE TERMINER CETTE THÈSE. TOUT D'ABORD, CE TRAVAIL NE SERAIT PAS AUSSI RICHE ET N'AURAIT PU VOIR LE JOUR SANS L'AIDE ET L'ENCADREMENT DE **M. KHALIL ZERARI**. NOUS LE REMERCIONS POUR LA QUALITÉ DE SON ENCADREMENT EXCEPTIONNEL, SA PATIENCE, SA RIGUEUR ET SA DISPONIBILITÉ PENDANT LA PRÉPARATION DE CETTE THÈSE. NOUS REMERCIONS NOS PARENTS DE NOUS AVOIR APPRIS À TOUJOURS POURSUIVRE NOS RÊVES, AINSI QUE NOS FRÈRES ET SŒURS. NOUS REMERCIONS NOS AMIS, NOS COLLÈGUES DE L'INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES, AINSI QUE L'ENSEMBLE DES ENSEIGNANTS ET RESPONSABLES. ENFIN, JE TIENS À REMERCIER TOUS CEUX QUI ONT CONTRIBUÉ DE PRÈS OU DE LOIN À LA RÉALISATION DE CE TRAVAIL

Convection forcée dans une plusieurs espaces annulaires Entre deux cylindres elliptiques

Résumé :

Cette étude présente une analyse numérique tridimensionnelle du transfert de chaleur par convection forcée dans les espaces annulaires entre deux cylindres elliptiques. Le cylindre intérieur est fixe et chauffé par un flux de chaleur constant, tandis que le cylindre extérieur est fixe et autre, ce qui signifie qu'il n'interagit pas avec l'environnement extérieur. Les paramètres du cylindre ont été modifiés pour trois cas différents, et les équations ont été résolues en utilisant la méthode des volumes finis. Les résultats ont montré des différences significatives de transfert de chaleur entre les boîtiers, en particulier dans le cas de l'espace annulaire inversé ($\varepsilon_i = 0.5$, $\varepsilon_o = 0.875$). La recherche indique que la réduction de l'espace annulaire améliore le transfert de chaleur en raison d'une augmentation de la vitesse d'écoulement et de la proximité des limites rapides. Les résultats ont été comparés à une étude précédente et ont montré une légère augmentation de la température moyenne et une élévation du nombre de Nusselt. Les conclusions de l'étude confirment l'importance d'utiliser des propriétés physiques variables dans les modèles d'analyse thermique.

Mots clé : convection forcée, cylindre elliptique, confocaux, la méthode de volumes finis, espace annulaire.

Forced convection in a several annular space between Two elliptical cylinders

Abstract:

This study proposes a three-dimensional numerical analysis of heat transfer by forced convection in annular spaces between two ellipsoidal cylinders. The inner cylinder is stationary and heated by a constant heat flux, while the outer cylinder is stationary and adiabatic, meaning it does not interact with the external environment. The parameters of the cylinders were varied for three different cases, and the equations were solved using the finite volume method. The results showed significant differences in heat transfer and dynamics between the cases, especially in the case characterized by a reversed annular space. The research indicates that reducing the annular space improves heat transfer due to increased flow velocity and proximity to the bounding surfaces. The results were compared to a previous study and showed a slight increase in average temperature and an elevated Nusselt number. The study's conclusions confirm the importance of using variable physical properties in thermal analysis models.

Key words: forced convection, elliptical cylinder, confocal, finite volume method, annular space

الحمل الحراري القسري في عدة فضاءات حلقيّة بين اسطوانتين اهليجيتين افقيتين

ملخص

هذه الدراسة تقترح تحليلاً عددياً ثلاثي الأبعاد لنقل الحرارة بواسطة الحمل القسري في الفراغات الحلقيّة بين اسطوانتين بيضاويتين الشكل. الأسطوانة الداخلية ثابتة وتسخن بتدفق حراري ثابت، بينما الأسطوانة الخارجية ثابتة ولا تتفاعل مع البيئة الخارجية، أي أنها لا تتفاعل مع البيئة الخارجية. تم تعديل معلمات الأسطوانتين لثلاثة حالات مختلفة، وتم حل المعادلات باستخدام طريقة الحجم النهائي. أظهرت النتائج اختلافات ملحوظة في نقل الحرارة والديناميكا بين الحالات، خاصة في الحالة المميزة بالفراغ الحلقي

$$(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.875) \text{ المعكوس}$$

يشير البحث إلى أن تقليل الفراغ الحلقي يحسن نقل الحرارة بسبب زيادة سرعة التدفق واقتراب الحدود السريعة. يتم مقارنة النتائج مع دراسة سابقة وتظهر زيادة طفيفة في درجة الحرارة المتوسطة وارتفاع في رقم نوسلت. تؤكد استنتاجات الدراسة أهمية استخدام خصائص فيزيائية متغيرة في نماذج التحليل الحراري.

الكلمات المفتاحية: الحمل الحراري القسري، أسطوانات متحدة البؤر إهليجية الشكل، طريقة الحجم المنتهية

Nomenclature

a	Demi distance focal	(m)
C_p	Chaleur massique a pression constante	(J/kg.K)
g	Accélération de la pesanteur	(m/s ²)
h_1	Coefficient métrique radial	(m)
h_2	Coefficient métrique azimutal	(m)
h_3	Coefficient métrique axial	(m)
h	Coefficient local de la convection	(W/m ² .K)
k	Conductivité thermique de fluide	(W/m .K)
L	Longueur du conduit	(m)
P	Pression	(Pa)
P_1 ou bien P_i	Périmètre du cylindre intérieur	(m)
q_w	Densité de flux de chaleur a la surface du cylindre intérieure	(W/m ²)
S	Surface de la section droite du conduit (section d'écoulement)	(m ²)
t	Temps	(s)
T	Température	(c/ K)
V_ε	Vitesse radiale	(m/s)
V_η	Vitesse azimutale	(m/s)
V_z	Vitesse axiale	(m/s)
Z	Coordonnée axiale	(m)

Symboles Grecs

ε_i	Rayon de cylindre elliptique intérieur	
ε_o	Rayon de cylindre elliptique extérieur	
B	Coefficient d'expansion thermique	(1/K)
Δt	Pas de temps	(s)
Δ	Intervalle fini	
μ	Viscosité dynamique	(kg/m .s)
P	Masse volumique	(kg/m ³)
ε	Coordonnée elliptique radiale	
η	Coordonnée elliptique azimutale	
ν	Viscosité cinématique	(m ² /s)

Indices

i	Surface du cylindre intérieure
m	Valeur moyenne
Max	Valeur maximale
Min	Valeur minimale
P	Fait référence au nœud P d'un volume fini
n, s, e, w, f, b	Fait référence aux faces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, haut et bas
N, S, E, W, F, B	Fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, haut et bas
u	Maillage décale suivant la direction radiale

\mathbf{v}	Maillage décale suivant la direction angulaire
W	Maillage décale suivant la direction axiale
0	Entre du conduit

Exposants

$*$	Variable adimensionnelle
t	Désigne l'instant
$t + \Delta t$	Désigne l'instant $t + \Delta t$
$t - \Delta t$	Désigne l'instant $t - \Delta t$

Les nombres adimensionnels

Pr	Nombre de Prandtl
Re	Nombre de Reynolds
Br	Nombres de Brinkman
$Nu(\eta, z)$	Nombre de Nusselt local
$Nu(z)$	Nombre de Nusselt axial
Ra	Nombre de Rayleigh

Table des matières

Résumé	
Nomenclature	
Table des matières	
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Introduction général.....	1
Chapitre I.....	3
Etude Bibliographique.....	3
I. Introduction.....	4
I.1. La convection forcée dans l'espace annulaire entre deux cylindres.....	4
I.2. La convection forcée, naturelle et mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres.....	7
I.3. La convection forcée et mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres excentriques.....	8
Chapitre II.....	11
Modèle Mathématique.....	11
II.1. Introduction	12
II.2. Description du problème.....	12
II.2.1. Formulation mathématique	12
II.2.1.1. L'équation de continuité.....	13
II.2.1.2. L'équation de quantité de mouvement suivant ε	13
II.2.1.3. L'équation de quantité de mouvement suivant η	13
II.2.1.4. L'équation de quantité mouvement suivant z	13
II.2.1.5. L'équation d'énergie.....	13
II.2.1.6. Conditions initiales et aux limites.....	14
II.2.2. La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique	15
II.2.2.1. L'équation de continuité.....	15
II.2.2.2. L'équation de quantité de mouvement suivant ε	15
II.2.2.3. L'équation de quantité du mouvement suivant η	16
II.2.2.4. L'équation de quantité du mouvement suivant z	16
II.2.2.5. L'équation d'énergie.....	16

II.2.2.6. Conditions initiales et aux limites non dimensionnelles.....	16
II.3. Modélisation des propriétés physiques variables.....	17
II.4. Les Bilans thermique et massique.....	18
II.4.1. Bilan thermique global	18
II.4.2. Bilan massique global.....	19
II.5. Le nombre de Nusselt.....	19
II.5.1. Le nombre de Nusselt local.....	20
II.5.2. Le nombre de Nusselt axial et moyenne.....	20
Chapitre III.....	22
Etude Numérique.....	22
III.1. Introduction	23
III.2. Le Maillage	23
III.3. Détails de discrétisation	25
III.3 .1. Discrétisation de l'équation de continuité.....	29
III.3.2. Discrétisation de l'équation de l'énergie.....	29
III.3.3. Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant η	33
III.4. La discrétisation des conditions aux limites	46
III.4.1. Les conditions aux limites thermiques.....	46
III.4.2. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant ε	48
III.4.3. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant η	50
III.4.4. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant z	51
III.5. Convergence.....	53
Chapitre IV.....	55
Résultats et discussions.....	55
IV.1. Introduction.....	56
IV.2. Le premier cas ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1$).....	56
IV.2.2. Le champ thermique.....	56
IV.2.2. L'écoulement axial.....	57
IV 2.3. Le champ de la viscosité.....	58
IV.2.4. Le champ de conductivité ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1$).....	58
IV.2.5. L'évolution du nombre de Nusselt axial.....	59
IV 2.6. L'évolution de température moyen ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1$).....	60
IV.3. Deuxième cas ($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_0 = 1$).....	61

IV.3.1. Le champ thermique.....	61
IV.3.2. L'écoulement axial.....	62
IV.3.3. Le champ de viscosité.....	63
IV.3.4. Le champ de conductivité	64
IV.3.5. L'évolution des nombres de Nusselt axial	65
IV.3.6. L'évolution de température moyen ($\epsilon_i=0.75$, $\epsilon_0=1$)	66
IV.3. Dernier cas ($\epsilon_i=0.5$, $\epsilon_0=0.875$).....	66
IV.4.1. Le champ thermique.....	66
IV.4.2. L'écoulement axial.....	67
IV.4.3. Le champ de viscosité.....	68
IV.4.4. Le champ de conductivité.....	69
IV.4.5. L'évolution du nombre de Nusselt axial ($\epsilon_i =0.5$, $\epsilon_0=0.875$).....	70
IV.4.6. L'évolution de température moyen.....	71
IV.4.7. L'évolution des nombres du Nusselt axiaux.....	72
IV.4.8. L'évolution des Températures moyennes axiaux.....	73
IV.5. Comparaison des résultats.....	73
Chapitre V.....	75
Conclusion générale.....	75
V.1.Conclusion générale.....	76

Liste des figures

Figure.II.1. Géométrie et conditions aux limites du problème	12
Figure.II.2 : Systèmes de coordonnées elliptiques et cartésiennes sur un plan polaire....	13
Figure.III.1. Représentation de volume fini.....	24
Figure.III.2. Le maillage numérique utilisé et sa projection en coupe. La longueur du conduit est réduite cinq fois pour une représentation graphique plus claire.....	25
Figure.III.3. Maillage suivant les coordonnées (η, z)	26
Figure.III.4. Maillage suivant les coordonnées (η, ε)	27
Figure.III.5. Maillage suivant les coordonnées (z, ε)	28
Figure.III.6. Le maillage décalé suivant η sur la surface (η, z)	34
Figure.III.7. Le maillage décalé suivant η sur la surface (η, ε)	35
Figure.III.8. Maillage axial à la sortie du conduit.....	48
Figure.IV.1. Le champ numérique de la température ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1$) diffère de celle de Z^*	56
Figure.IV.2. Le champ numérique de la vitesse axial ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1$) diffère de celle de Z^*	57
Figure.IV.3. Le champ numérique de viscosité ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1$) diffère de celle de Z^*	58
Figure.IV.4. Le champ numérique de la conductivité ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1$) diffère de celle de Z	59
Figure.IV.5. La valeur de nombre de Nusselt axial par rapport à Z^* ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1$).....	60
Figure.IV.6. La valeur de température moyen par rapport à Z^* ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1$).....	61
Figure.IV.7. Le champ numérique de la température ($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_0 = 1$) diffère de celle de Z^*	62
Figure.IV.8. le champ numérique de la vitesse axial ($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_0 = 1$) diffère de celle de Z^*	63
Figure.IV.9. le champ numérique de viscosité ($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_0 = 1$) diffère de celle de Z^*	64
Figure.IV.10. le champ numérique de la conductivité ($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_0 = 1$) diffère de celle de Z^*	65
Figure.IV.11. La valeur de nombre de Nusselt axial par rapport à Z ($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_0 = 1$).....	66
Figure.IV.12. La valeur de température moyen par rapport à Z^* ($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_0 = 1$).....	66
Figure.IV.13. le champ numérique de la température ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 0.875$) diffère de celle de Z^*	67

Figure.IV.14. le champ numérique de la vitesse axial ($\epsilon_i=0.5, \epsilon_0=0.875$) diffère de celle de Z^*	68
Figure.IV.15. Le champ numérique de viscosité($\epsilon_i=0.5, \epsilon_0=0.875$)diffère de celle de Z^*	69
Figure.IV.16. Le champ numérique de la conductivité ($\epsilon_i=0.5, \epsilon_0=0.875$)diffère de celle de Z^*	70
Figure.IV.17. La valeur de nombre de nusselt axial par rapport à $Z(\epsilon_i=0.5, \epsilon_0=0.875)$	71
Figure.IV.18. La valeur de température moyen par rapport à Z^* ($\epsilon_i=0.5, \epsilon_0=0.875$).....	72
Figure.IV.19. La valeur de nombre de Nusselt axial par rapport à Z^* trois cas.....	72
Figure.IV.20. La valeur de Température moyenne par rapport à Z^* pour les trois cas.....	73

Liste des tableaux

Tableau.II.1 Les variables et les propriétés thermo-physiques adimensionnelles.....	15
Tableau.II.2 Les propriétés thermo-physiques et paramètre de contrôle.....	17
Tableau.III.1.les valeurs de débit d'entrée et de sortie avec l'erreur pour les trois cas.....	54
Tableau.III.2. Les valeurs de q_1 et q_6 avec les valeurs d'erreurs pour les trois cas.....	54
Tableau.IV.1. Les résultats obtenus à partir du calcul numérique pour les trois cas propriétés variables et propriétés constantes [2]	74

Introduction générale :

Le transfert de chaleur se produit lorsqu'il y a échange de chaleur entre deux corps, qu'ils soient solides, fluides ou une combinaison des deux. Il existe trois modes de transfert de chaleur pour les solides : la conduction, la convection et le rayonnement. Dans cette recherche, l'accent est mis sur la convection, en particulier sur les différents types de convection et les domaines dans lesquels ce mode de transfert est présent. L'objectif est de mener plusieurs expériences pour étudier l'effet de la variation du coefficient d'échange de chaleur, de la viscosité dynamique et du nombre de Reynolds, ainsi que du régime d'écoulement, sur la convection forcée entre deux cylindres elliptiques à propriétés variables.

La convection est un mode de transfert de chaleur qui se produit le plus souvent entre un fluide en mouvement et une paroi solide. Contrairement à la conduction, qui peut être considérée comme un transfert d'énergie dû à des mouvements microscopiques, la convection est un transfert dû à des mouvements macroscopiques. Il y a deux types de convection : la convection libre ou naturelle, où le mouvement du fluide est causé par un champ de forces intérieur, et la convection forcée, où le fluide est mis en mouvement par l'action d'un champ de forces externe. L'étude de la convection vise principalement à développer des méthodes pour évaluer le coefficient de convection et à étudier les différentes formules empiriques utilisées.

Il est important de distinguer le type de convection lors de l'étude de ce phénomène. Si le mouvement du fluide est dû à l'action d'une force extérieure, la convection est dite forcée, tandis que si le mouvement du fluide est dû uniquement à la différence des masses volumiques suite aux différences de températures, la convection est appelée convection libre ou naturelle. La convection peut également être considérée comme laminaire ou turbulente en fonction de la nature du mouvement du fluide. Les expériences montrent que le transfert de chaleur par convection dépend des propriétés thermo-physiques du fluide, telles que la viscosité dynamique, la masse volumique, la capacité calorifique, ainsi que de la géométrie et de l'état des surfaces du système, ainsi que du type d'écoulement du fluide en question. Tout cela rend la convection le mode le plus compliqué du transfert de chaleur.

La recherche est divisée en cinq chapitres : le premier chapitre représente la recherche bibliographique, le deuxième chapitre simplifie le problème avec des équations

Introduction général

mathématiques, le troisième chapitre concerne les méthodes de résolution des équations mathématiques posées dans le deuxième chapitre, le quatrième chapitre interprète les résultats obtenus par le programme numérique, et enfin la conclusion définit la valeur de la recherche et fait une comparaison avec les résultats précédents pour estimer le degré de différence entre les valeurs numériques.

Chapitre I

**Etude
Bibliographique**

I. Introduction

Dans cette étude bibliographique, nous avons résumé les apports d'un certain nombre de chercheurs dans l'exploration de la convection mixte et forcée entre deux cylindres, l'un concentrique et l'autre non concentrique.

I.1. La convection forcée dans l'espace annulaire entre deux cylindres

Une étude réalisée par **O. Terhmina et A. Mojtabi [3]** examine l'écoulement de la convection forcée dans la région d'entrée d'un espace annulaire situé entre deux cylindres coaxiaux et isothermes, en tenant compte des régimes dynamique et thermique non établis. Pour résoudre ce problème, la méthode de différences finies a été utilisée. Les résultats indiquent que, dans le cas de grands nombres de Prandtl, la longueur de mise en place du régime dynamique devient négligeable par rapport à la longueur de mise en place du régime thermique. Par conséquent, dans ce cas, il est possible de résoudre le problème thermique en supposant que le régime dynamique est établi à partir de la section d'entrée. L'établissement du régime dynamique s'accompagne d'une légère réduction de la longueur de mise en place thermique. Le transfert de chaleur, qu'il soit local ou global, dépend uniquement de la coordonnée axiale réduite $X = Z/L$ et de la température du fluide à l'entrée de l'espace annulaire.

WU, Ching-Chi, YANG, Yue-Tzu, HUANG, Kuan-Hao [4] ont mené une simulation numérique pour étudier l'écoulement turbulent à convection forcée dans un tube elliptique torsadé. L'étude visait à obtenir les caractéristiques de la chute de pression et du transfert de chaleur associées à ce type de tube. En raison de la torsion de sa paroi, les tubes elliptiques torsadés entraînent une augmentation significative de la chute de pression par rapport aux tubes ovales, la perte de charge du tube elliptique torsadé de diamètre 96 mm augmentant de 58% à 60%. Les résultats obtenus indiquent également une amélioration du transfert de chaleur dans les tubes elliptiques torsadés, avec une augmentation de 16% à 19% du nombre de Nusselt moyen par rapport aux tubes ovales.

Klaleche Sofiane et Madjour Abderrahmane [5] ont entrepris une simulation numérique du transfert de chaleur par convection forcée entre deux disques coaxiaux. Dans cette étude, le disque inférieur est soumis à un flux thermique constant, tandis que deux fluides conventionnels, l'eau et l'éthylène glycol, s'écoulent de manière laminaire et séparée. L'objectif était de mettre en évidence l'effet des nano-fluides sur les performances thermiques en convection forcée, en considérant différents nombres de Reynolds ($Re = 250, 500, 1000, 1500, 2000$). Les résultats indiquent que l'augmentation du transfert de chaleur en convection forcée est

proportionnelle à la fois à l'augmentation du nombre de Reynolds et à la fraction volumique des nanoparticules présentes dans les nano-fluides. En comparaison, le nano-fluide à base d'éthylène glycol (E.G) présente une meilleure performance que l'eau.

Lin Riyi,, Wang Xiaoqian, Xu Weidong, Jia Xinfeng, Jia Zhiying [6] se penche sur l'étude de la convection forcée dans un anneau excentrique vertical présentant différents rapports de rayon et d'excentricité (normalisés par la différence de rayon) dans le contexte du processus de forage. Dans cet article, des expériences physiques et des simulations numériques ont été réalisées en maintenant une température d'entrée constante pour le tube intérieur et un débit constant d'eau chaude. Les résultats mettent en évidence que l'augmentation des rapports de rayon conduit à une augmentation du coefficient de transport de chaleur par convection. Plus spécifiquement, pour un rapport de rayon de 1,875, le coefficient de transport thermique augmente à mesure que l'excentricité augmente. Il convient de noter que le phénomène de transport de chaleur se produisant dans les tubes et l'espace annulaire excentré peut être complexe.

Les résultats d'une recherche expérimentale menée par **TANDON, T. N., VARMA, H. K., et GUPTA, C. P. [7]** sur le comportement du transfert de chaleur lors de la condensation par convection forcée à l'intérieur d'un tube horizontal sont présentés dans cet article. L'étude examine les écoulements gravitaires, semi-annulaires et annulaires, et se concentre sur l'effet de plusieurs paramètres tels que le flux massique du frigorigène, la qualité de la vapeur, la chute de température de la pellicule de condensat et la vitesse moyenne de la masse de vapeur sur le coefficient moyen de transfert de chaleur par condensation. Les résultats révèlent que les corrélations de **Akers-Rosson** permettent de prédire les coefficients de transfert de chaleur avec une précision d'environ 25% pour l'ensemble des données. Une analyse plus détaillée des données a révélé que la nature de la relation pour le coefficient de transfert de chaleur change lors de la transition d'un écoulement annulaire et semi-annulaire à un écoulement gravitaire. Par conséquent, il est recommandé d'utiliser des corrélations du type **Akers-Rosson** avec des constantes et des puissances modifiées pour les deux régimes d'écoulement. En résumé, cet article présente les résultats d'une recherche expérimentale approfondie sur le transfert de chaleur lors de la condensation par convection forcée dans un tube horizontal, en se concentrant sur les écoulements gravitaires, semi-annulaires et annulaires, ainsi que sur l'impact de divers paramètres sur le coefficient moyen de transfert de chaleur. Les corrélations de **Akers-Rosson** se sont avérées utiles pour prédire ces coefficients, tandis que la nature de la relation diffère selon le

type d'écoulement. Des recommandations sont proposées pour l'utilisation de corrélations adaptées à chaque régime d'écoulement.

Les travaux expérimentaux menés par **M. Hunt C.L.Tien [8]** se focalisent sur l'étude de l'écoulement et du transfert de chaleur dans des milieux fibreux à forte porosité. L'étude examine spécifiquement la convection forcée à travers des matériaux présentant différentes perméabilités, porosités et conductivités thermiques. Les résultats démontrent que les milieux poreux augmentent le transfert de chaleur à partir d'une surface, par rapport aux calculs effectués pour un écoulement piston ou laminaire dans un canal. Cette augmentation est le résultat de la diffusion, un phénomène non Darcien qui décrit le mélange intra-poreux se produisant lorsque le fluide se déplace entre les particules solides.

Djamaa Youba et Benabdellah Iskander [9] ont réalisé une simulation numérique tridimensionnelle de la convection forcée dans un espace annulaire situé entre deux cylindres elliptiques. Les équations ont été résolues numériquement en utilisant la méthode des volumes finis. Le transfert de chaleur par convection forcée entre les deux cylindres présente un comportement remarquable, avec une augmentation significative. Cependant, le nombre de Nusselt local, qui mesure ce transfert, diminue dans la région chaude et augmente dans les régions froides.

R.S. Matos, J.V.C. Vargas, T.A. Laursen, A. Bejan[10] Cette étude porte sur l'optimisation du taux de transfert de chaleur entre un faisceau de tubes (ailetés ou non) et un flux extérieur dans un volume donné. Le processus d'optimisation considère des arrangements circulaires et elliptiques avec des configurations décalées. La première étape consiste à reconnaître l'espace limité disponible comme une contrainte de volume fixe. Des résultats expérimentaux ont été obtenus pour des configurations circulaires et elliptiques avec un nombre fixe de tubes (12), initialement disposés en triangle équilatéral qui s'insère uniformément dans le volume fixe. L'espacement tube à tube optimal a été identifié en réduisant les espacements et en mesurant le transfert de chaleur. L'étude examine également l'excentricité optimale des tubes et l'espacement entre les ailettes. Les résultats, obtenus en utilisant l'air comme fluide externe, couvrent une gamme de nombres de Reynolds ($8526 \text{Re}L \leq 68520$, où L est la longueur balayée du volume fixe). Les agencements circulaires et elliptiques avec la même surface de section transversale d'obstruction d'écoulement sont comparés sur la base du transfert de chaleur total maximum, permettant une comparaison équitable indépendamment de la forme de la section transversale du tube et des chutes de pression équivalentes. La première partie de l'article présente des résultats d'optimisation numérique bidimensionnelle pour des arrangements de tubes

circulaires et elliptiques sans ailettes, validés par des mesures expérimentales. La deuxième partie présente les résultats d'optimisation expérimentale pour les arrangements de tubes circulaires et elliptiques sans ailettes et à ailettes. La disposition elliptique optimale démontre un gain relatif de transfert de chaleur allant jusqu'à 20 % par rapport à la disposition circulaire optimale. L'excentricité optimale locale et l'espacement d'aileron à aileron existent, motivant une exploration plus approfondie des optima globaux dans les futures études d'optimisation numérique tridimensionnelle, en tenant compte de l'espacement tube à tube, de l'excentricité et de l'espacement d'aileron à aileron.

MECILI Mourad, LATRECHE Salah, BOUCHAALA Houd[11] Au cours du présent travail nous aborderons la convection forcée dans un micro-tube en utilisant le modèle d'écoulement à piston. Dans ce genre de modèle la vitesse du fluide est supposée comme étant constante à travers chaque section droite de la conduite. D'autre part on tiendra en compte l'aspect micro-échelle en incorporant le saut de température à la paroi. La dissipation visqueuse sera négligée et la conduction axiale au sein du fluide sera incluse. L'équation de l'énergie sera analytiquement résolue par la technique de la transformation intégrale finie. On supposera le long de ce travail que la température des parois est constante.

I.2. La convection forcée, naturelle et mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres

Le thème de recherche d'**Ahmed Idrissi et al. [12]** concerne le transfert de chaleur dans un espace annulaire contenant des blocs isothermes, en se concentrant particulièrement sur la bifurcation numérique pour les blocs de faible hauteur. L'expérience consiste à placer deux blocs sur la paroi intérieure du cylindre et à étudier l'influence de la variation de l'angle d'inclinaison des blocs sur le transfert de chaleur, ainsi que l'effet du nombre de Rayleigh. La méthode utilisée dans l'étude numérique est la méthode des différences finies, et la résolution des matrices est effectuée à l'aide de l'algorithme de Thomas TDMA. Les résultats ont montré qu'un nombre de Rayleigh proche de 3598 permet une amélioration du transfert de chaleur de 18%.

Le thème de recherche abordé par **M.R.H. Nobari et al. [13]** concerne la convection mixte dans un tube annulaire hélicoïdal. L'objectif de cette étude est d'examiner l'effet de nombres adimensionnels tels que le nombre de Reynolds, le nombre de Prandtl et le nombre de Richardson sur le profil de température dans le flux ainsi que sur le facteur de frottement et le taux de transfert de chaleur. La méthode des différences finies a été utilisée, avec l'approximation de Boussinesq, pour résoudre le problème. Les résultats mettent en évidence le rôle important du nombre de Richardson dans la convection mixte dans un tube annulaire

hélicoïdal en contrôlant l'effet de flottabilité. De plus, différents paramètres adimensionnels ont été identifiés comme ayant une influence dominante sur le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt à l'intérieur du tube hélicoïdal.

K. Zerari et al. [14] ont effectué une simulation numérique pour étudier l'effet des propriétés thermo-physiques sur la convection mixte dans un espace annulaire entre deux cylindres elliptiques horizontaux. La méthode des volumes finis a été utilisée avec une discrétisation spatiale et temporelle du second ordre pour résoudre les équations du modèle. Parmi les résultats obtenus, il a été observé que la prise en compte de la convection mixte avec des propriétés physiques variables conduit à des comportements physiques différents des écoulements et des champs thermiques, tant qualitativement que quantitativement, par rapport à la convection forcée avec des propriétés dépendant de la température ou à la convection mixte avec des propriétés constantes. Dans ce cas, le nombre de Nusselt obtenu est également plus élevé. L'amélioration du transfert de chaleur obtenue en considérant la convection naturelle dans la convection mixte, avec des propriétés physiques dépendant de la température, augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof, qui est proportionnel au flux thermique imposé à la surface du cylindre intérieur.

NazrulIslam , U.N. Gaitonde , G.K. Sharma[15] ont présenté une étude se concentre sur une étude numérique du transfert de chaleur par convection mixte laminaire stable dans un anneau concentrique horizontal. L'air et l'eau sont utilisés comme fluides de travail. L'étude met un accent particulier sur les effets de la région d'entrée. La condition aux limites thermique choisie est un flux de chaleur uniforme au niveau de la paroi interne, tandis que la paroi externe est adiabatique. La procédure numérique employée est l'algorithme SIMPLE, tel que décrit dans la publication "Int. J. Heat Mass Transfer 15 (1972) 1787", qui utilise la méthode des différences finies pour résoudre les équations de quantité de mouvement et d'énergie. Les résultats de l'enquête indiquent que les nombres de Nusselt pour l'air sont significativement plus élevés que les valeurs correspondantes pour la convection mixte pleinement développée, couvrant une partie substantielle du conduit annulaire. Les résultats numériques sont en outre étayés par les données expérimentales obtenues.

I.3. La convection forcée et mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres excentriques

Dans leur étude, **Tanxiao Zhu et al. [16]** ont réalisé une expérience et une simulation sur la convection forcée dans un espace annulaire vertical excentrique. La méthode utilisée pour

obtenir une solution numérique était celle des éléments finis. Les résultats de l'étude ont révélé une augmentation du nombre de Nusselt dans le canal annulaire avec l'augmentation du nombre de Reynolds. L'impact de la taille du canal a également été étudié, montrant une relation non linéaire entre le nombre de Nusselt et le rapport de rayon. Les résultats ont démontré que, pour $Re > 4700$, le nombre de Nusselt augmentait avec la diminution de l'aspect de rayon (de 0,53 à 0,44), tandis que pour $Re < 4700$, il augmentait avec la diminution de l'aspect de rayon (de 0,33 à 0,25). De plus, pour $Re > 4000$, le nombre de Nusselt diminuait avec la diminution de l'aspect de rayon, alors que pour $Re < 4000$, il augmentait avec la diminution de l'aspect de rayon.

Une étude réalisée par **E. Fattahi et al. [17]** a été menée sur le transfert de chaleur par convection mixte dans un anneau excentrique en utilisant le modèle de **Lattice Boltzmann (LBM)**. L'effet de l'excentricité sur le transfert de chaleur à différents emplacements a été examiné pour des valeurs de $Ra = 104$ et $\sigma = 2$. Le LBM à double population s'est avéré être une approche efficace pour simuler la convection naturelle dans une géométrie comprenant des frontières courbes et mobiles. Les résultats ont montré que l'augmentation du transfert de chaleur était particulièrement élevée lorsque la position radiale sans dimension r était égale à $3/4$, ce qui se produisait lorsque le cylindre intérieur était déplacé loin du centre et plus près du cylindre extérieur. Indépendamment de la position radiale, le nombre moyen de Nusselt augmentait lorsque le cylindre intérieur se déplaçait vers le bas.

Dans leur étude, **Basant K. Jha et al. [18]** ont examiné l'impact des fluides générateurs et absorbants de chaleur sur un flux de convection mixte dans un micro-anneau concentrique vertical (MCA). Ils ont pris en compte le glissement de vitesse et le saut de température à la surface extérieure du cylindre intérieur et à la surface intérieure du cylindre extérieur. Les équations de quantité de mouvement et d'énergie ont été résolues séparément pour obtenir une solution exacte. Les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce ont été utilisées pour le fluide caloporteur, tandis que les fonctions de Bessel modifiées de premier et de second type ont été utilisées pour le fluide absorbant la chaleur. Lors des calculs numériques, il a été observé que l'augmentation de la génération de chaleur, représentée par le paramètre " a ", améliorait la température et la vitesse du fluide, mais réduisait le taux de transfert de chaleur à la surface extérieure du cylindre intérieur. En revanche, une tendance inverse était observée pour le fluide absorbant la chaleur, où l'augmentation de la génération de chaleur améliorait le taux de transfert de chaleur à la surface extérieure du cylindre intérieur.

RANGANATHAN KUMAR [19] ont fait une recherche sur la convection naturelle des gaz dans un anneau horizontal, où le cylindre intérieur est chauffé par l'application d'un flux de

chaleur constant et le cylindre extérieur est refroidi de manière isotherme, est étudié numériquement. Des résultats détaillés de la température, de la vitesse et du transfert de chaleur sont présentés pour une large gamme de nombres de Rayleigh allant de la conduction au régime d'écoulement stable dominé par la convection, et des rapports de diamètre de 1,2-10. Un tourbillon en forme de croissant domine pour le petit rapport de diamètre et un modèle d'écoulement en forme de rein apparaît pour le grand rapport de diamètre comme observé par les chercheurs précédents dans leurs études de visualisation de flux. La température de la paroi interne est fonction du rapport de diamètre et du nombre de Rayleigh. Une augmentation du nombre de Rayleigh basée sur la même différence de température pour la condition aux limites de la paroi interne de flux de chaleur constant ou de température constante augmente le taux de transfert de chaleur ; cependant, l'augmentation est plus importante pour le cas de la chaleur constante &IX. Aux grands rapports de diamètre ($K > 10$), les taux de transfert de chaleur sont les mêmes pour les deux types de chauffage, et un seul cylindre dans une atmosphère infinie donne à peu près les mêmes résultats.

Chapitre II
Modèle Mathématique

II.1. Introduction :

Ce chapitre traite de la modélisation mathématique d'un problème physique spécifique. La modélisation mathématique consiste à représenter une réalité physique en un modèle mathématique accessible à l'analyse et au calcul.

Les modèles sont basés ici sur des équations aux dérivées partielles, de la conservation de la masse, les trois équations de la quantité du mouvement et de l'énergie, ainsi que les conditions initiales et aux limites. Les équations sont écrites en coordonnées elliptiques. Le transfert thermique est quantifié à l'aide des nombres du Nusselt local et moyens.

II.2. Description du problème :

On considère un écoulement de la convection forcé dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques horizontaux et concentrique avec des propriétés thermo-physique variables. Le cylindre intérieur est statique et chauffé par un flux de chaleur constant, le cylindre extérieur est statique et adiabatique. Nous étudions trois cas de différent espace annulaire, Les rayons ellipsoïdaux du cylindre intérieur et extérieur sont égaux à (0,5 et 1,0), (0.75 et 1), (0.5 et 0.875) respectivement, La de mi-distance focale des ellipses de la section droite du conduit est égale à 0.0045m, La longueur du conduit est 0.45m, A l'entrée du conduit, le fluide (eau) a une vitesse axiale constante égale à $2.231 * 10^{-2}$ m/s et une température uniforme égale à 20°C. Un schéma, qui n'est pas à l'échelle, du problème est présente dans la **Figure.II.1** .

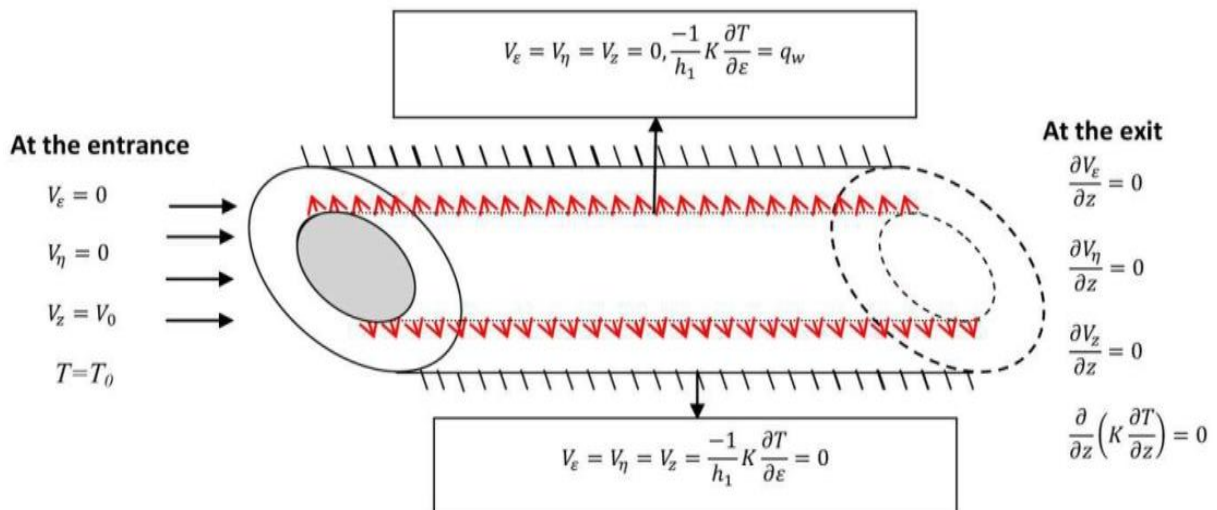


Figure.II.1. Géométrie et conditions aux limites du problème.

II.2.1. Formulation mathématique :

A $t=0$ on a : $V_\epsilon = 0, V_\eta = 0, V_z = 0, T = T_0$

A $t > 0$ on a les équations de conservation :

II.2.1.1. L'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1 h_1} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.1)$$

II.2.1.2. L'équation de quantité de mouvement suivant ε :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho V_\varepsilon)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} + \rho V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \rho V_\eta^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right] \\ &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P_h}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right. \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right) \\ & \quad \left. - 2\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) \right] \quad (2.2) \end{aligned}$$

II.2.1.3. L'équation de quantité de mouvement suivant η :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho V_\eta)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + \rho V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - \rho V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] \\ &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial P_h}{\partial \eta} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right. \\ & \quad - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \\ & \quad \left. + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - 2\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \right] \quad (2.3) \end{aligned}$$

II.2.1.4. L'équation de quantité mouvement suivant z :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_z)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta V_z)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z V_z)}{\partial z} \right] \\ &= -\frac{\partial P_h}{\partial z} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right] \quad (2.4) \end{aligned}$$

II.2.1.5. L'équation d'énergie :

$$C_p \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + C_p \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right]$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (2.5)$$

II.2.1.6. Conditions initiales et aux limites :

*Première cas ($\varepsilon_i=0.5, \varepsilon_o=1$) :

$$t=0 \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0, \quad T = T_0 \quad (\text{condition initiale})$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 0.5, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre intérieur}) \quad (2.6)$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 1, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (\text{sur la paroi de cylindre extérieur}) \quad (2.7)$$

$$t > 0 \quad Z = 0, \quad V_z = V_0, \quad V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad T = T_0 \quad (\text{à l'entrée de conduit}) \quad (2.8)$$

$$t > 0, z = L, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_\eta}{\partial z} = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{à la sortie de conduit}) \quad (2.9)$$

*Deuxième cas ($\varepsilon_i=0.75, \varepsilon_o=1$)

$$t=0 \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0, \quad T = T_0 \quad (\text{condition initiale})$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 0.75, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre intérieur}) \quad (2.10)$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 1, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (\text{sur la paroi de cylindre extérieur}) \quad (2.11)$$

$$t > 0 \quad Z = 0, \quad V_z = V_0, \quad V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad T = T_0 \quad (\text{à l'entrée de conduit}) \quad (2.12)$$

$$t > 0, z = L, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_\eta}{\partial z} = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{à la sortie de conduit}) \quad (2.13)$$

*Dernier cas ($\varepsilon_i=0.5, \varepsilon_o=0.875$) :

$$t=0 \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0, \quad T = T_0 \quad (\text{condition initiale})$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 0.5, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre intérieur}) \quad (2.14)$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 0.875, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (\text{sur la paroi de cylindre extérieur}) \quad (2.15)$$

$$t > 0 \quad Z = 0, \quad V_z = V_0, \quad V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad T = T_0 \quad (\text{à l'entrée de conduit}) \quad (2.16)$$

$$t > 0, z = L, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_\eta}{\partial z} = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{à la sortie de conduit}) \quad (2.17)$$

Les variables adimensionnelles et les propriétés thermo-physiques sont normalisées par leurs échelles caractéristiques pour obtenir des quantités adimensionnelles qui sont présentées dans le **Tableau II.1**.

$h_1^* = \frac{h_1}{a},$	$h_2^* = \frac{h_2}{a}$
$z^* = \frac{z}{a},$	$t^* = \frac{V_0 t}{a}$
$V_\varepsilon^* = \frac{V_\varepsilon}{V_0},$	$V_\eta^* = \frac{V_\eta}{V_0}$
$V_z^* = \frac{V_z}{V_0},$	$T^* = \frac{T - T_0}{\frac{q_w a}{k_0}}$
$P^* = \frac{P - P_0}{\rho_0 V_0^2},$	$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}$
$k^* = \frac{K}{K_0},$	$L^* = \frac{L}{a}$

Tableau II.1 Les variables et les propriétés thermo-physiques adimensionnelles.

II.2.2. La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique :

II.2.2.1. L'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial (h_2^* V_\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1^* V_\eta^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1^* h_2^* V_z^*)}{\partial z^*} \right] = 0 \quad (2.18)$$

II.2.2.2. L'équation de quantité de mouvement suivant ε :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial (h_2^* V_\varepsilon^* V_\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1^* V_\eta^* V_\varepsilon^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1^* h_2^* V_z^* V_\varepsilon^*)}{\partial z^*} + V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} - V_\eta^{*2} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right] \\
 &= -\frac{1}{h_1^*} \frac{\partial P^*}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} \right) - 2\mu^* \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_\varepsilon^* \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right. \\
 &+ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu^* \frac{V_\eta^*}{h_1^*} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right) + \mu^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \mu^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu^* h_2^* \frac{V_z^*}{\partial \varepsilon} \right) \\
 &\left. - 2\mu^* \frac{1}{h_2^*} \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* h_1^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \right) \right] \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

II.2.2.3. L'équation de quantité du mouvement suivant η :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V_\eta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial (h_2^* V_\varepsilon^* V_\eta^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1^* V_\eta^* V_\eta^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1^* h_2^* V_z^* V_\eta^*)}{\partial z^*} + V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^{*2} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right] \\
 &= -\frac{1}{h_2^*} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} \right) \right. \\
 &- 2\mu^* \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_\eta^* \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu^* h_1^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu^* h_2^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu^* \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right) + \mu^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \\
 &\left. + \mu^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \frac{h_2^*}{\partial \varepsilon} - 2\mu^* \frac{1}{h_1^*} \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu^* \frac{V_\varepsilon^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right) \right] \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

II.2.2.4. L'équation de quantité du mouvement suivant z :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial (h_2^* V_\varepsilon^* V_z^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1^* V_\eta^* V_z^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1^* h_2^* V_z^* V_z^*)}{\partial z^*} \right] \\
 &= -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(2\mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) \right. \\
 &\left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu^* h_2^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* h_1^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} \right) \right] \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

II.2.2.5. L'équation d'énergie :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial (h_2^* V_\varepsilon^* T^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1^* V_\eta^* T^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1^* h_2^* V_z^* T^*)}{\partial z^*} \right] \\
 &= \frac{1}{\text{Re} Pr h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(k^* h_1^* h_2^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right] \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

II.2.2.6. Conditions initiales et aux limites non dimensionnelles :

$$t^* = 0, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = T^* = 0 \text{ (condition initiale)} \quad (2.23)$$

$$t^* > 0, \varepsilon = \varepsilon_i, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = 0,$$

$$-\frac{1}{h_1^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} = 1 \text{ (sur la paroi de cylindre intérieur)} \quad (2.24)$$

$$t^* > 0, \varepsilon = \varepsilon_o,$$

$$V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = -\frac{1}{h_1^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} = 0 \text{ (sur la paroi de cylindre extérieure)} \quad (2.25)$$

$$t^* > 0, z^* = 0, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = 0, V_z^* = 1, T^* = 0 \text{ (à l'entrée de conduit)} \quad (2.26)$$

$$t^* > 0, z^* = L^* = 100, \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \text{ (à la sortie de conduit)} \quad (2.27)$$

Certaines constantes, les valeurs de référence et les paramètres de contrôle (dynamiques et Thermiques) sont précisées dans le **Tableau II.2**.

a	0.0045 m
μ_0	1.006×10^{-3} kg/m.s
ν_0	1.006×10^{-6} m ² /s
K_0	0.597 W/m·K
V_0	2.231×10^{-2} m/s
T_0	293 K
ρ_0	1000.52 kg/m ³
C_p	4182 J/kg·K

Tableau II.2 Les propriétés thermo-physiques et paramètre de contrôle.II.3.

Modélisation des propriétés physiques variables :

Les fittings polynomiaux, assez précis, pour modéliser les variations de la viscosité et la conductivité thermique avec la température. Ces fittings sont précises les fonctions suivantes [14] :

$$\mu(T) = 1.79 \times 10^{-3} - 5.861 \times 10^{-5}(T - 273.15) + 1.260 \times 10^{-6}$$

$$\begin{aligned} & \times (T - 273.15)^2 - 1.736 \times 10^{-8}(T - 273.15)^3 + 1.420 \times 10^{-10} \\ & \times (T - 273.15)^4 - 6.177 \times 10^{-13}(T - 273.15)^5 + 1.092 \times 10^{-15} \\ & \times (T - 273.15)^6 \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$k(T) = -1.050 + 0.0108T - 2.172 \times 10^{-5}T^2 + 1.389 \times 10^{-8}T^3 \tag{2.29}$$

II.4. Les Bilans thermique et massique :

II.4.1. Bilan thermique global :

Le bilan thermique global est obtenu en intégrant l'équation de l'énergie sur le domaine d'écoulement.

En régime permanent obtenu dans tous les cas de cette étude, le bilan thermique global montre que la puissance calorifique fournie au fluide par la paroi intérieure chauffée du cylindre est égale à la puissance calorifique fournie par le fluide environnant en dehors de la limite (Bassin versant). Le bilan global peut être décrit par une équation :

$$q_1 = q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 \tag{2.30}$$

$q_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_i} d\eta dz^*$ La puissance thermique donnée (par conduction) au fluide à travers la paroi du cylindre elliptique intérieur.

$q_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_o} d\eta dz^*$ La puissance thermique échangée (par conduction) au niveau de la paroi du cylindre elliptique extérieur. Cette puissance est nulle sachant que le cylindre extérieur est adiabatique.

$q_3 = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$ La puissance thermique échangée par conduction à l'entrée du conduit. Cette puissance est trouvée négligeable dans tous les cas considère.

$q_4 = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=100} h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$ La puissance thermique échangée par conduction à la sortie du conduit. Cette puissance est trouvée négligeable dans tous les cas considères.

$q_5 = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} V_z^* T_e^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$ La puissance thermique échangée par convection à l'entrée du conduit. Cette puissance est nulle sachant que $T_e^* = 0$

$q_6 = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_e} V_{z_s}^* T_s^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$ La puissance thermique échangée par convection a la sortie du conduit. Evidemment, cette puissance est très importante. A une section donnée du conduit (à un certain z^*) la température moyenne est définie comme suit :

$$T_m^*(Z^*) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} V_z^*(\varepsilon, \eta, z^*) T^*(\varepsilon, \eta, z^*) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta}{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} V_z^*(\varepsilon, \eta, z^*) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta} \quad (2.31)$$

La température moyenne adimensionnelle est égale à zéro à l'entrée du conduit, et augmente linéairement dans la direction axiale, Cette augmentation linéaire est facilement démontrée par un bilan thermique global, appliqué à un tronçon du conduit de longueur z , et la considération de l'équation 2.21 ainsi, à la sortie du conduit, le bilan thermique global nous donne :

$$T_m^*(100) = \frac{100 P_1^*}{\text{RePr } S^*} + \frac{1}{\text{RePr}} \frac{1}{S^*} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \left[k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{100} - k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_0 \right] h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$$

$$\approx \frac{100 P_1^*}{\text{RePr } S^*} \quad (2.32)$$

P_1^* : Est le perimetre adimensionnel de cylinder intérieur

$$P_1^* = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 h^2(\varepsilon_i) + \sin^2(\eta)} d\eta \quad (2.33)$$

S^* : Est la surface adimensionnelle de la section droite du conduit (section découlement):

$$S^* = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} [\sin^2 h^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)] d\eta d\varepsilon \quad (2.34)$$

L'approximation dans l'équation, est justifiée par le fait que le terme négligé représente la différence de la diffusion thermique axial, entre l'entrée et la sortie de l'espace annulaire, qu'est très faible par rapport au terme qui représente le chauffage de cylindre intérieur.

II.4.2. Bilan massique global :

L'intégration de l'équation de continuité sur le domaine d'écoulement montre l'égalité des débits massiques (et volumiques) de l'entrée et la sortie du conduit :

$$\int_{\varepsilon=\varepsilon_i}^{\varepsilon=\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \rho V_{z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = \int_{\varepsilon=\varepsilon_i}^{\varepsilon=\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \rho V_{z_s}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \quad (2.35)$$

II.5. Le nombre de Nusselt:

Le transfert thermique peut être quantifié par un nombre de Nusselt.

II.5.1. Le nombre de Nusselt local :

$$q_{w=} h(\eta, z) (T(\varepsilon_i, \eta, z) - T_m(z)) = - \frac{k}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon_i} \quad (2.36)$$

De cette équation, il vient :

$$Nu(\eta, z) = \frac{- \frac{k}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_i}}{(T(\varepsilon_i, \eta, z) - T_m(z))} \quad (2.37)$$

Si on définit le nombre de Nusselt local à la paroi du cylindre intérieur :

$$Nu(\eta, z) = \frac{a h(\eta, z)}{k_0} \quad (2.38)$$

Et avec l'équation dans l'équation on obtient :

$$Nu(\eta, z) = \frac{a \left[- \frac{k}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_i} \right]}{k_0 (T(\varepsilon_i, \eta, z) - T_m(z))} \quad (2.39)$$

Ou sous forme adimensionnelle :

$$Nu(\eta, z^*) = \frac{1}{[(\varepsilon_i, \eta, z^*) - T^*_{m=}(z^*)]} \frac{-1}{h_1^*} K^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_i} = \frac{1}{[(\varepsilon_i, \eta, z^*) - T^*_{m=}(z^*)]} \quad (2.40)$$

II.5.2. Le nombre de Nusselt axial et moyenne :

Si on intègre le nombre de Nusselt local sur le périmètre du cylindre intérieur et on divise le Résultat par ce périmètre, on obtient le nombre de Nusselt axial :

$$Nu(z^*) = \frac{1}{P_1^*} \int_0^{2\pi} Nu(\eta, z^*) \sqrt{\sinh^2(\varepsilon_i) + \sin^2(\eta)} d\eta \quad (2.41)$$

Si on intègre le nombre de Nusselt axial sur la longueur du cylindre intérieur et on divise le résultat par cette longueur, on obtient le nombre de Nusselt moyen du conduit (un nombre réel positif) :

$$\bar{Nu} = \frac{1}{100} \int_0^{100} Nu(z^*) dz^* \quad (2.42)$$

Chapitre III

Etude Numérique

III.1. Introduction :

Ce chapitre est divisé en plusieurs parties, Le premier partir a traité de l'étude numérique du problème présenté au chapitre précédent, et la méthode utilisée pour résoudre le problème et la méthode numérique, Dans la seconde partie nous détaillons l'équation de continuité, l'équation d'énergie et l'équation de quantité de mouvement dans la direction azimutale, ainsi que les bornes et conditions initiales. A la fin de ce chapitre, nous avons examiné les critères de convergence et l'affichage des bilans massique et thermique de l'énergie.

III.2. Le Maillage :

La méthode des volumes finis (FVM) est une technique numérique utilisée pour approximer les solutions des équations aux dérivées partielles (EDP) en dynamique des fluides computationnelle (CFD) et dans d'autres domaines. Elle est particulièrement adaptée pour résoudre les équations de conservation, qui expriment la conservation de quantités physiques telles que la masse, la quantité de mouvement ou l'énergie, Chaque volume sera repéré par un nœud et limite par six faces. La **Figure.III.1.** Illustre un volume de contrôle typique. Le point P situe au centre du volume de contrôle typique est entouré dans chaque direction par deux faces et deux nœuds dans chaque direction.

*pour la direction radiale, les points aux nœuds sont notes N, S et les faces sont repérées par n et s.

*pour la direction azimutale, les points aux nœuds sont notes E, W et les faces sont repérées par et w.

* finalement suivant la direction axiale, les nœuds sont notes F, B et les faces sont notées f, b.

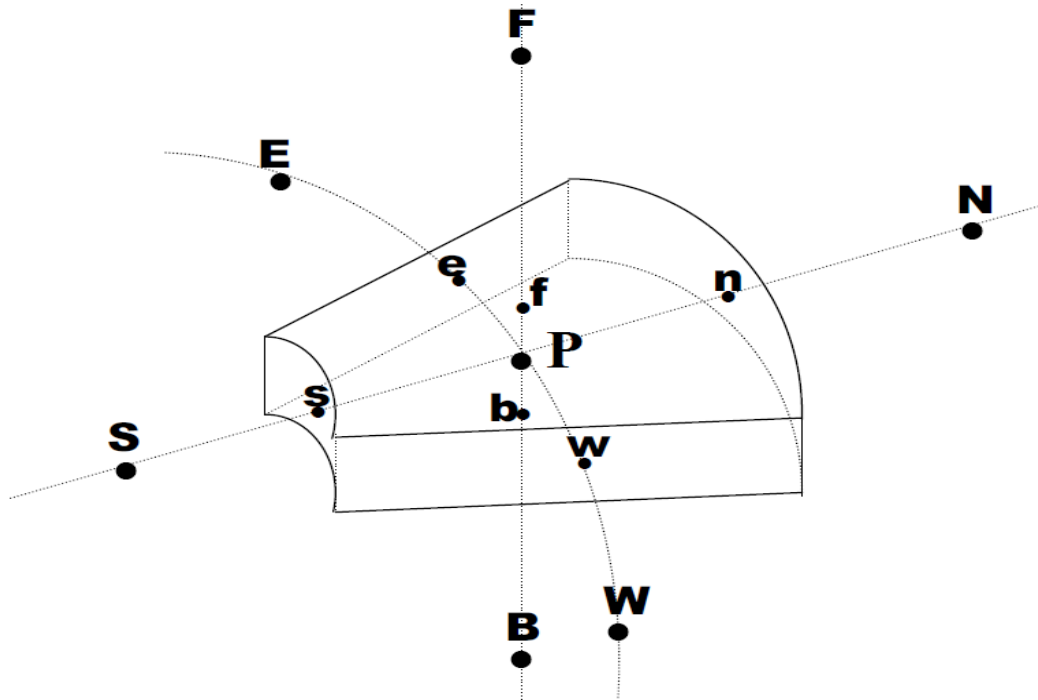
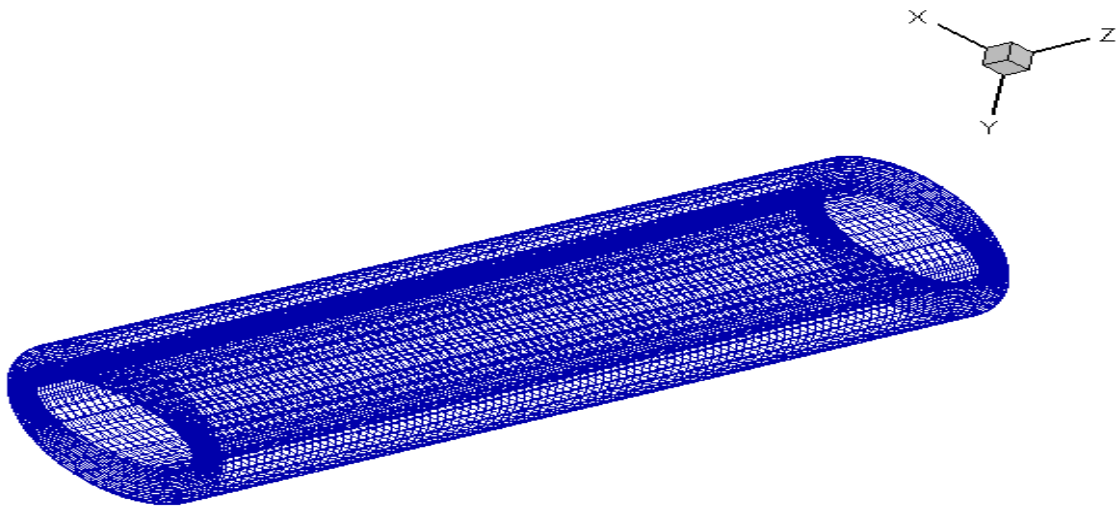


Figure.III.1. Représentation de volume fini.

Le maillage que nous avons choisi pour faire notre étude est schématiquement représentée sur la **Figure.III.2**. Il est composé de 22 points suivant la direction radiale, 102 points suivant la direction axiale et 43 points suivant la direction azimutale, Tout maillage plus dense que celui qu'on a utilisé ($22 \times 102 \times 43$) dépasse les capacités de stockage des meilleurs ordinateurs qui nous sont disponible et des temps de calcul qui dépassent les durées pratiques, Toutefois, nous pensons que notre maillage peut être amélioré par un raffinement, surtout suivant la direction azimutale et axiale, pour mieux discerner des variations qualitative et quantitative importantes de certains phénomènes.

a)



b)

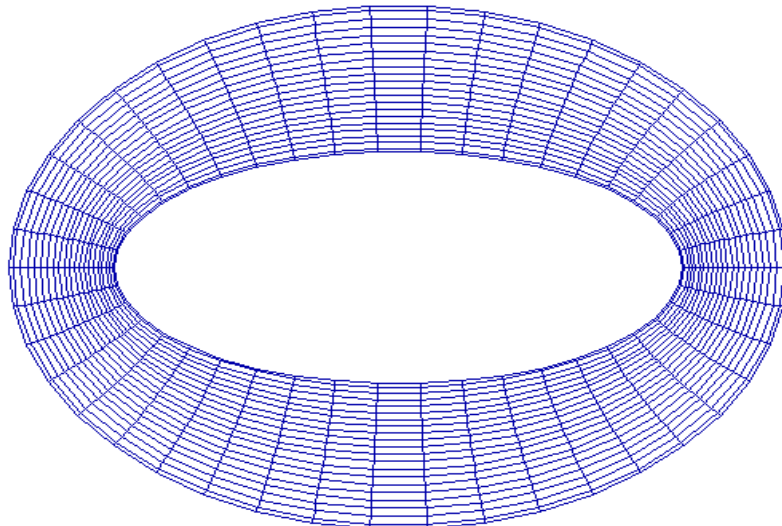


Figure.III.2. Le maillage numérique utilisé et sa projection en coupe. La longueur du conduit est réduite cinq fois pour une représentation graphique plus claire.

III.3. Détails de discrétisation :

Les discrétisations de l'équation de continuité et de l'équation de l'énergie sont faites dans un maillage non décalé dont les représentations surfaciques sont illustrées dans les **Figures III.3-III.5**. Pour la clarté de la présentation, les étoiles des variables non dimensionnelles dans toutes les équations sont enlevées.

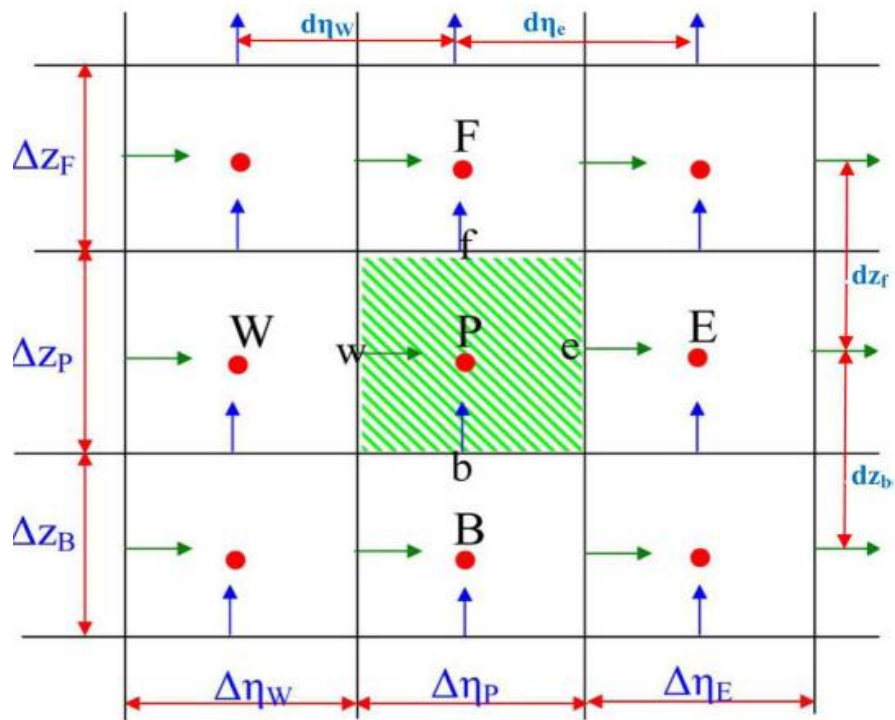


Figure.III.3. Maillage suivant les coordonnées (η, z)

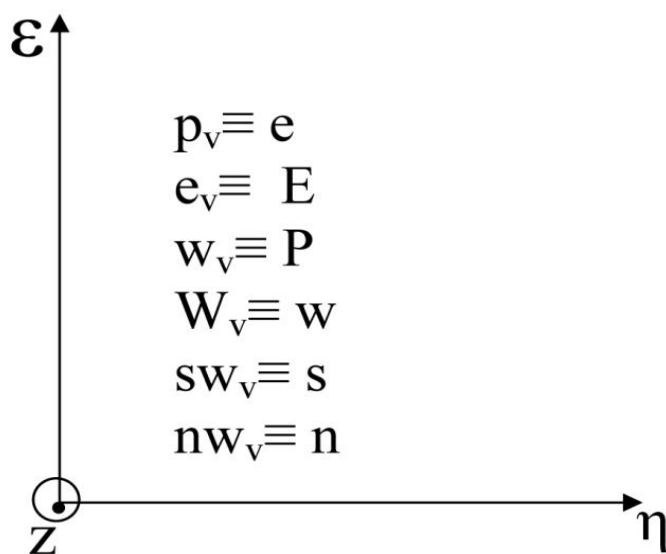
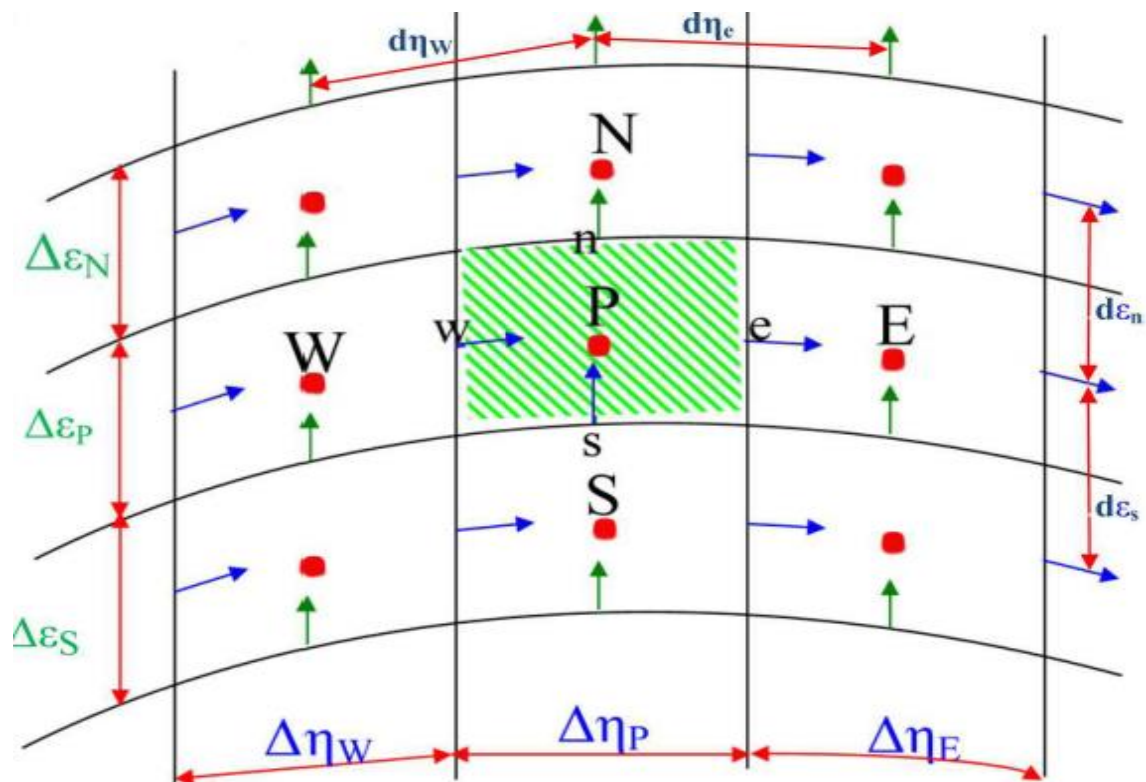


Figure.III.4. Maillage suivant les coordonnées (η, ε)

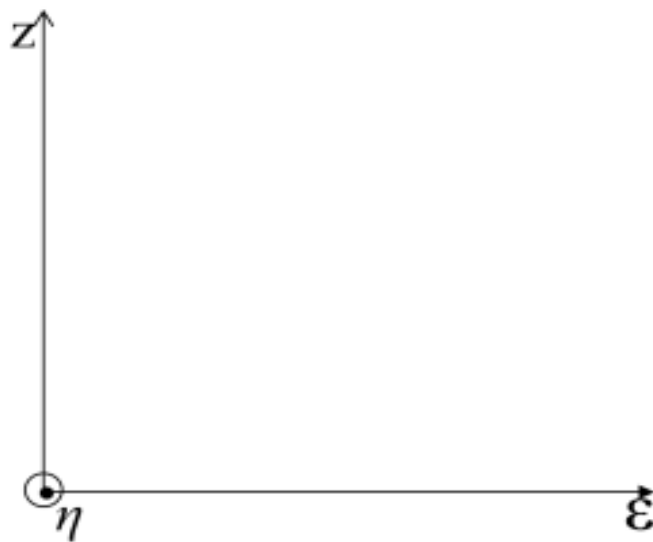
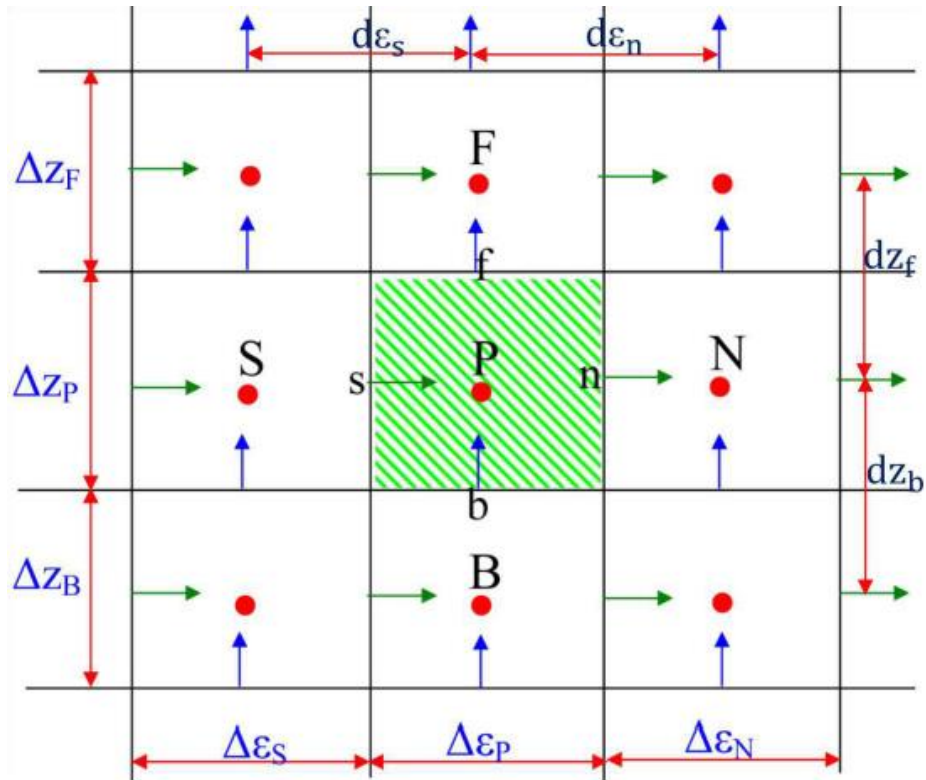


Figure.III.5.Maillage suivant les coordonnées (z, ϵ) .

III.3.1. Discrétisation de l'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (3.1)$$

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation de continuité par le volume différentiel et l'intégration triple entre les limites du volume fini. Tous les termes dépendants du temps sont évalués au temps $(t + \Delta t)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = 0 \quad (3.2) \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_2 V_\varepsilon]_s^n \Delta \eta_p \Delta z_p = [h_2 V_\varepsilon]_n^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon]_s^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 V_\eta]_w^e \Delta \varepsilon_p \Delta z_p = [h_1 V_\eta]_e^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 h_2 V_z]_b^f \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\ & = [h_1 h_2 V_z]_f^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \end{aligned}$$

Le résultat de la discrétisation est :

$$\begin{aligned} & [h_2 V_\varepsilon]_n^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon]_s^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p + [h_1 V_\eta]_e^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p + \\ & [h_1 h_2 V_z]_f^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p = 0 \quad (3.3) \end{aligned}$$

III.3.2. Discrétisation de l'équation de l'énergie :

Soit l'équation de l'énergie

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] = \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (3.4) \end{aligned}$$

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation de l'énergie par le volume différentiel et l'intégration triple entre les limites du volume fini.

La discrétisation temporelle du terme transitoire est faite par le schéma **d'Euler-Backward** ayant une précision du second ordre :

$$\int_S^n \int_w^e \int_b^f \frac{\partial T}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3T_p^{t+\Delta t} - 4T_p^t + T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** (ayant une précision du second ordre) et leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées (ayant une précision du second ordre) :

$$\begin{aligned} \int_S^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon T]_S^n |^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta z_p = [h_2 V_\varepsilon T|_n^{t+\Delta t} - h_2 V_\varepsilon T|_s^{t+\Delta t}] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[h_{2n} V_\varepsilon |_n^t \left(\frac{T_N^t + T_p^t}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_s^t \left(\frac{T_p^t + T_S^t}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &\quad - \left[h_{2n} V_\varepsilon |_n^{t-\Delta t} \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_s^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ \int_S^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta T]_w^e |^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p = [h_1 V_\eta T|_e^{t+\Delta t} - h_1 V_\eta T|_w^{t+\Delta t}] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[h_{1e} V_\eta |_e^t \left(\frac{T_E^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_w^t \left(\frac{T_p^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &\quad - \left[h_{1e} V_\eta |_e^{t-\Delta t} \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_w^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_S^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z T]_b^f |^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &= [h_1 h_2 V_z T|_f^{t+\Delta t} - h_1 h_2 V_z T|_b^{t+\Delta t}] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &= 2 \left[h_{1f} h_{2f} V_z |_f^t \left(\frac{T_F^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^t \left(\frac{T_p^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &\quad - \left[h_{1f} h_{2f} V_z |_f^{t-\Delta t} \left(\frac{T_F^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \end{aligned}$$

La discrétisation temporelle des termes diffusifs est semi implicite parce que la discrétisation de la conductivité thermique (dépendante de la température) est faite avec le schéma **d'Adam-Bashforth** alors que la discrétisation temporelle de la température est implicite. La discrétisation spatiale du terme diffusif suit le schéma des différences centrées.

$$\begin{aligned}
 \int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{K}{\text{RePr}} \left[\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_s^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\
 &= \frac{K}{\text{RePr}} \left[\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_n^{t+\Delta t} - \left[\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_s^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\
 &= \frac{1}{\text{RePr}} \left[K_n^{t+\Delta t} \left(\frac{T_N^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right. \\
 &\quad \left. - K_s^{t+\Delta t} \left(\frac{T_p^{t+\Delta t} - T_s^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\text{RePr}} \left[K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
 &= \frac{1}{\text{RePr}} \left[K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_e^{t+\Delta t} - \left[K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
 &= \frac{1}{\text{RePr}} \left[K_e^{t+\Delta t} \left(\frac{T_E^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \right) \right. \\
 &\quad \left. - K_w^{t+\Delta t} \left(\frac{T_p^{t+\Delta t} - T_W^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\text{RePr}} \left[h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
 &= \frac{1}{\text{RePr}} \left[h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right]_f^{t+\Delta t} - \left[h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
 &= \frac{1}{\text{RePr}} \left[K_f^{t+\Delta t} \left(\frac{T_F^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{dz_f} \right) \right. \\
 &\quad \left. - K_b^{t+\Delta t} \left(\frac{T_p^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
 \end{aligned}$$

On réarrange l'équation de l'énergie sous la forme standard suivante :

$$A_p T_p^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S K_S^{t+\Delta t} + A_E K_E^{t+\Delta t} + A_W K_W^{t+\Delta t} + A_F K_F^{t+\Delta t} + A_B K_B^{t+\Delta t} + S \tag{3.5}$$

Les conductivités sont discrétisées avec le schéma **d'Adam-Bashforth** :

$$K_n^{t+\Delta t} = 2K_n^t - K_n^{t-\Delta t}$$

$$K_s^{t+\Delta t} = 2K_s^t - K_s^{t-\Delta t}$$

$$K_e^{t+\Delta t} = 2K_e^t - K_e^{t-\Delta t}$$

$$K_w^{t+\Delta t} = 2K_w^t - K_w^{t-\Delta t}$$

$$K_f^{t+\Delta t} = 2K_f^t - K_f^{t-\Delta t}$$

$$K_b^{t+\Delta t} = 2K_b^t - K_b^{t-\Delta t}$$

On note, que quel que soit le temps, on n'a pas les valeurs de la conductivité ($k_s, k_n, k_e, k_w, k_f, k_b$) aux six faces du volume fini typique. Ce qu'on a sont les valeurs des conductivités aux centres du volume fini et des six volumes finis qui lui sont adjacents : ($k_s, k_N, k_E, k_W, k_F, k_B$). La détermination des conductivités des faces est basée sur la continuité du flux de chaleur entre volumes adjacents, à travers les faces qui les séparent. Un volume qu'elles séparent. Ainsi, on peut démontrer qu'à chaque temps :

$$k_e = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_E}{k_E}}$$

$$k_w = \frac{2d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_W}{k_W}}$$

$$k_n = \frac{2d\eta_n}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_N}{k_N}}$$

$$k_s = \frac{2d\eta_s}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_S}{k_S}}$$

$$k_f = \frac{2d\eta_f}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_F}{k_F}}$$

$$k_b = \frac{2d\eta_b}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_B}{k_B}}$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation sont :

$$\begin{aligned}
 A_N &= \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_n^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \Delta\eta_p \Delta z_p, & A_S &= \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_s^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \Delta\eta_p \Delta z_p \\
 A_E &= \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_e^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p, & A_W &= \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_w^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\
 A_F &= \frac{1}{\text{RePr}} h_{1f} h_{2f} \frac{K_f^{t+\Delta t}}{dz_f} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p, & A_B &= \frac{1}{\text{RePr}} h_{1b} h_{2b} \frac{K_b^{t+\Delta t}}{dz_b} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\
 A_p &= \frac{3}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta z_p + A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{4T_p^t - T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta z_p - 2 \left[h_{2n} V_\varepsilon \Big|_n^t \left(\frac{T_N^t + T_p^t}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon \Big|_s^t \left(\frac{T_p^t + T_S^t}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\
 &+ \left[h_{2n} V_\varepsilon \Big|_n^{t-\Delta t} \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon \Big|_s^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\
 &- 2 \left[h_{1e} V_\eta \Big|_e^t \left(\frac{T_E^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1w} V_\eta \Big|_w^t \left(\frac{T_p^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\
 &+ \left[h_{1e} V_\eta \Big|_e^{t-\Delta t} \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w} V_\eta \Big|_w^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\
 &- 2 \left[h_{1f} h_{2f} V_z \Big|_f^t \left(\frac{T_F^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z \Big|_b^t \left(\frac{T_p^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\
 &+ \left[h_{1f} h_{2f} V_z \Big|_f^{t-\Delta t} \left(\frac{T_F^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z \Big|_b^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p
 \end{aligned}$$

III.3.3. Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant

η :

L'équation de quantité de mouvement est discrétisée dans un maillage décale suivant η . Représentent les projections du maillage sur les surfaces (ε, η) et (η, z) . La projection sur la surface (ε, z) est similaire à celle du maillage non décale. Soit l'équation de la quantité de mouvement suivant η :

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial V_\eta}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] \\
 &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re} h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right. \\
 &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 \frac{V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \\
 &\left. - 2\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \right] \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

On multiplie cette équation par le volume différentiel et on fait une intégration triple entre les limites du volume de contrôle décalé.

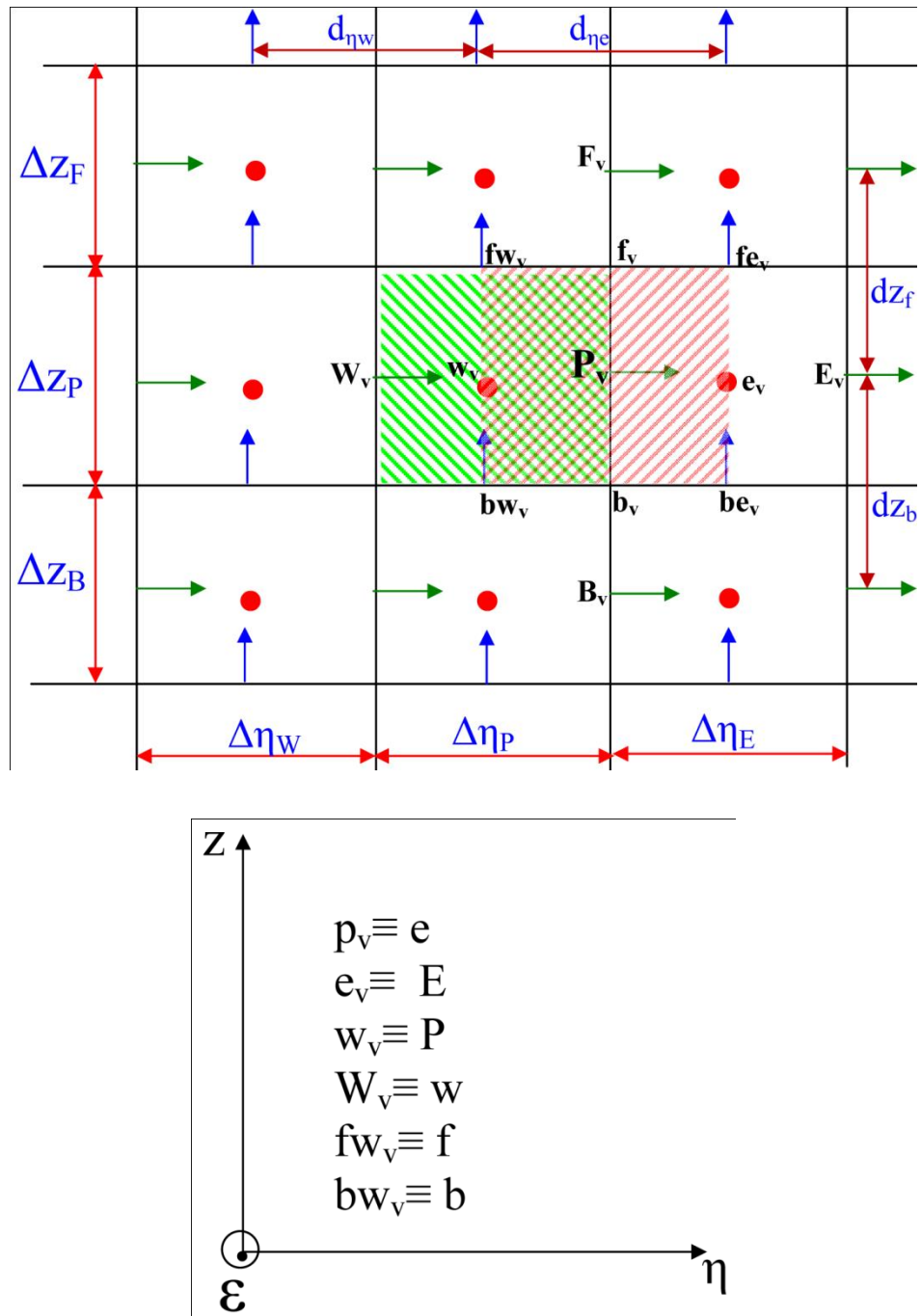


Figure.III.6. Le maillage décalé suivant η sur la surface (η, z)

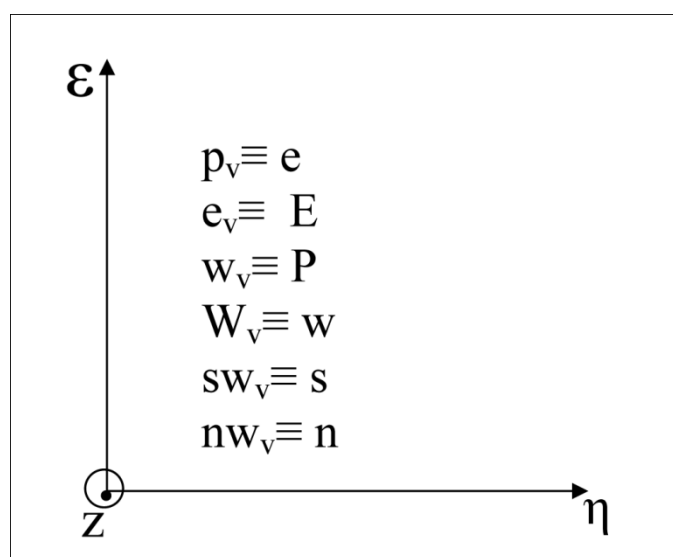
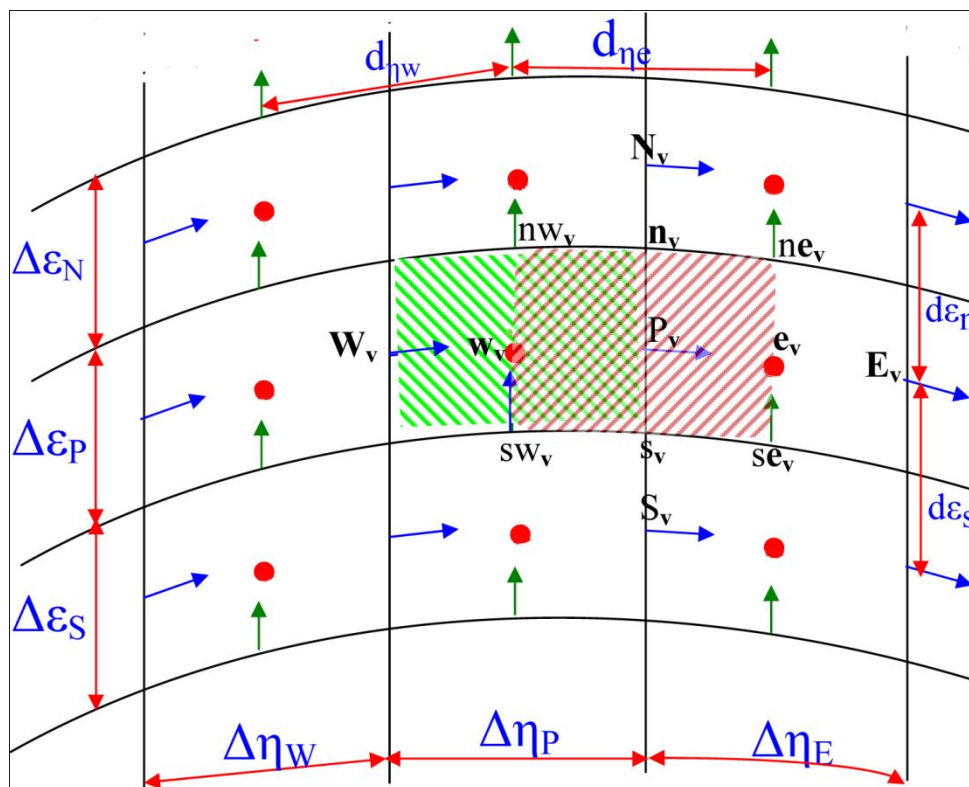


Figure.III.7. Le maillage décalé suivant η sur la surface (η, ϵ)

La discrétisation temporelle du terme transitoire suit le schéma **d'Euler-Backward**.
La vitesse est localisée au centre du volume fini décalé suivant.

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{\partial V_\eta}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - 4V_{\eta P_V}^t + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1P_V} h_{2P_V} d\varepsilon_p \Delta \eta_e \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont valeurs exactement à leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume fini

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \eta_e \Delta z_p \\ &= [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{n_V}^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{s_V}^{t+\Delta t} \Big] \Delta \eta_e \Delta z_p \\ &= 2 \left[\begin{aligned} &h_{2n_V} \left(\frac{V_{\varepsilon n e_u}^t + V_{\varepsilon n w_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ &- h_{2s_V} \left(\frac{V_{\varepsilon s e_V}^t + V_{\varepsilon s w_V}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \eta_e \Delta z_p \\ &- \left[\begin{aligned} &h_{2n_V} \left(\frac{V_{\varepsilon n e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{2s_V} \left(\frac{V_{\varepsilon s e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \eta_e \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta V_\eta]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\ &= [h_1 V_\eta V_\eta]_{e_V}^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta V_\eta]_{w_V}^{t+\Delta t} \Big] d\varepsilon_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[\begin{aligned} &h_{1e_V} \left(\frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ &- h_{1w_V} \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta W_V}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta W_V}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\ &- \left[\begin{aligned} &h_{1e_V} \left(\frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{1w_V} \left(\frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{b_V}^{f_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p \\
 &= [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{f_V}^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{b_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p \\
 &= 2 \left[\begin{aligned} &h_{1f_V} h_{2f_V} \left(\frac{V_{zfeV}^t + V_{zfwV}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta F_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ &- h_{1b_V} h_{2b_V} \left(\frac{V_{zbeV}^t + V_{zbwV}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta B_V}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p \\
 &- \left[\begin{aligned} &h_{1f_V} h_{2f_V} \left(\frac{V_{zfeV}^{t-\Delta t} + V_{zfwV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta F_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{1b_V} h_{2b_V} \left(\frac{V_{zbeV}^{t-\Delta t} + V_{zbwV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta B_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p \\
 &= 2 \left[\left(\frac{V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon nwV}^t + V_{\varepsilon seV}^t + V_{\varepsilon swV}^t}{4} \right) V_{\eta P_V}^t \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p \\
 &- \left[\left(\frac{V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= -V_\varepsilon V_\varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p \\
 &= -2 \left[\left(\frac{V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon nwV}^t + V_{\varepsilon seV}^t + V_{\varepsilon swV}^t}{4} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p \\
 &+ \left[\left(\frac{V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t}}{4} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p
 \end{aligned}$$

La discrétisation temporelle du terme de pression est implicite. La position de la pression est exacte (sans approximation).

$$\begin{aligned}
 \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-1}{h_1 h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= -[P]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p \\
 &= -[P_{e_V}^{t+\Delta t} - P_{w_V}^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p \\
 &= [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p
 \end{aligned}$$

La discrétisation temporelle des quatre premiers termes diffusifs est semi-implicite parce que la discrétisation temporelle des vitesses est implicite alors que celle des viscosités est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation temporelle des autres termes diffusifs est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation spatiale des termes diffusifs est faite avec le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont évalués exactement à leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume.

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\varepsilon dz = \frac{1}{Re} \left[\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p$$

$$= \frac{1}{Re} \left[\begin{array}{c} \mu_{n_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta N_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \\ -\mu_{s_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta S_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$\mu_{n_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{n_V}^t - \mu_{n_V}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{s_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{s_V}^t - \mu_{s_V}^{t-\Delta t}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$= \frac{2}{Re} \left[\begin{array}{c} \mu_{e_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta E_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_V}^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_E} \\ -\mu_{w_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta W_V}^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_p} \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$\mu_{e_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{e_V}^t - \mu_{e_V}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{w_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{w_V}^t - \mu_{w_V}^{t-\Delta t}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right]_{b_V}^{f_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p d\eta_e$$

$$= \frac{\mu}{Re} \left[\begin{array}{c} h_{1f_V} h_{2f_V} \frac{V_{\eta F_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_V}^{t+\Delta t}}{dz_f} \\ -h_{1b_V} h_{2b_V} \frac{V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_V}^{t+\Delta t}}{dz_b} \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e$$

$$\mu_{f_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{f_V}^t - \mu_{f_V}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{b_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{b_V}^t - \mu_{b_V}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} V_\eta \left. \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\ &= \frac{1}{Re} \frac{-2\mu_{P_V}^{t+\Delta t}}{h_{1P_V} h_{2P_V}} V_{P_V}^{t+\Delta t} \left. \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{P_V} \left. \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{P_V} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\mu_{P_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{P_V}^t - \mu_{P_V}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 \frac{V_z}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[\mu h_1 \frac{V_z}{\partial \eta} \right]_{b_V}^{f_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \\ &= \frac{2}{Re} \left[\begin{aligned} &\mu_{f_V}^t h_{1f_V} \left(\frac{V_{zfeV}^t - V_{zfwV}^t}{d\eta_e} \right) \\ &-\mu_{b_V}^t h_{1b_V} \left(\frac{V_{zbeV}^t - V_{zbwV}^t}{d\eta_w} \right) \end{aligned} \right] \Delta\varepsilon_p d\eta_e \\ &\quad - \frac{1}{Re} \left[\begin{aligned} &\mu_{f_V}^{t-\Delta t} h_{1f_V} \left(\frac{V_{zfeV}^{t-\Delta t} - V_{zfwV}^{t-\Delta t}}{d\eta_e} \right) \\ &-\mu_{b_V}^{t-\Delta t} h_{1b_V} \left(\frac{V_{zbeV}^{t-\Delta t} - V_{zbwV}^{t-\Delta t}}{d\eta_w} \right) \end{aligned} \right] \Delta\varepsilon_p d\eta_e \end{aligned}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[\mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p$$

$$= \frac{2}{Re} \left[\begin{aligned} &\mu_{n_V}^t h_{2n_V} \left(\frac{V_{\varepsilon neV}^t - V_{\varepsilon n wV}^t}{h_{1neV} - h_{1nwV}} \right) \\ &-\mu_{s_V}^t h_{2s_V} \left(\frac{V_{\varepsilon seV}^t - V_{\varepsilon s wV}^t}{h_{1seV} - h_{1swV}} \right) \end{aligned} \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$-\frac{1}{Re} \left[\begin{array}{c} \mu_{n_V}^{t-\Delta t} h_{2n_V} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon nw_V}^{t-\Delta t}}{h_{1ne_V} - h_{1nw_V}} \right) \\ d\eta_e \\ -\mu_{s_V}^{t-\Delta t} h_{2s_V} \left(\frac{V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon sw_V}^{t-\Delta t}}{h_{1se_V} - h_{1sw_V}} \right) \\ d\eta_s \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{-1}{Re} \left[\mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p \\ &= \frac{-2}{Re} \left[\begin{array}{c} \frac{\mu_{n_V}^t}{h_{2n_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_V} \left(\frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ -\frac{\mu_{s_V}^t}{h_{2s_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_V} \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p \\ &+ \frac{1}{Re} \left[\begin{array}{c} \frac{\mu_{n_V}^{t-\Delta t}}{h_{2n_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_V} \left(\frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ -\frac{\mu_{s_V}^{t-\Delta t}}{h_{2s_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_V} \left(\frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{\mu}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \mu_{P_V}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[\frac{V_\eta}{h_2} \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p$$

$$= \frac{2\mu_{P_V}^t}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{h_{2n_V}} \left(\frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ -\frac{1}{h_{2s_V}} \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$- \frac{\mu_{P_V}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{h_{2n_V}} \left(\frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ -\frac{1}{h_{2s_V}} \left(\frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{\mu}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \mu_{P_V}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\mu_{pV}^t}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pV} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{h_{1eV}} \left(\frac{V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon seV}^t}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{1wV}} \left(\frac{V_{\varepsilon nweV}^t + V_{\varepsilon swV}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
 &\quad - \frac{\mu_{pV}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pV} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{h_{1eV}} \left(\frac{V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{1wV}} \left(\frac{V_{\varepsilon nweV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
 \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-2\mu}{Re h_1 h_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{-2}{Re} \mu_{pV}^{t+\Delta t} \frac{1}{h_{1pV}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pV} [V_\varepsilon]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p \\
 &= 2 \left[\begin{array}{c} \frac{-2}{Re} \mu_{pV}^t \frac{1}{h_{1pV}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pV} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon nwV}^t}{2} \right) \\ - \left(\frac{V_{\varepsilon seV}^t + V_{\varepsilon swV}^t}{2} \right) \end{array} \right] \\ - \frac{-2}{Re} \mu_{pV}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{1pV}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pV} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \left(\frac{V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p \\
 \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
 &= \frac{2}{Re} \left[\begin{array}{c} 2\mu_{eV}^t \frac{1}{h_{2eV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{eV} \left(\frac{V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon seV}^t}{2} \right) \\ - 2\mu_{wV}^t \frac{1}{h_{2wV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wV} \left(\frac{V_{\varepsilon nwV}^t + V_{\varepsilon swV}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
 &\quad - \frac{1}{Re} \left[\begin{array}{c} 2\mu_{eV}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2eV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{eV} \left(\frac{V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - 2\mu_{wV}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2wV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wV} \left(\frac{V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p
 \end{aligned}$$

La discrétisation temporelle du terme de la poussée thermique est explicite et sa discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées.

Le résultat de la discrétisation spatiotemporelle est mis sous la forme standard :

$$A_{P_V} V_{\eta P_V}^{t+\Delta} = A_{N_V} V_{\eta N_V}^{t+\Delta} + A_{S_V} V_{\eta S_V}^{t+\Delta} + A_{E_V} V_{\eta E_V}^{t+\Delta} + A_{W_V} V_{\eta W_V}^{t+\Delta} + A_{F_V} V_{\eta F_V}^{t+\Delta} + A_{B_V} V_{\eta B_V}^{t+\Delta} + S_V + [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p \quad (3.7)$$

Où

$$A_{P_V} V_{\eta P_V}^{t+\Delta} = A_{N_V} V_{\eta N_V}^{t+\Delta} + A_{S_V} V_{\eta S_V}^{t+\Delta} + A_{E_V} V_{\eta E_V}^{t+\Delta} + A_{W_V} V_{\eta W_V}^{t+\Delta} + A_{F_V} V_{\eta F_V}^{t+\Delta} + A_{B_V} V_{\eta B_V}^{t+\Delta} + S_V \quad (3.8)$$

$$A_{N_V} = \frac{1}{Re} \frac{\mu_{n_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} d\eta_e \Delta Z_p, \quad A_{S_V} = \frac{1}{Re} \frac{\mu_{s_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} d\eta_e \Delta Z_p$$

$$A_{E_V} = \frac{2}{Re} \frac{\mu_{e_V}^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_E} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p, \quad A_{W_V} = \frac{2}{Re} \frac{\mu_{w_V}^{t-\Delta t}}{d\eta_P} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p$$

$$A_{F_V} = \frac{1}{Re} h_{1f_V} h_{2f_V} \frac{\mu_{f_V}^{t+\Delta t}}{dz_f} \Delta \varepsilon_P d\eta_e, \quad A_{B_V} = \frac{1}{Re} h_{1b_V} h_{2b_V} \frac{\mu_{b_V}^{t+\Delta t}}{dz_b} \Delta \varepsilon_P d\eta_e$$

$$A_{P_V} = \frac{3}{2\Delta t} h_{1P_V} h_{2P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p + \frac{1}{Re} \frac{\mu_{P_V}^{t+\Delta t}}{h_{1P_V} h_{2P_V}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p$$

$$+ A_{N_V} + A_{S_V} + A_{E_V} + A_{W_V} + A_{F_V} + A_{B_V}$$

$$S = S_V + [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p$$

$$S_V = \frac{4V_{\eta P_V}^t - V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p$$

$$-2 \left[h_{2n_V} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_V}^t + V_{\varepsilon n w_V}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) - h_{2s_V} \left(\frac{V_{\varepsilon se_V}^t + V_{\varepsilon s w_V}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p$$

$$+ \left[h_{2n_V} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s_V} \left(\frac{V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p$$

$$-2 \left[h_{1e_V} \left(\frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) - h_{1w_V} \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta W_V}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta W_V}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[h_{1eV} \left(\frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - h_{1wV} \left(\frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
 & - 2 \left[h_{1fV} h_{2fV} \left(\frac{V_{zf_{eV}}^t + V_{zf_{wV}}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta F_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) - h_{1bV} h_{2bV} \left(\frac{V_{zb_{eV}}^t + V_{zb_{wV}}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta B_V}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\
 & + \left[h_{1fV} h_{2fV} \left(\frac{V_{zf_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{zf_{wV}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta F_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1bV} h_{2bV} \left(\frac{V_{zb_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{zb_{wV}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta B_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\
 & - 2 \left[\left(\frac{V_{\varepsilon_{neV}}^t + V_{\varepsilon_{nwV}}^t + V_{\varepsilon_{seV}}^t + V_{\varepsilon_{swV}}^t}{4} \right) V_{\eta P_V}^t \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
 & + \left[\left(\frac{V_{\varepsilon_{neV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon_{nwV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon_{seV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon_{swV}}^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
 & + 2 \left[\left(\frac{V_{\varepsilon_{neV}}^t + V_{\varepsilon_{nwV}}^t + V_{\varepsilon_{seV}}^t + V_{\varepsilon_{swV}}^t}{4} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon_{neV}}^t + V_{\varepsilon_{nwV}}^t + V_{\varepsilon_{seV}}^t + V_{\varepsilon_{swV}}^t}{4} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
 & - \left[\left(\frac{V_{\varepsilon_{neV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon_{nwV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon_{seV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon_{swV}}^{t-\Delta t}}{4} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon_{neV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon_{nwV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon_{seV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon_{swV}}^{t-\Delta t}}{4} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
 & + \frac{2}{Re} \left[\mu_{fV}^t h_{1fV} \left(\frac{V_{zf_{eV}}^t - V_{zf_{wV}}^t}{d\eta_e} \right) - \mu_{bV}^t h_{1bV} \left(\frac{V_{zb_{eV}}^t - V_{zb_{wV}}^t}{d\eta_w} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\
 & - \frac{1}{Re} \left[\mu_{fV}^{t-\Delta t} h_{1fV} \left(\frac{V_{zf_{eV}}^{t-\Delta t} - V_{zf_{wV}}^{t-\Delta t}}{d\eta_e} \right) - \mu_{bV}^{t-\Delta t} h_{1bV} \left(\frac{V_{zb_{eV}}^{t-\Delta t} - V_{zb_{wV}}^{t-\Delta t}}{d\eta_w} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\
 & + \frac{2}{Re} \left[\mu_{nV}^t h_{2nV} \left(\frac{\frac{V_{\varepsilon_{neV}}^t}{h_{1neV}} - \frac{V_{\varepsilon_{nwV}}^t}{h_{1nwV}}}{d\eta_e} \right) - \mu_{sV}^t h_{2sV} \left(\frac{\frac{V_{\varepsilon_{seV}}^t}{h_{1seV}} - \frac{V_{\varepsilon_{swV}}^t}{h_{1swV}}}{d\eta_s} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
 & - \frac{1}{Re} \left[\mu_{nV}^{t-\Delta t} h_{2nV} \left(\frac{\frac{V_{\varepsilon_{neV}}^{t-\Delta t}}{h_{1neV}} - \frac{V_{\varepsilon_{nwV}}^{t-\Delta t}}{h_{1nwV}}}{d\eta_e} \right) - \mu_{sV}^{t-\Delta t} h_{2sV} \left(\frac{\frac{V_{\varepsilon_{seV}}^{t-\Delta t}}{h_{1seV}} - \frac{V_{\varepsilon_{swV}}^{t-\Delta t}}{h_{1swV}}}{d\eta_s} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
 & + \frac{-2}{Re} \left[\mu_{nV}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{nV} \frac{(V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t)}{2} - \mu_{sV}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{sV} \frac{(V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t)}{2} \right] d\eta_e \Delta Z_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{Re} \left[\mu_{n_V}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_V} \frac{(V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t})}{2} - \mu_{s_V}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_V} \frac{(V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t})}{2} \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
 & + \frac{2}{Re} \mu_{P_V}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[\frac{1}{h_{2n_V}} \left(\frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_V}} \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
 & - \frac{1}{Re} \mu_{P_V}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[\frac{1}{h_{2n_V}} \left(\frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_V}} \left(\frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
 & + \frac{2}{Re} \mu_{P_V}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[\frac{1}{h_{1e_V}} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_V}^t + V_{\varepsilon se_V}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_V}} \left(\frac{V_{\varepsilon nwe_V}^t + V_{\varepsilon sw_V}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
 & - \frac{2}{Re} \mu_{P_V}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[\frac{1}{h_{1e_V}} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_V}} \left(\frac{V_{\varepsilon nwe_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
 & + 2 \frac{-2}{Re} \mu_{P_V}^t \frac{1}{h_{1P_V}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon ne_V}^t + V_{\varepsilon se_V}^t}{2} \right) - \left(\frac{V_{\varepsilon see_V}^t + V_{\varepsilon sw_V}^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_e \Delta Z_p \\
 & - \frac{-2}{Re} \mu_{P_V}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{1P_V}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{V_{\varepsilon see_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_e \Delta Z_p \\
 & + \frac{2}{Re} \left[2\mu_{e_V}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2e_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{e_V} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) - 2\mu_{w_V}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2w_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{w_V} \frac{(V_{\varepsilon nwe_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_V}^{t-\Delta t})}{2} \right] \\
 & + \frac{2}{Re} \left[2\mu_{e_V}^t \frac{1}{h_{2e_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{e_V} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_V}^t + V_{\varepsilon se_V}^t}{2} \right) - 2\mu_{w_V}^t \frac{1}{h_{2w_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{w_V} \frac{(V_{\varepsilon nwe_V}^t + V_{\varepsilon sw_V}^t)}{2} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
 & - \frac{1}{Re} \left[2\mu_{e_V}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2e_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{e_V} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - 2\mu_{w_V}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2w_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{w_V} \frac{(V_{\varepsilon nwe_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_V}^{t-\Delta t})}{2} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p
 \end{aligned}$$

La discrétisation temporelle de la viscosité est explicite selon le schéma **d'Adam-Bashforth**. Concernant la discrétisation spatiale de la viscosité au centre et aux interfaces du volume décale, elle est faite avec certaines approximations qui assurent la continuité et l'évaluation correcte des contraintes visqueuses aux endroits indiqués. Ces approximations sont mieux présentées avec une notation indicielle des viscosités qui sont stockées dans les

centres des volumes finis typiques (non décales). Dans ce qui suit, la notation (i, j, k) fait référence à un point centre dans un volume fini typique ; avec le premier, le deuxième et le troisième indice liés aux positions radiale, axiale et angulaire, respectivement. Au centre et aux faces du volume fini décale (suivant η), les viscosités explicites sont :

$$\mu_{pV}^t = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^{t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta\eta_p}{\mu^{t(i,j,k)}}}$$

$$\mu_{pV}^{t-\Delta t} = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta\eta_p}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}}$$

$$\mu_{eV}^t = \mu^t(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{eV}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{wV}^t = \mu^t(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{wV}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{nV}^t = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{nV}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{sV}^t = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{sV}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{fV}^t = \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_N}{\mu^{t(i,j+1,k)}} + \frac{\Delta z_P}{\mu^{t(i,j,k)}}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_N}{\mu^{t(i,j+1,k+1)}} + \frac{\Delta z_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{fV}^{t-\Delta t} = \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_N}{\mu^{t-\Delta t(i,j+1,k)}} + \frac{\Delta z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_N}{\mu^{t-\Delta t(i,j+1,k+1)}} + \frac{\Delta z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{bV}^t = \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t(i,j,k)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t(i,j-1,k)}}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t(i,j-1,k+1)}}}$$

$$\mu_{bV}^{t-\Delta t} = \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t-\Delta t(i,j-1,k)}}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t-\Delta t(i,j-1,k+1)}}}$$

III.4. La discrétisation des conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont discrétisées et les équations de discrétisation sont écrites sous la forme standard.

III.4.1. Les conditions aux limites thermiques :

***Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :**

La condition thermique à cette limite (à $\varepsilon = \varepsilon_i$) est :

$$-\frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 1 \tag{3.9}$$

Elle discrétisée comme suit :

$$-\frac{1}{h_{1\varepsilon=\varepsilon_i}} \frac{T_N^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_1} = 1 \tag{3.10}$$

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_N^{t+\Delta t} + h_{1\varepsilon=\varepsilon_i} d\varepsilon_1 \tag{3.11}$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients

$$A_P = 1, A_N = 1, A_S = 0, A_E = 0, A_W, A_F, A_B = 0, S = h_{1\varepsilon=\varepsilon_i} d\varepsilon_1$$

***Sur la paroi intérieure du cylindre elliptique extérieur :**

La condition thermique à cette limite ((à $\varepsilon = \varepsilon_o$)) est :

$$-\frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \tag{3.12}$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$-\frac{1}{h_{1,\varepsilon=\varepsilon_0}} \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_{IL-1}} = 0 \quad (3.13)$$

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_S^{t+\Delta t} \quad (3.14)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 1, A_E = 0, A_W, A_F, A_B = 0, S = 0$$

***A l'entrée du conduit :**

La condition thermique à cette limite (à $z = 0$) est :

$$T = 0 \quad (3.15)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$T_P^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.16)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 0, A_E = 0, A_W, A_F, A_B = 0, S = 0$$

***A la sortie du conduit :**

La condition thermique à cette limite (à $z = 100$) est :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, \text{ cette condition impose un flux diffusif constant à la sortie du conduit.}$$

Pour illustrer la discrétisation, un schéma du maillage axial, à la sortie du conduit, est représenté sur la **Figure.III.8**. Le point P est à la limite axial, le point B est l'avant dernier point qui est précédé du point B'.

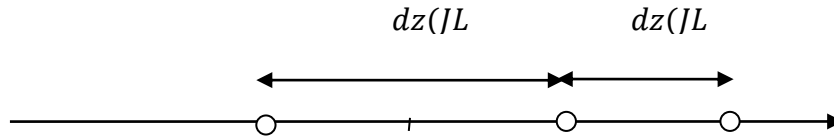


Figure.III.8. Maillage axial à la sortie du conduit

La constance du flux diffusif est approchée par la discrétisation :

$$\frac{T_P^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_{JL-1}} = \frac{T_B^{t+\Delta t} - T_{B'}^{t+\Delta t}}{dz_{JL-2}} \quad (3.17)$$

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_B^{t+\Delta t} + (T_B^{t+\Delta t} - T_{B'}^{t+\Delta t}) \quad (3.18)$$

Avec la forme explicite du dernier terme à droite :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_B^{t+\Delta t} + \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} (2[T_B^t - T_{B'}^t] - [T_B^{t-\Delta t} - T_{B'}^{t-\Delta t}]) \quad (3.19)$$

La dernière équation est mise sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 0, A_E = 0, A_W = 0, A_F = 0, A_B = 1$$

$$S = \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} (2[T_B^t - T_{B'}^t] - [T_B^{t-\Delta t} - T_{B'}^{t-\Delta t}])$$

III.4.2. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant ε :

***Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $\varepsilon = \varepsilon_i$) est :

$$V_\varepsilon = 0 \quad (3.20)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.21)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = A_{B_u} = S = 0$$

***Sur la paroi intérieure du cylindre elliptique extérieur :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite ($(\varepsilon = \varepsilon_0)$) est :

$$V_\varepsilon = 0 \quad (3.22)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.23)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = A_{B_u} = S = 0$$

***A l'entrée du conduit :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 0$) est :

$$V_\varepsilon = 0 \quad (3.24)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.25)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = A_{B_u} = S = 0$$

***A la sortie du conduit :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 100$) est :

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = 0 \quad (3.26)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t}}{dz_{JL-1}} = 0 \quad (3.27)$$

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.28)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = S = 0, A_{B_u} = 1$$

III.4.3. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant η :

***Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite ((à $\varepsilon = \varepsilon_i$) est :

$$V_\eta = 0 \quad (3.29)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.30)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S = 0$$

***Sur la paroi intérieure du cylindre elliptique extérieur :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $\varepsilon = \varepsilon_o$) est :

$$V_\eta = 0 \quad (3.31)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.32)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S = 0$$

***A l'entrée du conduit :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 0$) est :

$$V_\eta = 0 \tag{3.33}$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \tag{3.34}$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S = 0$$

***A la sortie du conduit :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 100$) est :

$$\frac{\partial V_\eta}{\partial z} = 0 \tag{3.35}$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_v}^{t+\Delta t}}{dz_{JL-1}} = 0 \tag{3.36}$$

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_v}^{t+\Delta t} = 0 \tag{3.37}$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = S = 0, A_{B_v} = 1$$

III.4.4. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant z :

***Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $(\varepsilon = \varepsilon_i)$) est :

$$V_z = 0 \quad (3.38)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.39)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = A_{B_w} = S = 0$$

***Sur la paroi intérieure du cylindre elliptique extérieur :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $\varepsilon = \varepsilon_0$) est :

$$V_z = 0 \quad (3.40)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.41)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = A_{B_w} = S = 0$$

***A l'entrée du conduit :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 0$) est :

$$V_z = 1 \quad (3.42)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} = 1 \quad (3.43)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = A_{B_w} = 0, \quad S = 1$$

***A la sortie du conduit :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 100$) est :

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.44)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{zP_w}^{t+\Delta t} - V_{zB_w}^{t+\Delta t}}{\Delta z_{JL-1}} = 0 \quad (3.45)$$

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} - V_{zB_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.46)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = S = 0, \quad A_{B_w} = 1$$

III.5. Convergence :

A partir des conditions initiales, la marche dans le temps est continue, avec des pas de temps 1×10^{-3} jusqu'à l'atteinte du régime permanent. En ce régime, les champs dynamique et thermique sont invariants dans le temps. Dans tous les cas on a obtenu une très bonne satisfaction du bilan massique global (l'égalité des débits entrant et sortant). La valeur du débit entant est :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} V_{z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 3.850656 \quad (3.47)$$

$$\int_{\varepsilon=0.75}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} V_{z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 2.352333 \quad (3.48)$$

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=0.875} \int_0^{2\pi} V_{z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 2.537022 \quad (3.49)$$

Et celle du débit sortant est :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} V_{z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 3.850656 \quad (3.50)$$

$$\int_{\varepsilon=0.75}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} V_{z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 2.352333 \quad (3.51)$$

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=0.875} \int_0^{2\pi} V_{z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 2.537022 \tag{3.52}$$

Cependant, la satisfaction du bilan thermique global n'est obtenue qu'avec une certaine précision. Ce bilan précise par l'équation (2.31) est discuté dans le deuxième chapitre ou il a été mentionné que pour tous les cas considérés, les termes q_2, q_3, q_4 et q_5 sont négligeables. Ce qui a été démontré par les calculs. Donc, la satisfaction du bilan thermique global est vérifiée par l'égalité des termes q_1 (constant) et q_6 . La valeur de q_1 varie suivant les cas, comme il est précisé dans le **tableau 3.1**. Dans ce tableau, on rapporte que la valeur absolue de la différence relative entre q_1 et q_6 ne dépassent pas 1.8%, et donc on conclut que la satisfaction du bilan thermique global est obtenue avec une bonne précision.

	($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1$)	($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_0 = 1$)	($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 0.875$)
Débit entrée	3.850656	2.352333	2.537022
Débit sortie	3.850656	2.352333	2.537022
Erreur (%)	0	0	0

Tableau.III.1.les valeurs de débit d'entrée et de sortie avec l'erreur pour les trois cas

	($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1$)	($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_0 = 1$)	($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 0.875$)
q_1	0.76519885	0.96197042	0.76519885
q_6	0.76524286	0.96200609	0.76520997
Erreur= $\left \frac{q_1 - q_6}{q_1} \right (\%)$	0.0057%	0.0037%	0.0014%

Tableau.III.2. Les valeurs de q_1 et q_6 avec les valeurs d'erreurs pour les trois cas

Chapitre IV

Résultats et discussions

IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous présentons les résultats obtenus pour les trois cas étudiés, Nous avons utilisé le code fortran et obtenu les résultats avec **absoft 2016 pro** Nous avons dessiné les taux de température et les nombres de Nusselt avec **OriginPro8.5**, Programme **Tecplot 2014** pour afficher les taux de température, vitesse, viscosité et conductivité Nous avons également comparé les nombres de Nusselt dans les trois cas étudiés.

IV.2. Le premier cas ($\epsilon_i = 0.5$, $\epsilon_o = 1$) :

IV.2.2. Le champ thermique :

Le champ thermique est en évolution axiale continue entre l'entrée et l'extérieur du canal dans le cylindre, **La Figure.IV.1** illustre la répartition numérique de la température pour le cas($\epsilon_i = 0.5$, $\epsilon_o = 1$), aux quatre positions axiales ($Z^*=25.5$, $Z^*=50.5$, $Z^*=75.5$, $Z^*=100$),La température est relativement élevée dans la partie centrale de l'entrefer, et cela est dû à l'emplacement de la partie chauffée dans le cylindre intérieur (chaud), et elle augmente radialement vers le cylindre extérieur (chaleur constante), la température maximal $T_{max} = 0.412$.

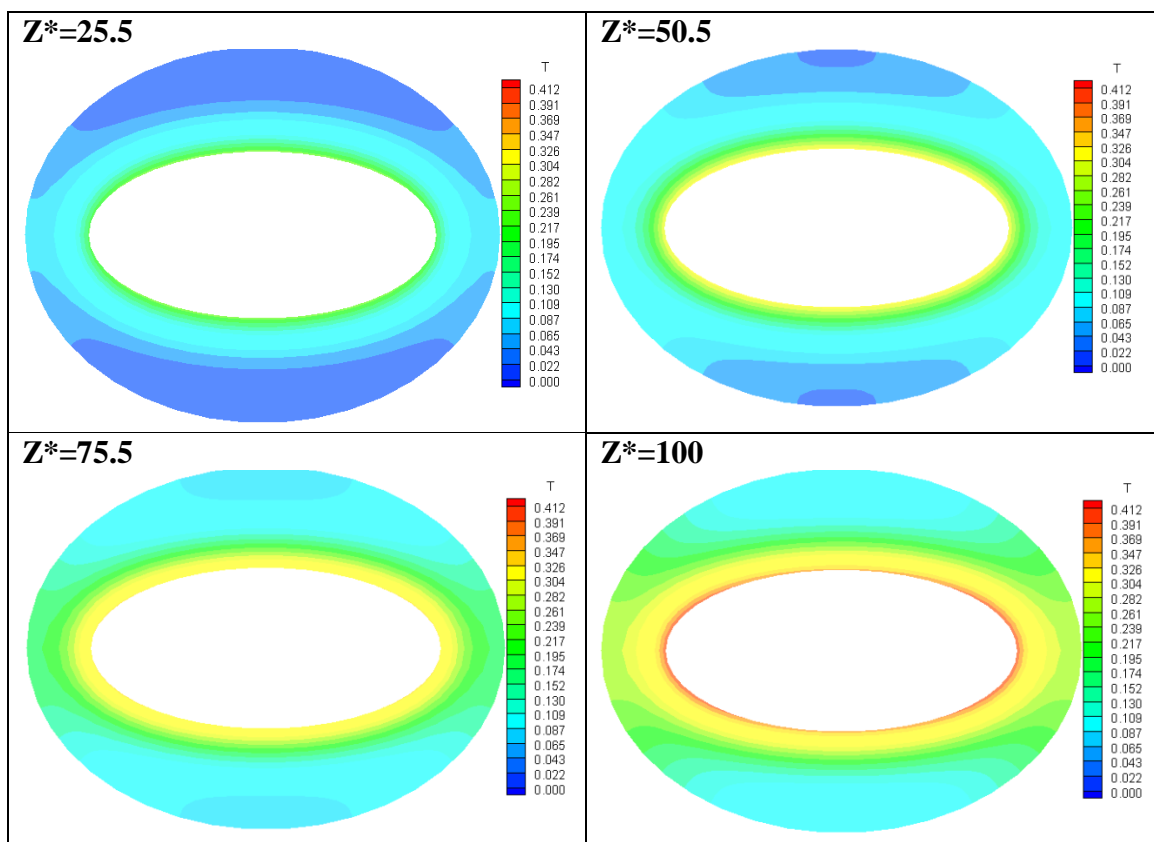


Figure. IV.1.Le champ numérique de la température($\epsilon_i = 0.5$, $\epsilon_o = 1$) diffère de celle de Z^*

IV.2.2. L'écoulement axial :

La Figure.IV.2 illustre les changements de vitesse axiale pour le cas($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 1$), à la fois radiale et angulaire, aux quatre positions axiales ($Z^*=25.5, Z^*=50.5, Z^*=75.5, Z^*=100$), à partir de l'entrée du cylindre $Z^*=0$ jusqu' à $Z^*=22.5$ l'écoulement se développe axialement, dans cette région l'écoulement subit dans des variation a trois direction elliptique , des couche limite se forment sur les côtes des deux cylindres et les épaisseurs augmente le lange de l'axe. La cause principale de ces trois variations et la conservation de masse. Dans la plage $Z^*=22.5$ à $Z^*=100$ l'effet de l'écoulement secondaire disparaît et l'écoulement devient essentiellement axial. Dans cette zone, l'écoulement est unidirectionnel, avec une seule composante de vitesse qui est la vitesse axiale, et bidimensionnelle. La vitesse axiale dépend uniquement des deux coordonnées polaires, car elle augmente radialement à partir de la paroi intérieure du cylindre jusqu'à un maximum local près de la moitié de l'entrefer elliptique, puis diminue jusqu'à se rapproche de la surface extérieure du cylindre. La vitesse maximale de l'écoulement est égale à 1.893.

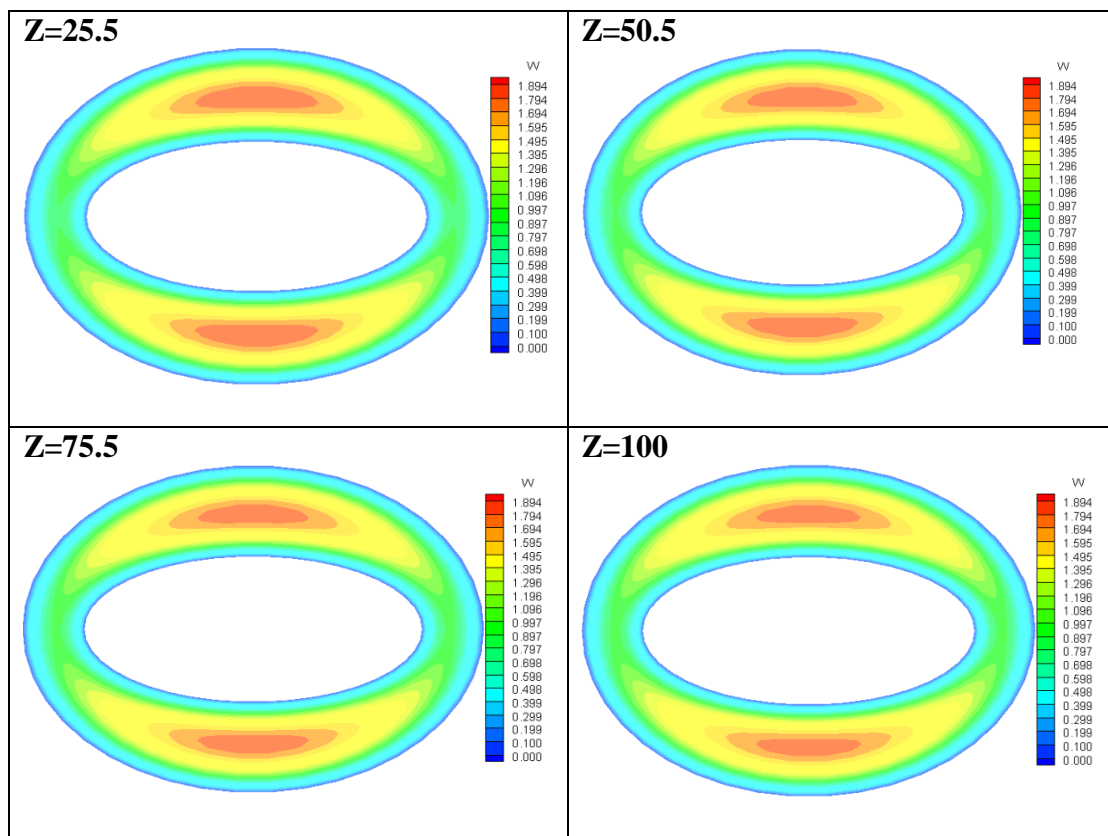


Figure. IV.2. Le champ numérique de la vitesse axiale ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 1$) diffère de celle de Z^*

IV.2.3. Le champ de la viscosité :

Les variations polaires de la viscosité est illustrée par la Figure.IV.3, sont présentées aux quatre positions axiales choisit arbitrairement : ($Z^* = 25.5, Z^* = 50.5, Z^* = 75.5, Z^* = 100$). Réduire le chauffage axial continu diminue la viscosité à l'entrée, et cette chaleur se propage jusqu'à la sortie, ce qui entraîne une diminution de la viscosité à l'intérieur du cylindre froides présentent une viscosité élevée tandis que les régions chaudes ont une viscosité plus faible ,la réduction minimale de la viscosité est trouvée à la sortie du conduit sur la paroi du cylindre chauffé à (π et 2π) sa valeur minimale est 0.748 Les variations radial, et azimuthale sont identiques qualitativement à l'inverse aux variations de la température.

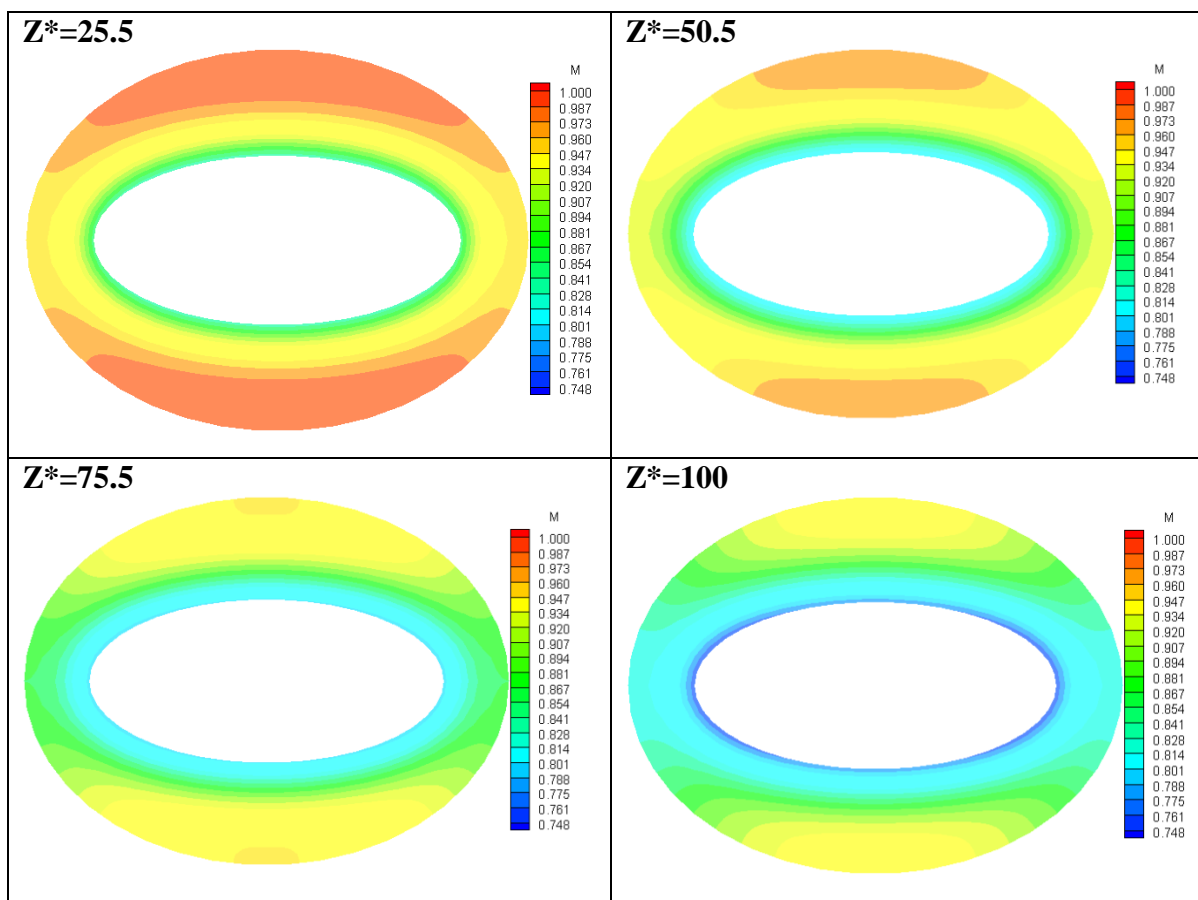


Figure. IV.3. Le champ numérique de viscosité ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 1$) diffère de celle de Z^*

IV.2.4. Le champ de conductivité ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 1$)

Les variations de la conductivité thermique dans les différentes positions axiales ($Z^* = 25.5, Z^* = 50.5, Z^* = 75.5, Z^* = 100$). Il convient de noter que la conductivité thermique est une fonction croissante de la température, car elle suit des variations similaires à celles de la température. **La Figure.IV.4** illustre que les changements quantitatifs de conductivité thermique sont minimes dans toutes les directions. Les variations les plus importantes se produisent dans la direction axiale. À partir de l'entrée du conduit, où la conductivité est égale à 1, la conductivité augmente progressivement en se déplaçant vers la sortie. La valeur maximale de la conductivité est de 1.033, située à $Z^* = 100$ et aux positions polaires ($\eta=\pi$ et $\eta=\pi/2$). Il est intéressant de noter que l'augmentation de la conductivité thermique, compte tenu du niveau de chauffage considéré, est faible, ce qui indique une amélioration limitée du transfert thermique conductif.

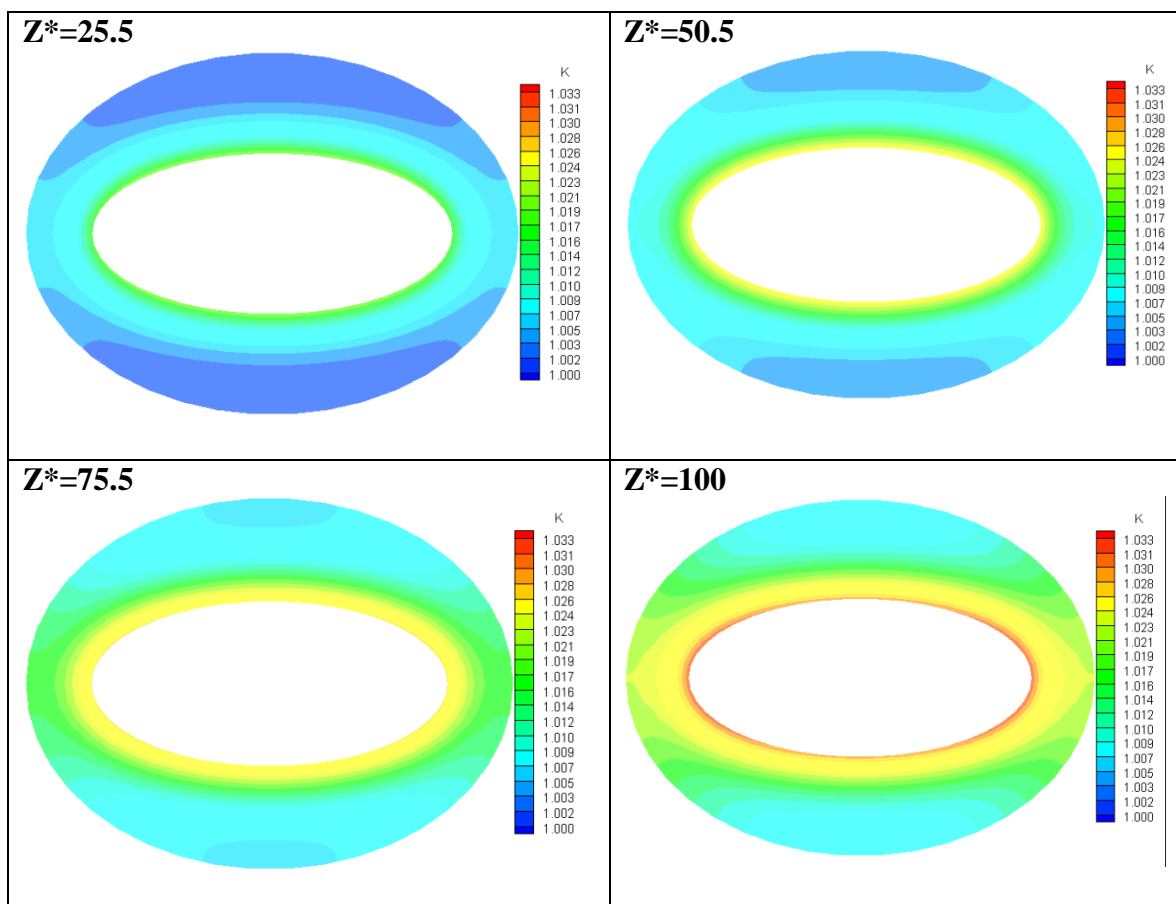


Figure.IV.4. Le champ numérique de la conductivité ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 1$) diffère de celle de Z^*

IV.2.5. L'évolution du nombre de Nusselt axial :

La courbe de variation du nombre de Nusselt axial en fonction de z^* pour le cas ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 1$) est présenté à la **Figure.IV.5**, La discussion peut être divisée en trois parties distinctes :Premier partie :($Z^*=0$ jusqu'à $Z^* =10.5$) :le nombre de Nusselt axial diminue rapidement depuis l'entrée jusqu'à $Z^*=10.5$, atteignant une valeur de $Nu(Z^*=10.5)= 7.158$,On observe un fort transfert de chaleur entre la paroi intérieure du cylindre et le fluide de travail.

Deuxième partit : À partir de $Z^*=10.5$ le nombre de Nusselt axial continue de diminuer, mais à un rythme plus lent par rapport au cas précédent, jusqu'à $Z^*=50.5$. À cette position, sa valeur est $Nu (Z^*=50.5) = 5.324$.

La dernière partie : ($Z^*=50.5$ jusqu'à $Z^* =100$) le nombre de Nusselt axial commence à diminuer et reste stable jusqu'à la sortie du conduit. La valeur minimale du nombre de Nusselt axial est atteinte à la sortie du conduit ($Nu (Z^*=100)) = 5.122$.

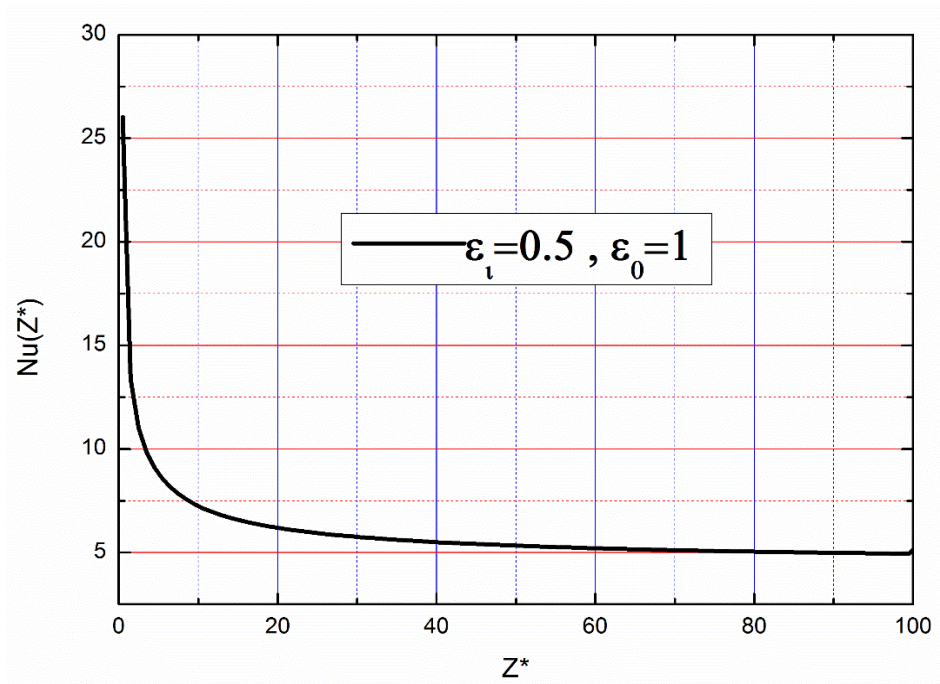


Figure.IV.5. La valeur de nombre de Nusselt axial par rapport à $Z^*(\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 1)$

IV.2.6. L'évolution de température moyen ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 1$) :

Figure.IV.6 La courbe de variation de la température moyen en fonction de Z^* pour le cas ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 1$), Dans cette gamme (de $Z^*=0$ à $z^*=100$), on observe une augmentation de température moyen de 0 à 0,20.

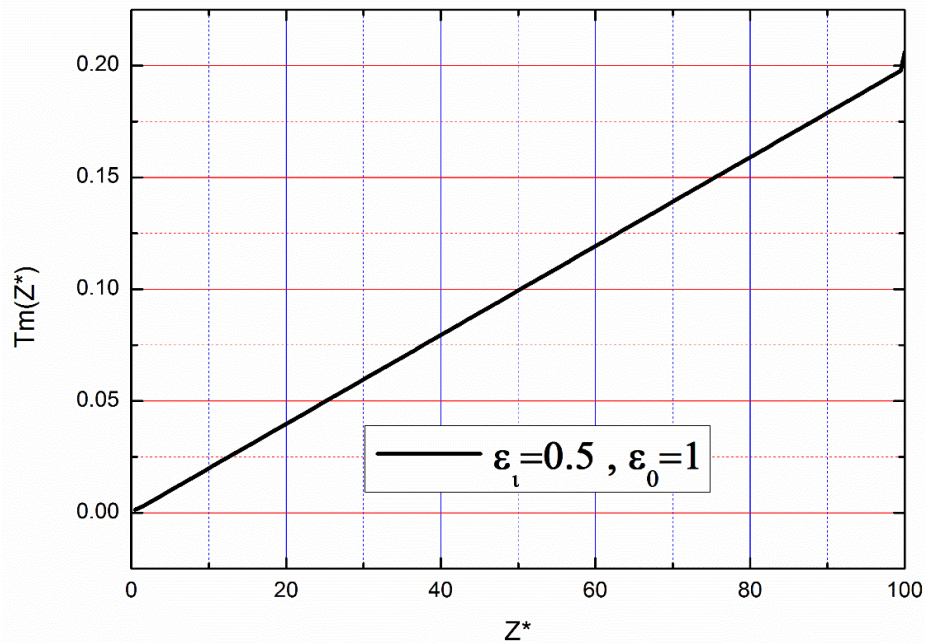


Figure.IV.6. La valeur de température moyen par rapport à Z^* ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 1$)

IV.3. Deuxième cas ($\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1$) :

IV.3.1. Le champ thermique :

Le champ thermique est en évolution axiale continue entre l'entrée et l'extérieur du canal dans le cylindre, **La Figure.IV.7** illustre la répartition numérique de la température pour le cas ($\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1$) aux quatre positions axiales ($Z^*=25.5, Z^*=50.5, Z^*=75.5, Z^*=100$), La température est relativement élevée dans la partie centrale, et cela est dû à l'emplacement de la partie chauffée dans le cylindre intérieur (chaud), et elle augmente radialement vers le cylindre extérieur (chaleur constante) ,la température maximal $T_{max}=0.638$ qui est plus grand pour le cas précédent à cause de l'augmentation du surface du cylindre intérieure.

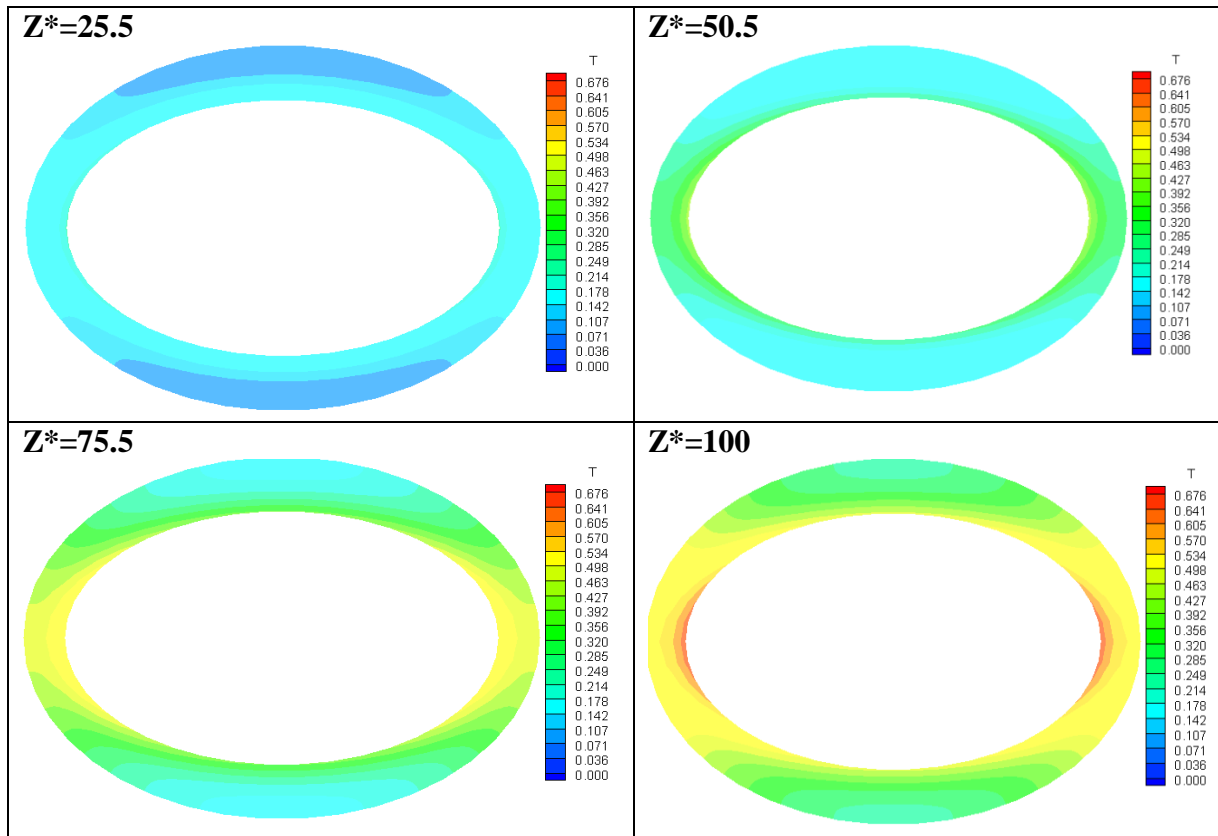


Figure.IV.7. Le champ numérique de la température($\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1$)diffère de celle de Z^*

IV.3.2. L'écoulement axial :

La Figure.IV.8 illustre les changements de vitesse axiale pour le cas ($\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1$), à la fois radiale et angulaire, aux quatre positions axiales ($Z^*=25.5, Z^*=50.5, Z^*=75.5, Z^*=100$), à partir de l'entrée du cylindre $Z^*=0$ jusqu' à $Z^*=22.5$ l'écoulement se développe axial et radial et azimuthal, dans cette région l'écoulement subit dans des variation a trois direction elliptique, des couche limite se forment sur les côtes de cylindre et les épaisseurs augmente le lange de l'axe. Dans la plage $Z^*=22.5$ à $Z^*=100$ l'effet secondaire disparaît et l'écoulement devient essentiellement axial. Dans cette zone, l'écoulement est unidirectionnel, avec une seule composante de vitesse, et bidimensionnel. La vitesse axiale dépend uniquement des deux coordonnées polaires, car elle augmente radialement à partir de la paroi intérieure du cylindre jusqu'à un maximum local près de la moitié de l'entrefrer elliptique, puis diminue

Mesure qu'elle se rapproche de la surface extérieure du cylindre. La vitesse maximale, égale à 1.84.

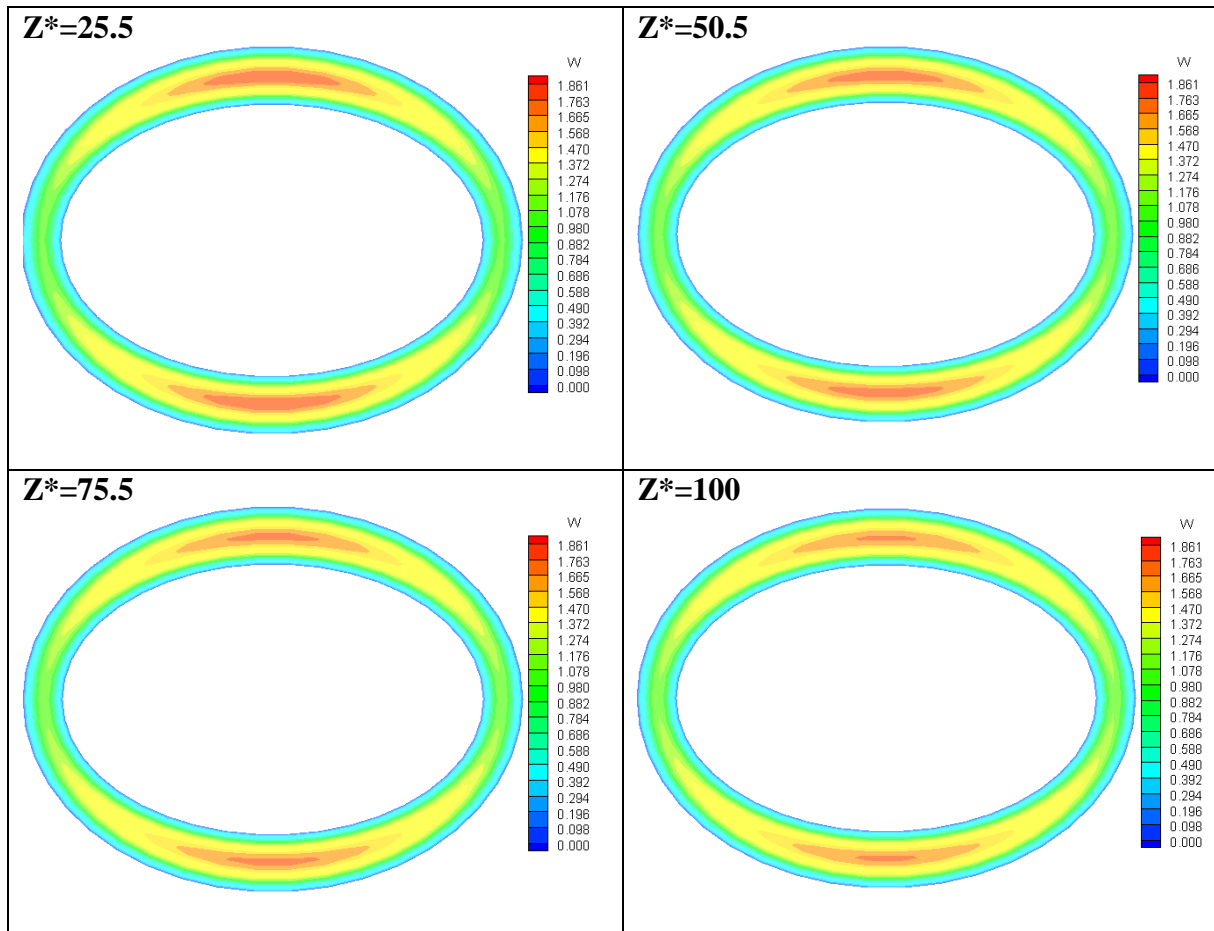


Figure.IV.8. Le champ numérique de la vitesse axial($\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1$)diffère de celle de Z^*

IV.3.3. Le champ de viscosité :

Les variations de la viscosité sont illustrées dans la Figure.IV.9 Les variations radiales, angulaires et axiales sont importantes. La viscosité diminue de manière axiale à partir de sa valeur adimensionnelle maximale, qui est égale à 1 à l'entrée du conduit, pour atteindre un minimum à la sortie du conduit. Radialement, dans une section droite, la viscosité augmente entre le cylindre intérieur et le cylindre extérieur. Les variations angulaires sont qualitativement identiques, mais inverses aux variations de température. La viscosité minimale se situe à $Z^* = 97.25$, à l'intersection de la paroi chaude du cylindre intérieur et de l'axe elliptique court, et sa valeur est de 0.639, ce qui correspond à une réduction relative de 36.10% par rapport à la valeur de viscosité à l'entrée du conduit.

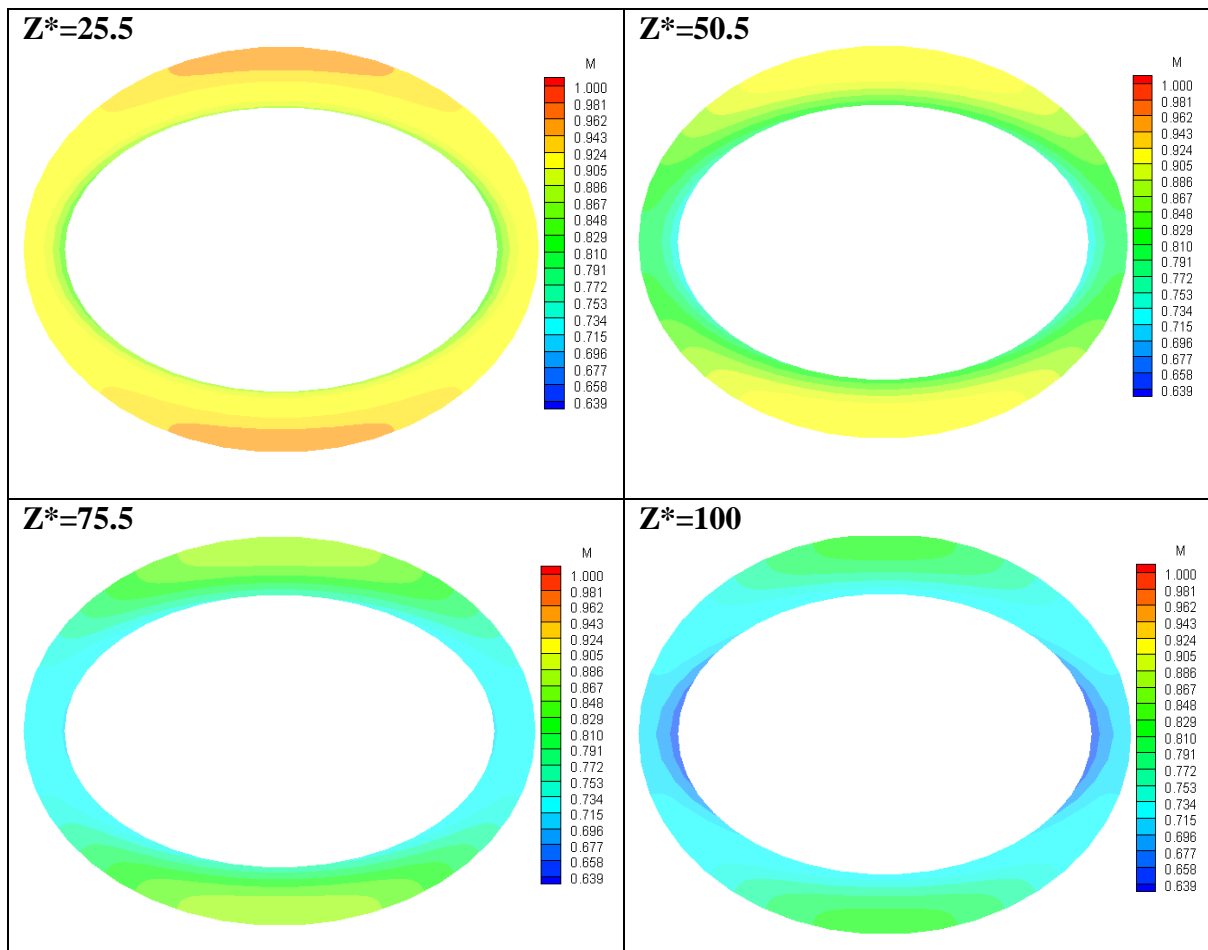


Figure.IV.9. Le champ numérique de viscosité ($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_o = 1$) diffère de celle de Z^*

IV.3.4. Le champ de conductivité :

Dans la **Figure.IV.10**, nous avons présenté les variations de conductivité dans quatre stations axiales, choisies de manière arbitraire : ($Z^*=25.25, Z^*=50.25, Z^*=75.25$ et $Z^*=100$). Les variations de conductivité dans les trois directions, radiale, angulaire et axiale, sont qualitativement similaires à celles de la température, cependant, elles sont quantitativement faibles dans les trois directions. La plus grande variation de conductivité se produit dans la direction axiale. À partir de l'entrée où la conductivité est égale à 1, la conductivité augmente axialement en se dirigeant vers la sortie du conduit. La conductivité maximale est de 1.052 et est située à $Z^*=97.25$, à la position polaire ($\varepsilon=0.5, \eta = \frac{\pi}{2}$ et $\eta = \pi$). Nous constatons que l'augmentation de la conductivité, compte tenu du niveau de chauffage considéré, est faible, ce qui suggère une amélioration limitée du transfert thermique par conduction.

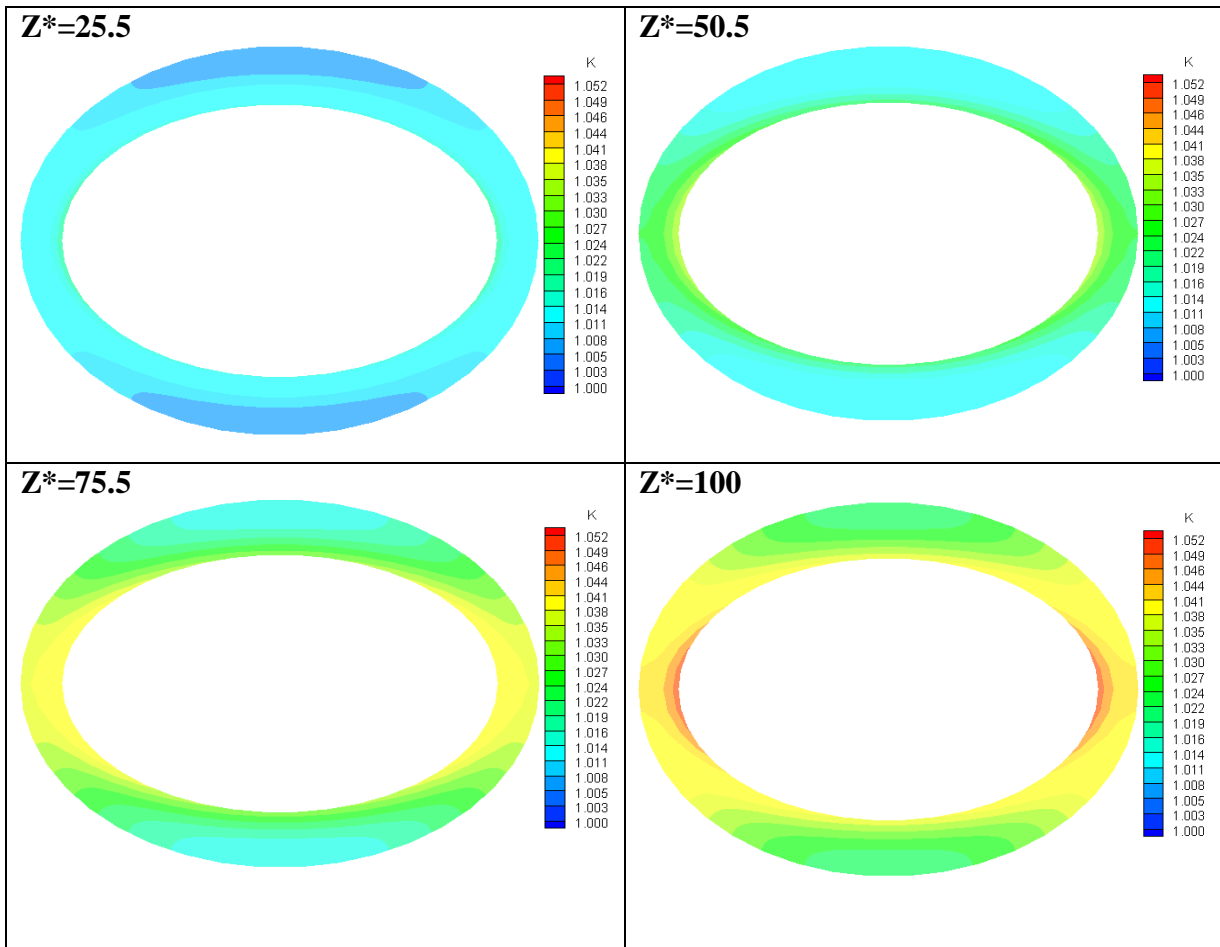


Figure.IV.10. Le champ numérique de la conductivité ($\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1$) diffère de celle de Z^*

IV.3.5. L'évolution des nombres de Nusselt axial :

Figure.IV.11 La courbe de variation du nombre de Nusselt axial en fonction de z^* pour le cas ($\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1$), La discussion peut être divisée en trois parties distinctes :

Premier partie : ($Z^*=0$ jusqu'à $Z^* = 10.5$) : le nombre de Nusselt axial diminue rapidement depuis l'entrée jusqu'à $z^*=10.5$, atteignant une valeur de $Nu (Z^*=10.5) = 9.642$ On observe un fort transfert de chaleur entre la paroi intérieure du cylindre et le fluide de travail.

Deuxième partie : À partir de $Z^*=10.5$ le nombre de Nusselt axial continue de diminuer, mais à un rythme plus lent par rapport au cas précédent, jusqu'à $z^*=50.5$. À cette position, sa valeur est $Nu (Z^*=50.5) = 8.701$. La dernière partie : ($Z^*=50.5$ jusqu'à $Z^* = 100$) le nombre de Nusselt axial commence à diminuer et reste stable jusqu'à la sortie du conduit. La valeur

minimale du nombre de Nusselt axial est atteinte à la sortie du conduit ($Nu(Z^*=100) = 10.367$).

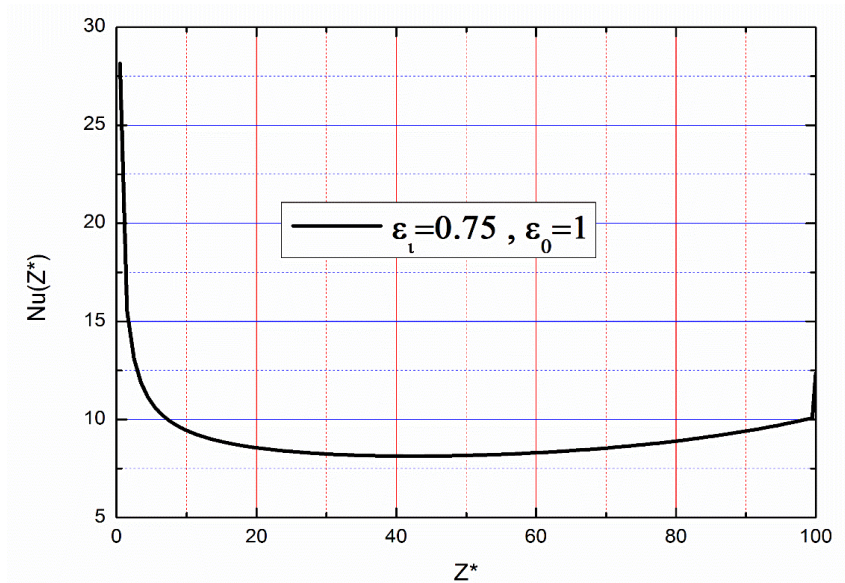


Figure.IV.11. La valeur de nombre de Nusselt axial par rapport à Z^* ($\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1$)

IV.3.6. L'évolution de température moyen ($\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1$) :

Figure.IV.12 La courbe de variation de la température moyen en fonction de z^* pour le cas ($\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1$) , Dans cette gamme (de $Z^*=0$ à $Z^*=100$), on observe une augmentation de température de 0 à 0,42.

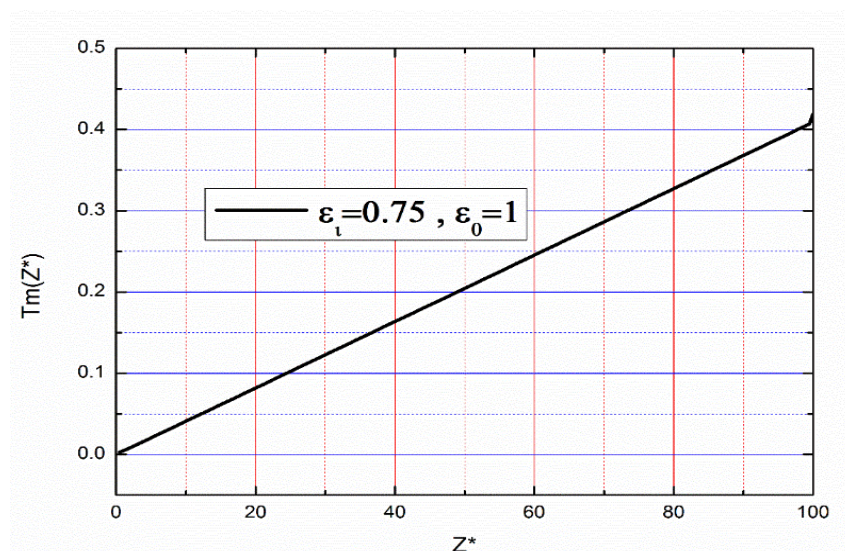


Figure.IV.12. La valeur de température moyen par rapport à $Z^*(\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1)$

IV. 3. dernier cas($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 0.875$) :

IV.4.1. Le champ thermique :

Le champ thermique est en évolution axiale continue entre l'entrée et l'extérieur du canal dans le cylindre, **La Figure.IV.13** illustre la répartition numérique de la température pour le cas ($\epsilon_i = 0.5$, $\epsilon_0 = 0.875$) aux quatre positions axiales ($Z^*=25.5$, $Z^*=50.5$, $Z^*=75.5$, $Z^*=100$), La température est relativement élevée dans la partie centrale, et cela est dû à l'emplacement de la partie chauffée dans le cylindre intérieur (chaud), et elle augmente radialement vers le cylindre extérieur (chaleur constante), la température maximal $T_{max} = 0.56$.

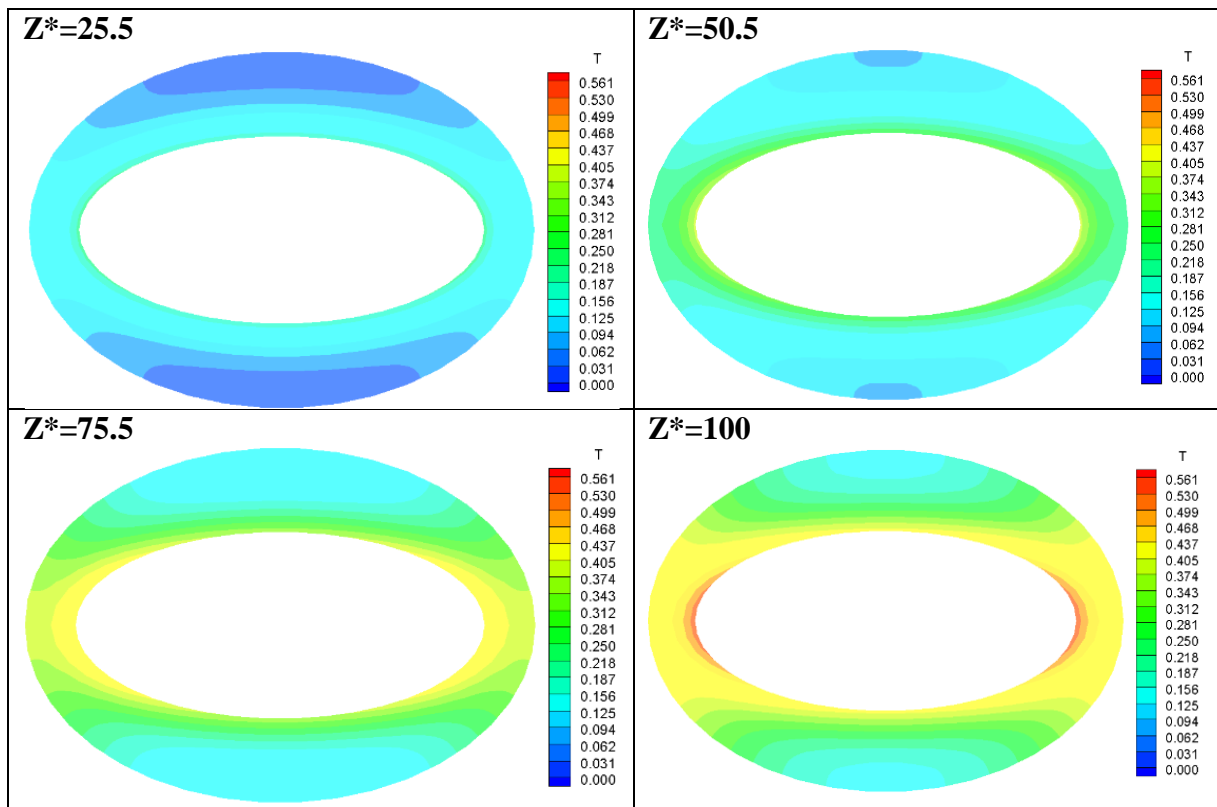


Figure.IV.13. Le champ numérique de la température ($\epsilon_i = 0.5$, $\epsilon_0 = 0.875$)diffère de celle de Z^*

IV.4.2. L'écoulement axial:

La Figure.IV.14 illustre les changements de vitesse axiale pour le cas ($\epsilon_i = 0.5$, $\epsilon_0 = 0.875$), à la fois radiale et angulaire, aux quatre positions axiales ($Z^*=25.5$, $Z^*=50.5$, $Z^*=75.5$, $Z^*=100$), à partir de l'entrée du cylindre $Z^*=0$ jusqu' à $Z^*=22.5$ l'écoulement se

développe axial et radial et azimuthal, dans cette région l'écoulement subit dans des variations à trois directions elliptiques, des couche limite se forment sur les côtes de cylindre et les épaisseurs augmente le long de l'axe. Dans cette zone, l'écoulement est unidirectionnel, avec une seule composante de vitesse, et bidimensionnel. La vitesse axiale dépend uniquement des deux coordonnées polaires, car elle augmente radialement à partir de la paroi intérieure du cylindre jusqu'à un maximum local près de la moitié de l'entrefer elliptique, puis diminue à mesure qu'elle se rapproche de la surface extérieure du cylindre. La vitesse maximale, égale à 1.93.

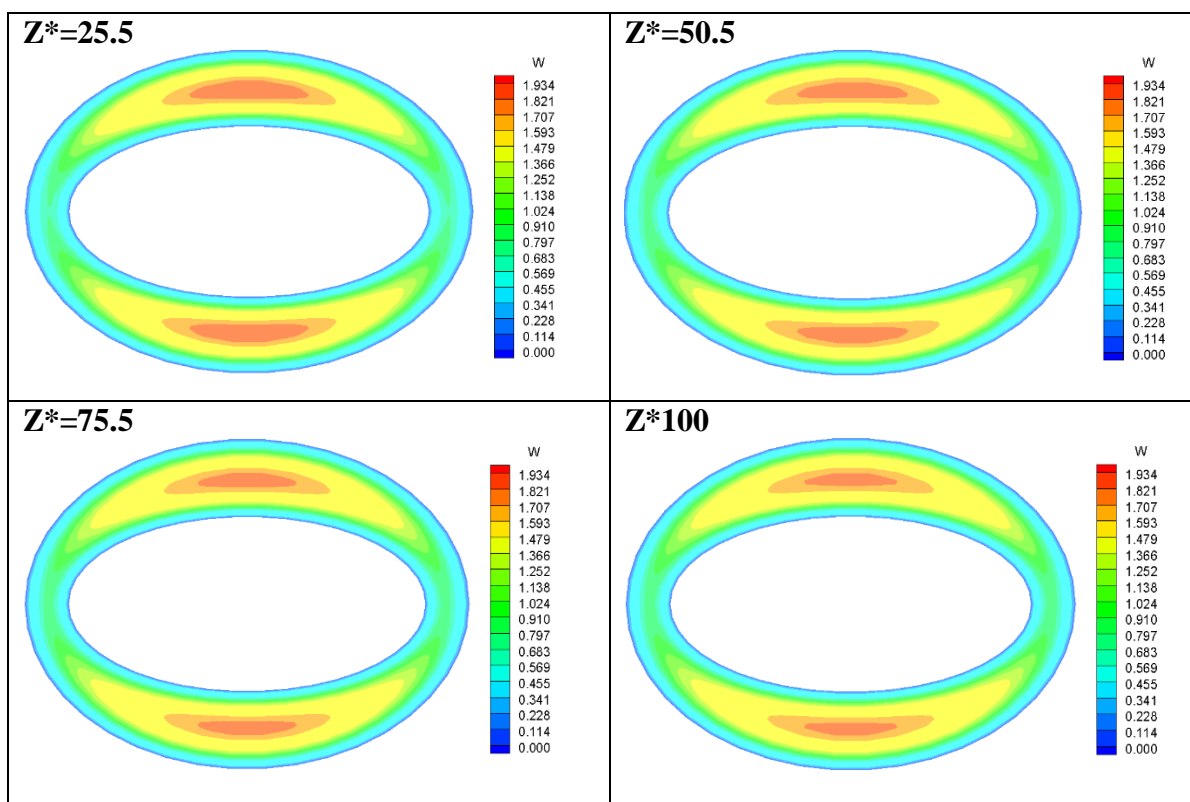


Figure.IV.14. Le champ numérique de la vitesse axiale ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 0.875$)diffère de celle de Z^*

IV.4.3. Le champ de viscosité :

Les variations de viscosité, telles qu'illustrées dans la **Figure.IV.15**, présentent des variations significatives selon les axes radiaux, angulaire et axial. La viscosité diminue de manière axiale à partir de sa valeur maximale adimensionnelle de 1 à l'entrée du conduit,

atteignant un minimum à la sortie de ce dernier. Sur le plan radial, à une section droite donnée, la viscosité augmente entre le cylindre intérieur et le cylindre extérieur. Les variations angulaires sont qualitativement inverses aux variations de température. La viscosité minimale se situe à $Z^*=97.25$, à l'intersection de la paroi chaude du cylindre intérieur et de l'axe elliptique mineur, avec une valeur de 0.683, soit une réduction relative de 31.7% par rapport à la valeur de viscosité à l'entrée du conduit.

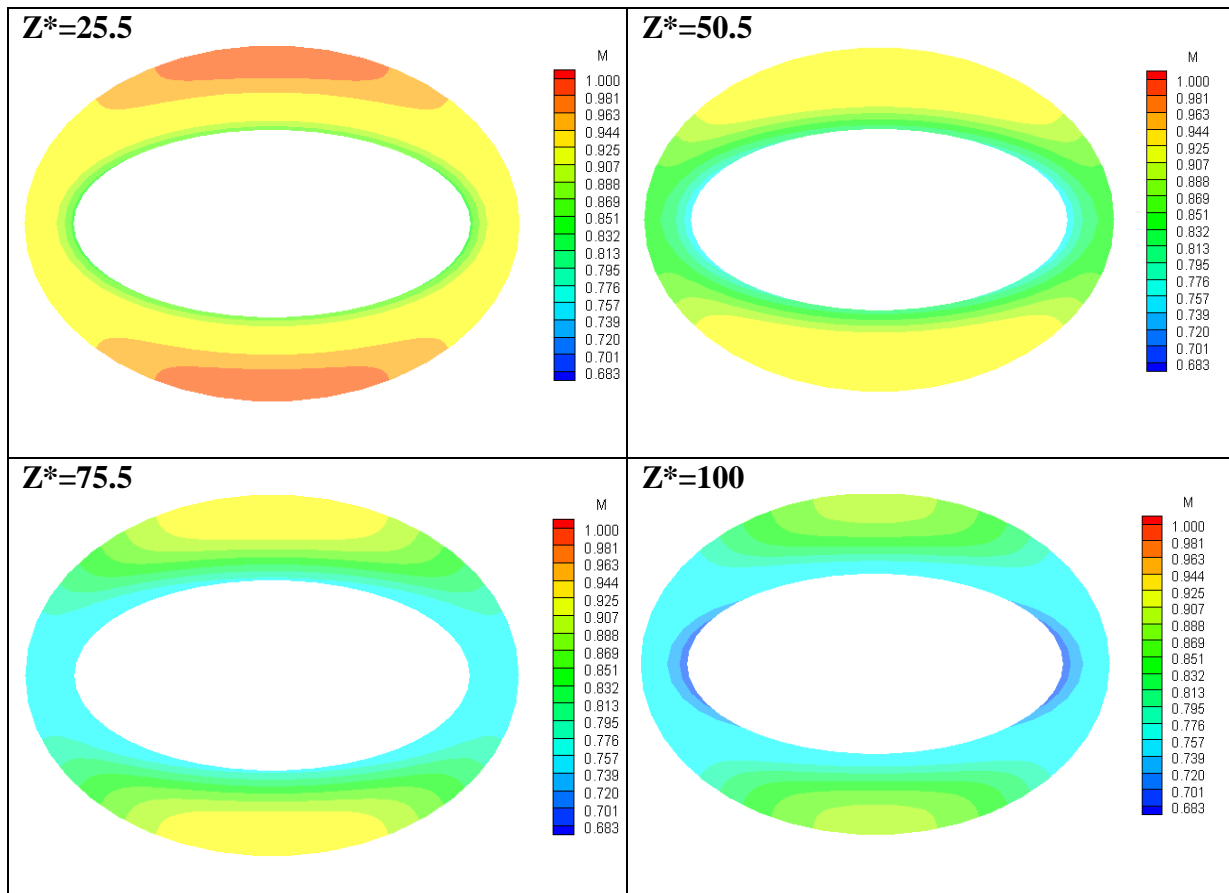


Figure.IV.15. Le champ numérique de viscosité($\epsilon_t = 0.5, \epsilon_0 = 0.875$)diffère de celle de Z^*

IV.4.4. Le champ de conductivité :

Dans la **Figure.IV.16**, les variations de conductivité ont été présentées pour quatre stations axiales choisies de manière arbitraire : ($Z^*=25.25, Z^*=50.25, Z^*=75.25$ et $Z^*=100$). Les variations de conductivité dans les directions radiale, angulaire et axiale sont similaires

qualitativement à celles de la température, mais elles restent faibles quantitativement dans les trois directions. La plus grande variation de conductivité se produit dans la direction axiale. À partir de l'entrée où la conductivité est égale à 1, la conductivité augmente progressivement dans la direction axiale en se rapprochant de la sortie du conduit. La valeur maximale de conductivité atteint 1.044 et se situe à $z^*=97.25$, à la position polaire ($\varepsilon=0.5$, $\eta = \frac{\pi}{2}$ et $\eta = \pi$). On observe que l'augmentation de la conductivité, compte tenu du niveau de chauffage considéré, reste faible, ce qui suggère une amélioration limitée du transfert thermique par conduction.

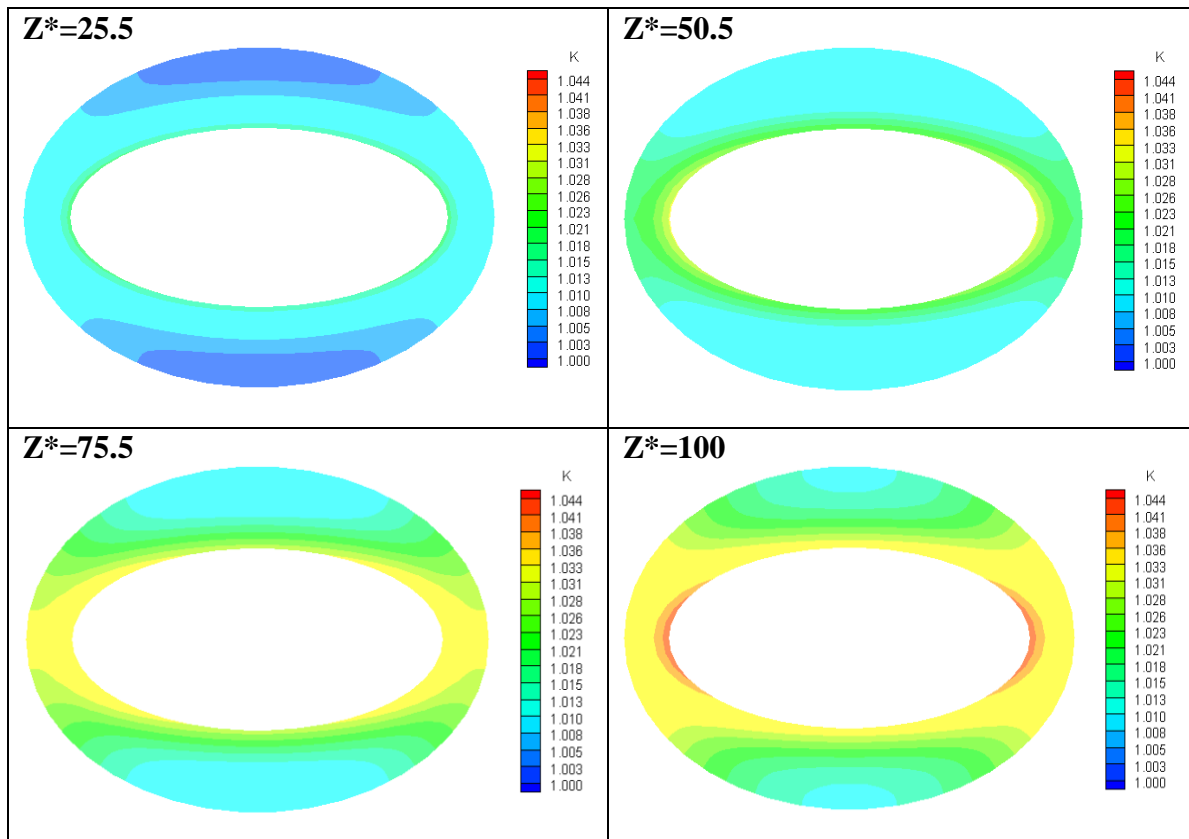


Figure.IV.16. Le champ numérique de la conductivité ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.875$) diffère de celle de Z^*

IV.4.5. L'évolution du nombre de Nusselt axial ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.875$) :

Figure.IV.17 La courbe de variation du nombre de Nusselt axial en fonction de Z^* pour le cas ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.875$), La discussion peut être divisée en trois parties distinctes :

Premier partie : ($Z^*=0$ jusqu'à $Z^* =10.5$) : le nombre de Nusselt axial diminue rapidement depuis l'entrée jusqu'à $Z^*=10.5$, atteignant une valeur de $Nu (Z^*=10.5) =8.167$ On observe un fort transfert de chaleur entre la paroi intérieure du cylindre et le fluide de travail.

Deuxième partie : À partir de $Z^*=10.5$ le nombre de Nusselt axial continue de diminuer, mais à un rythme plus lent par rapport au cas précédent, jusqu'à $Z^*=50.5$. À cette position, sa valeur est $Nu (Z^*) = 6.225$.

La dernière partie : ($Z^*=50.5$ jusqu'à $Z^* =100$) le nombre de Nusselt axial commence à diminuer et reste stable jusqu'à la sortie du conduit. La valeur minimale du nombre de Nusselt axial est atteinte à la sortie du conduit ($Nu (Z^*=100)) = 6.583$.

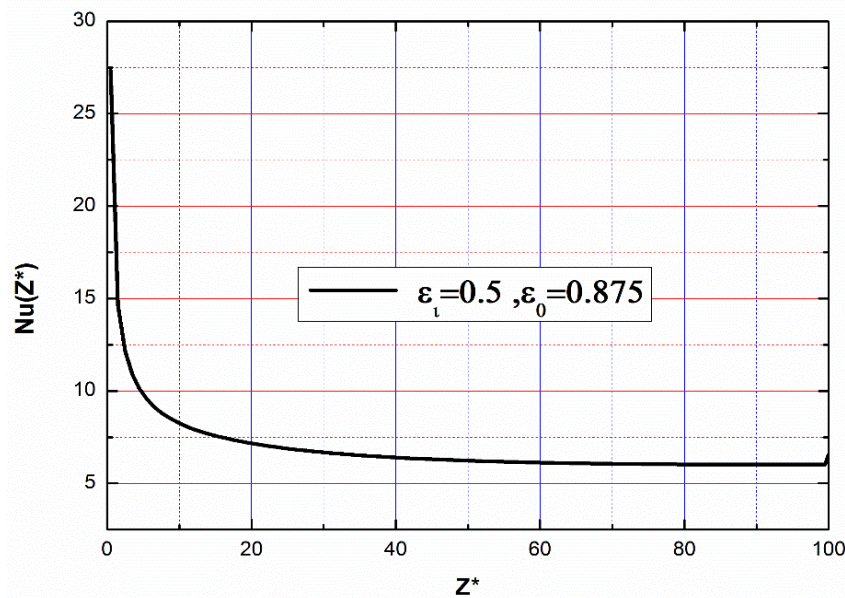


Figure.IV.17. La valeur de nombre de nusselt axial par rapport à $Z(\epsilon_i = 0.5, \epsilon_0 = 0.875)$

IV.4.6. L'évolution de température moyenne :

Figure.IV.18 La courbe de variation de la température moyen en fonction de z^* pour le cas ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_0 = 0.875$) , Dans cette gamme (de $Z^*=0$ à $Z^*=100$), on observe une augmentation de température adimensionnelle de 0 à 0,3.

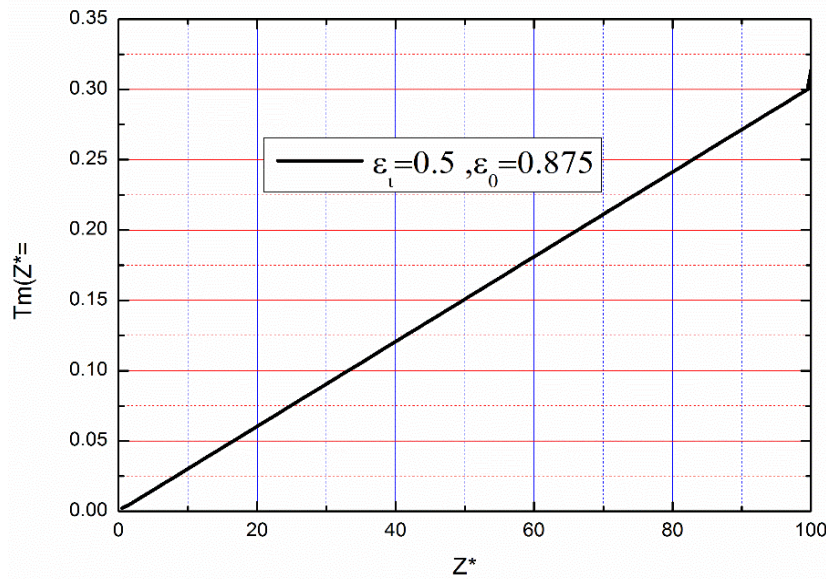


Figure.IV.18. La valeur de température moyen par rapport à Z^* ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_0 = 0.875$)

IV.4.7. L'évolution des nombres du Nusselt axiaux :

Le graphique (Figure.IV.19) présente les variations des nombres de Nusselt axiaux $Nu(Z^*)$ pour trois cas différents : ($\epsilon_i=0.5, \epsilon_0=1$), ($\epsilon_i=0.75, \epsilon_0=1$) et ($\epsilon_i=0.5, \epsilon_0=0.875$). On compare les nombres de Nusselt axiaux de trois cas. Il est observé que de l'entrée du conduit jusqu'à $Z^* = 5$, La réduction significative du nombre de Nusselt axial est uniforme pour tous les cas. Il est évident que le nombre de Nusselt pour ce dernier cas se situe entre les autres. Les différences de transfert de chaleur sont qualitativement similaires, mais quantitativement distinctes. Enfin, les valeurs moyennes des nombres de Nusselt sont respectivement de 5.99, 9.08 et 6.96.

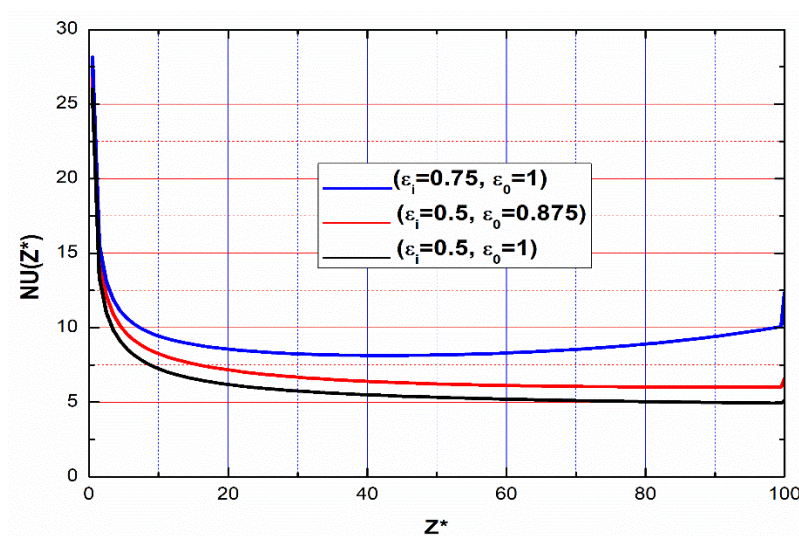


Figure.IV.19. La valeur de nombre de Nusselt axial par rapport à Z^* trois cas

IV.4.8. L'évolution des Températures moyennes axiaux :

Le graphique (**Figure.IV.20**) présente les variations moyenne de température pour trois cas différents : $(\epsilon_i=0.5, \epsilon_0=1)$, $(\epsilon_i=0.75, \epsilon_0=1)$ et $(\epsilon_i=0.5, \epsilon_0=0.875)$ Les températures moyenne de trois cas ont été comparées. On constate que depuis l'entrée du canal jusqu'à $Z^* = 5$, l'élévation de température moyenne est uniformément faible dans tous les cas et avec la longueur du canal l'élévation de température moyenne augmente encore. Il est clair que la température moyenne dans le cas $(\epsilon_i= 0,75, \epsilon_0 = 1)$ est plus élevée que les autres cas, tandis que sa moyenne dans le cas $(\epsilon_i=0.5, \epsilon_0=1)$. Les différences extrêmes de température peuvent être importantes. Enfin, les valeurs de chaleur moyennes sont respectivement de 0.418, 0.313 et 0.205.

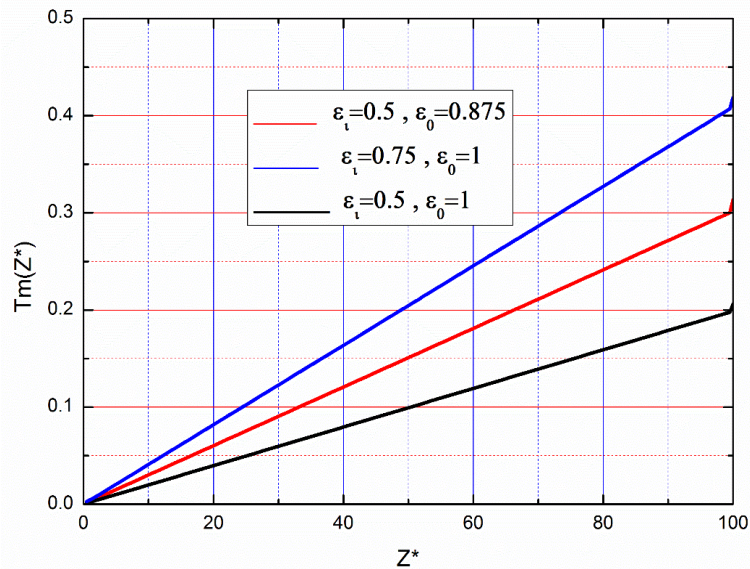


Figure.IV.20. La valeur de Température moyenne par rapport à Z^* pour les trois cas

IV.5. Comparaison des résultats :

Le Tableau.IV.1 présente les résultats obtenus à partir de calculs numériques pour les trois cas. On observe une relation inverse entre la valeur de la surface de l'espace annulaire et les autres paramètres (température maximale, vitesse axiale maximale, nombre de Nusselt moyen, température moyenne). Lorsque la surface de l'espace annulaire diminue, les autres valeurs du tableau augmentent, et vice versa. Ainsi, la valeur de la surface de l'espace annulaire contrôle les autres propriétés.

	<i>Propriétés Variables</i>						
	<i>Surface de l'espace annulaire</i>	<i>Température maximale</i>	<i>Vitesse axial maximale</i>	<i>Viscosité Maximale</i>	<i>Conductivité maximale</i>	<i>Nombre de nusselt moyen</i>	<i>Température moyenne</i>
$(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1)$	3.850656	0.412481	1.89351	1.00078	1.08221	5.99639	0.20
$(\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_0 = 1)$	2.352333	0.676379	1.86160	1.00078	1.1133	9.08614	0.41
	<i>Propriétés Constantes [2]</i>						
$(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_0 = 1)$	3.850656	0.411	1.91	1	1	5.86	0.20
$(\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_0 = 1)$	2.352333	0.63	1.88	1	1	8.59	0.40

Tableau.IV.1. Les résultats obtenus à partir du calcul numérique pour les deux cas propriétés variables et propriétés constantes [2].

Chapitre V

Conclusion générale

V.1.Conclusion générale

Ce travail présente une étude numérique tridimensionnelle du transfert de chaleur par convection forcée dans des espaces annulaires entre deux cylindres elliptiques horizontaux concentriques ayant une concentration commune. La partie interne du premier cylindre est chauffée par un flux thermique continu, tandis que le côté externe du deuxième cylindre est maintenu à une température constante. (Adiabatique).

Dans cette étude, nous avons modifié le demi-rayon elliptique des cylindres interne et externe : $(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 1)$, $(\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_o = 1)$, et enfin $(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.875)$. La longueur focale des ellipses du profil de section transversale du canal est de 0,0045 m. La longueur du canal est 100 fois la longueur focale. Le modèle mathématique de ce problème se compose d'un système d'équations gouvernées par l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie avec leurs conditions initiales et aux limites. Nous avons résolu ces équations en utilisant une approche numérique basée sur la méthode du volume fini. Pour résoudre ces équations, nous avons développé un code de calcul personnel écrit en langage Fortran. En utilisant le code Absoft Pro 2016, ainsi que les logiciels Tecplot 360 EX 2014 R2 et L'ORIGINE.6, nous avons obtenu les résultats de simulation pour les trois cas $(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 1)$, $(\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_o = 1)$, et enfin $(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.875)$. Ces résultats sont présentés en détail avec les discussions et les interprétations. Une analyse des domaines dynamique et thermique des trois cas a été réalisée, et nous avons poursuivi notre travail en comparant les résultats obtenus. Les résultats ont montré qu'il existe une différence significative en termes de transfert thermique et de dynamique entre les trois cas, en particulier en ce qui concerne le nombre de Nusselt, qui a été clairement observé dans le cas enfin $(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.875)$. Nous avons constaté que la variation de l'espace annulaire joue un rôle important dans le transfert de chaleur, car plus l'espace annulaire est réduit, meilleur est le transfert de chaleur en raison de l'augmentation de la vitesse d'écoulement et de la convergence des limites rapides.

En conclusion de ce travail, nous avons comparé les résultats obtenus dans cette étude avec les résultats de l'année précédente, où nous avons trouvé une légère augmentation de la température moyenne, de la vitesse axiale ainsi qu'une légère augmentation du nombre de Nusselt, ce qui indique que l'utilisation de propriétés physiques variables (viscosité et conductivité thermique) dans cette étude est meilleure que les propriétés constantes. Et les propriétés thermo-physiques à un effet sur le champ thermique et dynamique.

Bibliographies

- [1] <https://www.legarrec.com/entreprise/transfert-thermique-definition/#:~:text=Il%20existe%20trois%20modes%20de,la%20chaleur%20qu'il%20contient.>
- [2] **Djalal, Fennour.** La Convection forcée dans une plusieurs espaces annulaires Entre deux cylindres elliptiques. Diss. university center of abdalhafid boussouf-MILA, 2022.
- [3] **TERHMINA Omar , MOJTABI Abdelkader.** Ecoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire. International journal of heat and mass transfer, 1988, 31.3: 583-590.
- [4] **WU Chiang-Chi YANG , Yue-Tsu HUANG Kanha.** Simulation numérique de la convection forcée d'un écoulement turbulent dans un tube elliptique torsadé. Journal international des sciences thermiques, 2018, vol. 132, p. 199-208.
- [5] **KLALECHE Sofiane et MADJOUR Abderrahmane.** Simulation numérique de la convection forcée entre deux disques en présence d'un nano fluide. 2015. Thèse de doctorat. UniversityMoloudMummerTizi-Ouzou.
- [6] **Lin Riyi, Wang Xiaoqian, Xu Weidong, JiaXinfeng, JiaZhiying** Etude expérimentale et numérique sur le transport de chaleur par convection forcée dans les canaux annulaires excentriques. Journal international des sciences thermiques, 2019, vol. 136, p. 60-69.
- [7] **TANDON T.N, VARMA, H. K., et GUPTA C. P.** Heat Transfer Durring force convection condensation Inside 1995, vol. 18, n° 3, p. 210-214.
- [8] **HUNT, M. L. et TIEN, C. L** Effets de la dispersion thermique sur la convection forcée dans les milieux fibreux. Journal international du transfert de chaleur et de masse, 1988, vol. 31, n° 2, p. 301-309.
- [9] **Djamaa Youb et BenabdellahIskander,** convection forcée dans l'espace annulaire entre deux cylindre elliptiques, mémoire master 2021, centre universitaire Mila.
- [10] **R.S. Matos, J.V.C. Vargas, T.A. Laursen b.A.Bejan.** Optimally staggered finned circular and elliptic tubes in forced convection. ntemational Jound of Heal and Mass Transfer 47 (2066) 1347-1399

[11] **MECILI Mourad, LATRECHE Salah, BOUCHAALA Houda.** ETUDE ANALYTIQUE DE LA CONVECTION FORCEE DANS LES MICROTUBES EN UTILISANT LE MODELE D'ECOULEMENT A PISTON. Third International Conference on Energy, Materials, Applied Energetics and Pollution ICEMAEP2016, October 30-31, 2016, Constantine, Algeria

[12] **IDRISSI Ahmed, CHEDDADI Abdelkhalek , et OUAZZANI, Mohammed T.** Transfert de chaleur dans un espace annulaire équipé de blocs isothermes chauffants : bifurcation numérique pour des blocs de faible hauteur. Études de cas en génie thermique, 2016, vol. 7, p. 1-7.

[13] **NOBARI, M. R. H, SHINIYAN. B et MIRZAEI.M.** Convection mixte dans un tuyau annulaire hélicoïdal vertical. Journal international du transfert de chaleur et de masse, 2014, vol. 73, p. 468-482.

[14] **ZERARI. K, AFRID. M, GROULX.D.** Convection forcée et mixte dans l'anneau entre deux cylindres elliptiques confocaux horizontaux. Revue internationale des sciences thermiques, 2013, 74 : 126-144.

[15] **ZHU, Tanxiao, et al.** Étude expérimentale et de simulation de la convection forcée dans espace annulaire excentrique vertical. Revue internationale des sciences thermiques, 2021

[16] **Nazrul Islam, U.N. Gaitonde, G.K.** Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli. International Journal of Heat and Mass Transfer 44 (2001) 2107-2120

[17] **E. Fattahi, M. Farhadi, K. Sedighi,** Lattice Boltzmann simulation of mixed convection heat transfers in eccentric annulus, Int. Commun. Heat Mass Transfer 38 (8) (2011) 1135–1141.

[18] **JHA, Basant K., ONI, Michael O., et AINA, Babatunde.** Flux de convection mixte entièrement développé dans un anneau micro-concentrique vertical avec un fluide générateur/absorbant de chaleur : une solution exacte. Ain Shamas Engineering Journal, 2018, vol. 9, n° 4, p. 1289-1301.

[19] **RANGANATHAN KUMAR** Study of natural convection in horizontal annuli. Int. J. Heat Mass transfer. Vol. 31, No. 6. pp. 1137-1148, 1988 Printed in Great Britain

